# ОТЧЕТ

## Итерационные методы решения систем линейных уравнений

**Автор**
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

# 1 Постановка задачи

Для построения приближенного решения задачи

$$y'(x) + Ay(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

с известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$ рассматриваются следующие схемы:
1) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1.$
2) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0, y_0 = 1.$
3) $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0, y_0 = 1.$
4) $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
5) $\frac{1.5y_k-2y_{k-1}+0.5y_{k-2}}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$
6) $\frac{-0.5y_{k+2}+2y_{k+1}-1.5y_k}{h} + Ay_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 1 - Ah.$

# 2 Аналих схем и проверка на устойчивость

Для проверки на устойчивость будем анализировать $\alpha$-устойчивость и $A$-устойчивость по определению.

**Схема 1.** $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -Ay_k.$

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_k$: $|\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_k)| = O(h).$
2. $A$-устойчивость: $y_{k+1} = y_k(1 - Ah), \lambda = 1 - Ah.$
3. $\alpha$-устойчивость: $y_{k+1} - y_k = 0, \lambda = 1.$

**Вывод:** $\alpha$-устойчивость есть, $A$-устойчивость есть не всегда, $m = 1$.

**Схема 2.** $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -Ay_{k+1}.$

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_{k+1}$: $|\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_{k+1})| = O(h).$
2. $A$-устойчивость: $y_{k+1} = \frac{y_k}{1+Ah}, \lambda = \frac{1}{1+Ah} < 1.$
3. $\alpha$-устойчивость: $y_{k+1} - y_k = 0, \lambda = 1.$

**Вывод:** $\alpha$-устойчивость есть, $A$-устойчивость есть, $m = 1$.

**Схема 3.** $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = -A\frac{y_{k+1}+y_k}{2}.$

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_k \pm \frac{h}{2}$: $|\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_{k+1} + \frac{h}{2})| = O(h^2).$
2. $A$-устойчивость: $y_{k+1} = \frac{y_k(2-Ah)}{2+Ah}, \lambda = \frac{2-Ah}{2+Ah} < 1..$
3. $\alpha$-устойчивость: $y_{k+1} - y_k = 0, \lambda = 1.$

**Вывод:** $\alpha$-устойчивость есть, $A$-устойчивость есть, $m = 2$.

**Схема 4.** $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} = -Ay_k.$

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_k \pm h$: $|\frac{y_{k+1}-y_k}{h} - y'(x_{k+1} + \frac{h}{2})| = O(h^2).$
2. $A$-устойчивость: $y_{k+2} = y_k - 2Ahy_{k+1}, \lambda^2 + 2Ah\lambda - 1 = 0, \lambda_{+,-} = Ah \pm \sqrt{A^2h^2 + 1}, |\lambda_+| > 1.$

3. $\alpha$-устойчивость: $y_{k+1} - y_k = 0, \lambda = \pm 1$.

**Вывод:** $\alpha$-устойчивости нет, $A$-устойчивость есть не всегда, $m = 2$.

**Схема 5.** $\frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} = -Ay_k$.

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_k \pm h$: $|\frac{1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2}}{h} - y'(x_k)| = O(h^2)$.

2. $A$-устойчивость: $y_{k+2} = \frac{2y_{k+1} - 0.5y_k}{Ah + 1.5}, \lambda_{\pm} = \frac{1}{1.5 + Ah} \pm \sqrt{\frac{1}{(1.5 + Ah)^2} - \frac{1}{3 + 2Ah}}$.

3. $\alpha$-устойчивость: $1.5y_k - 2y_{k-1} + 0.5y_{k-2} = 0, \lambda_{\pm} = \frac{2 \pm 1}{3} = \{1, \frac{1}{3}\}$.

**Вывод:** $\alpha$-устойчивость есть, $A$-устойчивость есть не всегда, $m = 2$.

**Схема 6.** $\frac{-0.5y_{k+2} + 2y_{k+1} - 1.5y_k}{h} = -Ay_k$.

1. Аппроксимация(на решении) после разложения Тейлора в $x_k \pm h$: $|\frac{-0.5y_k + 2y_{k-1} - 1.5y_{k-2}}{h} - y'(x_k)| = O(h)$.

2. $A$-устойчивость: $y_{k+2} = (2Ah - 3)y_k + 4y_{k+1}, \lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{1 - 2Ah}$.

3. $\alpha$-устойчивость: $-0.5y_k + 2y_{k-1} - 1.5y_{k-2} = 0, \lambda_{\pm} = \frac{-2 \pm 1}{-1} = \{3, 1\}$ .

**Вывод:** $\alpha$-устойчивости нет, $A$-устойчивости нет, $m = 1$.

## 3 Программная реализация

Программа реализует все указанные схемы. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, в котором задаем значения количества точек, параметра А и какими методами решаем. Также в данном файле содержатся определения и тело функций, реализующие итерационные методы;

## 4 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

```
№ E1 E2 E2 E3 E6 m A
0 1 1 1 1 m 1
0 1 1 1 1 m 10
0 1 1 1 1 m 1000
1 0.0191492 0.00184705 0.000184016 1.8395e-07 m 1
1 0.367879 0.019201 0.0018471 1.8394e-06 m 10
1 9.13517e+17 2.95127e+94 0.367879 0.000184016 m 1000
2 0.017528 0.00183163 0.000183863 1.8397e-07 m 1
2 0.132121 0.0176638 0.00183177 1.83939e-06 m 10
2 0.00990099 0.0908637 0.132121 0.000183863 m 1000
3 0.000305271 3.06554e-06 3.06566e-08 1.05962e-11 m 1
3 0.0345461 0.000306899 3.0657e-06 5.47323e-12 m 10
3 0.960784 0.666712 0.0345461 3.06566e-08 m 1000
4 0.00649696 7.04328e-05 7.09639e-07 6.86395e-13 m 1
4 408 48.6496 0.545051 5.50609e-07 m 10
4 2.53497e+20 3.65181e+128 inf inf m 1000
5 0.00644322 7.31046e-05 7.4724e-07 2.98921e-11 m 1
5 0.367879 0.00644322 7.31046e-05 7.49959e-11 m 10
5 99 9.00005 0.367879 7.4724e-07 m 1000
```

Рис. 1: Результаты работы схемы на отрезке [0,1].

```
№ E1 E2 E2 E3 E6 m A
0 1 1 1 1 m 1
0 1 1 1 1 m 10
0 1 1 1 1 m 1000
1 0.526511 0.536013 0.536864 0.536958 m 1
1 0.904837 0.707011 0.697831 0.696838 m 10
1 9.13517e+17 2.95127e+94 0.904837 0.696936 m 1000
2 0.489834 0.532334 0.536497 0.536958 m 1
2 0.615818 0.687146 0.695849 0.696836 m 10
2 0.00985559 0.27697 0.615818 0.696738 m 1000
3 0.507667 0.534169 0.53668 0.536958 m 1
3 0.70762 0.696939 0.696839 0.696837 m 10
3 0.96083 1.03455 0.70762 0.696837 m 1000
4 0.513858 0.534236 0.536681 0.536958 m 1
4 408.407 49.0211 0.913252 0.696837 m 10
4 2.53497e+20 3.65181e+128 inf inf m 1000
5 0.511957 0.534206 0.536681 0.536958 m 1
5 1.01873 0.698115 0.69685 0.696837 m 10
5 99 9.36788 1.01873 0.696837 m 1000
```

Рис. 2: Результаты работы схемы на отрезке [0, 0.1].