
ОТЧЕТ

Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Автор

Черепяхин Иван
409 группа, мехмат

1 Задача 1

1.1 Постановка задачи

Решить методом Фурье следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k &= f_k, \quad k = 1, \dots, N-1; \\ y_0 &= y_N = 0; \\ h &= \frac{1}{N}; \\ p &\geq 0. \end{aligned}$$

1.2 Решение

Метод Фурье подразумевает поиск собственных функций относительно краевых и последующий поиск собственных чисел относительно оператора системы. Также в этой и последующих задачах, решением системы уравнений будет вектор $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Из задачи о дискретном разложении Фурье имеем что собственная функция задачи:

$$\psi_k^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi nk}{N}\right).$$

Далее вычислим собственные значения:

$$\begin{aligned} A\psi_k^{(n)} &= -\frac{\psi_{k+1}^{(n)} - 2\psi_k^{(n)} + \psi_{k-1}^{(n)}}{h^2} + p\psi_k^{(n)} \\ &= -\frac{\sin(\frac{\pi n(k+1)}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi n(k-1)}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) \\ &= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) + \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - \cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) \\ &= -\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N}) - 2\sin(\frac{\pi nk}{N}) + \sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) \\ &= -\frac{2\sin(\frac{\pi nk}{N})(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p\sin(\frac{\pi nk}{N}) = \sin(\frac{\pi nk}{N})\left(-\frac{2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)}{h^2} + p\right). \end{aligned}$$

Итог, $\lambda_n = p - 2N^2(\cos(\frac{\pi n}{N}) - 1)$. Далее выполним программу.

```
theory answer =
0.000000000000000  1.000000000000000  0.000000000000000  1.000000000000000  0.000000000000000  1.000000000000000  0.000000000000000
x =
0.000000000000000  0.999999999999999  -0.000000000000000  1.000000000000000  -0.000000000000001  1.000000000000001  0.000000000000002
residual = 0.000000000000067
```

Рис. 1: Запуск для $N = 6$, $p = 1$.

2 Задача 2

2.1 Постановка задачи

Решить систему из задачи 1 с помощью метода Рундсона.

2.2 Решение

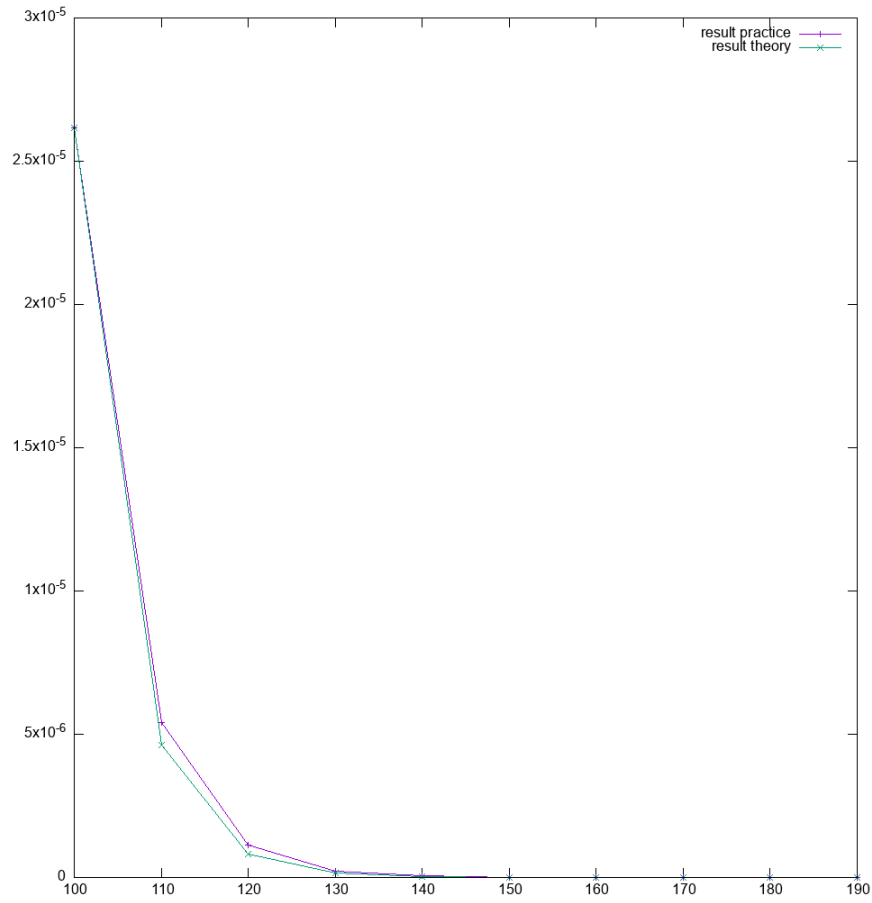


Рис. 2: График нормы ошибки. Запуск для $N = 6$, $p = 1$. Количество итераций от 100 до 200

```

residual = 0.000000000000899
result =
0.000000000000000 72.99999999999730 -71.99999999999588 72.99999999999432 -71.99999999999588 72.99999999999730 0.000000000000000
answer =
0.000000000000000 73.000000000000000 -72.000000000000000 73.000000000000000 -72.000000000000000 73.000000000000000 0.000000000000000
q = 0.854162042088761

```

Рис. 3: Значение величины нормы ошибки. Запуск для $N = 6$, $p = 1$. Количество итераций 350.

3 Задача 3

3.1 Постановка задачи

Для решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k &= f_k, \quad k = 1, \dots, N-1; \\ y_0 &= y_N = 0; \\ h &= \frac{\pi}{N}; \\ p_k &= 1 + \sin^2 \pi k h. \end{aligned}$$

реализовать метод с предобуславливателем.

3.2 Решение

Заметим отличие в условии от первой задачи, а именно работы на отрезке $[0, \pi]$. Тем самым базисные функции для краевой задачи, после чего найдем собственные числа оператора. Несложно посчитать, что собственные функции

$$\psi_k^{(n)} = \sin\left(\frac{nk}{N}\right).$$

Воспользуемся поиском решения в виде

$$By^{k+1} = b - Ax^k, \quad x^{k+1} = x^k + \tau y^{k+1},$$

где B мы будем брать очень "близкой" к A .

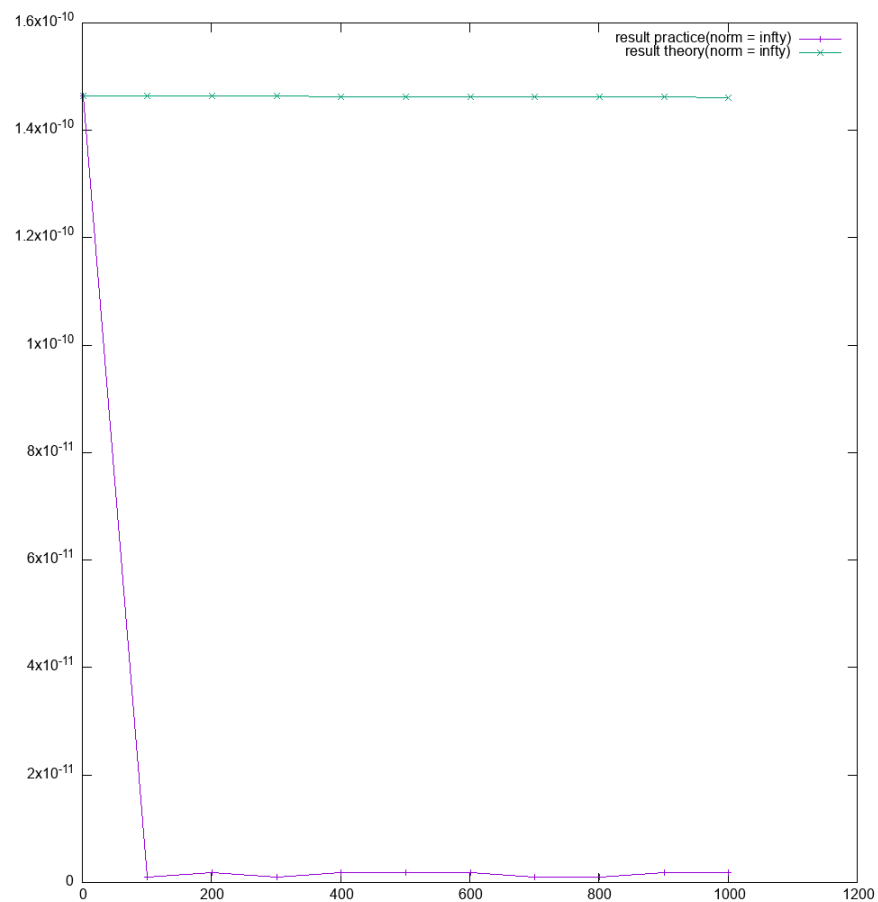


Рис. 4: График теоретической и действительной сходимости. Взяли $B = A$ из первого задания. Запуск для $N = 50$.

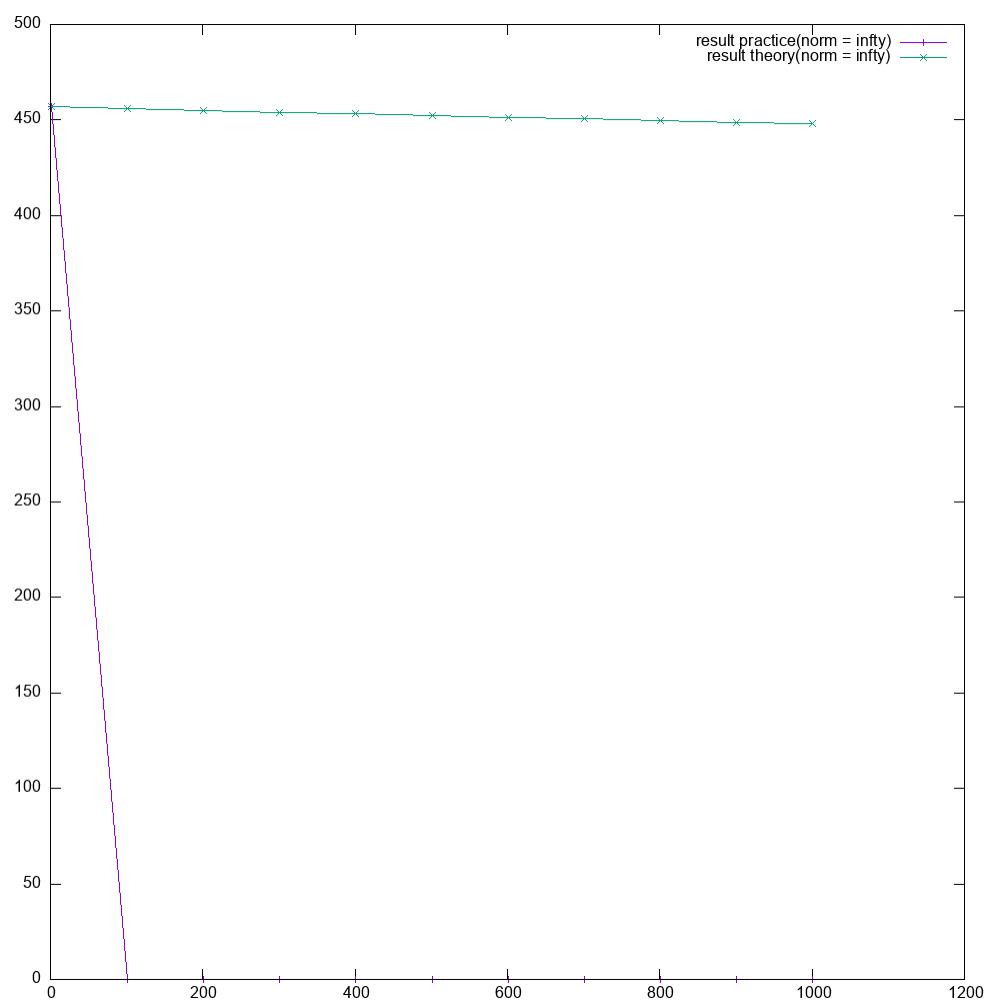


Рис. 5: График теоретической и действительной сходимости. Взяли B из первого задания и A из условия третьего задания. Запуск для $N = 50$.

4 Программная реализация

Программа реализует построение дискретного ряда Фурье и подсчет порядка сходимости для него. Общая структура проекта:

1. `task_1.cpp` - файл, который выполняет первую задачу;
2. `task_2.cpp` - файл, который выполняет вторую задачу;
3. `task_3.cpp` - файл, который выполняет третью задачу;
4. `_lib.cpp` - файл, который реализует различные векторные операции (принт, умножение, норма и т.д.) и реализует сборку методов для решения задач;