Полиномиальная интерполяция.

Пусть задана дискретная функция $y_i = f(x_i), \ i = 0, 1, 2, \ldots n - 1$. Требуется построить алгебраичекий полиноном $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Такой полином называется интерполяционным. Его коэффициенты могут быть найдены из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_{n-1} \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^{n} = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Система имеет единственное решение, т.к. ее определителем является определитель Ван дер Монда (отличен от нуля в случае $x_i \neq x_j, \ i \neq j$). Однако, построение полинома $P_{n-1}(x)$ через явное вычисление его коэффициентов приводит к катастрофической потере точности уже при $n \sim 20 \div 50$. Поэтому обычно для расчетов используют запись интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

$$P_{n-1}(x) \equiv L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Phi_i(x), \quad \text{где } \Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

1. Реализовать построение интерполяционного полинонома в канонической форме $P_{n-1}(x)$ и в форме Лагранжа $L_n(x)$.

2. Численно продемонстрировать:

1) правильность работы программы;

2) плохую вычислительную устойчивость при больших n методов построения как $P_{n-1}(x)$, так и $L_n(x)$;

3) отсутствие сходимости для бесконечно дифференцируемой функции Рунге по равноотстоящим узлам и экспоненциальную сходимость по узлам Чебышева;

4) отсутствие сходимости интерполяционного полинома для недифференцируемой функции $|x|$.