
ОТЧЕТ

Полиномиальная интерполяция

Автор

Черепяхин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Задана дискретная функция $y = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Требуется построить алгебраический полином $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям:

$$P_{n-1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

2 Математическое решение

Один из способов нахождения такого полинома (общее название - интерполяционный полином), представить его в виде многочлена с неопределенными коэффициентами, т.е. $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, подставляя известные x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, и образовывать линейную систему уравнений на a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Вопрос о разрешимости такой матрицы не возникает, так как определитель матрицы является определителем Ван дер Монда.

Следующий способ решения заключается в записи интерполяционного полинома в форме Лагранжа:

$$P_{n-1}(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Phi_i(x),$$

где $\Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

3 Программная реализация

Программа реализует оба математических решения. Для построения полинома, воспользуемся тремя типами узлов: равномерные (uniformDots), Чебышева (chebyshevDots), случайные (randomDots). В качестве решения системы линейных уравнений был выбран алгоритм Жордана с поиском главного элемента по столбцу. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, в котором задаем отрезок, функцию и количество узлов. Также в данном файле содержатся функции, реализующие построение канонического и в форме Лагранжа;
2. gauss.cpp - файл, содержащий алгоритм Жордана;
3. make_points.cpp - файл, который генерирует узлы;

4 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

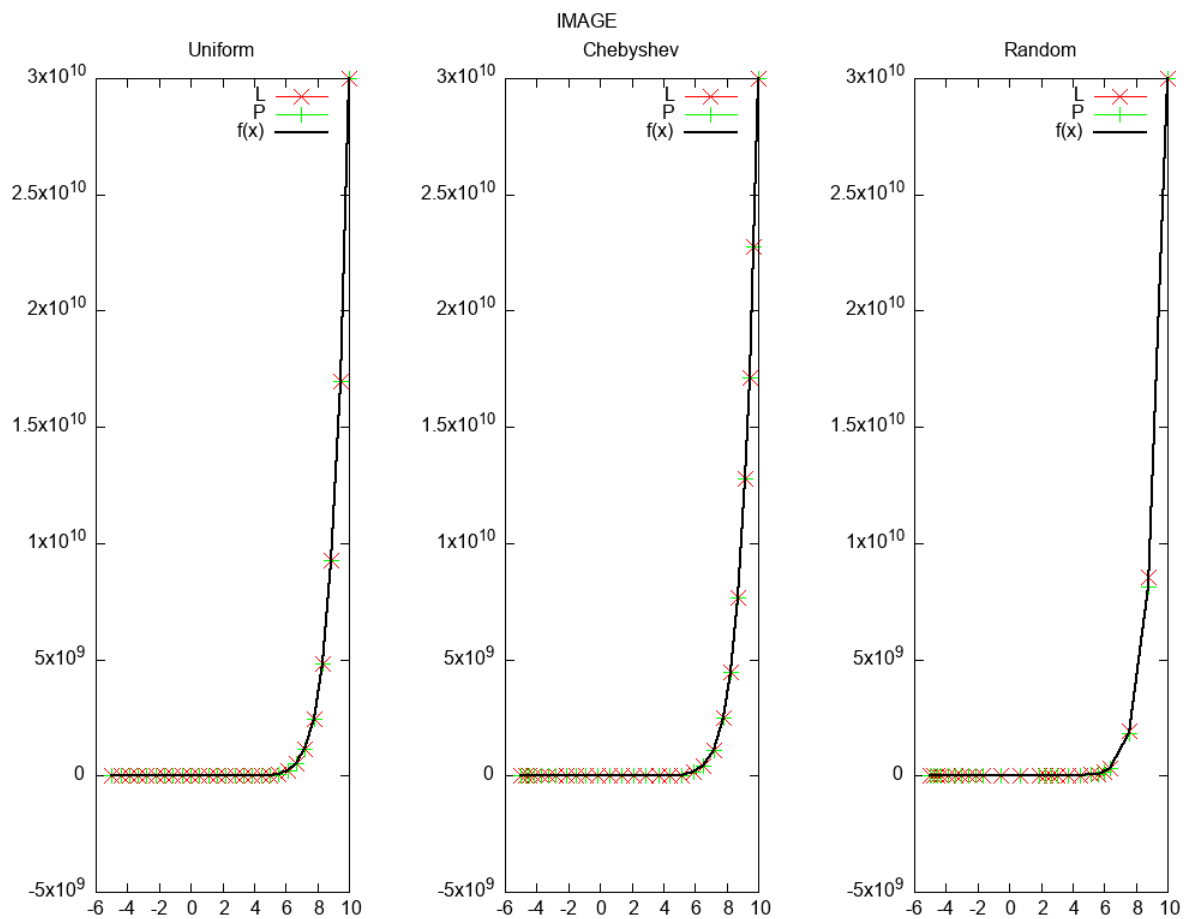


Рис. 1: Функция $f(x) = 3x^{10} + 2x^2 + x + 1$ на 10 узлах.

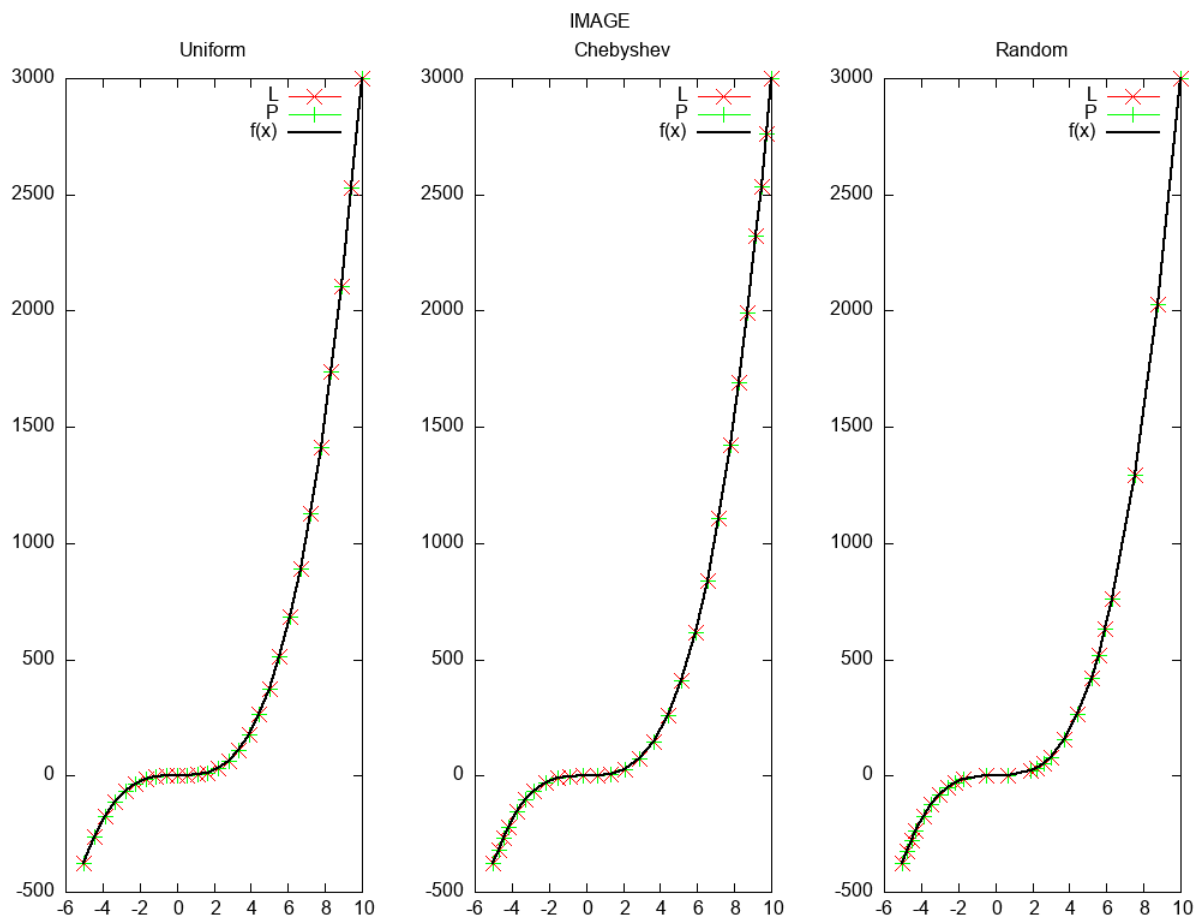


Рис. 2: Функция $f(x) = x^3$ на 10 узлах.

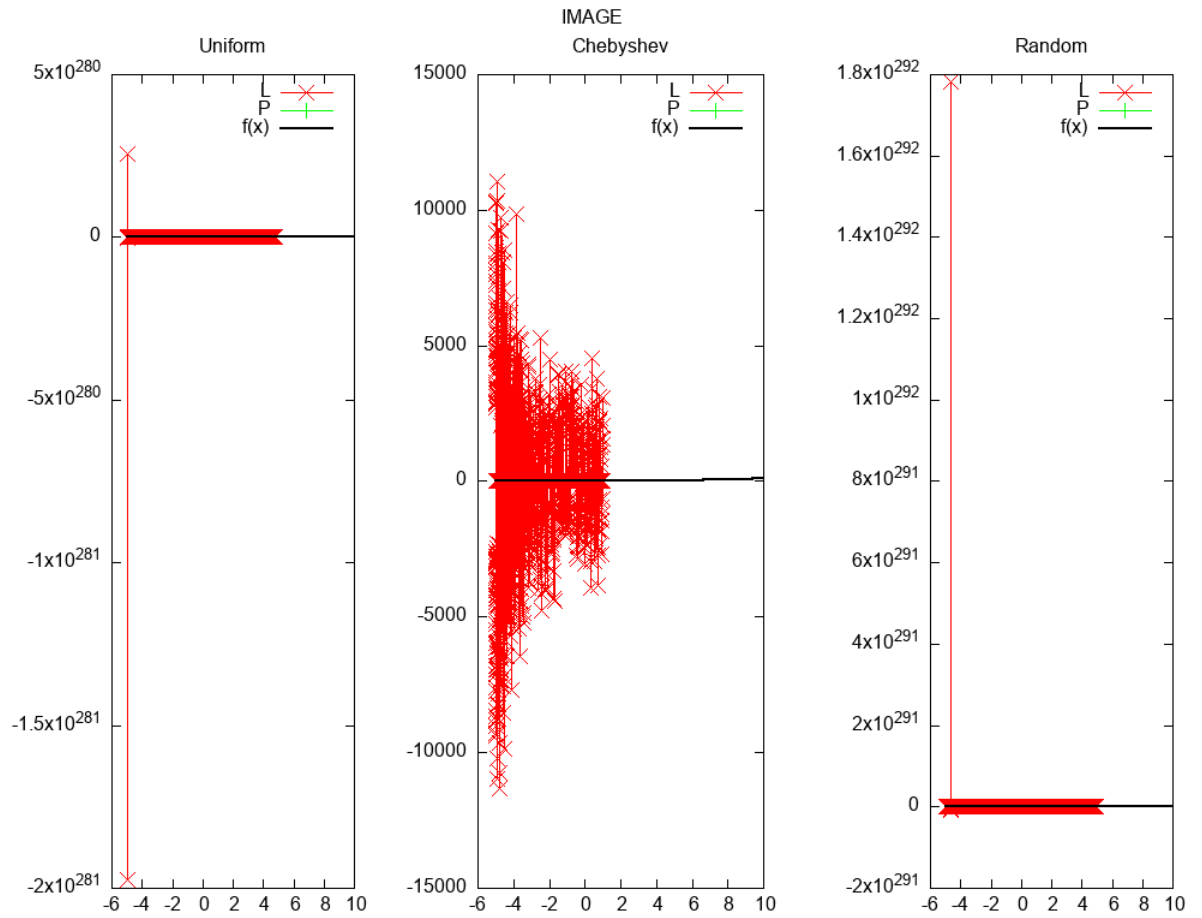


Рис. 3: Функция $f(x) = x^2$ на 1000 узлах. Заметим, что при большом количестве узлов имеем неустойчивость. В данном тесте канонический полином даже не вычислился.

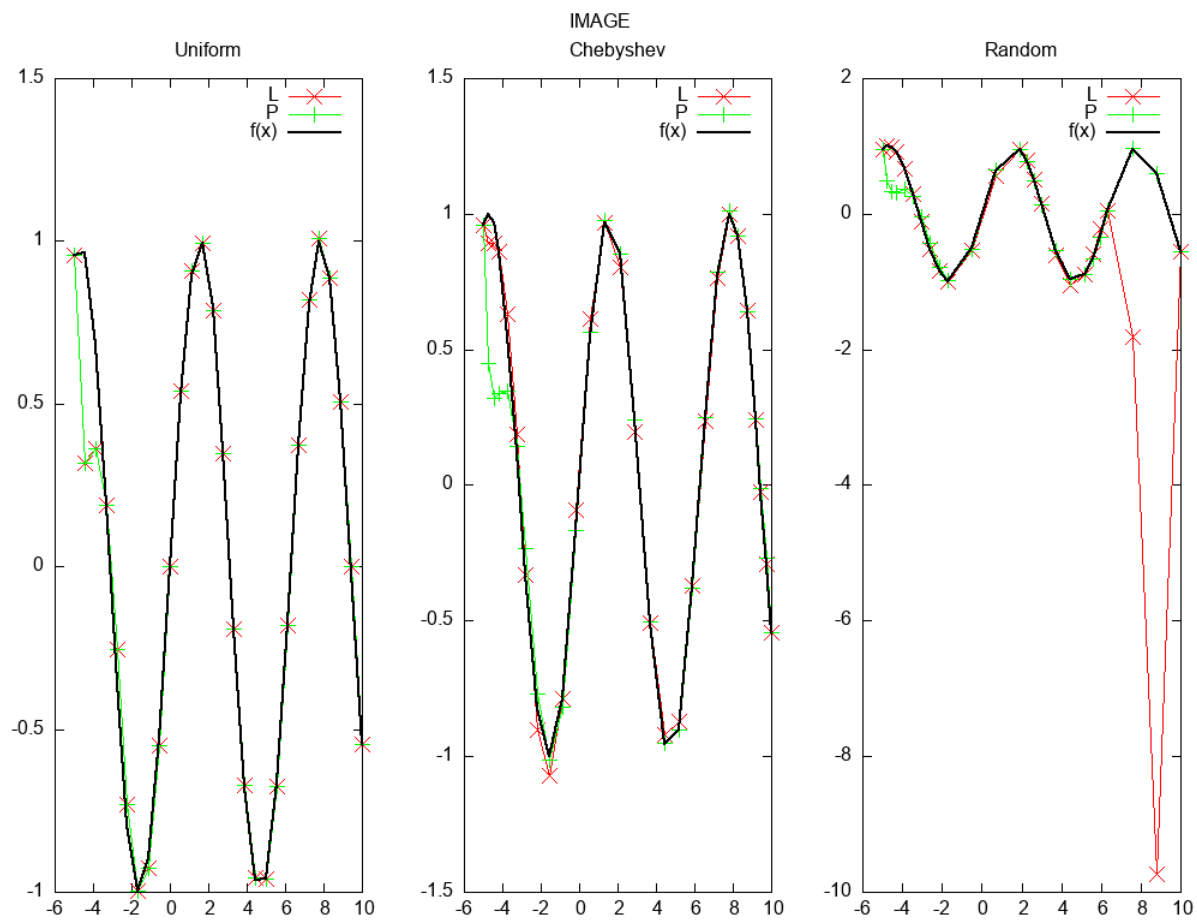


Рис. 4: Функция $f(x) = \sin(x)$ на 10 узлах.

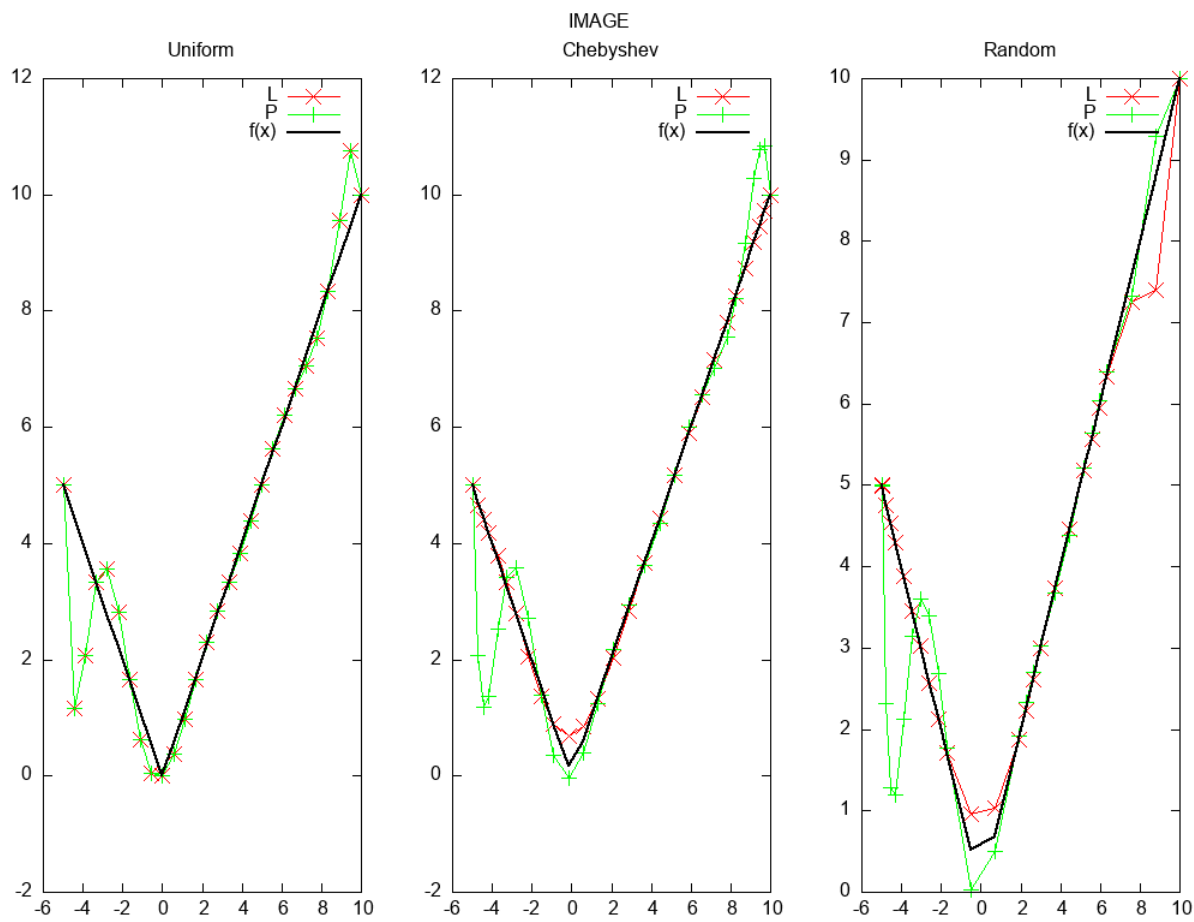


Рис. 5: Функция $f(x) = |x|$ на 10 узлах.

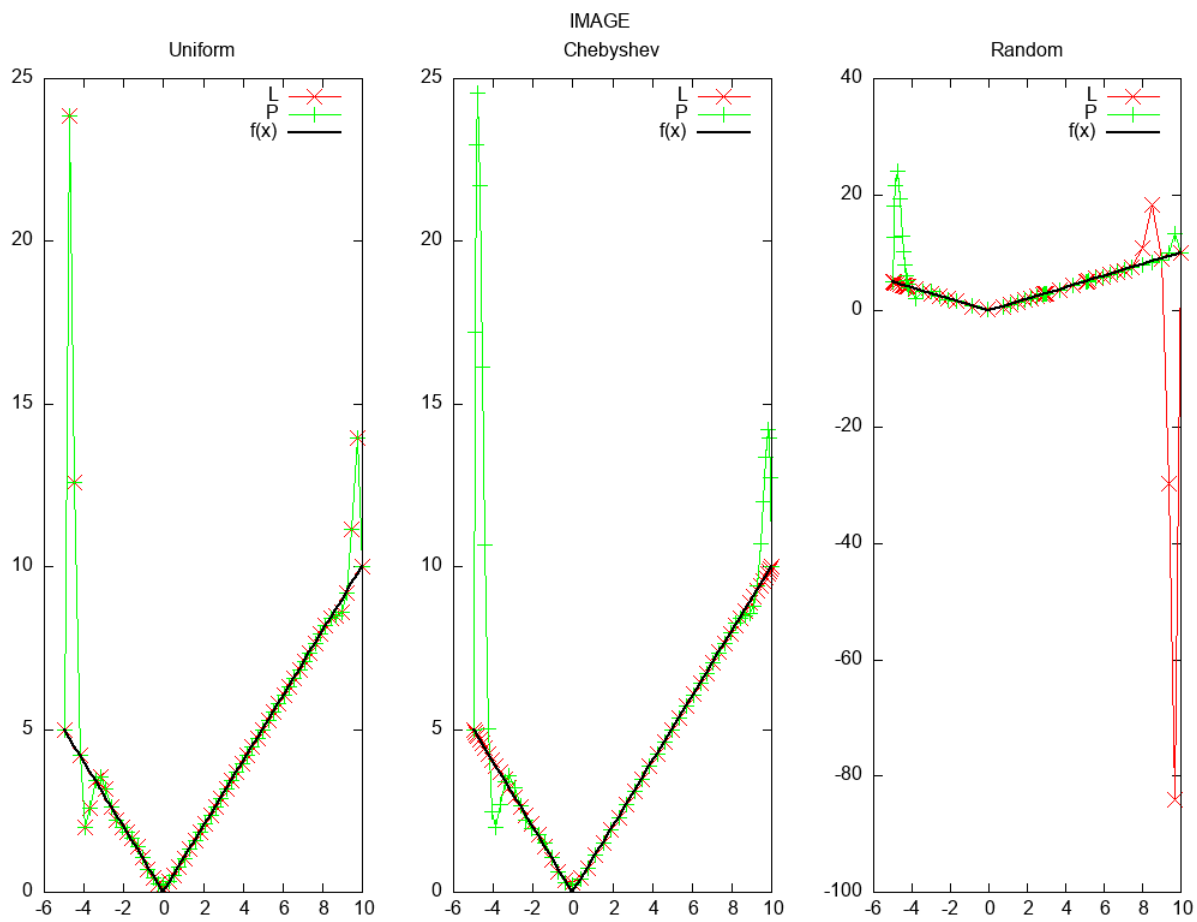


Рис. 6: Функция $f(x) = |x|$ на 20 узлах.

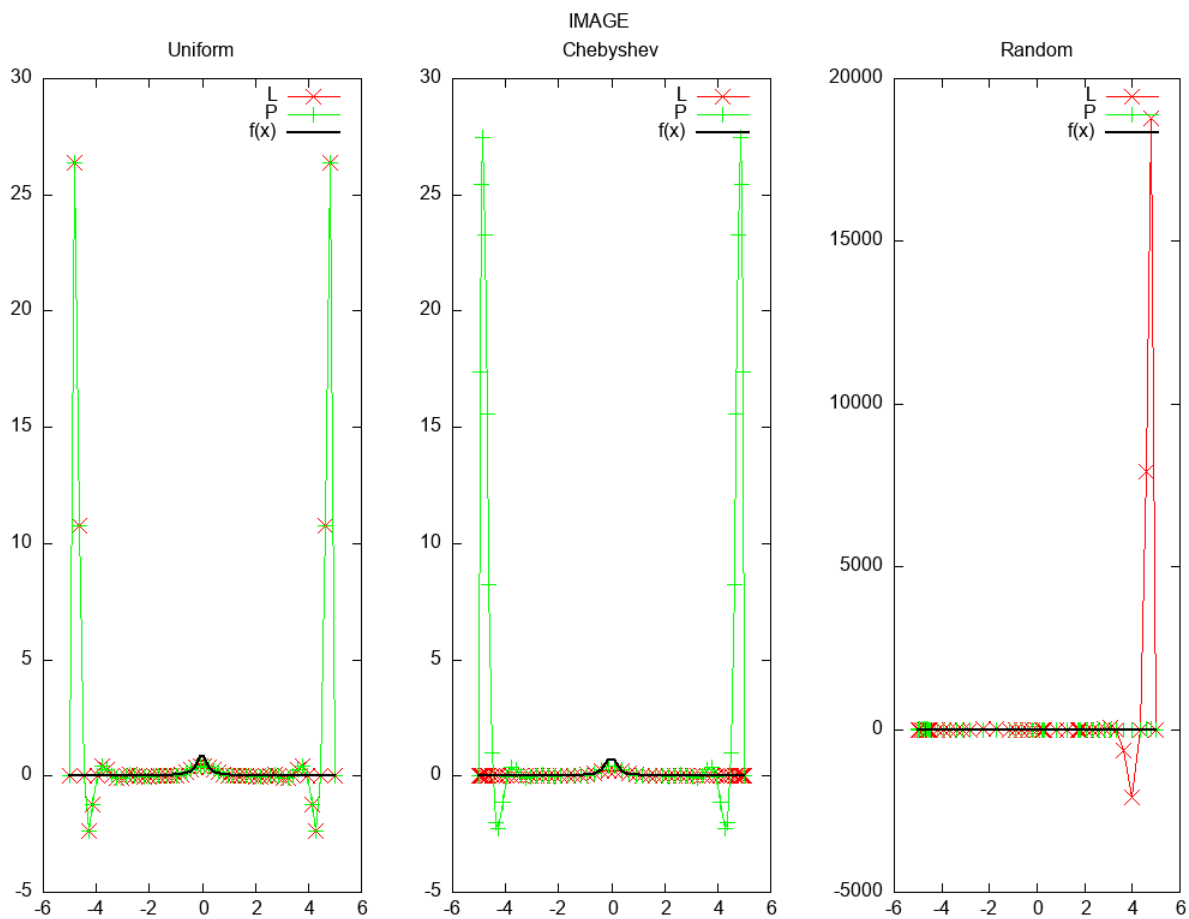


Рис. 7: Функция $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на 100 узлах.

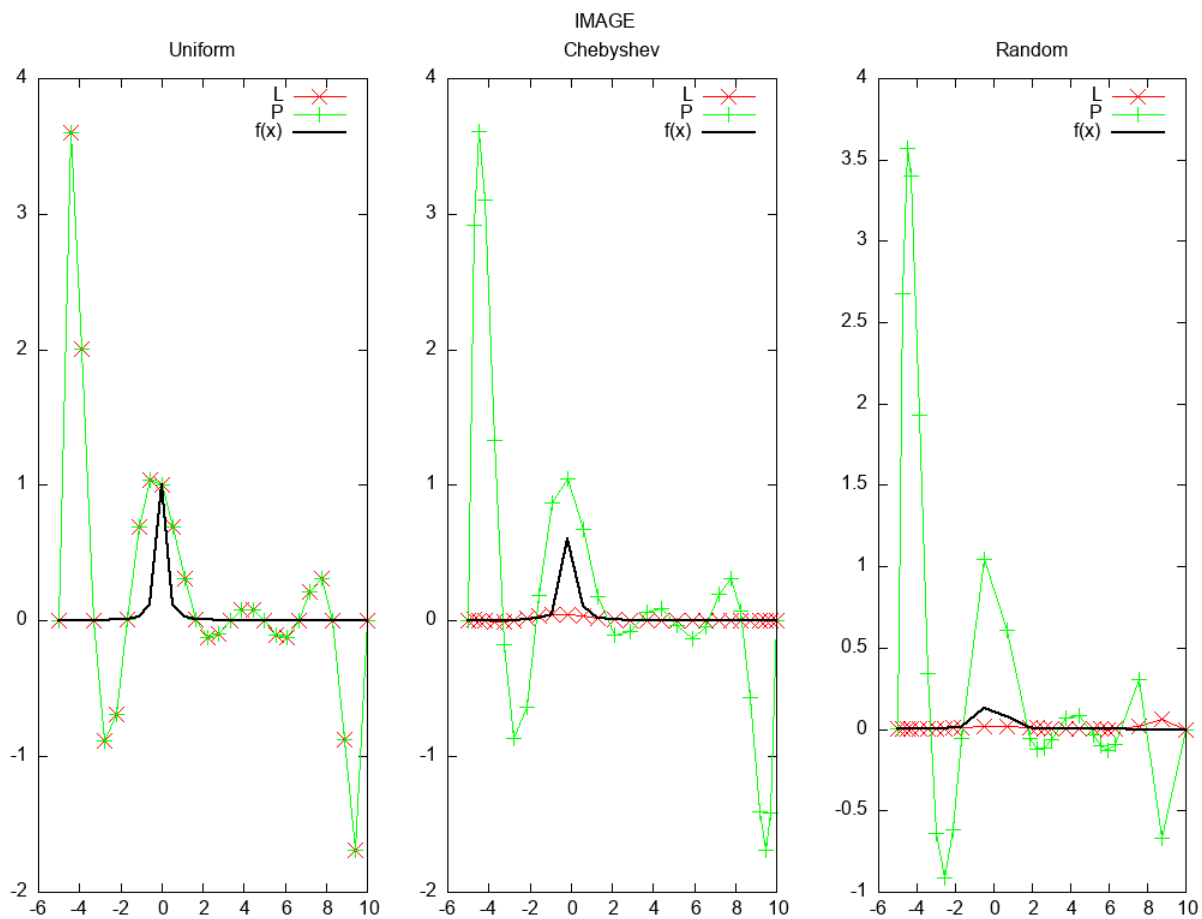


Рис. 8: Функция $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на 10 узлах.