ОТЧЕТ

Одномерное численное интегрирование

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Задана функция $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ и является "хорошей". Хотим приближенно вычислить интеграл от этой функции на том же отрезке, а конкретно требуется выполнить следующие задания:

1. Реализовать метод Симпсона и метод Гаусса и проверить выполнение оценки погрешности для функции $f(x) = x^n, n = 0, 1, 2, 3, 5, 9$ на отрезке $[1, 1.1]$;

2. Реализовать метод составных квадратур Симпсона и Гаусса, принимая на вход число разбиений отрезка;

3. Выписать явную асимптотику для погрешности составных квадратур Симпсона и Гаусса в форме $R_{N,n}^{[a,b]}(f) \sim C/N^p$ и сравнить теоретические оценки с численными расчетами следующих функций:

$$\int_0^{\pi} \cos(100x)dx = 0, \int_0^1 e^{-1000x}dx \sim 10^{-3}, \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi;$$

2 Решение

2.1 Метод Симпсона и Гаусса

Был написан несложный алгоритм, реализующий формулы Симпсона и Гаусса. На выходе получаем следующие результаты

	Sympson	Gauss	Wolfram
f0:	0.100000000000000	0.100000000000000	0.1
f1:	0.105000000000000	0.105000000000000	0.105
f2:	0.110333333333333	0.110333333333333	0.110333333333333
f3:	0.116025000000000	0.116025000000000	0.116025
f5:	0.128593937500000	0.128593500000000	0.1285935
f9:	0.159387675915235	0.159374242535681	0.159374246

Рис. 1: Функции $f(x) = x^n, n = 0, 1, 2, 3, 5, 9$ на отрезке $[1, 1.1]$.

2.2 Составной метод Симпсона и Гаусса

Был написан несложный алгоритм, реализующий составные формулы Симпсона и Гаусса. На рисунке 2 мы сразу сравниваем с порядком сходимости. Но в начале получим теоретические оценки для этих методов.

Proposition 1. Для формул Симпсона и Гаусса имеем:

$$R_n^S(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \leq \frac{||f^{(4)}||}{2880}(b-a)^5.$$

$$R_n^G(f) = |I^{[a,b]}(f) - S_n^{[a,b]}(f)| \leq \frac{||f^{(6)}||}{2016000}(b-a)^7.$$

Обозначим $a_k := a + \frac{(b-a)k}{N}$. Тогда:

$$R^S_{N,n}(f) = |I^{[a,b]}(f) - S^{[a,b]}_{N,n}(f)| \leq \sum_{k=1}^{N} |I^{[a_k,a_{k+1}]}(f) - S^{[a_k,a_k+1]}_{n}(f)|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{||f^{(4)}||}{2880}(a_{k+1}-a_k)^5 \leq \frac{||f^{(4)}||}{2880} \sum_{k=1}^{N} (\frac{(b-a)}{N})^5 = \frac{(b-a)^5||f^{(4)}||}{2880} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N^5}$$
$$= \frac{(b-a)^5||f^{(4)}||}{2880N^4}.$$

Аналогично, для квадратуры Гаусса имеем:

$$R^G_{N,n}(f) = |I^{[a,b]}(f) - S^{[a,b]}_{N,n}(f)| \leq \sum_{k=1}^{N} |I^{[a_k,a_{k+1}]}(f) - S^{[a_k,a_k+1]}_{n}(f)|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{||f^{(6)}||}{2016000}(a_{k+1}-a_k)^7 \leq \frac{||f^{(6)}||}{2016000} \sum_{k=1}^{N} (\frac{(b-a)}{N})^7 = \frac{(b-a)^7||f^{(6)}||}{2016000} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N^7}$$
$$= \frac{(b-a)^7||f^{(6)}||}{2016000N^6}.$$

3 Программная реализация

Программа реализует построение дискретного ряда Фурье и подсчет порядка сходимости для него. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, который содержит тестовую функцию и функцию счета файла с конфигурациями модели config.txt;

2. integr_methods.cpp - файл, который реализует методы Симпсона и Гаусса(и их составные формы);

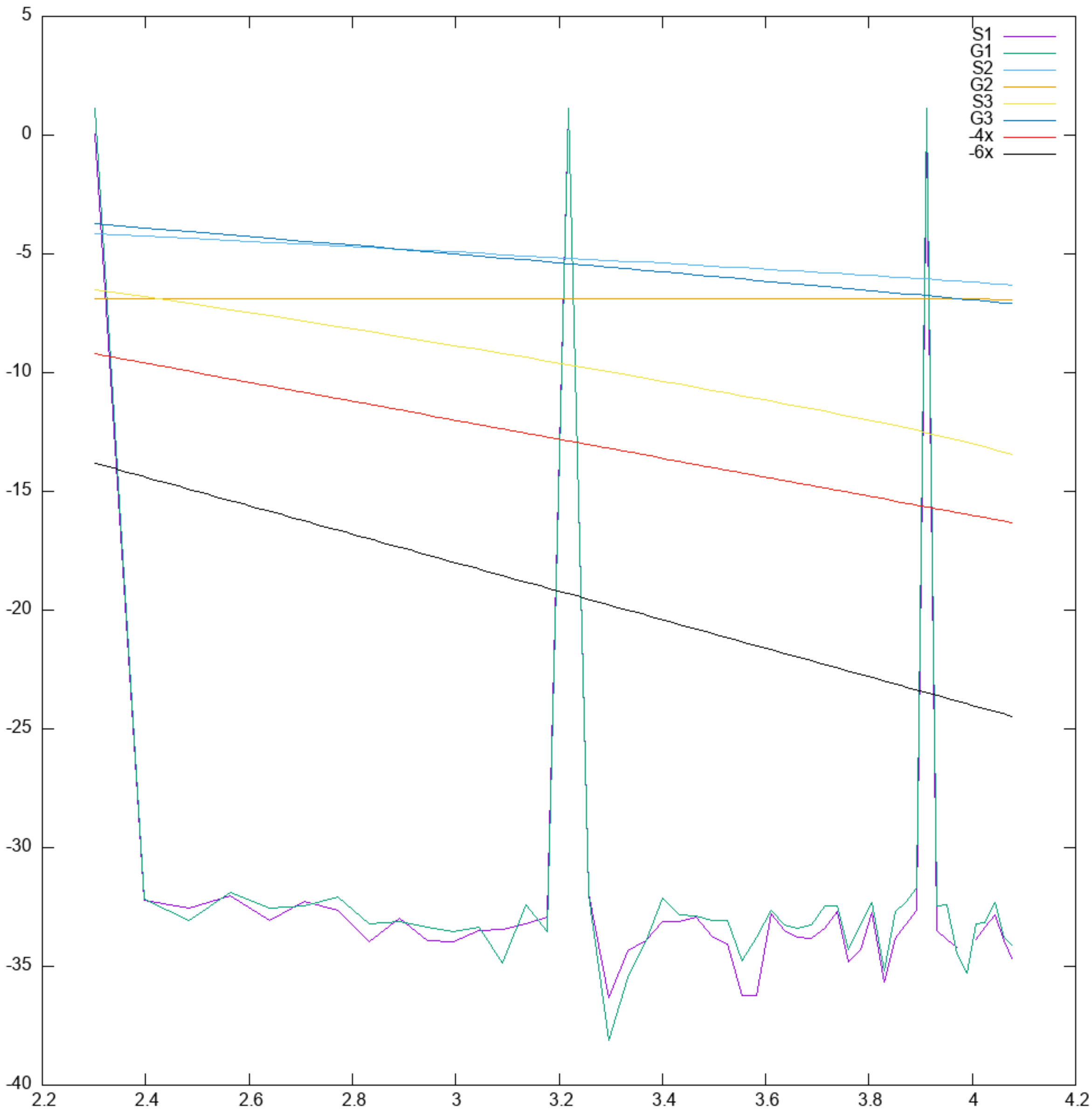

Рис. 2: Сходимость составных Гаусса и Симпсона.