ОТЧЕТ

Двухмерное приближение Фурье

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Задана функция $u(x,y) \in C^\infty[0,1]\times[0,1]$ с условими на границе:

$$u'_x(1,y) = u'_y(1,y) = u'_x(x,1) = u'_y(x,1) = u(0,y) = u(x,0) = 0.$$

Требуется выполнить следующие задания:

1. Выписать двухмерный тригонометрический ряд Фурье для заданной функции u и сформулировать теорему сходимости;
2. На двухмерной сетке вида

$$x_0 = y_0 = \frac{-h}{2},\ y_N = x_N = 1,\ h = \frac{1}{N-0.5}$$

выписать дискретный тригонометрический ряд Фурье и найти скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. И нормировать базисные функции;

3. Для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок скодимости её дискретного ряда Фурье;

2 Математическое решение

Распишем решение каждого пункта.

2.1 Тригонометрический ряд Фурье

Воспользуемся аналогичной задачей для разностной схемы.Тогда получим, что функцию $u(x,y) \in C^\infty[0,1]\times[0,1]$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям:

$$u(x,y) = \sum_{m=1,n=1}^{\infty} c_{mn} \cos(\pi(m-\frac{1}{2})x)\cos(\pi(n-\frac{1}{2})y)\ .$$

Введем обозначение

$$u(x_i,y_j) = u_{i,j} = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}\phi^m_{x_i}\phi^n_{y_j}\ ,$$

где $\phi^m_{x_i} = \cos(\pi(m-1)x_i)$ и $x_i = x_0 + ih$, $\phi^n_{y_j} = \cos(\pi(n-1)y_j)$ и $y_j = y_0 + jh$ Далее вычислим скалярное произведение, относительно которого наши базисные функции являются ортогональными. Для этого рассмотрим вектор $\psi^{mn} := (\phi^m_{x_0}\phi^n_{y_0}, \ldots, \phi^m_{x_N}\phi^n_{y_N})$. Тогда нам подходит скалярное произведение следующего вида:

$$(\psi^{mn}, \psi^{m'n'}) = \sum_{i,j=0}^{N} \phi^m_{x_i}\phi^n_{y_j}\phi^{m'}_{x_i}\phi^{n'}_{y_j}h\ .$$

Воспользуемся прошлой задачей, так как если в предыдущей сумме переставить слагаемые, то сумма превратится

$$\sum_{i=0}^{N} \left[\phi_{x_i}^{m} \phi_{x_i}^{m'} \left(\sum_{j=0}^{N} \phi_{y_j}^{n} \phi_{y_j}^{n'} \right) \right] h \ .$$

Перепишем решение прошлой задачи. Проверим по определению(проверим для $\cos(\pi m x_k)$):

$$(\phi^i, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^i \phi_m^j h = \sum_{m=1}^{N-1} \cos\left(\pi i (\frac{-h}{2} + mh)\right) \cos\left(\pi j (\frac{-h}{2} + mh)\right) h =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos\left(\pi h (m - \frac{1}{2})(i-j)\right) + \cos\left(\pi h (i+j)(m - \frac{1}{2})\right)]h. \quad (1)$$

Воспользуемся несложным фактом, который можно показать с помощью выделения действительной части комплесного числа в тригонометрической форме:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos(\phi m - \frac{\phi}{2}) = \frac{\sin(N-1)\phi}{2\sin(\frac{\phi}{2})}.$$

Продолжим (1), тогда при $i \neq j$:

$$(\phi^i, \phi^j) = h \left[\frac{\sin((N-1)\pi h(i-j))}{4\sin(\frac{\pi h(i-j)}{2})} + \frac{\sin((N-1)\pi h(i+j))}{4\sin(\frac{\pi h(i+j)}{2})} \right] = 0.$$

Если же $i = j$:

$$(\phi^i, \phi^j) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos\left(\pi h (m - \frac{1}{2})(i-i)\right) + \cos\left(\pi h (i+i)(m - \frac{1}{2})\right)]h = .$$
$$= h[\frac{N-1}{2} + \frac{\sin((N-1)\pi h 2i)}{4\sin(\pi h i)}] = \frac{1}{2}.$$

3 Программная реализация

Программа реализует построение дискретного ряда Фурье и подсчет порядка сходимости для него. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, который содержит тестовую функцию и количество узлов(которое совпадает с количеством членов в ряде). Также в данном файле содержатся функции, реализующие построение детерминированного ряда Фурье для тестовой функции в точке;

2. make_points.cpp - файл, который генерирует узлы и образует вектор коэффициентов, которые мы вычисляем с помощью найденного скалярного произведения;

3. converge.cpp - файл, который во многом повторяет main.cpp, но также дополнительно написано вычисление порядка сходимости с помощью логарифма.

4 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

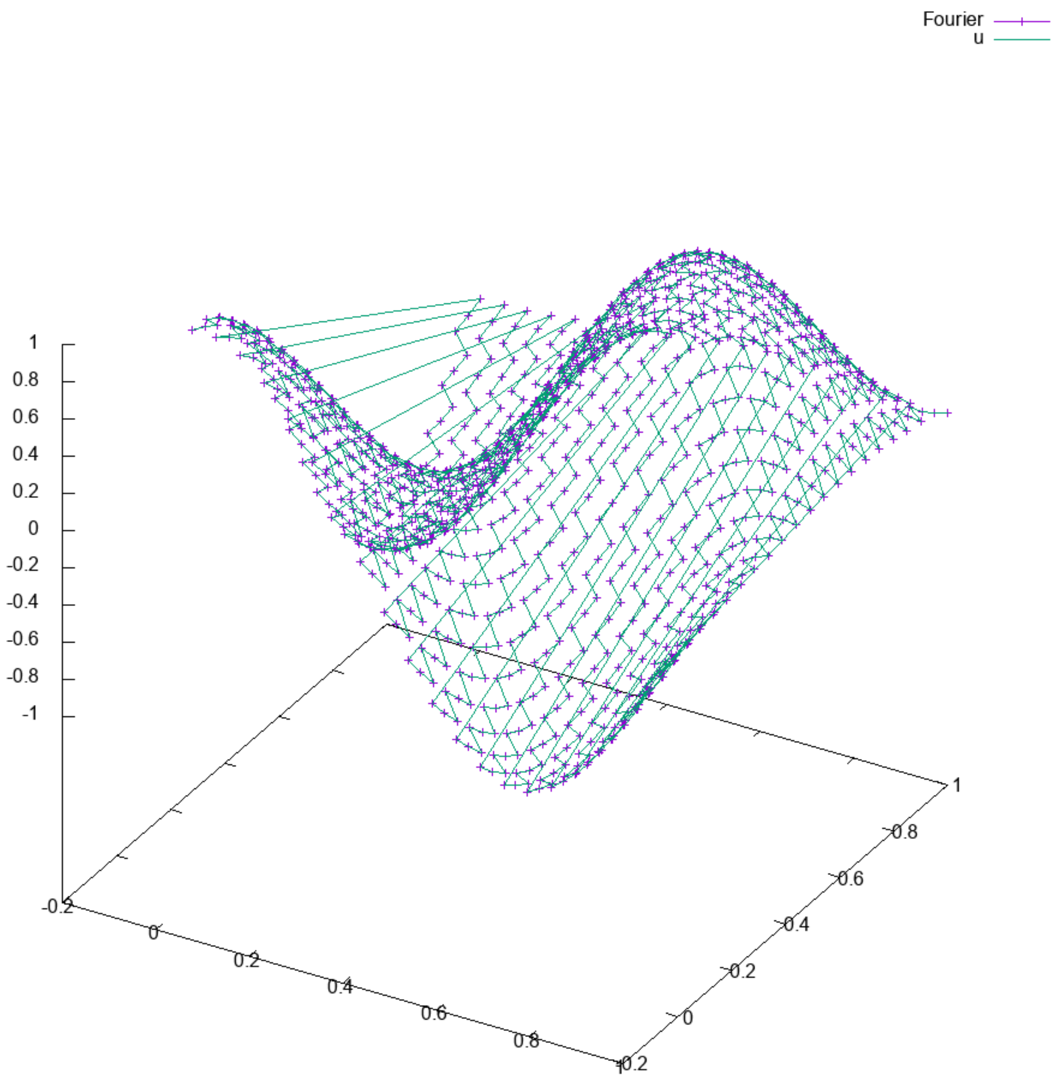

Рис. 1: Функция $f(x) = \cos(\pi(2 - \frac{1}{2})x)\cos(\pi(2 - \frac{1}{2})y)$ на 20 узлах.

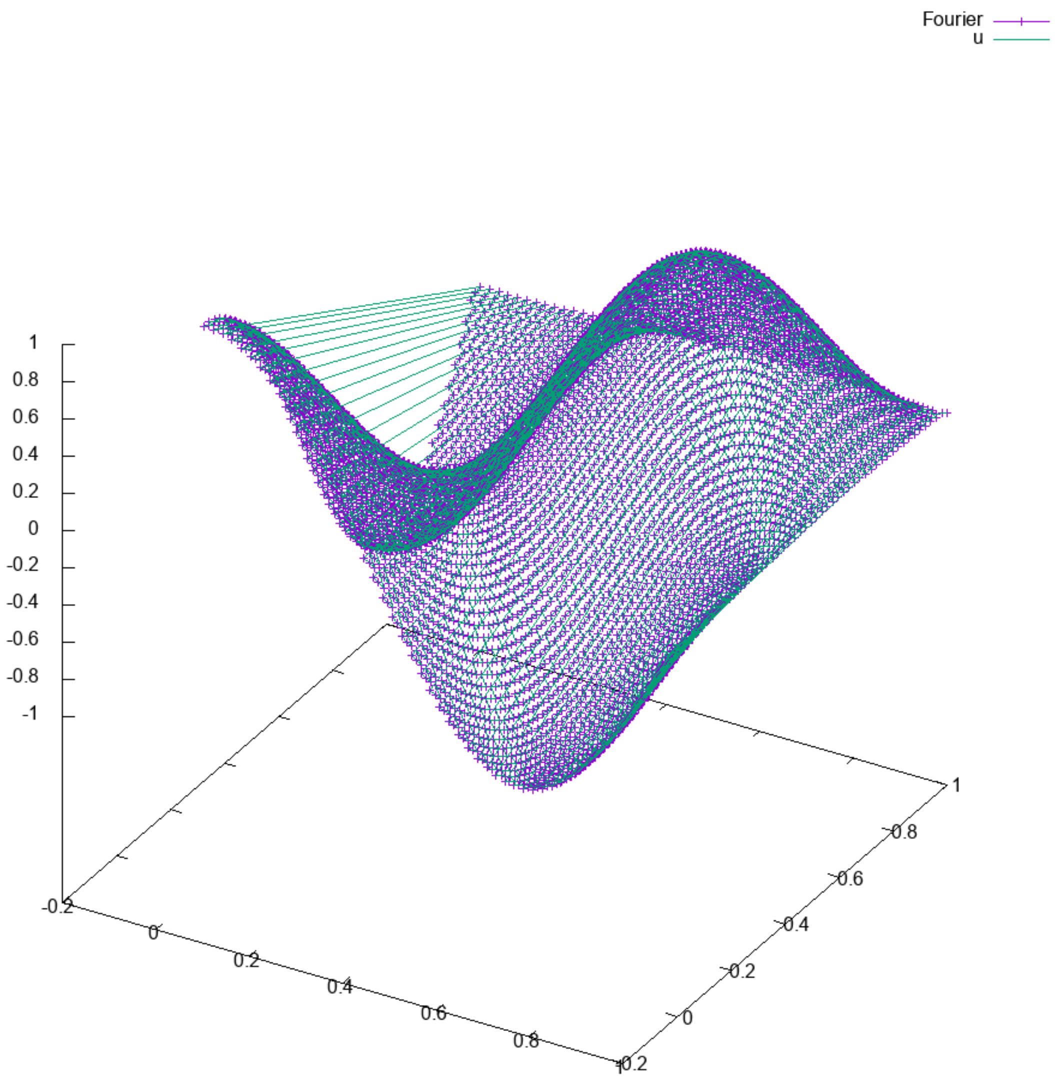

Рис. 2: Функция $f(x) = \cos(\pi(2 - \frac{1}{2})x)\cos(\pi(2 - \frac{1}{2})y)$ на 50 узлах.

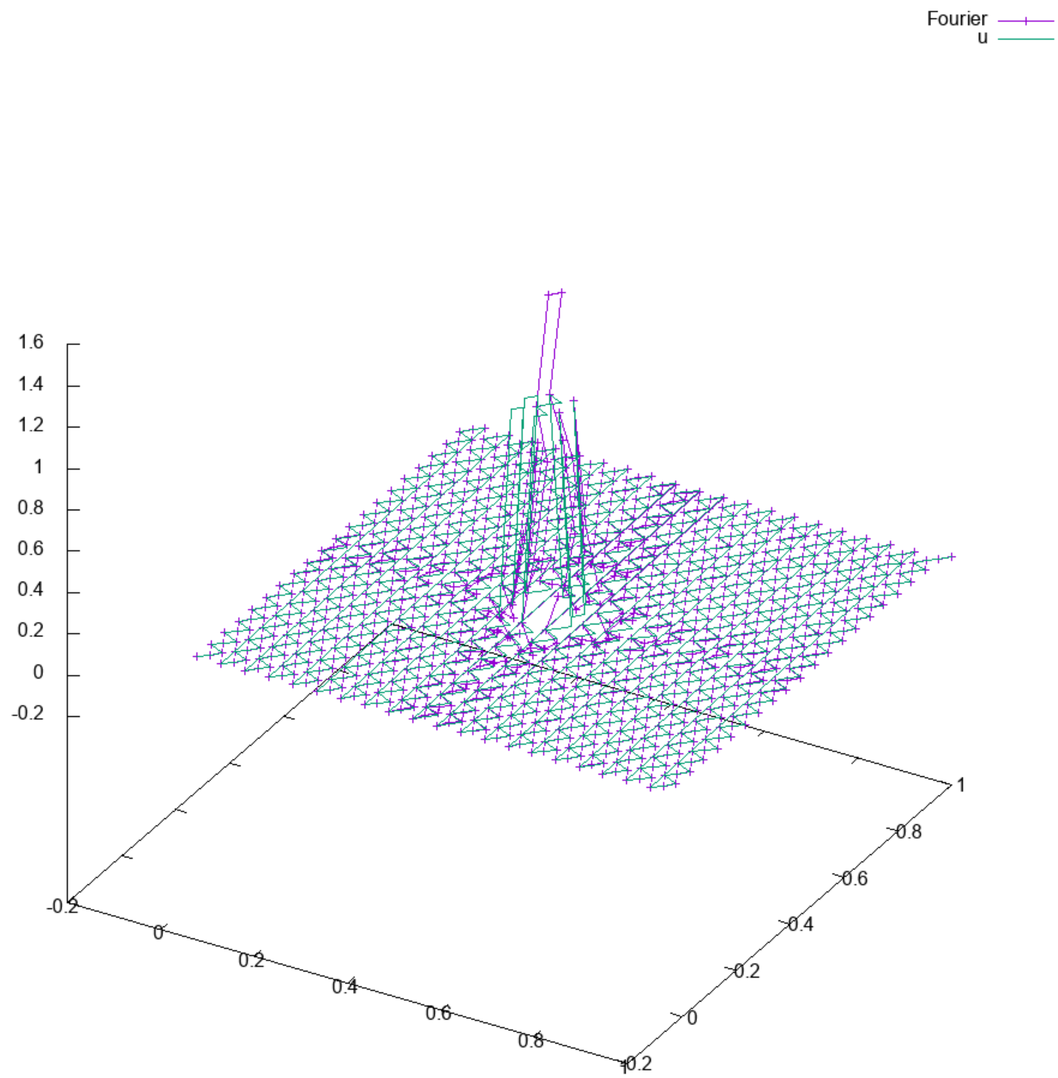

Рис. 3: Функция $f(x) = \mathbf{1}_{[0.4,0.5]^2}(x, y)$ на 20 узлах.

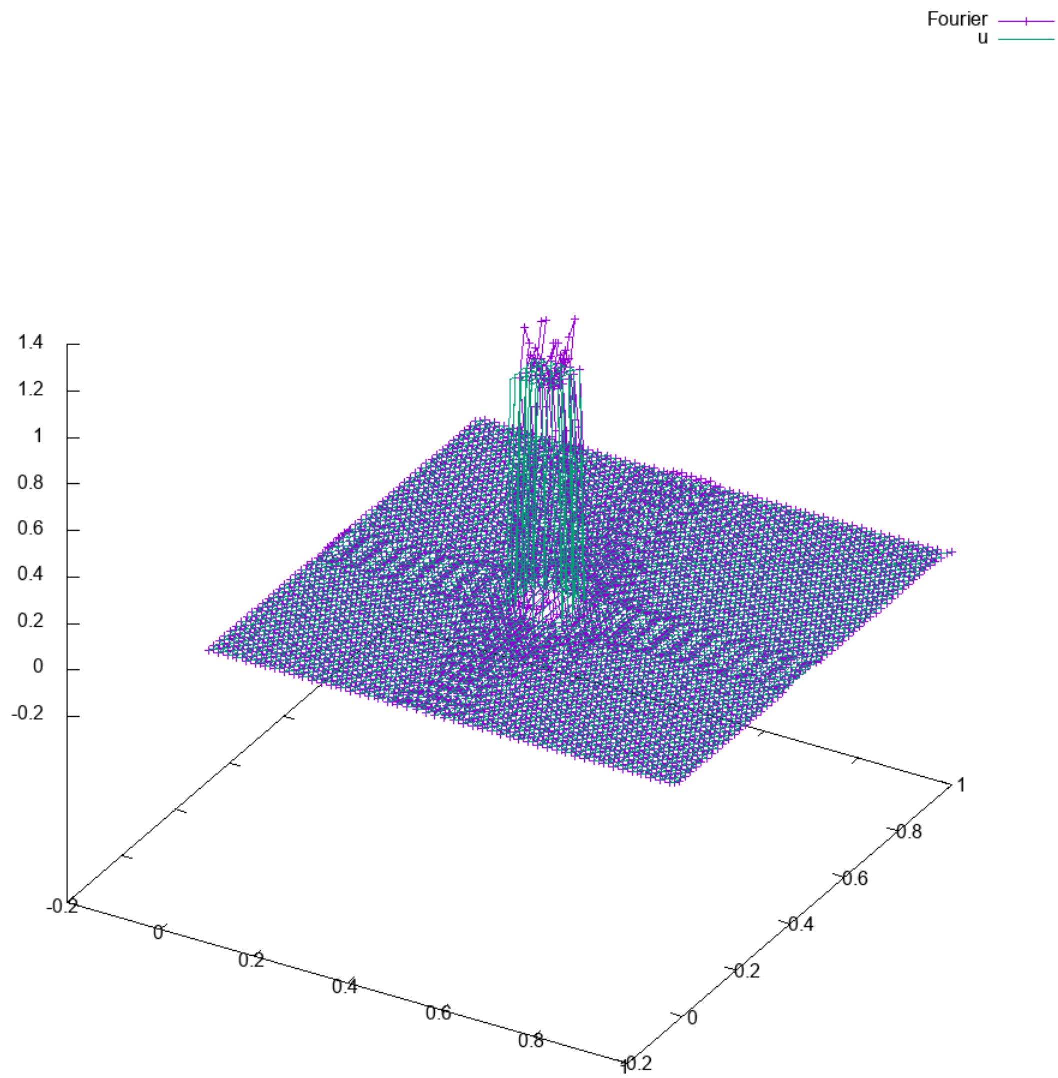

Рис. 4: Функция $f(x) = \mathbf{1}_{[0.4,0.5]^2}(x, y)$ на 50 узлах.

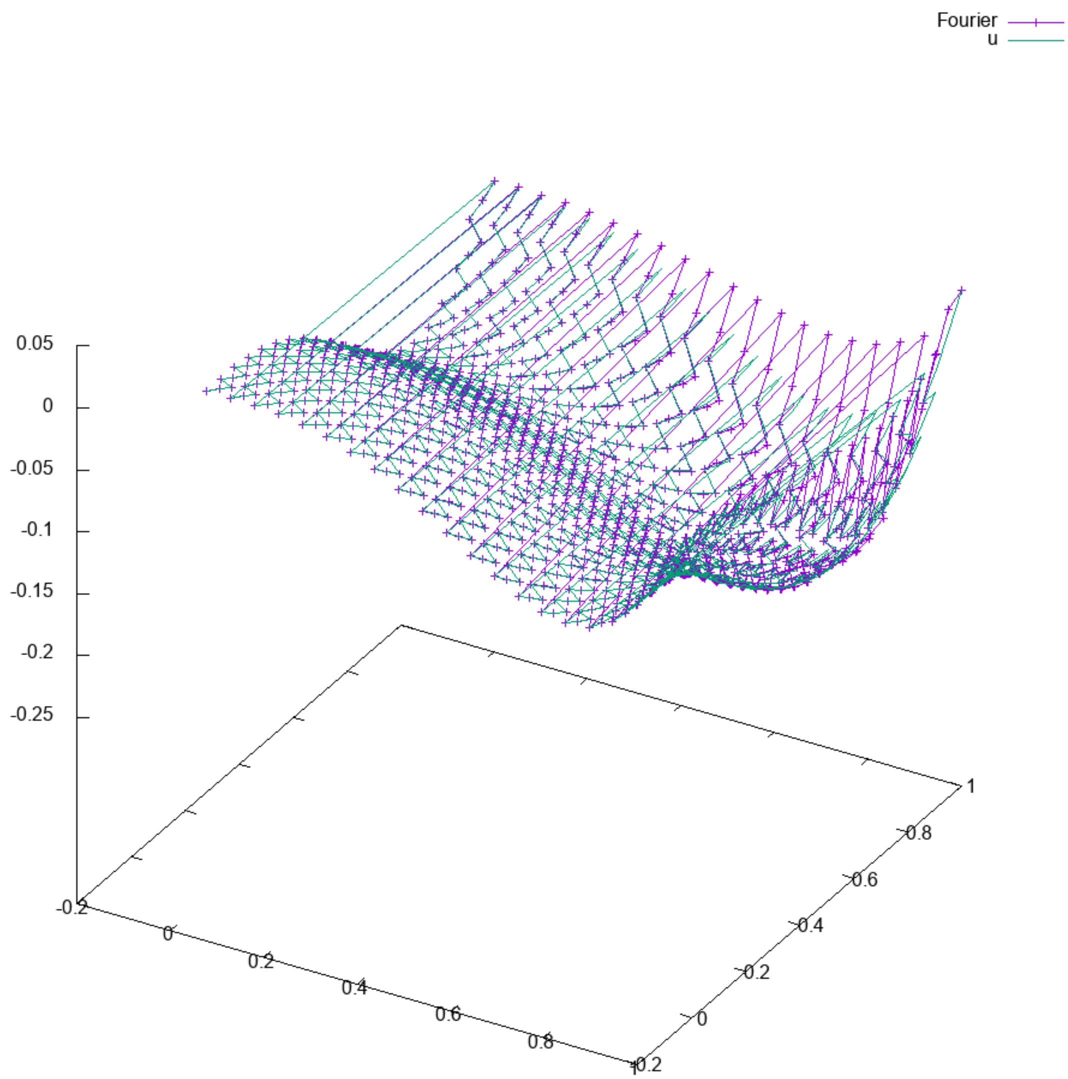

Рис. 5: Функция $f(x) = x^4 - x^3 + y^4 - y^3$ на 20 узлах.

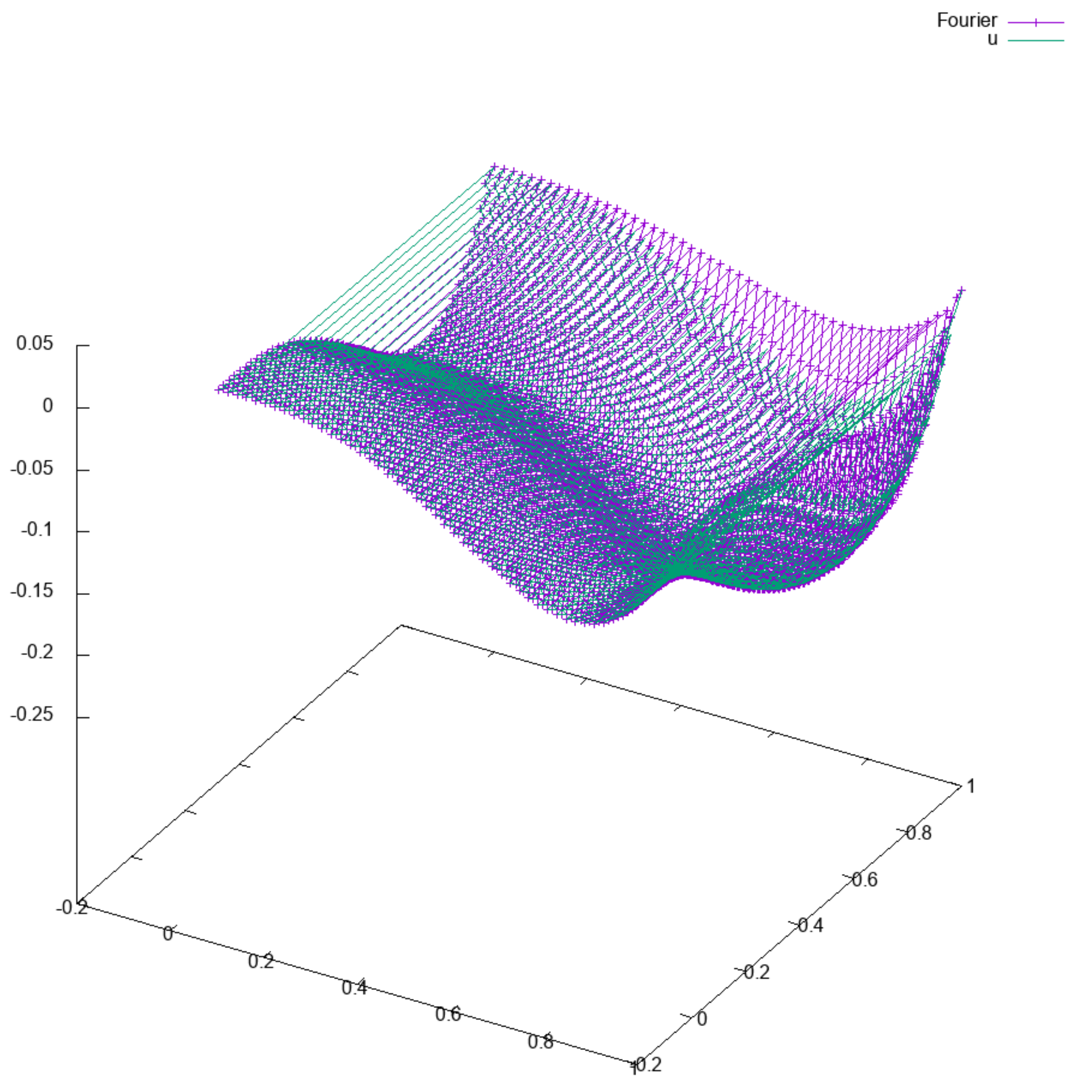

Рис. 6: Функция $f(x) = x^4 - x^3 + y^4 - y^3$ на 50 узлах.

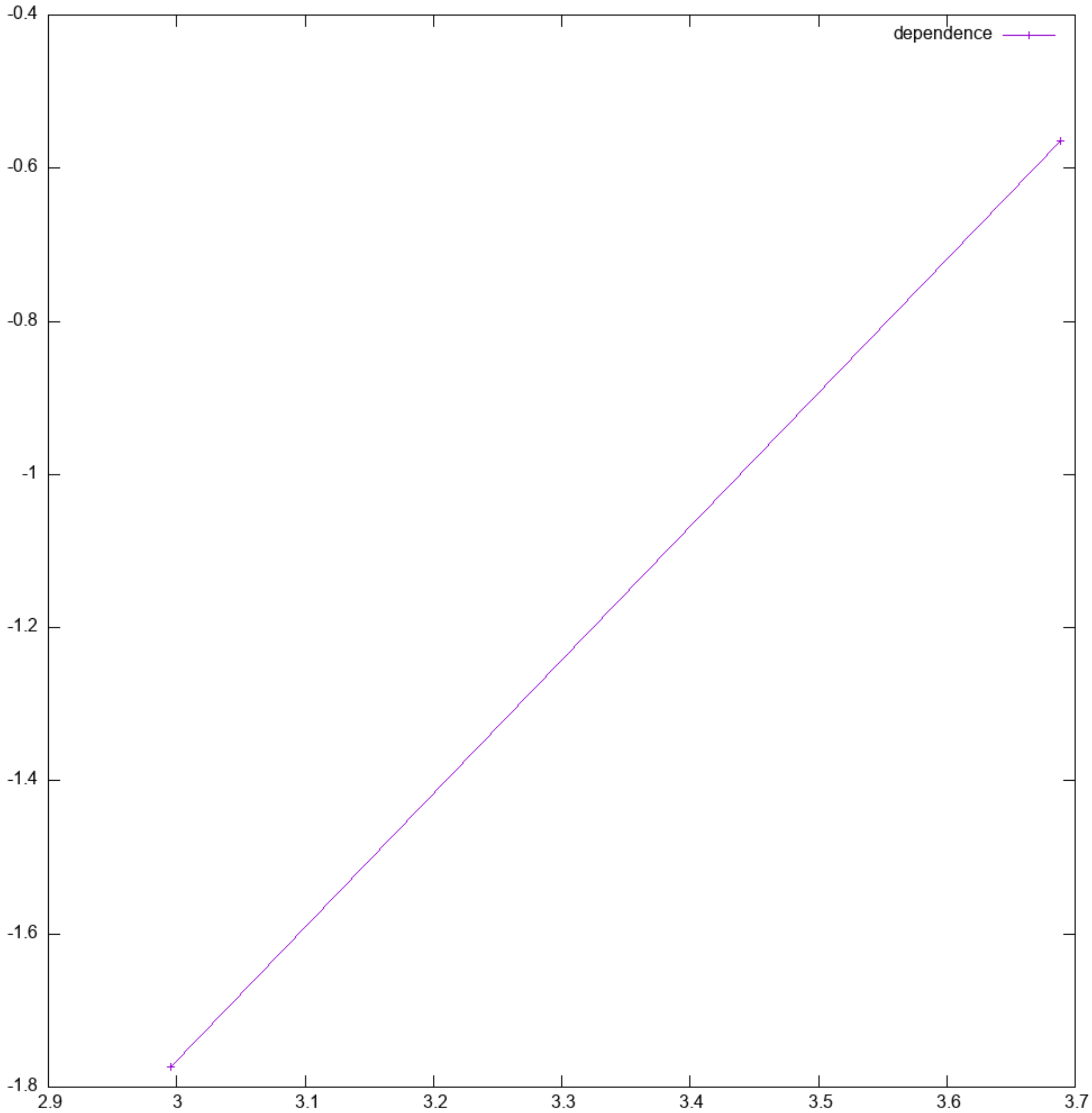

Рис. 7: Для предыдущей функция численно нашли порядок сходимости. И конченый результат $p = 0.871334$ на 20 узлах.

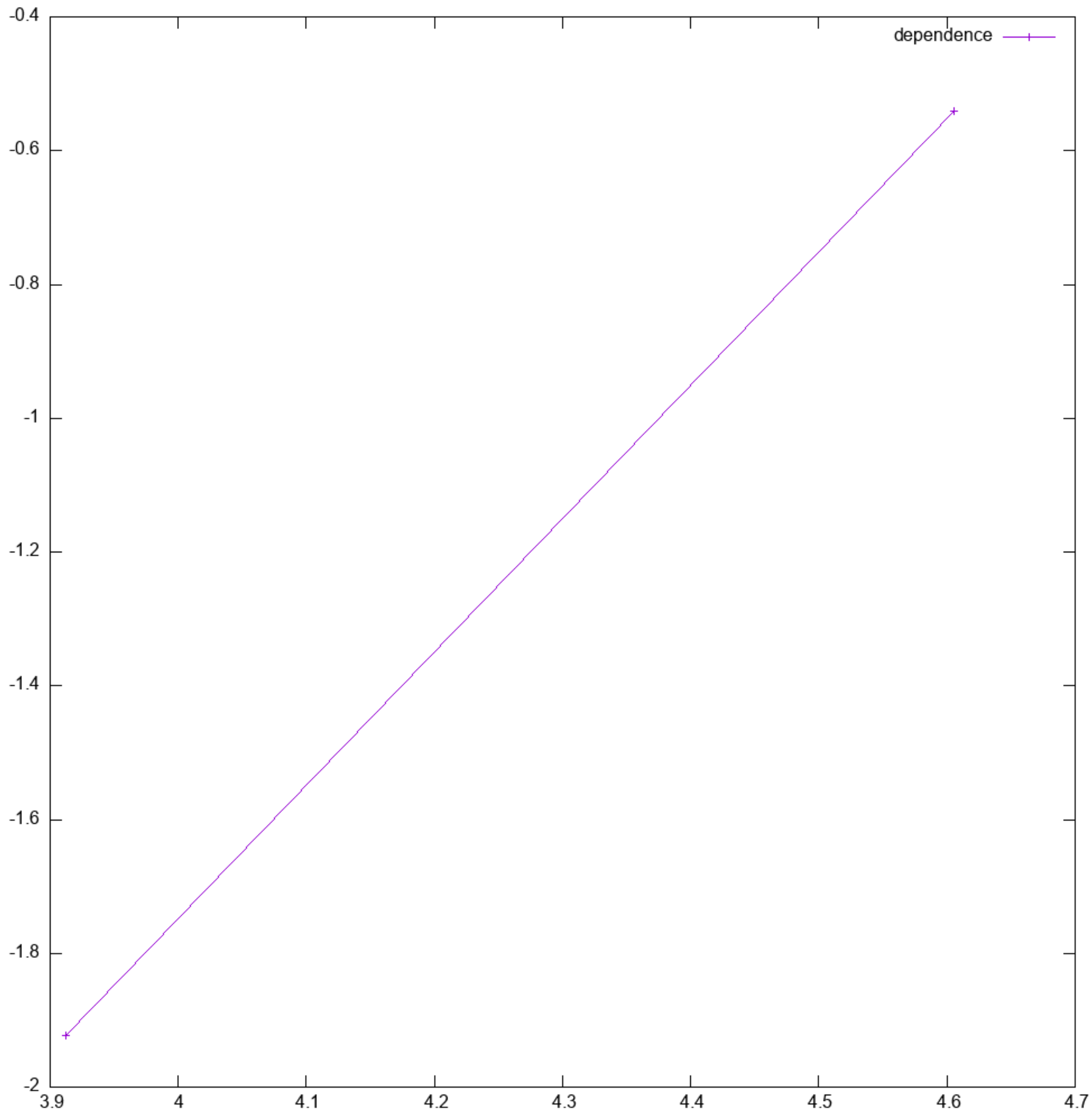

Рис. 8: Для предыдущей функция численно нашли порядок сходимости. И конченый результат $p = 0.99656$ на 50 узлах.