ОТЧЕТ

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Нужно решить

$$-u''(x) + p(x)u(x) = f(x)$$

на стеке $x_0 = 0,\ x_N = 1,\ h = \frac{1}{N}$ с краевыми $u(0) = u(1) = 0$.

2 Математическое рещение

В условии просят построить трехточечную схему, имеющую второй порядок сходимости в $L_{2,h}[0,1]$–норме. Тогда рассмотрим схему вида

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k, \quad k = 1, \ldots, N-1, \\ y_0 = y_N = 0, \quad h = \frac{1}{N}, \quad p \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Покажем ее аппороксимацию на решении в нужной норме. Для этого достаточно воспользоваться определнием и подставить ряд Тейлора в точке x_k. То есть

$$\begin{aligned} &||L_h[y]_h - f_h||_{2,h} = || - \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + py_k - f(x_k)||_{2,h} = \\ &= || - \frac{1}{h^2}\left(y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4)\right) \\ &- \frac{1}{h^2}\left(y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) - \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4)\right) \\ &+ py_k + \frac{2}{h^2}y(x_k) - f(x_k)||_{2,h} = ||O(h^2) + \underbrace{(-y''(x_k) + py_k - f(x_k))}_{=0}||_{2,h} \leq Ch^2 \end{aligned}$$

.

Заметим, что краевые точно такие же как и в исходной задаче, поэтому получаем, что наша схема второго порядка аппроксимации.

Теперь покажем устойчивость. Для этого воспользуемся определением, а именно посмотрим на ограниченность по норме(будет операторную норму с векторной) обратного оператора. В нашей $L_{2,h}[0,1]$–норме, получится так, что достаточно просто найти собственные значения оператора, которые мы вычисляли в прошлом семестре для написания метода с предобуславливателем(как раз все условия подходят).

$$\lambda_n = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\pi n h}{2}) + p \geq \frac{4}{h^2}\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2 n^2 h^2}{4} + p > 0.$$

И тогда верно, что норма обратного оператора ограничена. Осталось воспользоваться теоремой Филлипова, и получим что разностная схема сходиться со вторым порядком к решению исходного уравнения.

Описание метода Фурье вместе с ортогональностью собственных функци по норме 2 домноженная на h, уже было в отчете предыдущего семестра. Кратко опишем метод прогонки для трехдиагональной матрицы.

Система уравнений $Ax = F$ равносильна соотношению

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i. \qquad (1)$$

Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \text{ где } i = n-1, n-2, \ldots, 1. \qquad (2)$$

Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (1):

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i)\, x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0,$$

где F_i — правая часть i-го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

$$\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \dfrac{-C_i}{A_i \alpha_i + B_i} \\ \beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + B_i} \end{cases}$$

Из первого уравнения получим:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -C_1 / B_1 \\ \beta_2 = F_1 / B_1 \end{cases}$$

После нахождения прогоночных коэффициентов α и β, используя уравнение (2), получим решение системы. При этом,

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1 \ldots 1$$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \beta_n}{B_n + A_n \alpha_n}$$

3 Программная реализация

Программа реализует указанный метод и проверяет на некотором наборе тестовых функций. Общая структура проекта:

1. main_fourier.c - файл, который содержит запуск метода Фурье и проверку с ответом;

2. main_sweep.c - файл, который содержит запуск метода прогонки и проверку с ответом;

3. FourierMethod.c - файл, который содержит описание метода Фурье и его вызов всех необходимых функций содержащих вычисления собственных чисел и собственных функций;

4. SweepMethod.c - файл, метод прогонки;

4 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

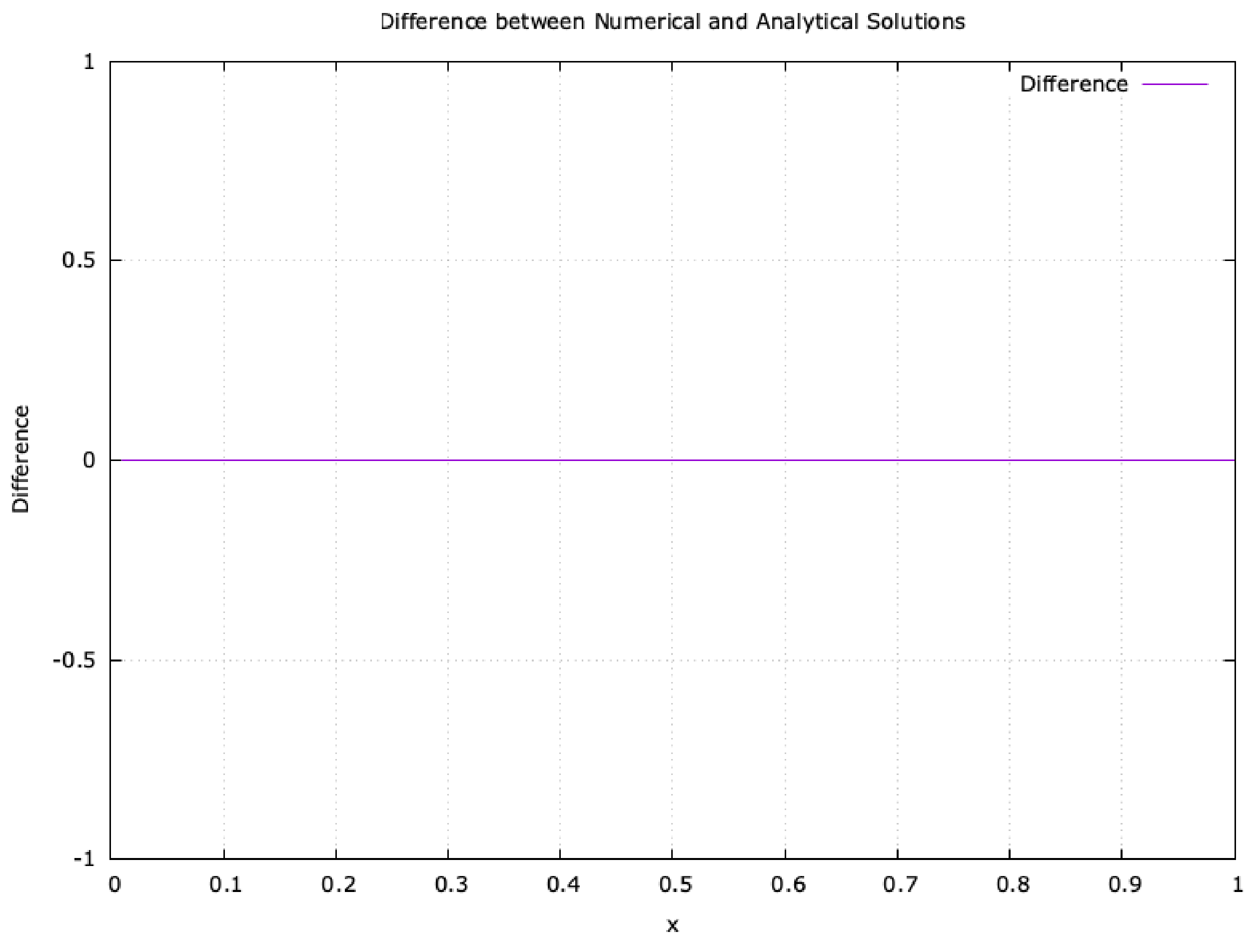

Рис. 1: Разность между точным ответом и ответом из метода прогонки для уравнения $u''(x) = 1$.

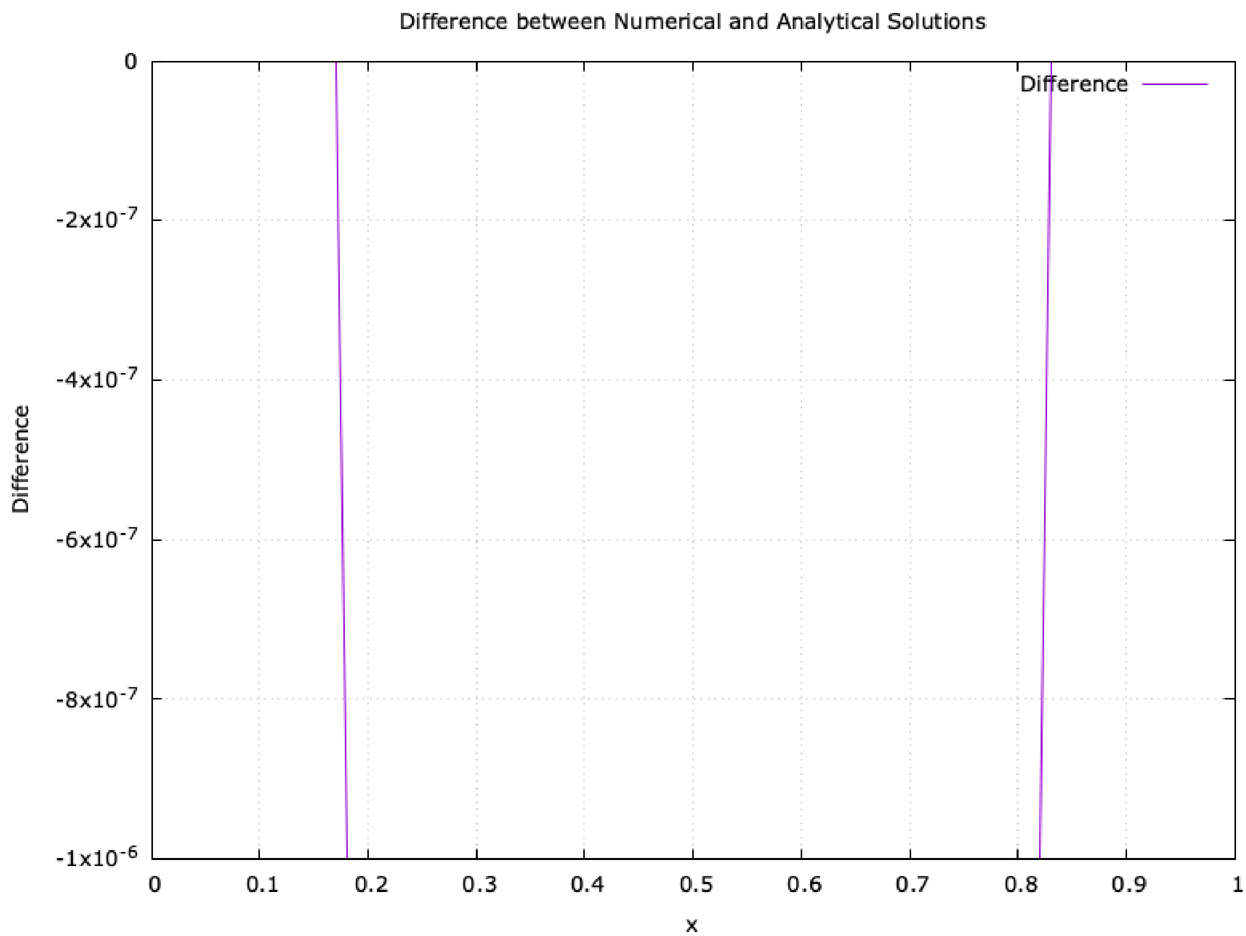

Рис. 2: Разность между точным ответом и ответом из метода прогонки для уравнения $u''(x) + u(x) = 1$.

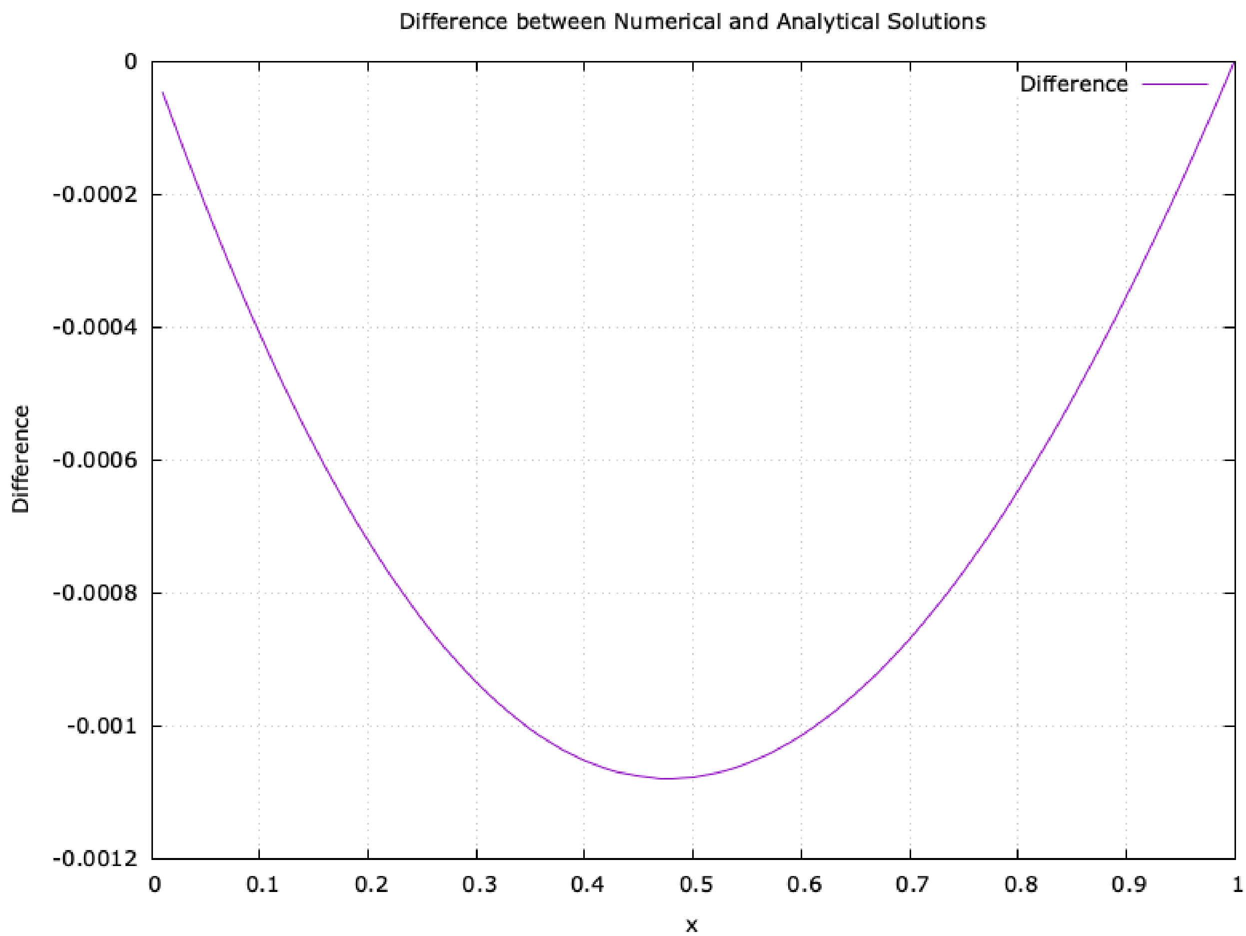

Рис. 3: Разность между точным ответом и ответом из метода прогонки для уравнения $u''(x) = \sin(x)$.

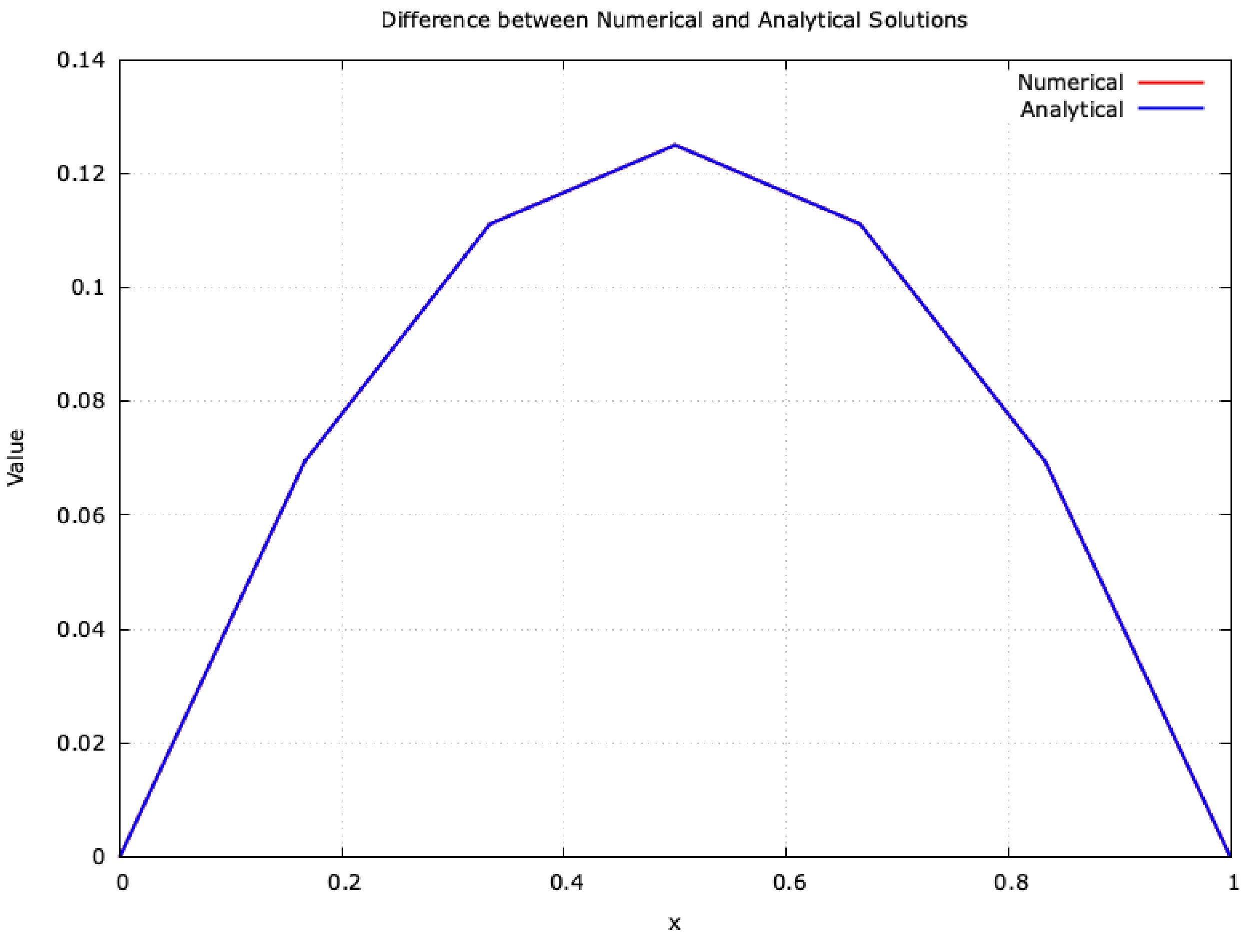

Рис. 4: Графики точного ответа и ответ из метода Фурье для уравнения $u''(x) = 1$.

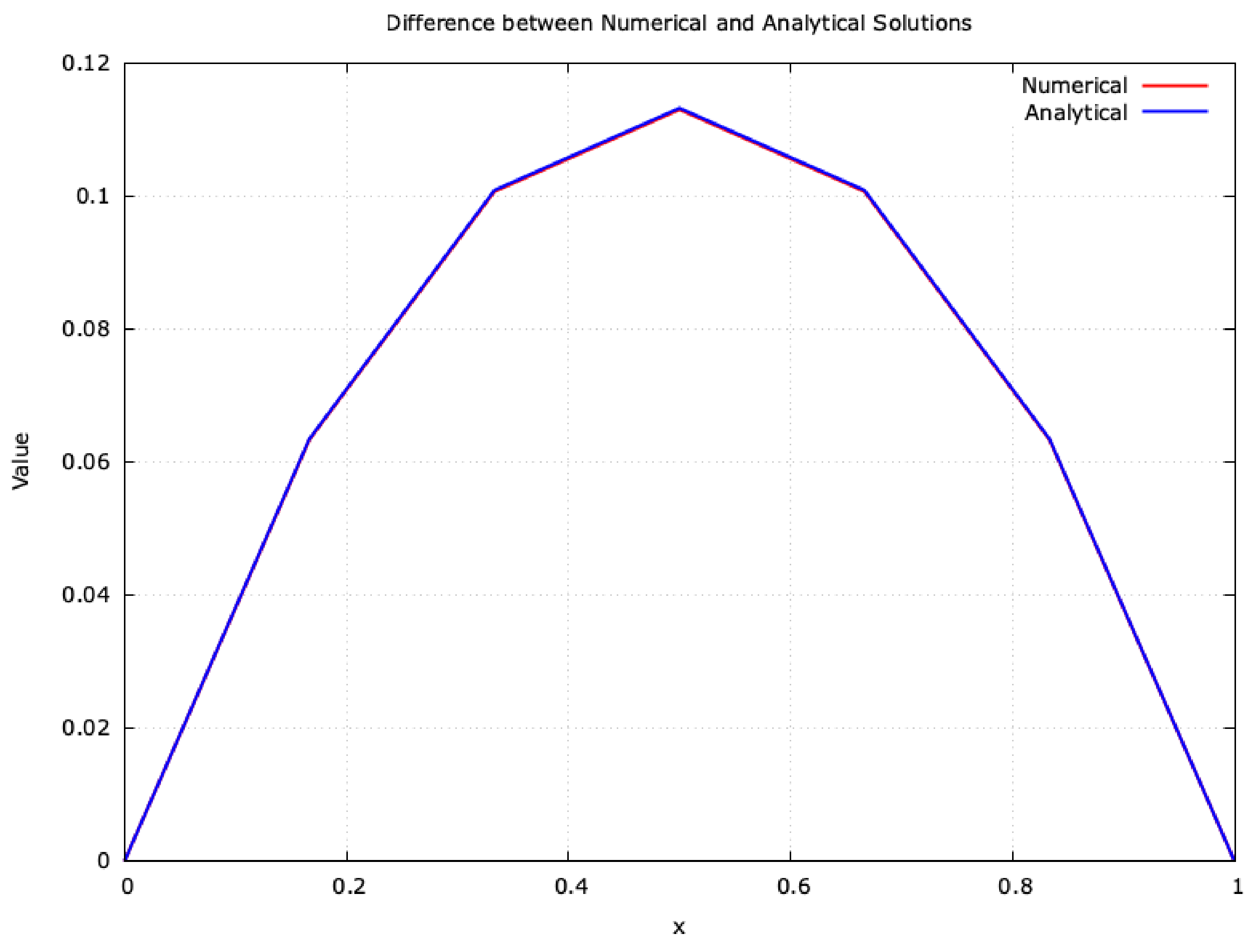

Рис. 5: Графики точного ответа и ответ из метода Фурье для уравнения $u''(x)+u(x) = 1$.