ОТЧЕТ

Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Задача 1

1.1 Постановка задачи

Решить методом Фурье следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&-\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+py_k=f_k, \quad k=1,\dots,N-1;\\
&y_0=y_N=0;\\
&h=\frac{1}{N};\\
&p\geq 0.
\end{aligned}
$$

1.2 Решение

Метод Фурье подразумевает поиск собственных функций относительно краевых и последующий поиск собственных чисел относительно оператора системы. Также в этой и последующих задачах, решением системы уравнений будет вектор $(0,1,0,\dots,0)$. Из задачи о дискретном разложении Фурье имеем что собственная функция задачи:

$$\psi_k^{(n)}=\sin(\frac{\pi nk}{N}).$$

Далее вычислим собственные значения:
$A\psi_k^{(n)}=-\frac{\psi_{k+1}^{(n)}-2\psi_k^{(n)}+\psi_{k-1}^{(n)}}{h^2}+p\psi_k^{(n)}$
$=-\frac{\sin(\frac{\pi n(k+1)}{N})-2\sin(\frac{\pi nk}{N})+\sin(\frac{\pi n(k-1)}{N})}{h^2}+p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$=-\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})+\cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N})-2\sin(\frac{\pi nk}{N})+\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})-\cos(\frac{\pi nk}{N})\sin(\frac{\pi n}{N})}{h^2}+p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$=-\frac{\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})-2\sin(\frac{\pi nk}{N})+\sin(\frac{\pi nk}{N})\cos(\frac{\pi n}{N})}{h^2}+p\sin(\frac{\pi nk}{N})$
$=-\frac{2\sin(\frac{\pi nk}{N})(\cos(\frac{\pi n}{N})-1)}{h^2}+p\sin(\frac{\pi nk}{N})=\sin(\frac{\pi nk}{N})(-\frac{2(\cos(\frac{\pi n}{N})-1)}{h^2}+p).$
Итог, $\lambda_n=p-2N^2(\cos(\frac{\pi n}{N})-1)$. Далее выполним программу.

```
theory answer =
   0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000
x =
   0.000000000000000    0.999999999999999   -0.000000000000000    1.000000000000000   -0.000000000000001    1.000000000000001    0.000000000000002

residual =    0.000000000000067
```

Рис. 1: Запуск для $N=6$, $p=1$.

2 Задача 2

2.1 Постановка задачи

Решить систему из задачи 1 с помощью метода Ричардсона.

2.2 Решение

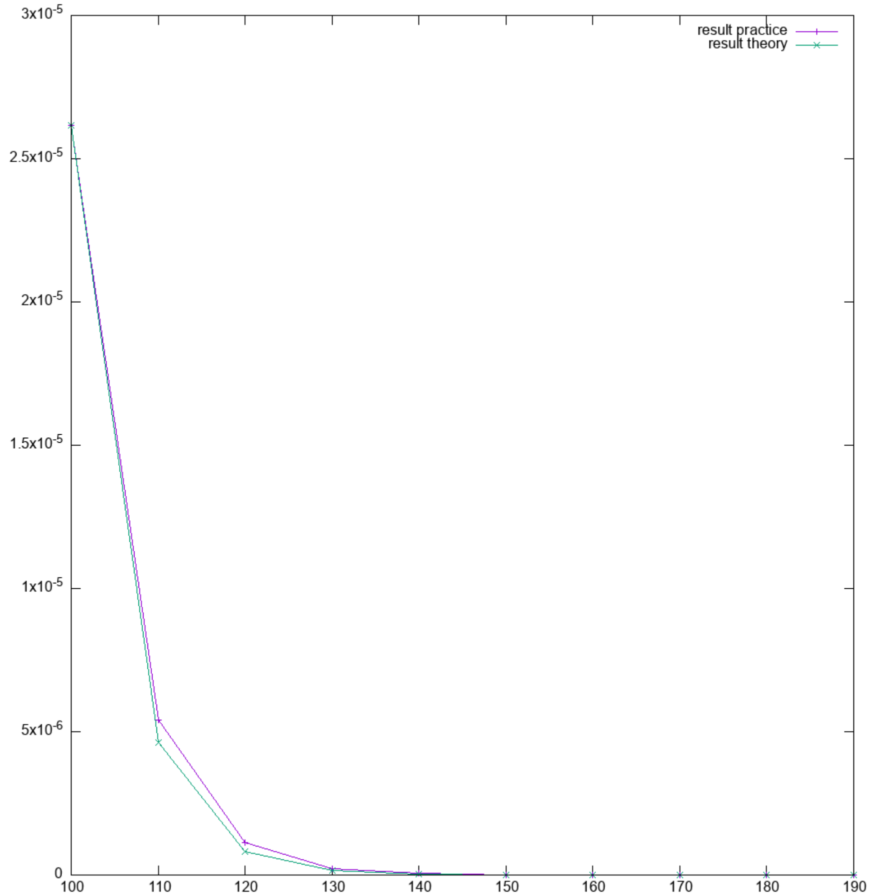


Рис. 2: График нормы ошибки. Запуск для $N = 6$, $p = 1$. Количество итераций от 100 до 200

```
residual =    0.000000000000899
result =
   0.000000000000000   72.999999999999730  -71.999999999999588   72.999999999999432  -71.999999999999588   72.999999999999730    0.000000000000000
answer =
   0.000000000000000   73.000000000000000  -72.000000000000000   73.000000000000000  -72.000000000000000   73.000000000000000    0.000000000000000
q =    0.854162042088761
```

Рис. 3: Значение велчины нормы ошибки. Запуск для $N = 6$, $p = 1$. Количество итераций 350.

3 Задача 3

3.1 Постановка задачи

Для решения системы линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&-\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+p_k y_k=f_k, \quad k=1,\dots,N-1;\\
&y_0=y_N=0;\\
&h=\frac{\pi}{N};\\
&p_k=1+\sin^2\pi kh.
\end{aligned}
$$

реализовать метод с предобуславливателем.

3.2 Решение

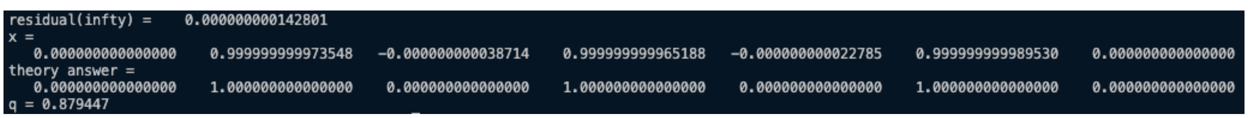
Заметим отличие в условие от первой задачи, а именно работы на отрезке $[0,\pi]$. Тем самым базисные функции для краевой задачи, после чего найдем собственные числа оператора. Несложно посчитать, что собственные функции

$$\psi_k^{(n)}=\sin(\frac{nk}{N}).$$

Воспользуемся поиском решения в виде

$$By^{k+1}=b-Ax^k,\, x^{k+1}=x^k+\tau y^{k+1},$$

где B мы взяли из задачи 1. Заметим, что нам нужно обратить матрицу B и для этого мы использовали метод Фурье. Далее представим полученные ответы на запрограммированном алгоритме. Будем брать $N=6$, $p=1$.



```
residual(infty) =    0.000000000142801
x =
   0.000000000000000    0.999999999973548   -0.000000000038714    0.999999999965188   -0.000000000022785    0.999999999989530    0.000000000000000
theory answer =
   0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000    1.000000000000000    0.000000000000000
q = 0.879447
```

Рис. 4: Запуск для для 500 шагов итераций.

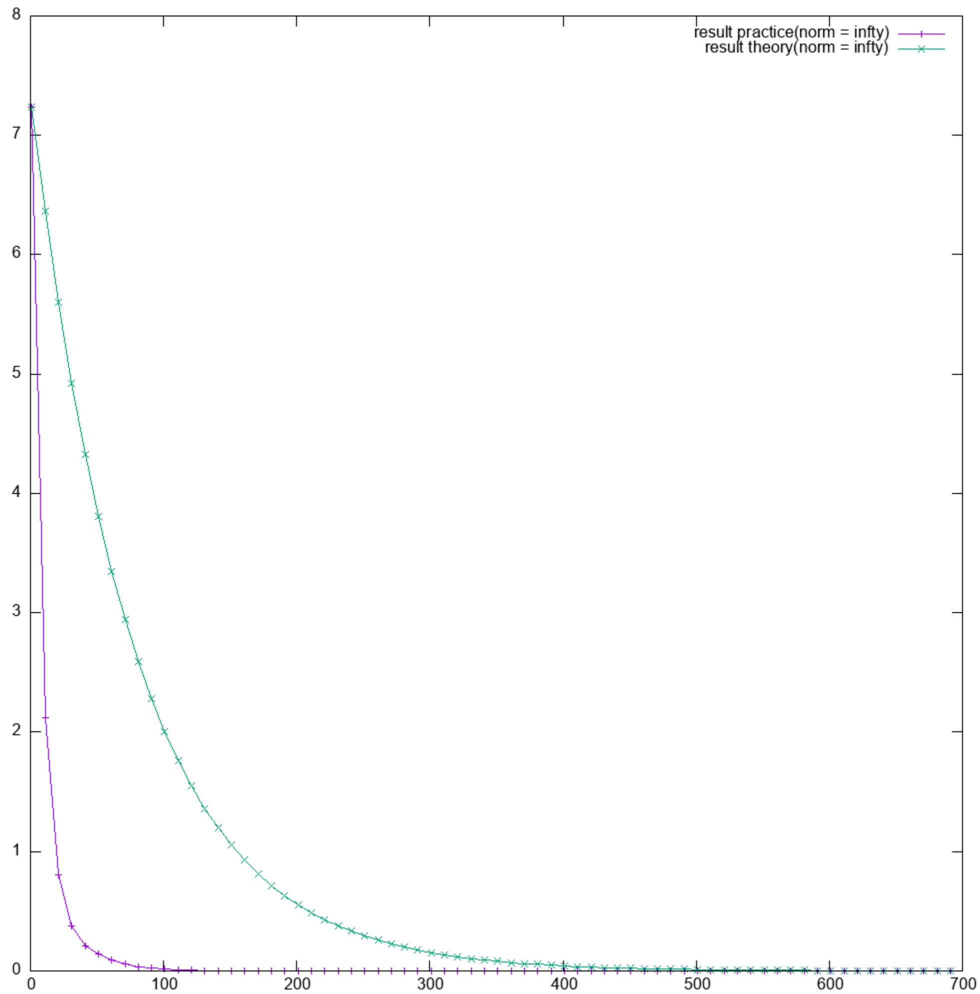


Рис. 5: График теоретической и действительной сходимости. Количество итераций от 1 до 700.

4 Программная реализация

Программа реализует построение дискретного ряда Фурье и подсчет порядка сходимости для него. Общая структура проекта:

1. task_1.cpp - файл, который выполняет первую задачу;
2. task_2.cpp - файл, который выполняет вторую задачу;
3. task_3.cpp - файл, который выполняет третью задачу;
4. _lib.cpp - файл, который реализует различные векторные операции(принт, умножение, норма и т.д.) и реализует сборку методов для решения задач;