Численное решение двумерной нестационарной задачи теплопроводности.

1) Для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\,(k\,\nabla u) + f(t,x,y)\,, u = u(t,x,y)\,; \\ 0 < k_0 \le k(x,y) \le k_1 < \infty\,, \quad x \in [0,1]\times[0,1],\ t \in [0,T]\,; \\ l_1(u)|_{x=0} = 0,\ l_2(u)|_{x=1} = 0, \quad l_1(u)|_{y=0} = 0,\ l_2(u)|_{y=1} = 0, \end{cases}$$

на равномерной сетке на пятиточечном шаблоне построить полностью неявную разностную схему, имеющую порядок сходимости $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. При этом операторы l_1, l_2 и тип используемой сетки определяются порядковым номером, т.е. краевые условия и сетка берутся в соответствии с задачей на собственные значения.

2) В случае $k(x,y) \equiv \mathrm{const}$, решение сеточной задачи $Au_{ij}^{n+1} = \mathbf{b}_{ij}^{n+1}$ на шаге по времени с номером $n+1$ найти методом разложения в двукратный ряд Фурье.

3) На примере дифференциальной задачи с известным решением подтвердить теоретические выкладки численными расчетами.

4) В случае переменного коэффициента $k(x,y)$, на шаге по времени с номером $n+1$ решение сеточной задачи $Au_{ij}^{n+1} = \mathbf{b}_{ij}^{n+1}$ найти итерационным методом предобуславливателем:

$$B\frac{u_{ij}^{s+1,n+1} - u_{ij}^{s,n+1}}{\tau} + Au_{ij}^{s,n+1} = \mathbf{b}_{ij}^{n+1}\,, s = 0,1,2,\dots\,; u_{ij}^{0,n+1} = u_{ij}^{n}.$$

В данном случае матрица B является аналогом матрицы A, но построенной для некоторого $\tilde{k}(x,y) \equiv \mathrm{const}$. При этом решение промежуточной задачи $Bv_{ij}^{n+1} = \mathbf{d}_{ij}^{n+1}$ найти методом разложения в двукратный ряд Фурье. Здесь

$$v_{ij}^{n+1} := \frac{u_{ij}^{s+1,n+1} - u_{ij}^{s,n+1}}{\tau}, \quad \mathbf{d}_{ij}^{n+1} := \mathbf{b}_{ij}^{n+1} - Au_{ij}^{s,n+1},$$

а коэффициент $\tilde{k}$ и параметр τ выбираются с учетом теоремы о сходимости метода с предобуславливателем.

5) На примере дифференциальной задачи с известным решением подтвердить теоретические выкладки численными расчетами.