
ОТЧЕТ

Методы Рунге-Кутты для решения систем ОДУ

Автор

Черепяхин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Необходимо реализовать формулы типа Рунге-Кутты четвертого порядка точности, а именно

$$\Delta y_n = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right),$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3).$$

Из пособия получаем, что главный член погрешности равен $E = \frac{2}{3}(k_1 - k_2 - k_3 + k_4)$.

2 Программная реализация

Программа реализует указанный метод и проверяет на некотором наборе тестовых функций. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, в котором задаем значения количества точек, параметра A и какими методами решаем. Также в данном файле содержатся определения и тело функций, реализующие итерационные методы;

3 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

x	real_y	approx_y	Norm y() - yh	Norm E
0.1	0.005	0.005	0	0
0.2	0.02	0.02	0	0
0.3	0.045	0.045	6.93889e-18	4.62593e-18
0.4	0.08	0.08	0	4.62593e-18
0.5	0.125	0.125	0	0
0.6	0.18	0.18	0	9.25186e-18
0.7	0.245	0.245	2.77556e-17	9.25186e-18
0.8	0.32	0.32	5.55112e-17	1.85037e-17
0.9	0.405	0.405	1.11022e-16	9.25186e-18
1	0.5	0.5	1.11022e-16	9.25186e-18

Рис. 1: Результаты работы метода для функции $f(x) = x$.

x	real_y	approx_y	Norm y() - yh	Norm E
0.1	0.00033333	0.00033333	5.42101e-20	0.00033333
0.2	0.00266667	0.00266667	4.33681e-19	0.00033333
0.3	0.009	0.009	1.73472e-18	0.00033333
0.4	0.0213333	0.0213333	3.46945e-18	0.00033333
0.5	0.0416667	0.0416667	6.93889e-18	0.00033333
0.6	0.072	0.072	1.38778e-17	0.00033333
0.7	0.114333	0.114333	4.16334e-17	0.00033333
0.8	0.170667	0.170667	5.55112e-17	0.00033333
0.9	0.243	0.243	8.32667e-17	0.00033333
1	0.333333	0.333333	1.11022e-16	0.00033333

Рис. 2: Результаты работы метода для функции $f(x) = x^2$.

x	real_y	approx_y	Norm y() - yh	Norm E
0.1	2.5e-05	2.5e-05	3.38813e-21	5e-05
0.2	0.0004	0.0004	0	0.00015
0.3	0.002025	0.002025	8.67362e-19	0.00025
0.4	0.0064	0.0064	8.67362e-19	0.00035
0.5	0.015625	0.015625	0	0.00045
0.6	0.0324	0.0324	0	0.00055
0.7	0.060025	0.060025	1.38778e-17	0.00065
0.8	0.1024	0.1024	1.38778e-17	0.00075
0.9	0.164025	0.164025	5.55112e-17	0.00085
1	0.25	0.25	5.55112e-17	0.00095

Рис. 3: Результаты работы метода для функции $f(x) = x^3$.

x	real_y	approx_y	Norm y() - yh	Norm E
0.1	2e-06	2.03704e-06	3.7037e-08	5.83333e-06
0.2	6.4e-05	6.40741e-05	7.40741e-08	4.58333e-05
0.3	0.000486	0.000486111	1.11111e-07	0.000125833
0.4	0.002048	0.00204815	1.48148e-07	0.000245833
0.5	0.00625	0.00625019	1.85185e-07	0.000405833
0.6	0.015552	0.0155522	2.22222e-07	0.000605833
0.7	0.033614	0.0336143	2.59259e-07	0.000845833
0.8	0.065536	0.0655363	2.96296e-07	0.00112583
0.9	0.118098	0.118098	3.33333e-07	0.00144583
1	0.2	0.2	3.7037e-07	0.00180583

Рис. 4: Результаты работы метода для функции $f(x) = x^4$.

x	real_y	approx_y	Norm y() - yh	Norm E
0.1	1.10517	1.10517	8.47423e-08	0.000183333
0.2	1.2214	1.2214	1.87309e-07	0.000202615
0.3	1.34986	1.34986	3.10513e-07	0.000223924
0.4	1.49182	1.49182	4.57561e-07	0.000247474
0.5	1.64872	1.64872	6.32103e-07	0.000273501
0.6	1.82212	1.82212	8.38299e-07	0.000302265
0.7	2.01375	2.01375	1.08087e-06	0.000334055
0.8	2.22554	2.22554	1.3652e-06	0.000369188
0.9	2.4596	2.4596	1.69738e-06	0.000408016
1	2.71828	2.71828	2.08432e-06	0.000450927

Рис. 5: Результаты работы метода для функции $f(x) = e^x$.

<code>k</code>	<code>real_y</code>	<code>approx_y</code>	<code>Norm y() - yh </code>	<code>Norm E </code>
0.1	0.0998334	0.0998334	1.54105e-09	0.000166424
0.2	0.198669	0.198669	3.0667e-09	0.000164761
0.3	0.29552	0.29552	4.5617e-09	0.000161452
0.4	0.389418	0.389418	6.01113e-09	0.00015653
0.5	0.479426	0.479426	7.4005e-09	0.000150043
0.6	0.564642	0.564642	8.71592e-09	0.000142058
0.7	0.644218	0.644218	9.94426e-09	0.000132653
0.8	0.717356	0.717356	1.10732e-08	0.000121923
0.9	0.783327	0.783327	1.20916e-08	0.000109974
1	0.841471	0.841471	1.29891e-08	9.6927e-05

Рис. 6: Результаты работы метода для функции $f(x) = \sin x$.