ОТЧЕТ

Одномерное приближение Фурье

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Постановка задачи

Задана функция $u(x) \in C^\infty[0,1]$ с условими на границе:

$$u'(0) = u(1) = 0.$$

Требуется выполнить следующие задания:

1. Выписать тригонометрический ряд Фурье для заданной функции u и сформулировать теорему сходимости;
2. На сетке
$$x_0 = \frac{-h}{2},\ x_N = 1,\ h = \frac{1}{N-0.5}$$
выписать дискретный тригонометрический ряд Фурье и найти скалярное произведение, сохраняющее ортогональность базисных функций. И нормировать базисные функции;
3. Для некоторой тестовой функции из указанного класса численно найти порядок сходимости её дискретного ряда Фурье;

2 Математическое решение

Распишем решение каждого пункта.

2.1 Тригонометрический ряд Фурье

Воспользуемся аналогичной задачей для разностной схемы.Тогда получим, что функцию $u(x) \in C^\infty[0,1]$ можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\pi(m-\frac{1}{2})x).$$

Вычислим скалярное произведение, относительно которого наши базисные функции являются ортогональными. Для этого рассмотрим вектор $\phi^m := (\phi_1^m, \ldots, \phi_{N-1}^m)$, где $\phi_k^m = \cos(\pi(m-1)x_k)$ и $x_k = x_0 + kh$. Тогда нам подходит скалярное произведение следующего вида: $(\phi^i, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^i \phi_m^j h$. Действительно, проверим по определению(проверим для $\cos(\pi m x_k)$):

$$(\phi^i, \phi^j) = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_m^i \phi_m^j h = \sum_{m=1}^{N-1} \cos\left(\pi i(\frac{-h}{2} + mh)\right) \cos\left(\pi j(\frac{-h}{2} + mh)\right) h =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N-1} [\cos\left(\pi h(m-\frac{1}{2})(i-j)\right) + \cos\left(\pi h(i+j)(m-\frac{1}{2})\right)]h. \quad (1)$$

Воспользуемся несложным фактом, который можно показать с помощью выделения действительной части комплесного числа в тригонометрической форме:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \cos(\phi m - \frac{\phi}{2}) = \frac{\sin(N-1)\phi}{2\sin(\frac{\phi}{2})}.$$

Продолжим (1), тогда при $i \neq j$:

$$(\phi^i, \phi^j) = h\left[\frac{\sin((N-1)\pi h(i-j))}{4\sin(\frac{\pi h(i-j)}{2})} + \frac{\sin((N-1)\pi h(i+j))}{4\sin(\frac{\pi h(i+j)}{2})}\right] = 0.$$

Если же $i = j$:

$$(\phi^i, \phi^j) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N-1}[\cos\left(\pi h(m-\frac{1}{2})(i-i)\right) + \cos\left(\pi h(i+i)(m-\frac{1}{2})\right)]h = .$$

$$= h[\frac{N-1}{2} + \frac{\sin((N-1)\pi h2i)}{4\sin(\pi hi)}] = \frac{1}{2}.$$

3 Программная реализация

Программа реализует построение дискретного ряда Фурье и подсчет порядка сходимости для него. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, который содержит тестовую функцию и количество узлов(которое совпадает с количеством членов в ряде). Также в данном файле содержатся функции, реализующие построение детерминированного ряда Фурье для тестовой функции в точке;

2. make_points.cpp - файл, который генерирует узлы и образует вектор коэффициентов, которые мы вычисляем с помощью найденного скалярного произведения;

3. converge.cpp - файл, который во многом повторяет main.cpp, но также дополнительно написано вычисление порядка сходимости с помощью логарифма.

4 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

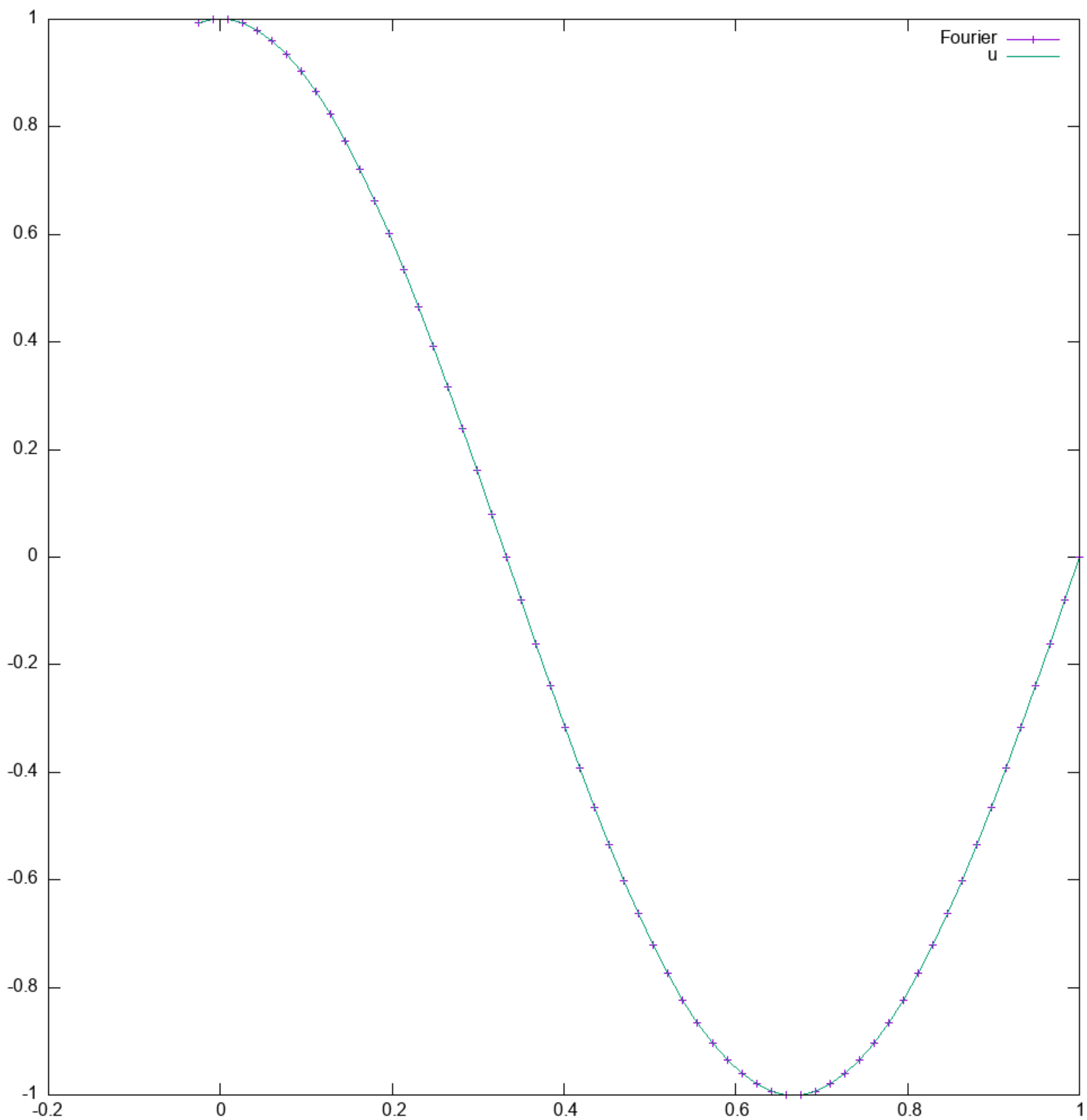

Рис. 1: Функция $f(x) = \cos(\pi(2 - \frac{1}{2})x)$ на 20 узлах.

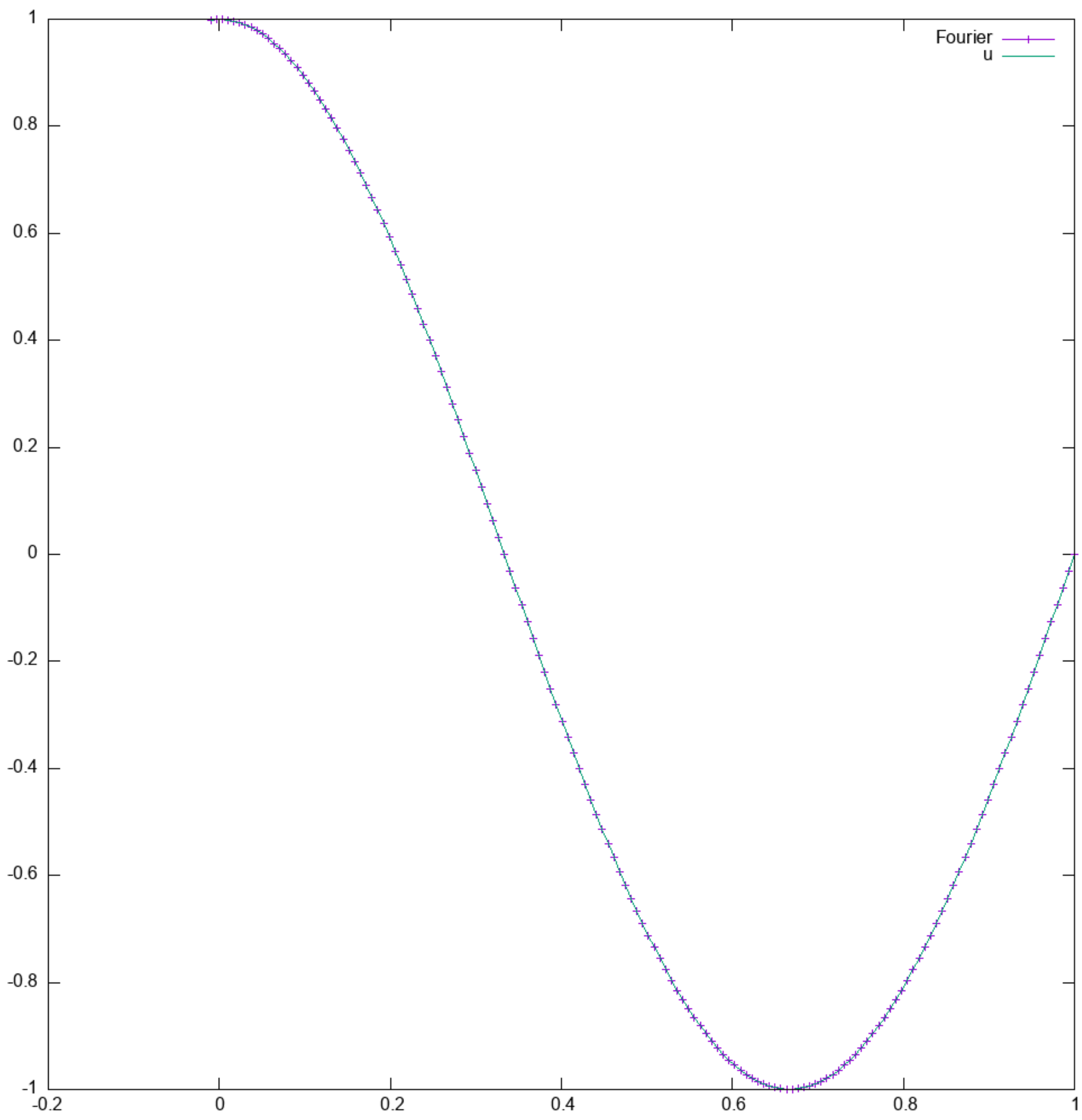

Рис. 2: Функция $f(x) = \cos(\pi(2 - \frac{1}{2})x)$ на 50 узлах.

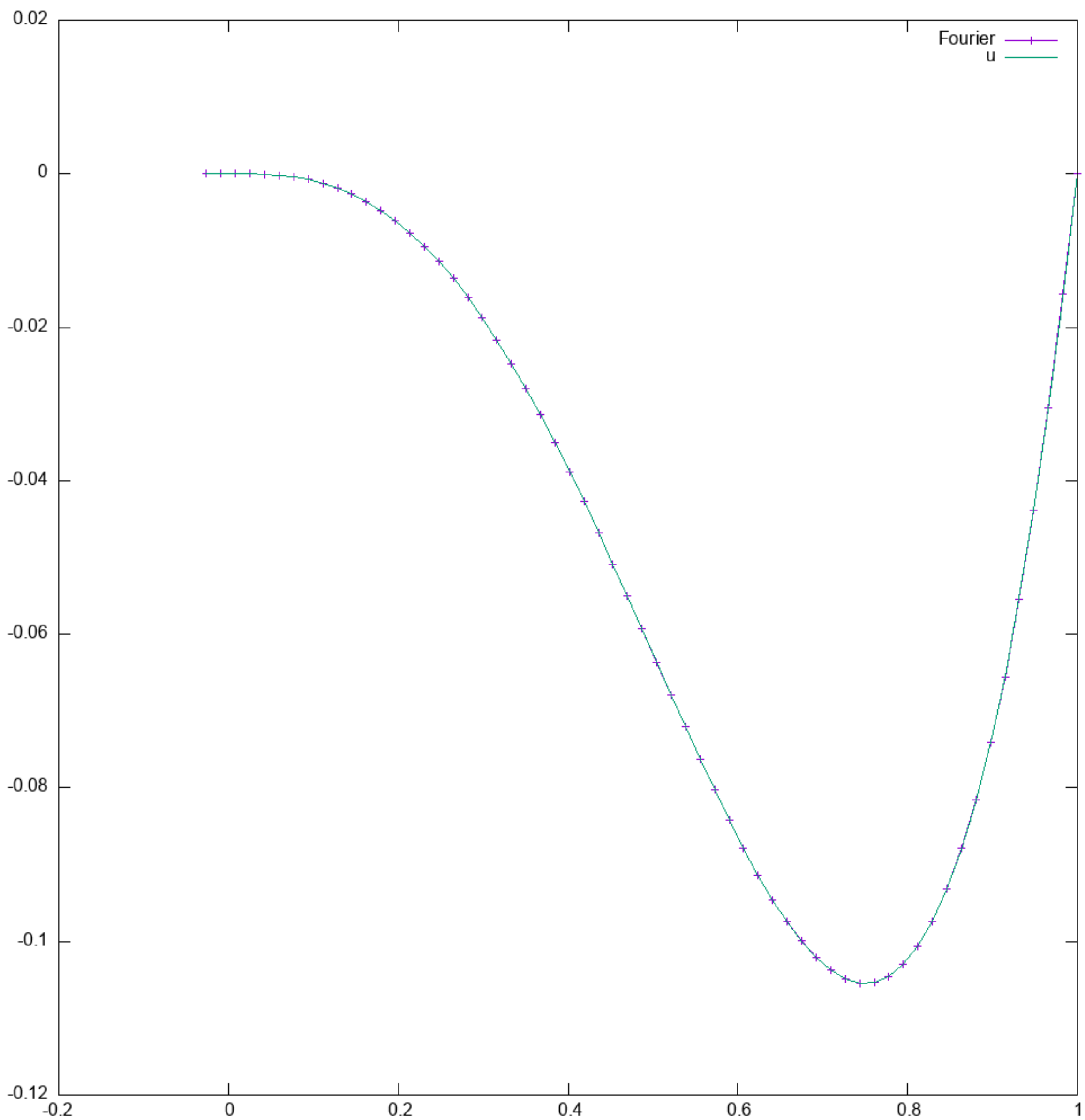

Рис. 3: Функция $f(x) = x^4 - x^3$ на 20 узлах.

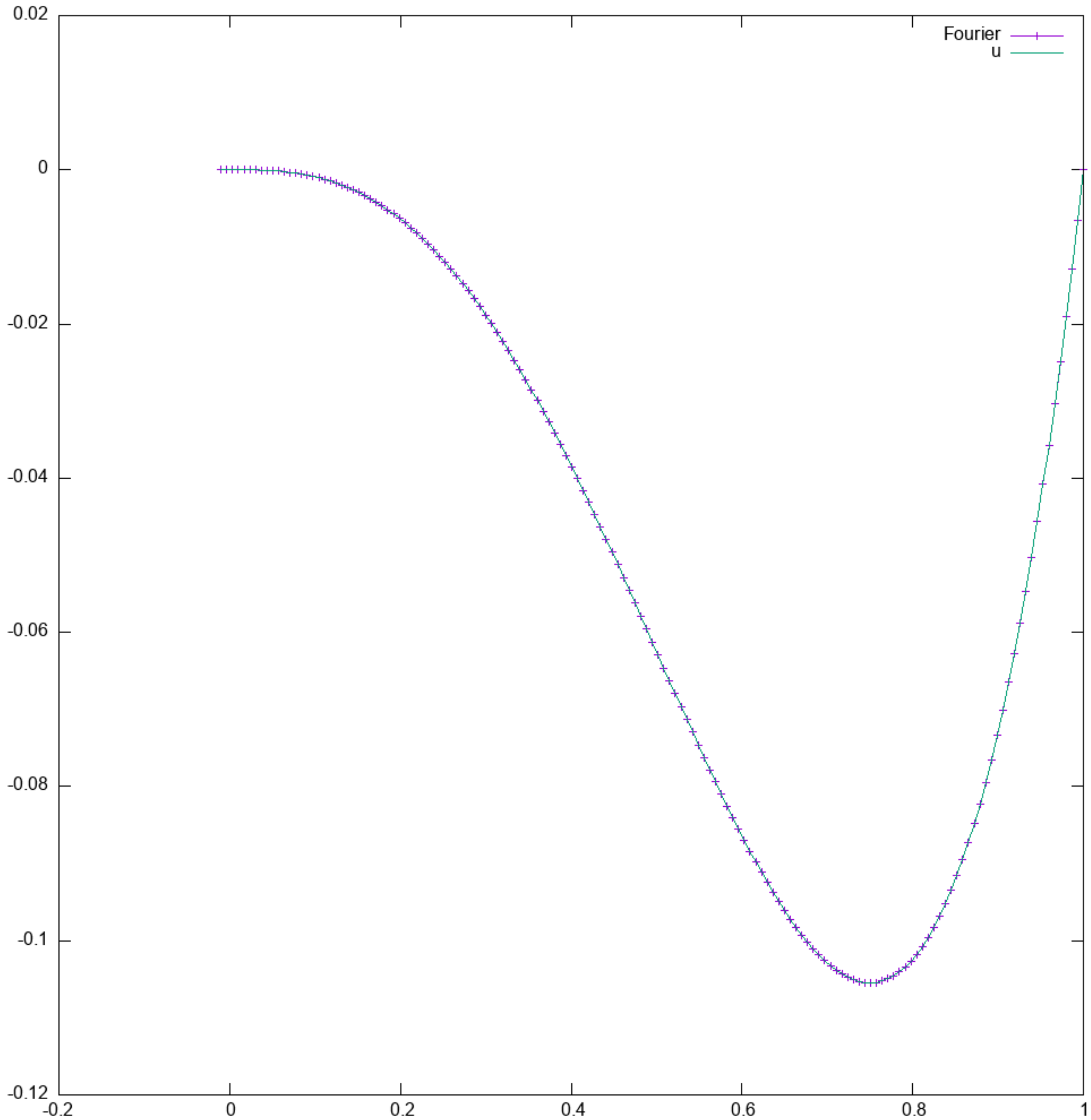

Рис. 4: Функция $f(x) = x^4 - x^3$ на 50 узлах.

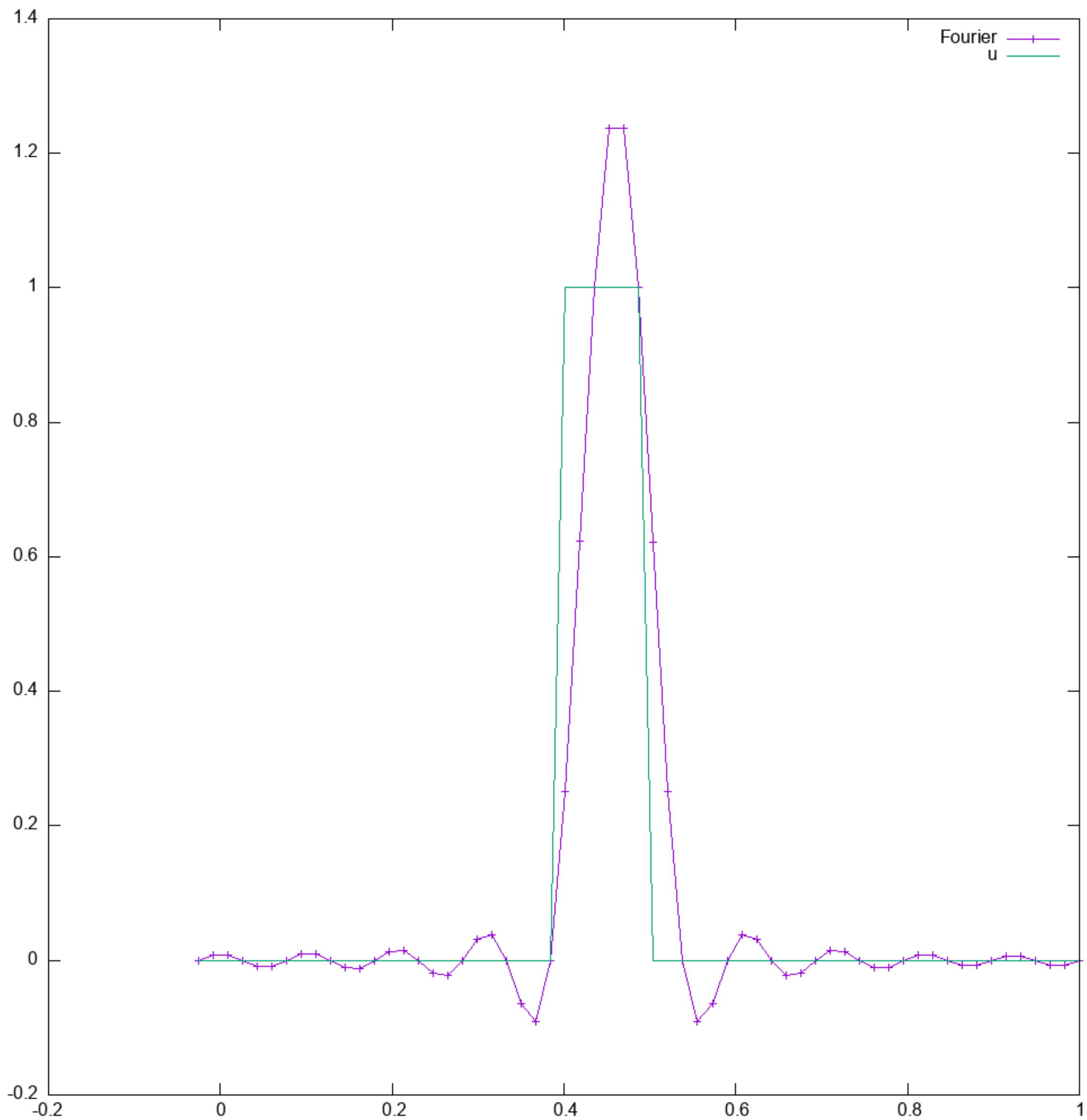

Рис. 5: Функция $f(x) = \mathbf{1}_{[0.4,0.5]}(x)$ на 20 узлах.

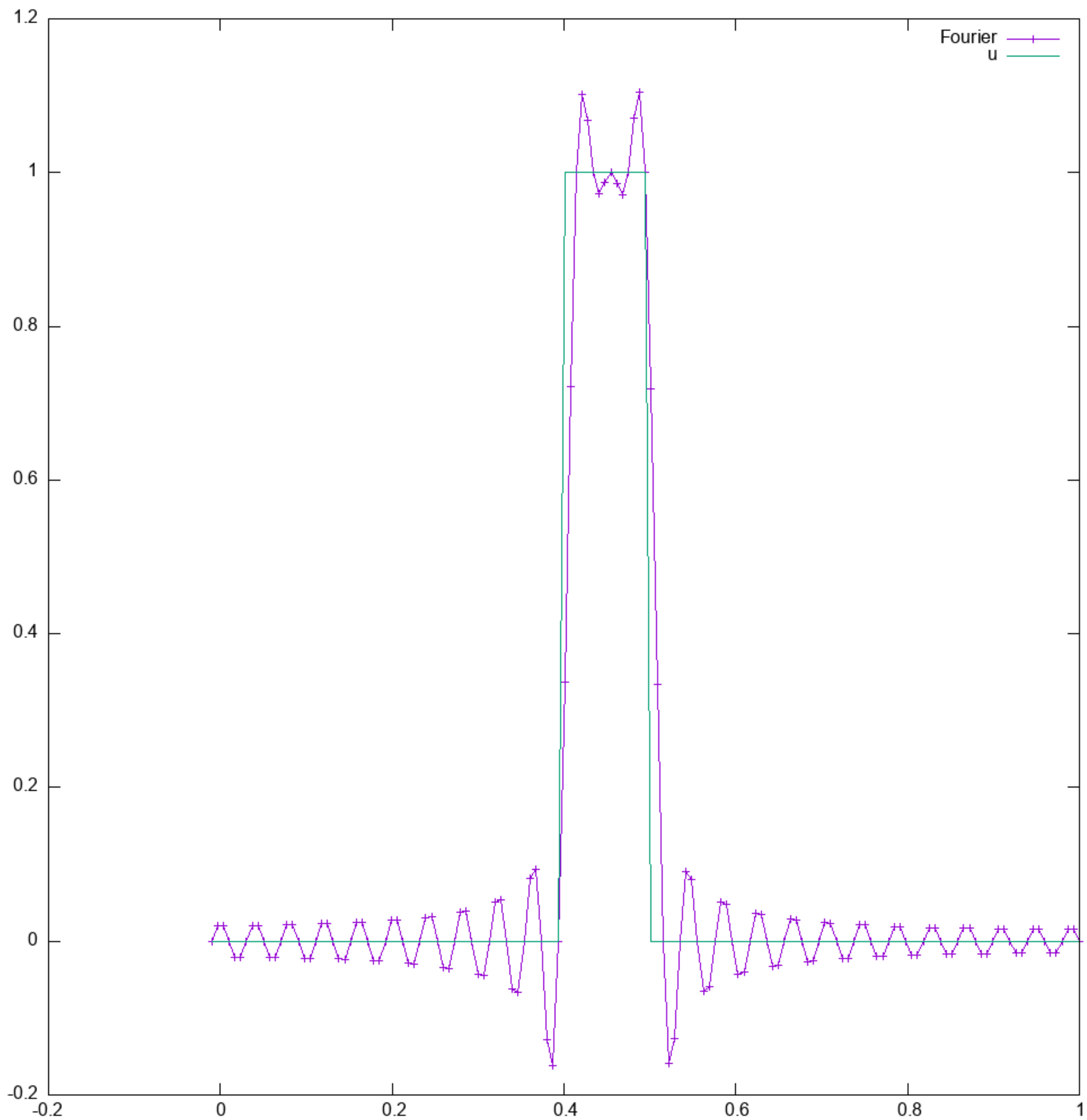

Рис. 6: Функция $f(x) = \mathbf{1}_{[0.4, 0.5]}(x)$ на 50 узлах.

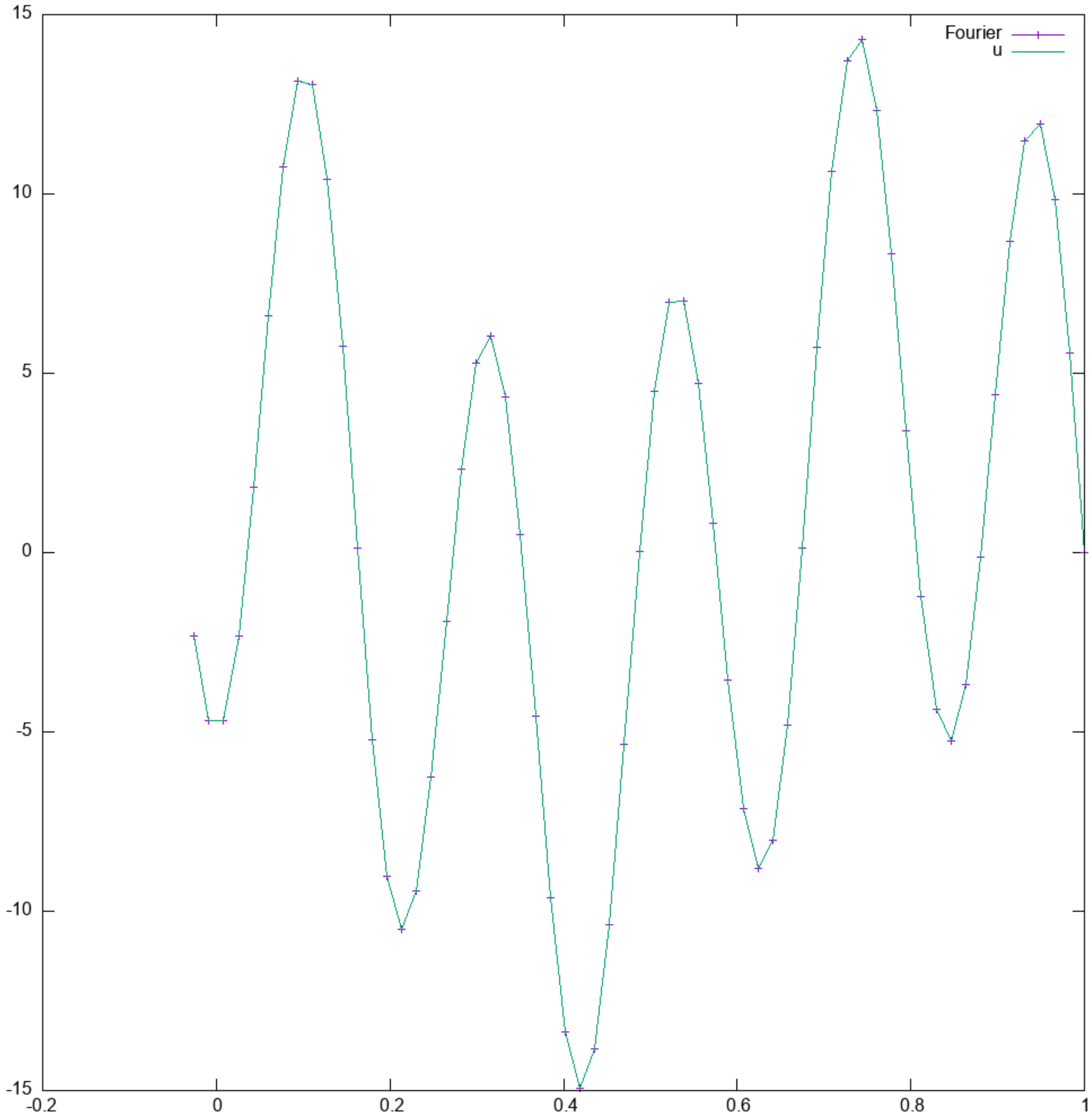

Рис. 7: Функция $f(x) = 5\cos(\pi(3 - \frac{1}{2})x) - 10\cos(\pi(10 - \frac{1}{2})x)$ - на 20 узлах.

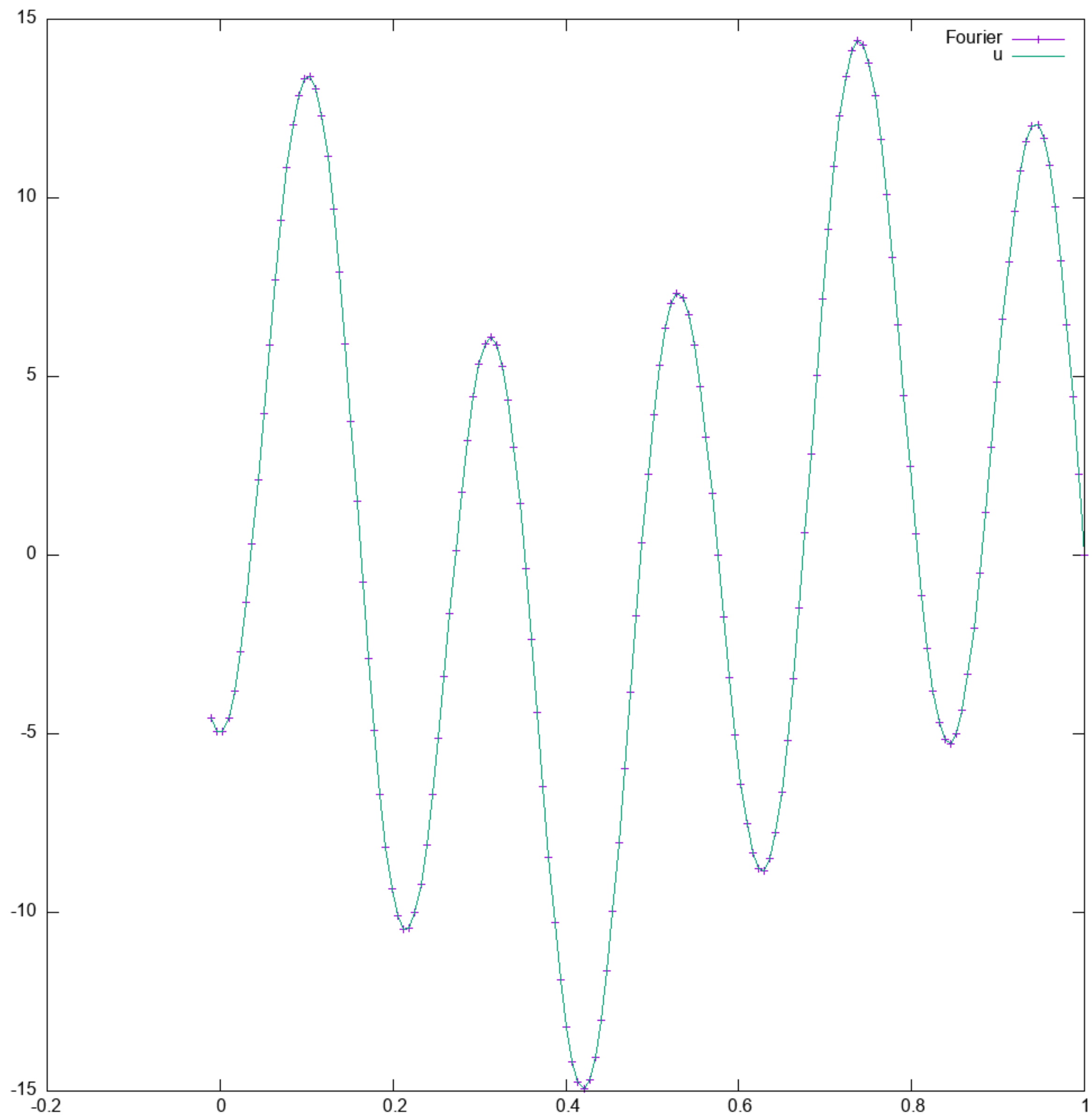

Рис. 8: Функция $f(x) = 5\cos(\pi(3-\frac{1}{2})x) - 10\cos(\pi(10-\frac{1}{2})x)$ на 50 узлах.

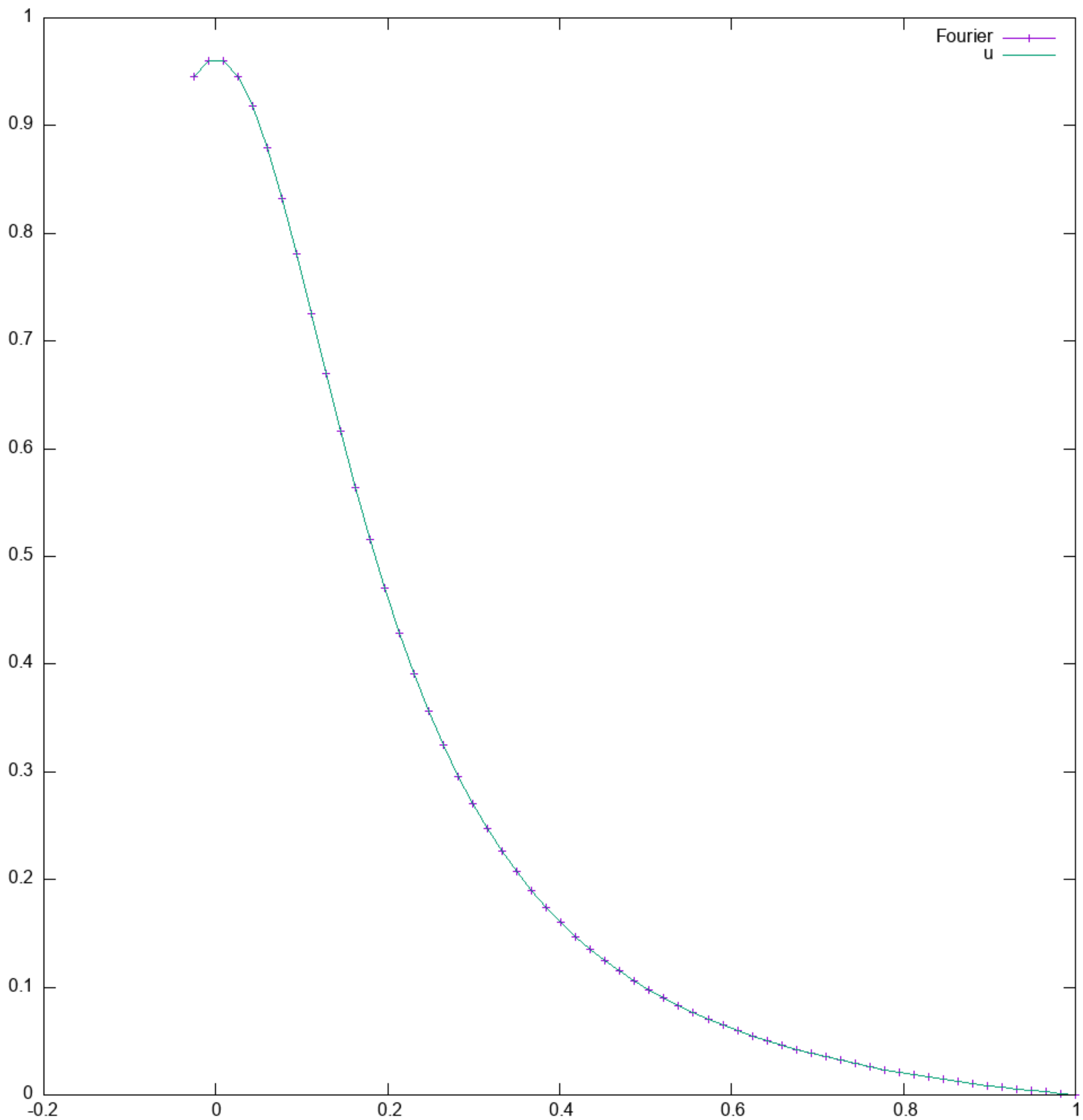

Рис. 9: Функция $f(x) = \frac{1}{1+25x^2} - \frac{1}{26}$ на 20 узлах.

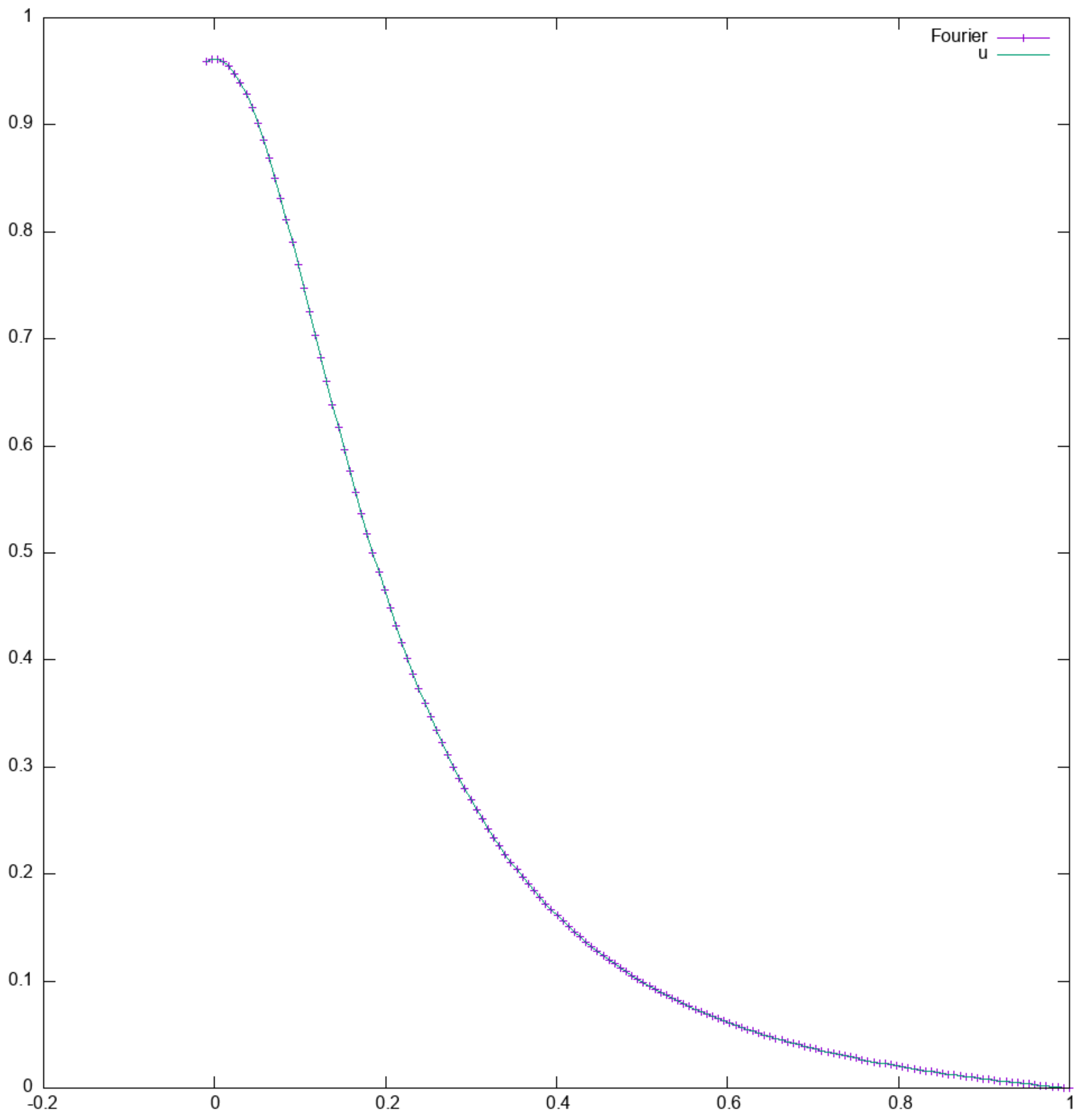

Рис. 10: Функция $f(x) = \frac{1}{1+25x^2} - \frac{1}{26}$ на 50 узлах.

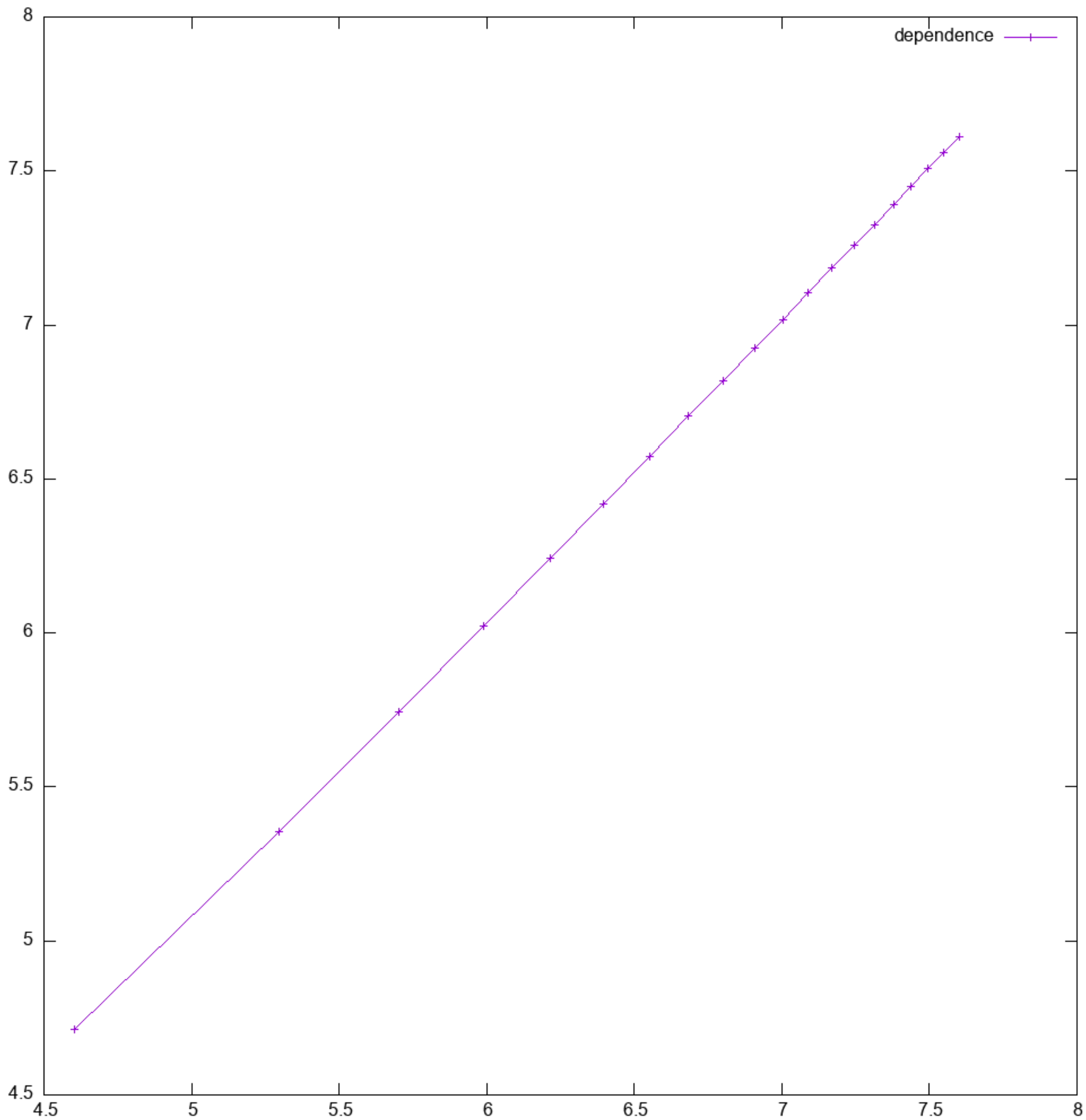

Рис. 11: Для предыдущей функция численно нашли порядок сходимости. И конченый результат $p = 4.90983$.