Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1) Для задачи

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u(x) = f(x)\,, \quad x \in [0,1],\ p(x) \geq 0; \\ l_1(u)|_{x=0} = 0,\ l_2(u)|_{x=1} = 0, \end{cases}$$

на равномерной сетке на трехточечном шаблоне построить разностную схему, имеющую второй порядок сходимости в $L_{2,h}[0,1]$–норме. Результат строго обосновать теоретически. (Операторы l_1, l_2 и тип используемой сетки определяются порядковым номером, т.е. краевые условия и сетка берутся в соответствии с задачей на собственные значения.)

2) В случае $b(x) \equiv \mathrm{const}$ найти решение построенной сеточной задачи методом Фурье, иначе — методом прогонки.

3) На примерах двух задач с известными решениями подтвердить теоретические выкладки численными расчетами.

Структура отчета по задаче.

Титульный лист.

Постановка диференциальной задачи:

$-y'' + b(x)y = f$ + краевые условия.

Разностная схема:

$-(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})/h^2 + b(x_k)y_k = f_k$, где $f_k = f(x_k), x_k = \ldots$,

а краевые условия ....

Th. Разностная схема аппроксимирует диференциальную задачу на решении с порядком $O(h^2)$.

Док.-во. ...

Th. Разностная устойчива в норме ...

Док.-во. ...

Th. Решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком $O(h^2)$.

Док.-во. ...

Метод решения: Фурье. Идея метода.

Th. Собственные числа и собственные функции матрицы имеют вид ... и ортогональны в скалярном произведении ...

Док.-во. ... (Допустима ссылка на соответствующий отчет.)

Sl. Метод Фурье разрешим при условии ...

Док.-во. ...

Метод решения: Прогонка. Идея метода.

Th. Прогонка для данной задачи корректна и устойчива.

Док-во. ...

Результаты расчетов. Почему программе можно верить?

Демонстрация сходимости $O(h^2)$.

Графики.