



心桥

54

“当我们在谈论数院人的2020年时  
我们在谈些什么”

Heart Bridge



**HEART BRIDGE**



# 卷首语

## PREFACE

第 54 期《心桥》确乎有些姗姗来迟。

随着新媒体的蓬勃发展，纸质媒体的影响力也在肉眼可见地衰弱。杂志和报纸已经渐渐地被束之高阁，取而代之的是各式各样的软件和平台。

由于部门事务的原因，我平时更多接触的其实还是新媒体工作。不得不说，一篇稿件从文字变成推送的过程确实是轻松愉快，只要有灵感，技术方面的耗时基本可以忽略不计。相较而言，一本刊物的推出，则需要经过征稿、采访、收集信息、遴选、排版、配图、印刷等一系列专业性强、复杂度高的程序，其难度令人望而生畏。然而，在新媒体带来的无序信息潮流中，工序繁琐、信息集成度高的纸质媒体也许将成为浪潮之中的最后一片净土。而我们经过了一年半的努力，希望为大家带来的，也正是这样的一片净土。

不过，这期《心桥》的风格和往期有些不同。这来源于我们在《心桥》制作过程中的一些思考。

在制作的过程中，我们也遇到了很多非常现实的问题，比如部门人数的紧张，投稿的极度缺乏，还有主题的频繁变动；我甚至一度萌生了放弃的想法。好在，我渐渐意识到，我们不应被前人走过的路束缚了手脚，《心桥》的内涵也不应该一成不变。既然曾经部门人数的辉煌和同学们的大量投稿已经成为过去，那我们就应该另辟蹊径，寻找其他把《心桥》做下去的方式。

后来，我与泓宇讨论后，决定把《心桥》的主题稿件的收集方式从原来的征稿转向信息收集和整理；同时也决定把《心桥》的选题角度更多地向数院里的日常生活迁移，以期它能够尽量贴近每一位同学的日常，刻画出属于数院人的生活群像。

于是，我们最终呈现出来的就是这样的一期《心桥》。它分为三个篇章，第一章记录了 2020 年数院同学们在疫情时代的生活，希望每一位同学们都能够从中找到自己的缩影；第二章是对本年度国奖五四得主的采访合辑，饱含各届同学的丰富经验，希望同学们能够从中有所收获；第三章则是对往期《心桥》风格与稿件的继承，是同学们整活搞事、展现自我的平台。

总之，这是一次尝试与改变。我们希望同学们能够在这本书中找到心灵的归宿，让这本书真正成为连接每一位数院人的一座“心桥”。

李东辰

## 04

## Chapter 1 不平凡的两学期

05

2020 春

05

January: 惊变

- 关于推迟 2020 年春季学期开学时间的通知（文 | 学生会）

06

Feburary: 迷雾

- 数院人如何优雅地度过元宵？（文 | 组织部）
- 数院人开学生活实录（文 | 组织部）

09

March: 磨合

- 为数院“主播”们打 call（文 | 刘水根）

13

April: 入微

- 网课时代的亲情：同一屋檐下的多人幸福（文 | 运营部）
- 生活实录：燕园云战役（文 | 团委）

18

May: 静流

- 燕园香径独徘徊，无限思量盼君来（文 | 周蜀林）

20

June: 告别

- 四载如初，一心向数（文 | 学生会）
- 这个特别的毕业季，他们陪你一起度过（文 | 任燃）

26

July: 黎明

- 数院手记（文 | 卢眺）

## 2020 秋：学院生活新变化

- 一塔湖图齐聚，美丽家园新启（文 | 学生会）
  - 同学们的感想征集（文 | 团宣）
  - 从零开始的双旦晚会
- (采访 | 殷琪川、李东晨 受访 | 吴清玉、方欣玥)

36

## Chapter 2 国家奖学金、五四奖学金

### 获奖同学采访

37

- 张喜悦：我与科研二三事（采访 | 陈泓宇、李东晨、孙云泽）
- 刘水根：本研路与学术情（采访 | 郭纬）
- 吴林桐：平凡中的不平凡（采访 | 陈泓宇、殷琪川）
- 杨舍：怀年少初梦，蹈无涯数海（采访 | 梁思威）
- 罗霄：科研中的酸与甜（采访 | 夏一航）

48

## Chapter 3 游于艺术

### Part I 游戏

- 幻方（文 | 郭纬）
- 最小数独问题（文 | 栾晓坤）
- 摆摊中的数学问题（文 | 黄桢）
- 浅谈游戏中的战斗数值公式设计  
——以 Dota2 为例（文 | 长尾）
- 数游奇境（文 | 陈芷芮）

### Part II 杂绘

- 几何画板绘图设计（图 | 温家睿）
- 手绘明信片合辑（图 | 袁昕）

### Part III 小说

- 打铁（文 | 景文博）
- 布局 · 定式 · 中盘 · 死活 · 三劫循环（文 | 皇甫涟）
- 鲁一假（文 | 小唐）

### Part IV 诗篇

- 0D940（文 | 江雨翔）
- 新年，新的梦想（文 | 江雨翔）
- 石女 · 其五（文 | 何离哀）
- 夜路（文 | 何离哀）
- 冬夜咏雪（文 | 传古）

# 目 录

《心桥 | Heart Bridge》  
总第 54 期

多了解数学  
陈省身

多了解数学  
陈省身先生为《心桥》题赠

主 办

数学科学学院团委

顾 问

胡俊 孙赵君 董子静

指导老师

李珣 张力今 崔孟龙  
李炳萱 牛贺 崔曦文

主 编

陈泓宇 李东晨 栾晓坤

美术总监

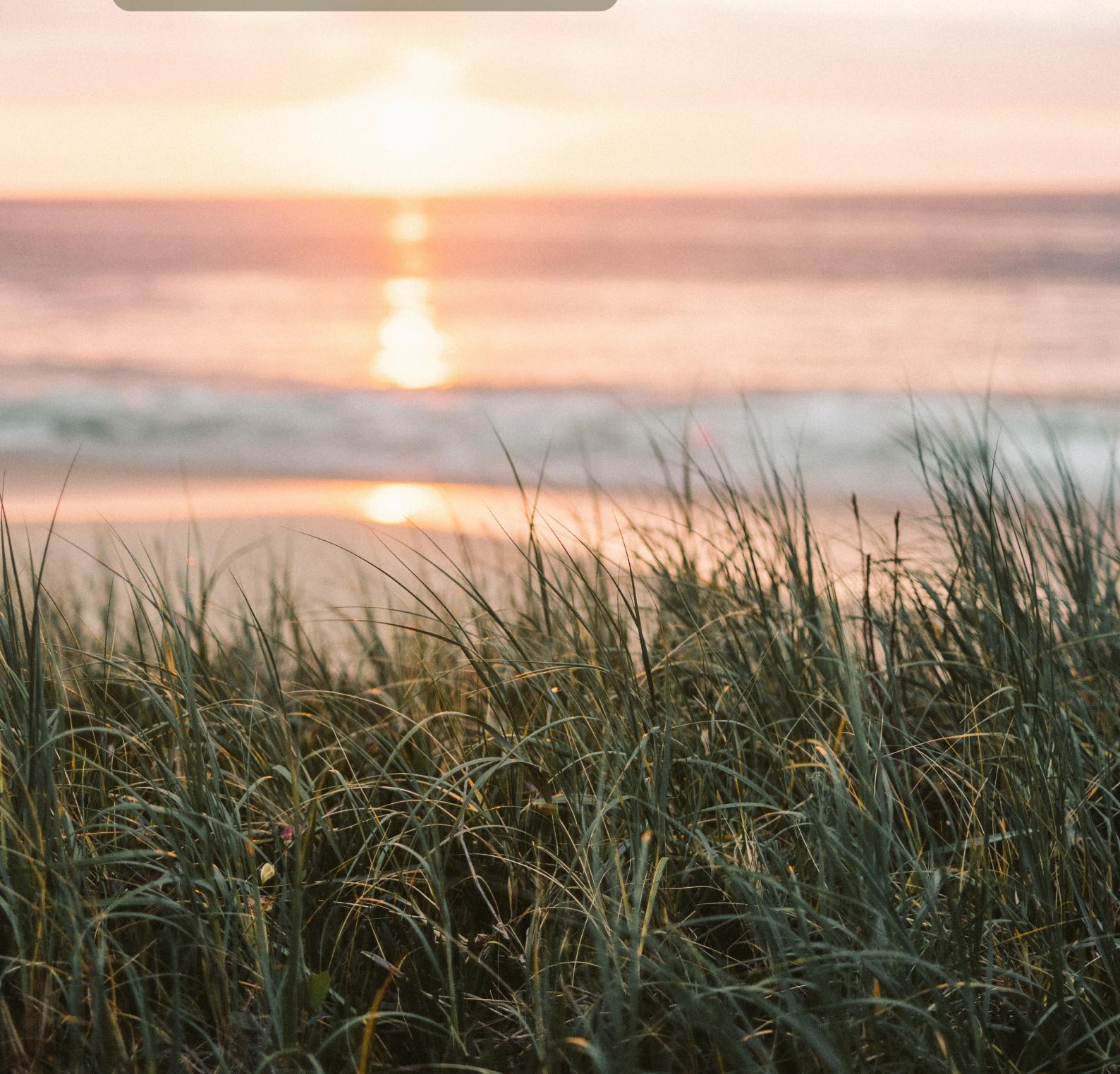
袁昕

编 辑

陈泓宇 陈芷芮 郭纬  
李东晨 梁思威 栾晓坤  
孙云泽 夏一航 殷琪川  
袁昕

# CHAPTER 1

## 不平凡的两学期



# 2020 春 January: 惊变

当群里发布开学时间推迟的通知的时候，同学们多少都有些不以为然；然而，此时此刻，新冠病毒正悄然向全国范围内扩散……

1月26日，一个普普通通的大年初二。和家人吃完饭，小A正躺在沙发上惬意地打电动，突然，伴随着手机的振动，一封新的推送出现在了消息栏里。

## 关于推迟2020年春季学期开学时间的通知

全校师生员工：

目前北京市已启动突发公共卫生事件一级响应机制，防控新型冠状病毒感染的肺炎疫情成为重中之重的任务。做好疫情防控工作，不仅关乎您和身边每一个人的生命安全和身体健康，也是每一位公民应承担的法律责任和义务。

按照教育部和北京市的统一部署，学校研究决定，推迟2020年春季学期开学时间，全体同学务必不要提前返校，具体开学时间和后续工作安排另行通知。

特此通知。

北京大学疫情防控工作领导小组办公室

2020年1月26日

(学生会)

多消毒勤洗手，不信谣不传谣  
少出门云聚会，有发热及早看  
数院学生会祝您和家人身体健康  
平安喜乐，新春愉快

小A心中窃喜，摸鱼时间又增加了，而且竟然有啥也不干在家躺着就能给社会做贡献的一天！于是，ta把应用切回电动，换了个更舒服的姿势躺着，继续愉快地打了起来。

## | Feburary: 迷雾

选课刚刚开始，学校通知，“暂时”在家中线上上课。  
一切都是那么陌生，令人不安，但数院人总有办法让自己躺平（x）

## 数院人如何优雅地度过元宵？

(文 | 组织部)

一转眼，就到了元宵节。虽然不能出门，但论起自娱自乐，小 A、小 B、小 C、小 D 都有着自己的独特想法。

### Part I 美食

元宵节，自然要吃元宵了！小 A 一口气搓出十二个圆圆的大汤圆，虽然形状和体积的分布有些随机，但是只要一口一个，总能胖到一百八十斤！



小 B 的午饭虽然没有汤圆，但是也有肉吃。不过，吃排骨的时候，麻麻悄悄地告诉 ta，这是年夜饭最后的库存了，明天就要开始吃野菜饺子了！



小 C 趁家人回来之前，自告奋勇，要做出一道元宵大菜。经过了一个小时的不懈努力和蒸煮煎炸烤炒六大工序，呈现在 ta 面前的是一坨像是刚被车轮子碾过的不明物体。



小D和麻麻来了一顿朴实无华的有鱼有肉配红酒的午餐。



## Part 2 生活

小A还在老家。虽然ta带了很多书本、文具和草稿纸，但ta表示，学习是一件神圣的事情，需要等待某种机缘巧合才能开始，总之，丝毫没有开始学习的意思。



小B因为疫情滞留在湖北家中不能出门。ta自己种了几盆小花，每天早睡晚起，浇三次花，撸四次猫。生活就是这样令人愉快，除了有些无聊。



小C是一名大四的学生。现在，ta一心忙着写毕业论文，无心欢度元宵。

Let  $\mathcal{L} = \{L_t\}$  be a family of subgroups  $L_t \subseteq H^1(G_{\ell}, X)$  as  $t$  runs through all places of  $\mathbb{Q}_{\ell}$ , with  $L_t = H^1(G_{\ell}/I_{\ell}, X^{I_{\ell}})$  for all but finitely many  $\ell$ . Such a family will be called a collection of local conditions. Define the generalised Schur group  $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, X) = \{x \in H^1(G_{\mathbb{Q}}, X) \mid \text{Im}(x) \in L_t \text{ for all } t\}$ .

Let  $\mathcal{L}' = \{L'_t\}$ , where  $L'_t$  is the family of  $L_t$  under the Tate pairing. By Theorem 1,  $L'_t = H^1(G_{\ell}/I_{\ell}, X^{I_{\ell}})^{\perp}$  for all but finitely many  $\ell$ . The following result is crucial in Whitehead's proof. It was inspired by work of Ralph Greenberg [G].

**Theorem 2.** The group  $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, X)$  is finite, and

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, X)}{\#H^1_{\mathcal{L}'}(\mathbb{Q}, X')} = \frac{\#H^1(G_{\mathbb{Q}}, X)}{\#H^1(G_{\mathbb{Q}}, X')} \prod_{\ell} \frac{\#L_t}{\#H^1(G_{\ell}, X)}$$

Note that  $\#H^1(G_{\ell}, X) = \#H^1(G_{\ell}/I_{\ell}, X^I)$  by Lemma 1, we almost all factors in the product are 1. The formulation of the theorem is that of [DDT], which differs slightly from that of [WE]. An easy exercise, using Theorem 1 and Proposition 3, shows that the two versions are equivalent.

In the applications,  $\mathcal{L}$  is chosen so that  $H^1_{\mathcal{L}} = 0$ . Since the terms on the right are fairly easy to work with, we obtain information about the group  $H^1_{\mathcal{L}'}$ , which for appropriate  $X$  describes deformations of representations with certain properties.

To show how the formula may be used, we now give an application in a fairly concrete setting. The techniques are much in the spirit of those used by Tate in his thesis [T] (with the Galois action), where  $p$  is an odd prime and  $S$  is a finite set of primes containing  $p$  and  $\infty$ . Let  $I_S = \prod_{\ell \notin S} I_{\ell}$  and  $I_{S^c} = \prod_{\ell \in S} I_{\ell}$ . Let  $L_t = H^1(G_{\ell}/I_{\ell}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . Then  $L_t = 0$  for  $t \in S$  and  $L_t = H^1(G_{\ell}/I_{\ell}, \mu_p)$  for  $t \notin S$ . Consider  $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, \mu_p)$ . From above, we know that  $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, \mu_p) \cong \text{ker}(\text{cycl})$  by a cocycle of the form  $\varrho \mapsto g\varrho/\alpha$ , where  $\alpha^p = a \in \mathbb{Q}^\times$ . To be in  $H^1_{\mathcal{L}}$ , it must be unramified everywhere. Since

$$H^1(I_{\ell}, \mu_p) = H^1(G_{\mathbb{Q}_{\ell}}, \mu_p) \cong (\mathbb{Q}_{\ell}^{\times})^{\times}/((\mathbb{Q}_{\ell}^{\times})^{\times})^p,$$

where  $\mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$  is the maximal extension of  $\mathbb{Q}_\ell$ , this implies that  $a(\ell) \equiv 0 \pmod{p^n}$  for all  $\ell$ . Therefore  $a = p^n$ th power in  $\mathbb{Q}$  (we can ignore  $\pm 1$  since  $p$  is odd) and the cocycle represents the trivial cohomology class.

We now evaluate the right side of the formula. First,  $\#H^1(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \#\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = p^2$ . Since we chose  $p$  to be odd,  $H^1(G_{\mathbb{Q}}, \mu_{p^2}) = 0$ . In the product, the terms for  $\ell \notin S$  are all 1. When  $\ell \neq \infty$  is in  $S$ , the factor is

小D已经打了整整一天电动了，高强度的脑力运动令ta感觉有些头昏脑涨。于是，ta翻开了尘封已久的小黄书，通过学习来放松自己紧张的心情。



# 数院人开学生活实录

(文 | 组织部)

何以解忧？唯有边看录播边摸鱼。

小A在家的一天是这样度过的。

- 7:00 起床 => 下载、注册：classin、zoom、腾讯会议、中国大学mooc、coursera、……，然后发了一条树洞：xxx有群吗？



- 9:00 补课 => 嘿！昨天的录播还没看！快看快看！



- 11:00 填写云战“疫”=> 又要班长和团支书来催了，我怎么就不长记性呢……



- 12:00 吃饭 => 方便面生菜加鸡蛋，简简单单的午饭！



- 13:00 上课 => 我想睡觉！平时我这个时候应该在睡觉呀！为什么假期已经过去了，为什么！>\_<



- 17:00 吃晚饭 => 家人下班回家啦！餐饮水平++



- 19:00 看新闻 => 盯紧每一条新闻！武汉加油！中国加油！



- 20:30 健身 => 身体是革命的本钱！



# March: 磨合

线上开学已经两周，选课尘埃落定；不安的氛围渐渐消失，大家也开始逐渐习惯疫情宅家的生活了。

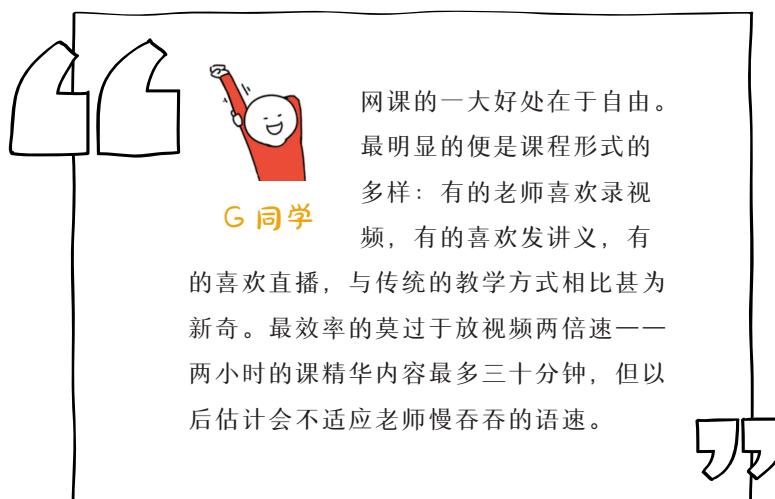
## 为数院“主播”们打 call

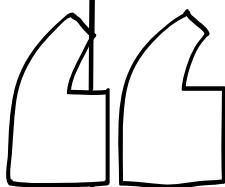
(文：刘水根)

### 一、同学听感

#### 1. 网课真香！

转眼线上开学已经两周了  
 同学们在各大网课平台辗转迷途  
 与“土豆服务器”斗智斗勇的手忙脚乱  
 已成为过去  
 在前所未有的网课时代  
 面对可爱的“主播”们精心准备的全新课堂  
 同学们开发出了众多有趣的打开方式  
 停课不停学，开心上网课  
 不少同学也渐渐有了“网课真香”的冲动





当网课变成录播以后，  
你可以听一遍、再听一遍——退回去，这块我好像  
懂了；快一点，有点爽！



T 同学



Y 同学

本学期选了一门课，只有 5 位同学（似乎再少一个人这门课就不开了 hh），体验很奇妙。或许有的网课可以后续看回放，可以一边吃饭一边上，但这门只有 5 位同学的课程要格外认真！当然也收获了与教授交流的最好机会。

## 2. 车速太快！



一节课顶别人两节了，总之上网课比平时一节课的容量大很多啊！

H 同学



虽然我选的课少，但老师进度快呀！

Z 同学

## 3. 不用占座，不用早起，这才是 freedom 的感觉！

最令人留恋的莫过于时间安排上的自由：本人原来每周平均 3.5 节早课，网课时代享受每天睡懒觉的待遇，免去了七点半起床赶时间买早餐飞奔至教室之苦。一天之内也不必在教学楼食堂与寝室之间奔走，省去不少时间。



G 同学



X 同学

在学校上早课，7 点半总要起床吧，甚至已经没有好座位；  
再家上网课，拢共分 3 步：  
叮我睁眼了—我开电脑了—我上课了



不过更有趣的  
是给同学们带来这些奇妙体验的  
**数院“主播”们**  
或是守着黑板对着空荡荡的教室  
依然热情不减上着课的身影  
或是同学们愿意打开摄像头  
积极互动时老师的微笑  
或是录课中突然闯入的  
猫叫和孩子的歌声……  
这些可爱的“主播”  
给同学们留下了许多有趣的故事——



## 王冠香老师 数学分析Ⅱ

### 教学计划

- “大家好，欢迎加入老王数分 2019”
- “大家好，上课采用视频录播”
- “大家好，我将在教学网上发布资料”

### 实际操作

- “告诉大家一个不幸的消息，由于北京政策外来人员必须隔离 14 天，我们采用 ppt 讲解录音”
- “告诉大家一个不幸的消息，尽管我花费了好长时间研究教学网，也认真看了指导视频，可就是搞不定教学网，我在微信群发吧”



## 王福正老师 高等代数Ⅱ

最近发现王老师特别会玩，大概是因为上学期课程没开微信群吧。

“第一次在一个没人的地方自言自语，感觉怪怪的。”

“写完了字回头一看，咋没人呢？心里咕咚一下，差点忘了讲什么 [ 捂脸 ] 慢慢适应吧 [ 捂脸 ]”

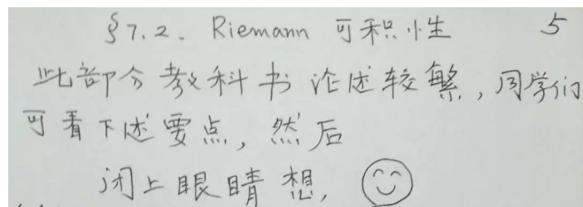
（讲到多项式长除法）

“余式什么的一定要对齐，不然……”

现场表演计算  $40 \div 5$  得 7 余 1，随后一本正经地以竖式乘法检验之。（事后搬运了一个抖音上一模一样的视频，说是活跃气氛，哈哈哈哈）

## 刘培东老师 数学分析Ⅱ

刘老师主要写讲义，一大特点便是字巨大（板书亦是如此），比课本的群蚁排衙舒畅许多，不算优美但很整洁。



“闭上眼睛想，让证明的细节化为意识的流动，当你冥冥中感觉到意识流到那个地方的时候，一切困惑自然而然就解决了。”

## 阳恩林老师 代数讨论班

网课试运营中的名画《大家试试小黑板》：



## 赵玉凤老师 高等代数Ⅱ

我最心爱的数院老师主播当然是赵玉凤老师了。赵老师喜提开学第二堂课，刚开始老师对直播环境还很不习惯，对着空荡荡的教室忍不住叹气，并用她的“赵氏幽默”对着镜头说：“空气们，你们听得见吗？”

随着课程进度的增加，老师也渐渐适应了直播的环境，在这期间我们也逐渐获知了赵老师的爱人奔赴抗疫一线，而赵老师坚守在北大讲台。赵老师对我们说：

“期待樱花快开，你们早点回来，我们面对面讨论高等代数。”

## 李若老师 流体力学引论

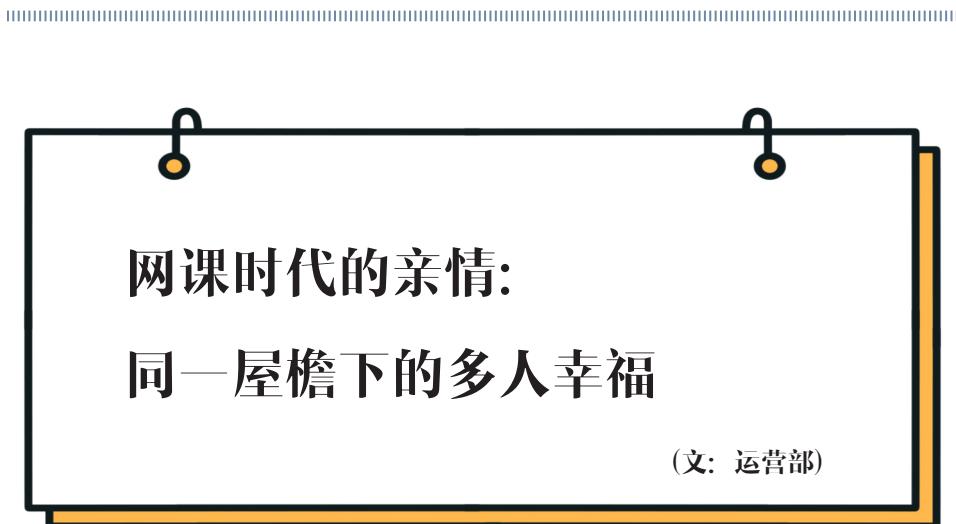
李老师的录播视频会在周四更新，凌晨蹲老师的新视频居然有种追番的感觉……

老师的新麦克风还没到的时候，每次听他的课都会见证一次他和自己的麦克风斗智斗勇的过程（不过神奇的电流声让他的声音听起来也很有趣 hhah）。

老师录课时，听着听着偶尔会听到猫叫，非常可爱！

# April: 入微

期中季临近了，大家盼望已久的中期退课不计 W 也姗姗来迟。随着和亲人陪伴之间的增长，大家也开始关注起了宅家生活的诸多小细节。



离家读大学的我们，本以为这次寒假是和父母的短暂重逢，却没想到突然收获了好几个月相处时光。在这个难得和父母超长长长长长相处的几个月里，你是否也重新“见识”了老爸的风流油腻、老妈的贴心唠叨？不少同学向识数鸡分享了自己的宅家故事，充满了与父母斗智斗勇的有趣日常。

## 一、与父母的沙雕日常

① @ 佚名

在美股熔断之前怂恿父亲清仓被采纳，成功拯救大批资产。

② @ 林导

他们总是叫我别打游戏了。

③ @ 静希

某天为了向我妈证明我学的东西不是那种整天只算加减乘除的，我试图给她讲了一点抽象代数，解释了半天群的乘法为什么会是不交换的，成功地让她认为我一个大学生连乘法都搞不清楚。

④ @ 佚名

晚上给水果榨汁，我认为水放多了，妈妈却坚持是糖放少了，并嘲讽我不会小学的浓度问题了。

⑤ @ 佚名

似乎在我的影响下，父母也睡得越来越晚。

⑥ @ 佚名

每天父母都要花半小时喊我起床。

⑦ @ fzr

我妈说要和我一起锻炼，第一天和我一起跳绳。第二天和我一起跳绳。第三天：你赶紧跳，我歇歇。第四天：你赶紧跳，我先睡了。

⑧ @ 不愿透露姓名的李同学

刚回家的时候我妈经常对着我喊我家狗的名字，在我宅家将近三个月后，我妈已经开始对着我家狗喊我的名字了。

## 二、温馨瞬间

@佚名：

我头部撞破了，妈妈每天下班给我敷药。

@佚名：

妈妈有时间烘培了，甜品鸡腿什么都做，我也胖了。

## 三、两代人的小隔阂

但是也有的同学表示“我太难了”，似乎与家长交流的脑电波出现了阻碍。不管是由于生活时代和接收信息的不同而导致的理解偏差，还是对一些观念的认同程度不同，似乎谁都无法说服对方，产生了陌生和疏远、甚至主动想要远离的隔膜。在生活里的种种小细节的磨合过程中，似乎只是产生了更多的烦恼。那么我们又应该如何去看待呢？

编者觉得：尽管我们与父母偶尔出现点滴分歧，但只要存在着愿意交流、渴望相互理解的温情，一切罅隙终能渐渐填平。父母们有时很敏感，有时很笨拙，让你感到无奈又哭笑不得，但其实从这些行为中透露出来的是他们对我们的关心与爱。

或许很多同学与父母的交流就像图中一样，仅仅只是父母单方面发一些他们认为或许对你有用的推送而你却无所回应，不曾点开看过，也不曾回一句收到，一句谢谢，但他们仍然在努力支持着你的每一天，渴望与你交流、助你无忧前行。在这个长长的疫情时期，为何不珍惜这个难得的机会，敞开彼此的心扉，回一句收到，道一声谢谢，侃一侃家常，谈一谈生活，聊一聊未来，讲一讲数学，向他们展示你的世界？

那表面的毫不在意，是专属于父母的“傲娇”的爱呀！

**推送老爸**

**【夜听】《三国演义》中的三个处事法则**

星期一 下午 12:46

**思维的8层境界：常人只到第4层，到8层可成神！**

人和人最大的不同是思维境界的不同。

昨天 凌晨 5:52

**特朗普、个人主义与西方社会的未来**

特朗普和他的奴才们在争先恐后步入深渊方面，已经处于遥遥领先的位置...

● 亚当斯密经济学

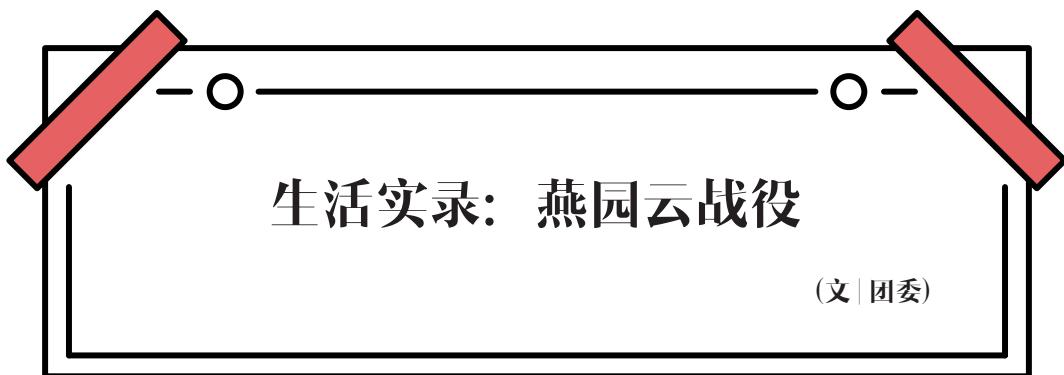
昨天 上午 6:36

**从“四渡赤水”看逆境突围：想保住一切，就什么都保不住**

“四渡赤水”逆境突围的战 略与领导力

湖畔大学

😊 +



坐上时光机，回到两个月前



你已加入“宅”家战疫大军

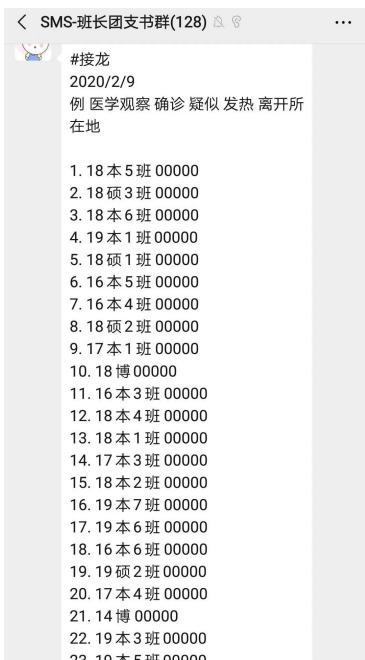


你正为传说中的网课搓手搓手



你还迎来了！丝！变！化！

从这样！



变这样！



经历过 2020 的班长和团支书

不会忘记一个字

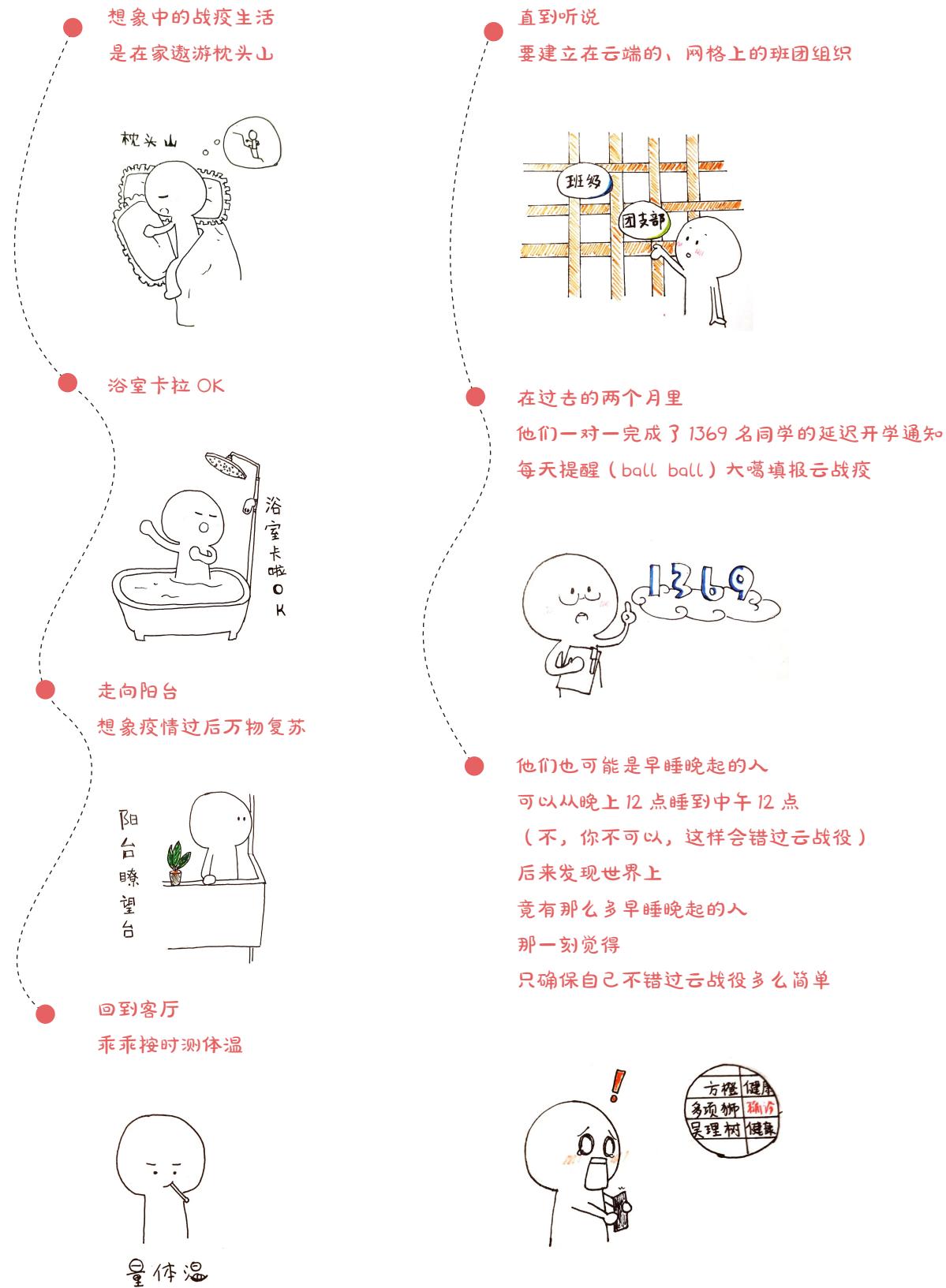
云！

不会忘记一个词！

报！

填报！

补报！



● 偶尔有同学填写“确诊”

吓得他们虎躯一震

(幸好都是误填)

后来零点一到

班群就有一阵“骚动”

“可以填啦”

“蹲一个第一”



● 甚至有人

研发了“云战疫”专属闹钟

然而这并不影响错过云战役

“我三次想填云战疫

但四次睡了过去”



● 不得不说

没有一段时光

和同学们联系得如此紧密！



● 甚至激发了创作才华



李霖（数院19本7班）

@所有人  
春风杨柳万千条，六亿神州尽舜尧。  
春寒犹在，疫情未消，坚持填报，  
早日还朝。



李霖（数院19本7班）

@所有人  
灵偃塞兮姣服，芳菲菲兮满堂；五音纷兮繁会，君欣欣兮乐康。愿在国内疫情的冲刺阶段，所有人都好好保重，并且记得填写云战疫。



李霖（数院19本7班）

@所有人  
青山一道同云雨，明月何曾是两乡？疫情紧迫，凝聚起全世界团结合作的抗疫合力刻不容缓。战胜关乎各国人民安危的疫病，团结合作是最有力的武器。让我们秉承人类命运共同体理念，风雨同舟，荣辱与共；摒弃一切傲慢和偏见，戮力齐心，守望相助；积极填报云战疫，共泽同裳，碧血丹心！

● 让我们一起努力

在他们提醒 (ball ball) 之前  
已经动手完成填报

继续成为一个可供研判的统计数据  
为战疫做出自己的贡献



咦？为什么是到11点

理想状态（可以忽略）

不是早点搞定不好吗……

# I May: 静流

人对生活的适应能力是潜移默化却惊人的。起初轰轰烈烈的宅家生活，不论喜不喜欢，都已成为每个人的日常。

## 燕园香径独徘徊，无限思量盼君来

(文：周蜀林)

1月17日从哈工大回北京，时间已过去三个月。由于新冠病毒的缘故，未曾离开过北京。从最初的数据来看，新冠病毒的毒性比03年的SARS病毒弱，但其传染性更强。随着武汉封城和全国防控，气氛日渐紧张。但我认为，由于国力的增强、医疗水平的提高和科学技术的进步，新冠病毒很快会得到彻底控制。北京不是这次疫情爆发的中心，2020年的北京远比2003年的北京更安全。在抗疫前方，不辱使命的医务工作者及服务人员在为大家拼命，在后方的我们做好自己的事就是对抗疫的最大贡献。

我努力使我的生活如旧，工作如常。我安心，同时努力地使我的研究生们安心。初四（1月28日）给同学们发了一份问候信，介绍SARS期间的应对经验，比较新冠病毒和SARS病毒的特性，了解他们的居住地，敦促他们勿忘学业。在国内疫情最严重的时候，我的两个在德国访学的博士生积极给国内捐款捐物，其中一位还特地给我邮寄来口罩，这很让我感动。我很欣慰地看到他们在疫情中成长，在危难中关心他人，在困境中坚持学习。

这学期我教研究生课。我认为一个合格的研究生应该培养出良好的自学能力。鉴于各种线上平台的局限性及学校资源的有限性，我的课程的教授方式有很大的调整。我给选修或旁听我的课程的同学们及助教建立了微信群和电子邮件群，以指导同学们自学。每周日或周一上午撰写一周的教学大纲，将大纲扫描成pdf文件。教学大纲包括本周的学习内容，关键之处及相关文献。同时，准备本周作业。最后将教学大纲、作业和相关文献发给同学们及助教。每周二上午和周四上午在微信群里与同学们讨论问题，解答他们的疑惑。我必须承认这种方式更适合自我驱动力更强的同学。特殊时期的确难以兼顾所有同学，只能有所取舍。这种方法貌似简单，实践后发现这种方式比录播还要花时间。只是希望同学们能学会课程的核心内容，并能提高自学能力。

新冠病毒需要宿主才能存活，因此保持距离是最有效抗击疫情的办法。无人无病毒。在这些日子里，曾经作为唯一的乘客，我坐过地铁专列，也乘过公交专车，也开车走过空旷的专用车道。我见证了几乎静止的北京重回车水马龙。

这段时间我只去过四个园子。

去过一次的园子是圆明园，初一陪远道而来的家人去游园，感受过年的年味和分享重聚的喜悦。在亲人的欢笑声中，我们徜徉在圆明园里，尽管满园皆为枯黄。



去过两次的园子是植物园。一次去探索上下山的路；一次是为了上山。两次都在植物园的初春时节。植物园里春意盎然，百花斗艳。在清明前夕，在西山背面人迹罕至的小平台上，独自一人观赏西山晴雪。此时此景，想起由于新冠病毒而逝的医生和患者，想起已故的父母双亲，不禁肃然起敬。西山晴雪如旧年，满坡白花为君开。



去过至少五十次的园子是颐和园，大多数是上下班路过，少部分是专程去赏雪和观花。我曾独自在漫天飞雪里漫步在西堤上，此时昆明湖里一半是冰，一半是水；我曾雪后初霁时登上万寿山，观颐和园的茫茫白雪，听四大部洲的清脆梵音；我曾徜徉在画着彩妆的西堤上，此时千树花开，绿柳吐芽；我曾春雨后徘徊在东堤上，看白云萦绕着香山之巅，听春风吹起昆明湖的波涛。



还有一个园子，来过不下七十次，那就是燕园。我见过黑漆漆的理科 1 号楼，走过空荡荡的未名湖畔，在寥无几人的勺园进餐。在严冬的后湖边，看冰封的残荷和落叶；在冰雪渐融的未名湖旁，观挂着残雪的博雅塔；在初春的晨曦里，闻燕园里的第一丝花香；在晚春的夕阳下，看未名湖的春光荡漾。从冬日走进春天，从清晨走进黑夜。日日夜夜，享受孤独；朝朝夕夕，心存感恩。守望在空空的校园里，守候在寂静的书桌前。年年岁岁花相似，燕园香径独徘徊。正是一年春好处，无限思量盼君来。



这三个月，与往年相比，注定不一般。这三个月，铭刻在我们的记忆中。借用这篇短文，记录这一段忧心而静美，孤独而充实的岁月。

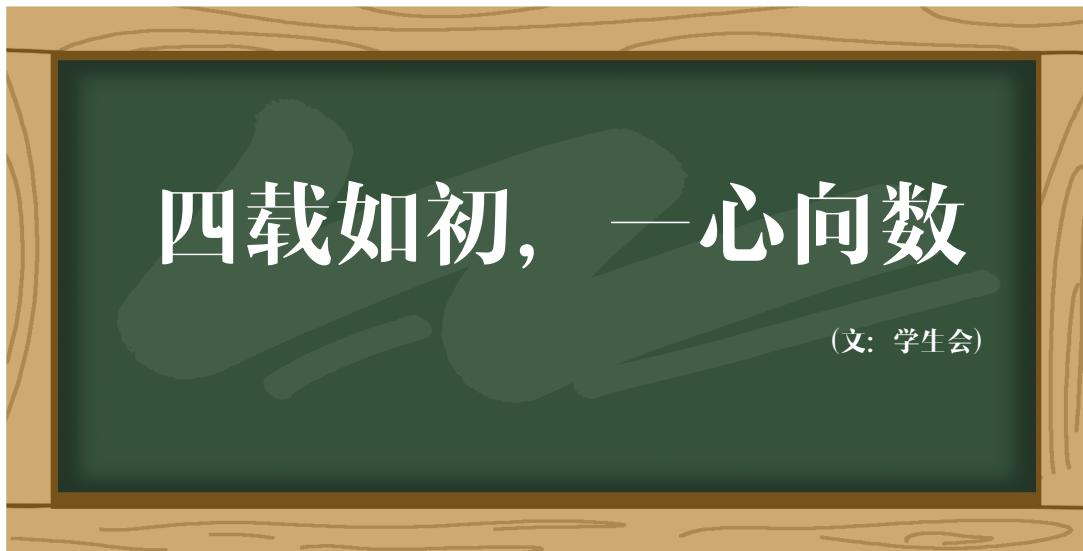
周蜀林

2020 年 4 月 22 日于燕园

## | June: 告别

当大部分同学开始按部就班准备期末的时候，还有许多同学度过了一个非常特殊的毕业季。这四年的生活也许充实饱满，也许还不尽如人意，但，终究是过去了。





熟悉的铃声第三次响起，你揉了揉朦胧的双眼，挣扎着从床上起身，拿过手机，点亮屏幕。

对于即将毕业的你，几点起床似乎已经不再那么重要。比起时间，更引人注目的，似乎是那一行平时你并不在意的小字。6月26日，6月27日，6月28日……只是屏幕上某个数字的跳动，却真实地预示着那一天的到来。

毕业，一个曾经那么遥远的概念，如今真实且鲜活地走到了你的面前，他迫不及待地拉起你的手，想牵着你走向更加遥远且光明的未来。哎，这一天终究还是会来，摇了摇头，你笑了。你恋恋不舍地回头，望着那些一路走来或深或浅，或清晰或模糊的足迹，脑海里便浮现出四年来的点点滴滴：

### 2016 年 9 月

你终于来到了仰慕已久的燕园

对海淀“赌场”早有耳闻的你打开了选课网，又在学长学姐的建议下打开树洞搜起了各科的测评。你一遍又一遍翻看培养方案，生怕漏掉一点点细节。最终，你改了又改，把最多的点数投给了自己最想上的一门课，在朋友圈自豪地发了一条“买定离手”。

你住进了刚建成一周的28/32楼，每间宿舍里放着一台超大型风扇。夏末的余热伴着不那么好闻的气

味扑面而来，但你闻到的却是四年大学生涯的起始符。

开学的第一天，你起了个大早，刚过七点就踏入了早八的教室，抢占了一个前排的座位。第一节课的内容虽然简单，但你一点也不想落下，认真地记着笔记。下课后，你意犹未尽地和室友讨论着黑板上的戴德金分割。

你本以为可以睡到七点再起床上课是大学最人性化的规定，但过了几周之后，你还是越起越晚……博实的面包牛奶也渐渐取代了农园的扁肉拌面，没吃早餐无关紧要，但晚上路过博实时的那根糖葫芦却是必不可少。

你第一次睡过了早八，在八点五十分的时候灰溜溜地从后门溜进了教室。你东张西望，害怕老师同学注意到你。直到旁边的同学告诉你还没有点名时，你才放下心来。

你为了加入学生会，紧张兮兮地问着新生群里的学长学姐关于面试的问题，可面试时的各路奇怪问题还是打败了你。即便如此，最终你还是成功地成为了学生会某个部门的小部员。

这一年发生了太多的第一次，你经历了大学里的第一次考试、第一次在燕南站着吃饭、第一次在百讲看演出、第一次在静园草坪仰望星空……当然，北京的第一场雪也来了。南方同学在看雪，北方同学在看没见过雪的南方同学。

你即将踏入大一的暑假，享受近三个月的假期。学长学姐说，这或许是大学第一个也是最后一个无忧无虑的暑假。

你怀着期待却又难免抵触的心情，顶着烈日来到了怀柔。你时不时抱怨一站就是半小时的军姿，让你被骄阳晒得蜕了一层皮，平时爱干净的你没法天天洗澡而心生怨气，但是你还是在拉练时忙里偷闲和同伴有说有笑，在晚会上尽情地挥舞着荧光棒。最后一天挺起胸膛踢着正步走过主席台的那一刻，你把这十余日的苦涩全都化成了会心一笑。

## 2017 年 9 月

你在经历了漫长的暑假和军训之后，又回到了校园

你的身份悄然发生了转变，你已经从学长学姐口中的小朋友，变成了新生眼中万能的学长学姐。

在堆满了OFO的校园里，你大一时候买的自行车显得多余且尴尬，教学楼附近一位难求，你常常需要把车子停到很远的地方再走到教室。

课程变得越来越难，抽象代数这门课学到你怀疑人生。你完全不理解，当年比你还小的伽罗瓦，是怎么创造出这样一套理论的。

你开始坦然面对自己会睡过早八这一事实，也开始熟练地将作业托给室友保管。一百多人的早八专业课只来了二三十人，你的内心也不会产生任何波澜。

学生会那篇恋爱分析的推送一夜爆红，你看着朋友圈里各个学校各个专业的同学都在转发，甚至有些不常联系的高中同学，都私聊给你转发这篇推送。你忽然想到了那个你曾经很喜欢的TA，这近两年的时间里，你再也遇不到像TA那样让你内心小鹿乱撞的人了。

有些大一时你认为不急着考虑的问题，现在则不得不去面对，选什么专业？出国还是保研？本研要不要做？找哪个老师作为导师？

当然，还有：我要成为怎么样的人？

## 2018 年 9 月

你们小群里的朋友们各自选择了不同的方向，少

了那群下课之后叽叽喳喳的伙伴们让你一下有点不太适应。幸好你还是可以和群里的鸽子们快乐地约上一顿艺二早餐，如果不是每个人都晚到了半个小时，那可能会更加快乐。

虽然专业课上少了小伙伴的陪伴，但是越来越难的作业促使你结识了更多的大腿。

大三的你，终于拥有了梦寐以求的空荡荡的课表。你暗自发誓要专心投身于科研，打印出的论文撑爆了你的文件夹。结果，你发现打印出的论文，最大的用处是可以用来当草稿纸，来应付那堆积如山的课程作业。

出国？保研？考研？还是就业？成了你每天都会纠结的问题，你想找朋友们聊天减轻焦虑，却发现大部分人也和你一样迷茫。虽然没法在和朋友的闲聊中一下子找到答案，你们的对话中也充斥着发泄情绪的三字经，但每次最后的一句“不说了不说了，加油干活吧”总能让你平静下来，一步一步向前摸索。

新太阳门口的长长队伍，帐篷里的通宵微光与欢声笑语消除了你熬夜的疲惫。星光熠熠的十佳舞台伴随着黄霄云的美妙歌声在你燕园记忆中画上了浓墨重彩的一笔。

大三的一年比以往的任何一年都过得更快。在焦虑与憧憬的缝隙中，你找到了属于自己的位置。未来也像山那边的大海，越来越明晰。“我成为了童年时候期望成为的人吗？”你问自己，答案似乎显得不再重要，因为你在山腰上，已经听见了浪花的声音。

## 2019 年 9 月

不知不觉，你总算可以用“大四狗”来称呼自己了

大三的暑假被实习、暑研、夏令营牢牢占据着。终于，绩点不再是洪水猛兽，pkuhelper 上的比色盘也看上去顺眼了不少。身边的同学们似乎也忙起了各自未来的事情，找工作、做科研、申请出国……和朋友见面的机会少了，但你依旧时不时放下手头的事情，问问大家的近况。

你开始尝试更多新鲜的事物——当一门课的助教，培养一个爱好……你渐渐弥补上前几年忙于学业的遗憾，参加起了大一加入、却当了三年幽灵部员的

社团的活动，完整地旁听一门你进入大学时就仰慕的教授的课程。

一月，你简单收拾了一个行李箱离开校园，想着过完春节早点回来，享受最后一学期的燕园生活。你以为你也会和你的学长学姐们一样，在未名湖畔度过一个难忘的毕业季。

你为自己的最后一学期立下了许多 flag，你列了一份长长的 to do list，你畅想着你的毕业旅行 ..... 你想在这半年里，再好好地感受一下校园，再认真地看一眼身边的人。

## 2020 年 9 月

谁也没想到这个毕业季竟如此的特别

本打算好好在教室上完最后一学期课的你，完全没想到自己居然会穿着睡衣翘着二郎腿在电脑前上一学期的课。

你在毕业论文上郑重地写上了最后的致谢。这四年，你要感谢太多的人，室友、学长、导师、父母..... 甚至是某个深夜在树洞上听你倾诉负能量的素未谋面的 Alice。和你心中的感激相比，那短短几页的致谢显得有些无力。你想，如果还能回到学校，你一定要亲自和这四年来自帮助过你的人道个别。

你想再去南门外喝一次砂锅粥，去小西门外吃一顿鹤一，去佟园吃一次涮羊肉，去勺园吃一顿香锅..... 听说校园旁饭店的日子都不太好过，你默默祈祷他们能够挺过疫情，等待疫情结束回到学校一定多多光顾。

五月，你听说毕业年级可以回到学校，参加毕业典礼。你即刻打开预约通道，抢到一张最近的火车票。你回忆着校园的点点滴滴，真想立刻回到未名湖畔，穿上学士服，和好朋友留下最珍贵的回忆。

你在线上完成了毕业论文的答辩，老师们祝你毕业快乐。你查完了最后一科的成绩，这四年来自起伏的绩点，全都化为了过去时。

可是你最终没能如愿回来，北京的突发现疫情给返校按下了暂停键，你只能和大多数同学一样，继续待在家中等待安排。所幸等来了些好消息，你可以在明年补上自己的学位授予仪式，虽有遗憾，但也还算圆满。

你以为四年会很长，其实不过弹指一挥间。

未来的人生旅途中

你可能投身学术

追寻数学梦想

也可能步入社会

为更好的生活奋斗

有幸与你同行的人就像数轴上的有理数

你尽可以说出很多

而在茫茫人海遇见的概率却是零

这个不大不小的园子

已然成为了你心中家的模样

你和他们一样

来自江南塞北

走向海角天涯

希望你不要忘了来时的梦想

四载如初，一心向数

# 这个特别的毕业季， 他们陪你一起度过

(文：任燃)

## 1. 毕业答辩

截至 2020 年 6 月 12 日  
数院第一批毕业答辩圆满结束  
136 名即将毕业的研究生  
完成了自己的毕业汇报  
83 位北大数学学科教师  
作为答辩专家  
全程参与答辩  
并向毕业生们送去了  
珍贵的学术指导与临别祝福  
10 位行政教师作为技术秘书  
精心安排着每一场答辩

在无数个辛苦却满怀期待的日子里  
四处奔忙，朝夕不倦  
他们连夜挂出温馨的欢迎条幅  
在理科一号楼的门厅竖起欢迎牌



## 2. 返校工作

2020 年 6 月 6 日  
北大数院迎来了首批归来的毕业生  
2020 年 6 月 13 日  
第二批毕业生返校  
截至目前，共有 62 位数院毕业生  
回到燕园  
为了迎接重逢的日子  
学生工作办公室及团委的老师们

静静等待着回家的数院人  
“对你的思念从不收敛没有上限”  
“每天都想你，满足叠加原理”  
.....

无论线下还是云端  
愿你都能感受到那份思念  
他们还为每一位返校的毕业生  
准备了健康关怀礼包  
第一时间将口罩、消毒棉片、酒精等物品



送到同学们的宿舍  
每一份物资都承载祝福  
每一次看望都满怀喜悦



由于北京市疫情及防控工作变化  
返校工作暂停  
学工及教务的老师们又连夜用电话  
和邮件  
与准备返校的同学们进行沟通  
每一通电话  
每一封邮件  
都有他们的遗憾  
更有他们满满的关怀

3. 其它工作  
在这特殊的毕业季  
教务老师的桌上  
多了很多需要帮忙办理的转单  
收寄各类材料成了他们的日常  
空空的校园里常见他们奔走的身影  
邮箱里满是各类咨询邮件  
办公室的电话更是响个不停  
学工办的老师们  
推荐各类靠谱工作信息  
把工作机会送到同学“手边”  
他们登记户口迁移地址  
统计派遣单位  
帮忙办理各类毕业手续



他们把《毕业生登记表》  
亲自送到毕业生宿舍  
奔走于几个部门之间  
为同学们的就业材料盖章  
再分别寄给就业单位和同学本人  
综办的老师们  
更是早早就准备好每一件学位服  
等待着回来的毕业生  
去定格最后的燕园记忆  
.....

希望这个不能相拥告别的毕业季  
能成为你人生中一段别样的记忆  
希望终有一天你们可以再回燕园  
补上一组珍贵的毕业合影  
愿我们一起赏花、听雨、读书的燕园  
会成为你们未来时常惦念的家  
要记得这里有牵挂你们的“家人”

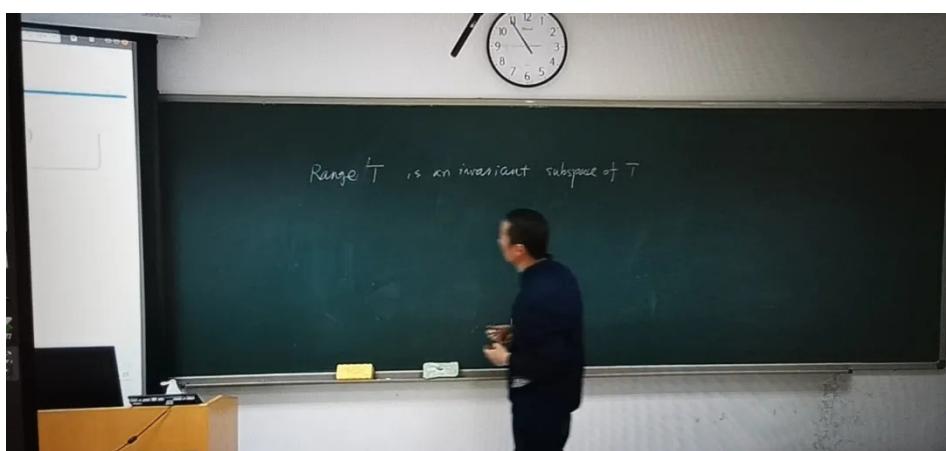


## July: 黎明

天光斜落半城明，卷云骤开雨亦晴。院子里的树从枯枝抽出嫩芽，又变出一树的郁郁葱葱。这个特别的学期说是漫长，却一眨眼间就从指缝中飘散而去。疫情已然基本得到控制，曾经满目深红的疫情地图也渐渐变得空白，中国大地上再度焕发出崭新的生机。

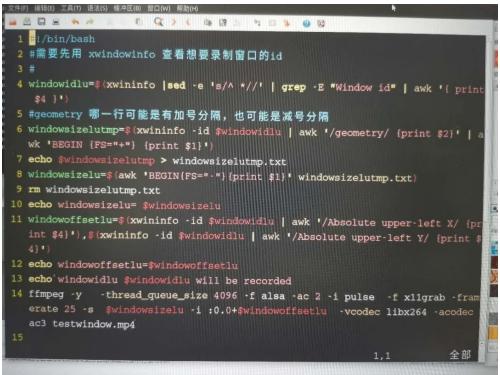


很早之前，我就畅想过网络通信特别发达的时代，学生和老师不用在寒冷的早晨跑到教室去上课。没想到这一天居然来到了，虽然是以这样令人意想不到的方式。我曾想象虽然不能到教室，但能看到所有的同学和老师，能有身临其境的感觉。可惜现在的网络带宽还不够，我上课的时候还是不敢开视频，只是把自己的 ppt 通过屏幕共享给学生。



这学期我上的课程是线性代数B，采用的是网络直播的方式，这样可以让学生仍然像在学校一样安排自己的生活。如果是录播课，我担心学生会有惰性，把很多应该听的课拖到最后来听，结果由于没有时间消化而影响学习。数学课是需要学生课后消化的，也许别的课也需要这样，但数学课尤其需要。目前的网络教学方式比以前方便的一点，可以使用手写板来书写板书。疫情前，为了践行绿色环保的号召，我一直使用手写板和写字软件来做笔记，但是以前在教室用自己的电脑很不方便，现在正好没有这个问题了。而且，板书内容可以导出为PDF文件发给学生。我用的手写软件叫做xournal，是一个free software，在linux和windows操作系统下都可以使用。使用微信群与学生沟通也很方便，对于学生有疑问的点，我会专门录一个视频来为同学们进行详细的答疑，北大网盘提供的下载视频也很方便。目前网络教学最大缺点是无法像原来那样闭卷考试，目前还没有找到好的方式来公平地考查学生的学习情况。

为了能够为学生制作视频，我学习了视频剪辑软件，使用的是linux操作系统、ffmpeg开源软件。我还特意编写了一个脚本，可以选择某个窗口进行录屏。同时，我安装了avidemux2.7\_qt5用来做视频剪辑。学会了使用这些软件后，感觉自己又多了一个技能，而且能使学生下载到噪音小、文件小的视频，心里很开心。



```

1 #!/bin/bash
2 #需要先用 xwininfo 查看想要录制窗口的id
3 #
4 windowidu=$!xwininfo | sed -e 's/^ *//+' | grep -E "Window id#" | awk '{ print
$4 }'
5 #geometry 哪一行可能是有加号分隔，也可能是减号分隔
6 Windowsizelutmp=$!xwininfo -id $windowidu | awk '/geometry/ {print $2}' | a
wk 'BEGIN {FS="+"} {print $1}'
7 echo $windowsizelutmp > windowsizelutmp.txt
8 windowsizelu=$(awk 'BEGIN{FS="-"} {print $1}' windowsizelutmp.txt)
9 rm windowsizelutmp.txt
10 echo windowsizelu= $windowsizelu
11 windowoffsetlu=$!xwininfo -id $windowidu | awk '/Absolute upper-left X/ {pr
int $4}', $!xwininfo -id $windowidu | awk '/Absolute upper-left Y/ {print $4
4}'
12 echo windowoffsetlu=$windowoffsetlu
13 echo windowidu $windowidu will be recorded
14 ffmpeg -y -thread_queue_size 4096 -f alsa -ac 2 -i pulse -f x11grab -fram
erate 25 -s $windowsizelu -i :0.0+$windowoffsetlu -vcodec libx264 -acodec
ac3 testwindow.mp4
15

```

在疫情之前，北京理工大学一位老师和他的团队会定期到北大和我一起上讨论班。疫情期间，我们改成了网络讨论班。开始的时候，大家都不习惯，还有点害怕这样效果不好。可恶的Covid-19使得我们必须去勇敢尝试，结果没想到大家都喜欢上了这种方式。北理工的学生不用坐将近2个小时的地铁来到北大了，这节省了很多时间。

学术交流和科普报告也陆续在网上开展，我发现听讲座的学生人数比以前大幅增加了。例如，张平文院士的科普报告“数据科学融通应用数学”的听众达到了近千人，具体数字不记得了，只记得当时感慨这在以前需要一个多么大的教室才能容纳得了这么多听众啊。

现在的网上教室，比传统的教室有优点，也有缺点。让我们团结起来，为没有缺点的网上教室的早一天到来努力奋斗，为未来的美好生活努力奋斗！

卢朓

2020年6月于燕园

## 2020 秋 学校生活新变化

很快，随着疫情防控形势的好转，我们又能够重返校园了。不过，我们的校园生活，也悄然地发生了些许改变……

### —塔湖图齐聚，美丽家园新启

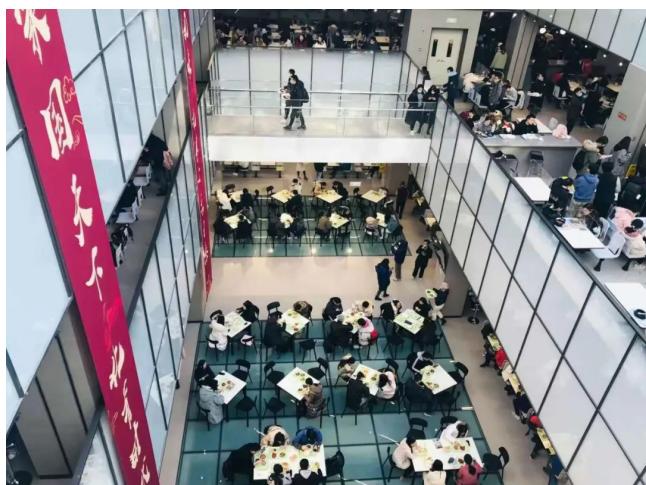
(文：学生会)

盼望着，盼望着，艰难的期中季终于结束，北大的同学们可算迎来了 2020 年最最美好的十二月——充满智能化的家园食堂盛大开放，北大图书馆东楼也以崭新地姿态全面重启，识数鸡也摇身一变换了一幅新面貌与大家相见。

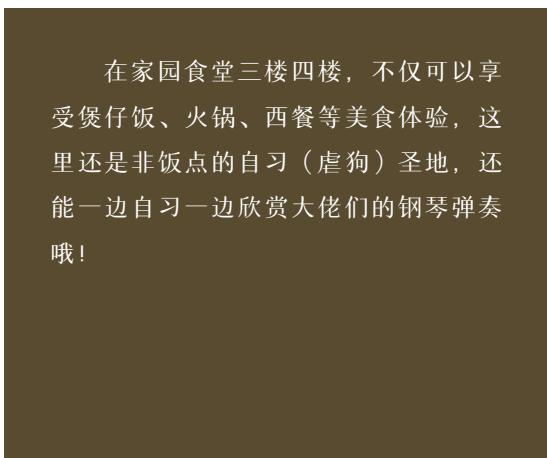
下面就由识数鸡带大家一览校园新气象～

#### Part1 食在家园

家园食堂于 2020 年 11 月 30 日开业，本鸡当然不会缺席这场盛宴，不过这刚一进去，便感受到了同学们万人空巷的热情。



最值得一提的是，新食堂的各种自动化设计让本鸡感觉自己像个乡里土鸡赶集进城。比如让大家耳目一新的可爱机器人；流水化作业的托盘回收功能；以及家园一楼自动计费的机器！



## Part2 学在校图

缘起：

2016年11月，图书馆发布公告，计划于2017年3月至2018年4月对东馆进行大修改造

2017年7月，东馆馆藏转移工作完成，同月开始进行封闭修缮

2018年4月～2020年10月：期待中…

2020年11月：图书馆修缮基本完成！

2020年12月1日，东馆重启！

现况：

虽然施工时间超出预期，但我们相信“慢工出细活”，细致的打磨带来的一定是美的感受和精致的体验。那么话不多说，我们一起来看看新馆的英姿吧。

小结：

两天以来，我们连续经历了家园开业与东馆重启，持续数年的念想令这一瞬间有些梦幻。虽然在北大百廿的长河中一项三四年工程并不能占有太多分量，但在某种意义上我们仍然见证了历史。正是每一项精益求精的改变合在一起，让我们看到北大翻阅百年依旧常新的追求。



说了这么多，不禁开始憧憬：在一个明媚的下午，独坐东楼五层临牖，眺望窗外的未名博雅，抒写心中的家国天下。



## 同学们的思想征集

(文 | 团宣)



九月初，新生报到，在燕园开启人生新的篇章。九月中旬，当老生们踏入久别重逢的校园之时，一定发现燕园在半年之间悄然发生了不少变化。一学期的时间转瞬即逝，我们迎来了家园食堂的开业，迎来了图书馆的焕然一新，也共同经受了期末季的洗礼。那么，大家对校园生活中的变化有什么新感受呢？心桥编辑部对同学们开展了一次问卷调查，以下是部分同学的所思所想——

（刘培东老师在数学分析（3）的第一节课上做诗一首，表达时隔半年与同学们重逢的喜悦之情。）

我们先来看一些长篇大论~~

### 小 A：

外卖太难取啦！！！！作为懒癌晚期患者，已经从上个学期每周点外卖变成了从不自己取外卖，一学期的外卖都是舍友帮忙取的，直到期末考完了才因为心中有愧帮舍友取了一回外卖qwq

新食堂真好吃！但是消费水平有些超预算了qwq

图书馆真好学！我觉得是它把我从被窝里面拽了出来！

别的感觉没什么变化了鸭（出门带口罩但是基本不戴口罩就是我了）

### 陈泓宇的小迷妹：

没什么变化，平时想出学校也随便，就是期末季不能出学校的时候疯狂想出去玩

因为想着有录播而翘课频率变高，结果经常只是翘了课而没有看录播

家园开了以后我点外卖变少了

再也不会有上学期摸鱼一整天的情况了

## 小 C:

基本所有课程都可以线上观看回放，这样就不用去上课可以在寝室宅一整天啦。其实除了进食堂和教学楼学要戴口罩，上个学期和普通学期区别并不大诶。

但有一点，据说上学期食堂午餐营业时间提前到 10:30，但好多食堂事实上都还是 11:00 开门的，生气子，好多次早早去了食堂但没饭吃。食堂要言而有信哟，加油子！

似乎混进去了什么奇怪的东西呢（x）。接下来是一些碎碎念~~

## 小 D~ 小 L:

本颜狗太喜欢图书馆和新食堂了啦啦啦～

晒一下，在疫情中，线上脱单了！

食堂变贵了，素菜窗口的价格都很不友好。

家园火锅真香！

出入校申请简直是健忘症的噩梦，始终在被关小黑屋的边缘徘徊。（哭

一开始总是忘记戴口罩啦，后来口罩已经成了和校园卡、手机一样的不会忘记的装备了～

我十分想念海底捞！

比较大的一点变化是许多场合都要求同学们佩戴口罩，甚至在考试期间也是。

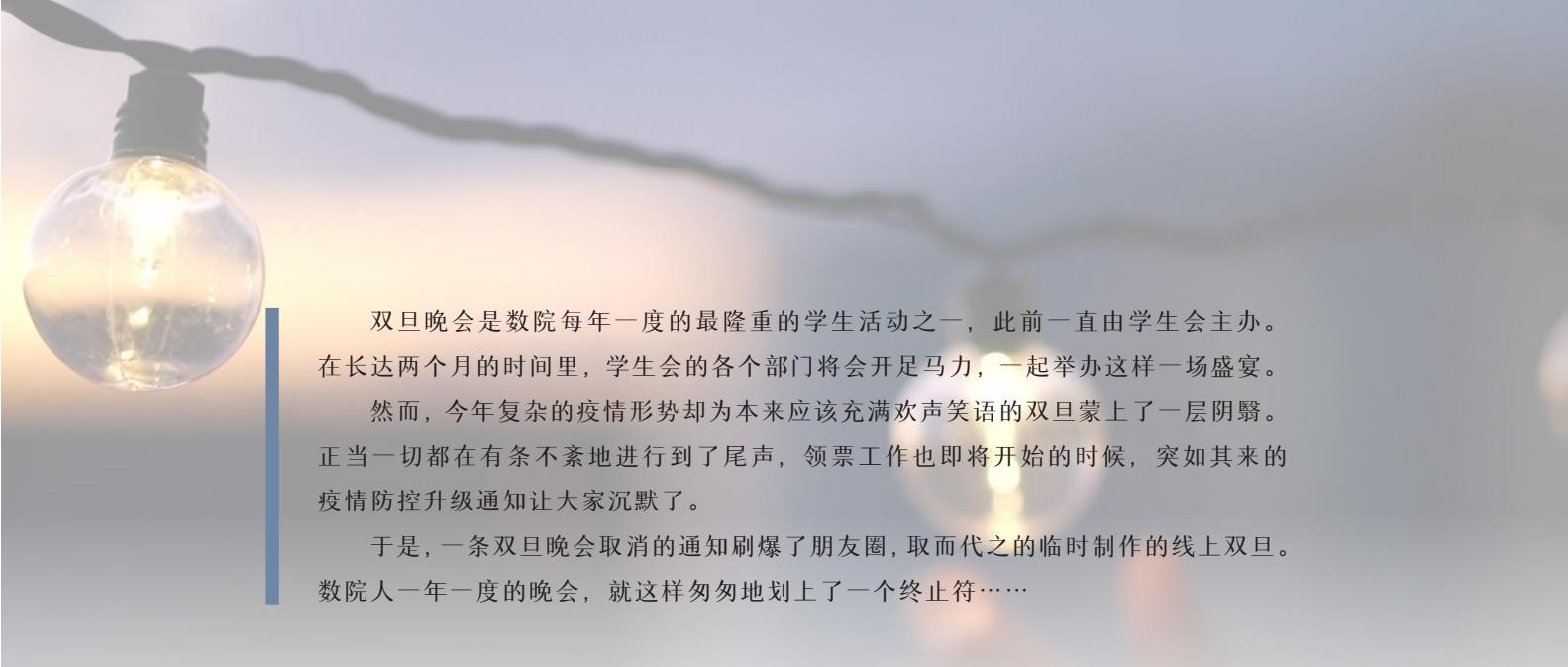
数分成绩怎么还不出！！

随便写写也能上吗 ~orz，那么，勾圆 yyds！

此外，虽然这个问卷似乎是主要针对老生的，但一位大一的小盆友也发来了热情回复！

## 小 N:

大一哦，感觉数院的老师们辅导员们都很和蔼很耐心，学长学姐们和同学们也都很可爱很热心的撒。不为绩点焦虑，学习知识本身就很让人着迷。



双旦晚会是数院一年一度的最隆重的学生活动之一，此前一直由学生会主办。在长达两个月的时间里，学生会的各个部门将会开足马力，一起举办这样一场盛宴。

然而，今年复杂的疫情形势却为本来应该充满欢声笑语的双旦蒙上了一层阴翳。正当一切都在有条不紊地进行到了尾声，领票工作也即将开始的时候，突如其来的疫情防控升级通知让大家沉默了。

于是，一条双旦晚会取消的通知刷爆了朋友圈，取而代之的临时制作的线上双旦。数院人一年一度的晚会，就这样匆匆地划上了一个终止符……



## 从零开始的双旦晚会

(采访 | 殷琪川、李东晨 受访 | 吴清玉、方欣玥)

2020年9月，正值初秋时节，开学伊始，大家都沉浸于大半年之后重返校园的喜悦之中。与此同时，双旦晚会的筹划已经悄然开始。现在，你就是学生会文艺部部长兼今年双旦晚会的总负责人，那么，请你开始双旦晚会的筹划吧！

### Part1 场地

要办晚会，首先要做的当然是选择场地。历年来双旦晚会的举办场地都在锡华酒店，今年本应也不例外。然而，和老师沟通后你才发现，因为新冠疫情的威胁，学校鼓励同学们非必要不出校，锡华酒店被毫不留情地pass了。于是，你把目光投向了校内的其它场地。好在，校内的场地很多，你也很快把场地改订在了能够容纳300人的勺园。

一个月之后，你接到了勺园的通知，根据疫情防控政策的要求，场地的容纳人数被削减了一半，这样的话，勺园是不能用了。而且，校内很多原本能够使用的场地都不能用了。

剩下能用的场地屈指可数。你急忙去找场地，经过多方打听，你发现中关新园群英厅能够容纳250人，一丝希望出现在你的眼前。

经过了你的多次奔波与协商，双旦晚会的最终地点定在了中关新园，你也放下了心中的一块大石。



## Part2 筹备分工

2020年10月中旬，校园内洋溢着“一二·九”合唱的歌声，你负责的双旦晚会筹备工作也在紧锣密鼓地进行之中。

双旦晚会由文艺部和外联部联合主办，多个部门参与协办。两部共计六个部长需要分别带领一个小组进行筹备。今年，你负责带领的是流程组，而另外五个部长则分别带领推送组、游戏组、采购组、宣传组和联络组。

不过，别忘了，作为双旦总负责人，你还有监督各组进度的任务。让我们来预习一下，各组都要做哪些任务。

### 1、推送组：

他们主要负责双旦晚会相关的系列推送的制作。这一系列推送包含了奖品公示、主持人介绍、视频推广、线路导引、领票方式等等双旦相关的内容。此外，他们还要负责从构思到细节的完整的双旦背景故事的编撰，任务相当艰巨。

### 2、游戏组：

他们主要负责晚会的游戏编制。不过，游戏的编写可没有想象中那么容易。一个优秀的双旦游戏，不仅要能让台上的同学玩得开心，更要能让所有的观众都看得开心。为此，还需要开展大量的测试和调整。

### 3、采购组：

他们主要负责晚会现场的物品采购。比如，晚会的抽奖和游戏奖品以及持续发放的食物都由他们负责联络采购。

### 4、宣传组：

他们主要负责晚会宣传品的设计联络和印刷工作。首先，他们需要和宣传部进行沟通，传达并落实双旦宣传品的设计要求。然后，他们就要去和印刷厂联系海报、易拉宝、门票等宣传品的印刷事宜，并取回成品。

### 5、联络组：

他们主要负责对外联络节目和主持人。同学们自行报名的节目和主持人的数量一般是不够的，需要再额外联络一些。这时候，联络组就需要去院外联络一些知名的节目和一两位主持人，作为双旦晚会的内容补充。

### 6、流程组：

他们有两个主要工作。一是负责节目的审核和彩排：双旦晚会一般有两轮审核和一轮彩排，初审要求不高，以考察同学的才艺水平为主，二审则会确定节目并给出修改意见，最后再用彩排走一下晚会的全部流程。二是现场调度：他们需要编写一个台本，上面详细安排了晚会从人员到道具的整个时间流程。此外，他们还要制作现场播放的ppt，收集节目需要的音频和道具信息，任务量极大。而你带领的也正是这个组。

既要作为总负责人来盯着这六个组每个组的工作都按部就班地在长达3个月的时间里依次进行，又要作为流程组的带领者来把过程的每个步骤都落实到厚厚的台本上，你面临的挑战确实相当艰巨。

你已经是晚会的总负责人了。没有人会来跟你确认要在什么时间完成什么事情。你只能每天都在心里把流程过一遍，直到确认没有疏漏的地方才能安下心来做其它事情。

你时刻不敢放松警惕，因为，你知道，晚会的筹备工作就像拓扑排序一样，如果自己在中间出现了任何疏漏，那么环环相扣的晚会就会化做一盘散沙。

## Part3 筹备进展

筹备的任务非常繁重，但是，在你、部长们、组员们和主席团的努力下，筹备工作也还算是有序而稳定地进展着。虽然有些事情的进展一开始并不那么顺利，比如，1560作为排练场地

实在是太小了，审核员和演员的排练时间总约不到一块儿去，游戏组改了一遍又一遍的规则总还有些不尽如人意，但在持续了几天的高强度讨论后，最终这些问题都被妥善解决了；而且，还有些事情有了出乎你意料的发展，比如外联部的同学不仅联系到了很好的赞助商，还找来了几位知名人物送上祝福。

不过，为了出演已成保留节目的部长团跳舞，每天晚上你还要抽时间练习新宝岛。在沉重的学业和筹备任务的压力下，凌晨两三点睡觉对你来说已成了常态。虽然这样很累，但是每当回想起入部时立下的为大家带来欢笑的美好理想，你就觉得自己的付出是值得的，浑身上下的疲惫也仿佛一扫而空。

#### Part4 现场

12月中旬，推送组在你的安排下发出了领票推送，宣传组也从印刷厂运回了数百张门票，领票工作随即开始。

发放门票的同学们在号称21世纪最冷的冬天的室外站了一个下午。你和他们站在一起，然而，即使你给每个部员的身上都贴满了暖宝宝，大家也仍然冻得浑身发抖。

又过了几天，你召集六个组的同学们开了一场会，在会上分配了现场的工作。三个人负责中控、六个人负责看管食品、两个人负责摄影、两个人负责检票……你分配得行云流水，因为晚会的整个流程早已被你背得滚瓜烂熟。

距离晚会开始倒计时还有一周，推送组开始日更推送，演员、主持人、工作人员一遍遍地确认着台本流程，奖品、工作服也陆续运送到位……你坚守着自己的岗位，监督着最后的筹备工作，时不时还得下场帮把手。

双旦晚会那天，你早早地来到现场，开始安排道具和设备的运送和放置工作。慕名而来的同学们挤满了整个大厅。部员们穿梭在如织的人潮中维持着秩序，时不时地大声提醒同学

们戴好口罩。

晚会终于正式开始了。你隐身于台下的人群中，看着舞台上的五光十色，感到分外欣慰。妙趣横生的节目和游戏逗得大家哈哈大笑，虽然你早已经把它们的笑点摸得滚瓜烂熟，但此时此刻你还是忍不住和大家一起欢笑。

很快，就到了晚会的压轴节目——部长团跳舞。你急忙走上台，扭着身子，和部长们跳起了夸张的舞步。

一曲终了，主持人走上台，宣布晚会的圆满结束，晚会在大家热烈的掌声中落下了帷幕。

一学期辛辛苦苦筹备的晚会终于划上了圆满的句号，你却感到有些怅然若失。但是，看到身边的部员们因为兴奋而涨红的脸庞，你不禁又会心地笑了起来。

#### End

尽管今年的双旦晚会因为北京的突发疫情并没有举办成功，但你身处于另外一条世界线之中。在那里，北京并没有再次突发疫情，一切都顺顺利利地完成了，双旦晚会的举办获得了巨大的成功。

在这个世界线中，虽然双旦晚会临时取消了，但是，你和学生会的小伙伴们为了为大家带来欢乐，付出的努力都并非徒劳。你们洒下的每一滴汗水、熬过的每一个夜晚、准备的每一个节目，都是真真切切存在的，不会因为晚会的取消就被遗忘。

不过，不管怎么说，你的任务都已经圆满完成，而明年双旦晚会的任务就要交给下一届的小朋友们了。

你在接受采访时，脱口而出，说出了自己的新年祝福：

“祝大家绩点高高，早睡早起，多点头发。大家明年记得来参与双旦，积极报名节目和主持人，加油！”

Chapter 2  
国家奖学金  
五四奖学金获奖同学采访



《心桥》作为搭建在数院人心灵之间的桥梁，其作用自然也不仅仅是记录数院人的日常生活，同时，它也应该是数院人之间传递信息、相互促进的桥梁。这也是《心桥》很久以来的优良传统。

这次，由团委宣传部和组织部联合为大家带来的是对本年度国奖五四得主的采访，希望同学们能够在其中收获宝贵的经验！

## Part I 人物专访

### 张喜悦：我与科研二三事

(采访 | 陈泓宇、李东晨、孙云泽)

#### 人物简介 INTERVIEW



张喜悦：信息与计算科学系 2017 级博士生，2020 年国家奖学金获得者，目前研究方向为系统建模与性质验证，导师为孙猛教授。

#### 第一部分 本研经历

##### Q1：能否讲一讲学姐你的本研经历呢？

A1：我的科研真正着手是从大三开始的。本研的话，还是处在科研初期，当时是老师给我提供了一些可选择的课题，我再结合我学过的专业课选了一个比较合适的题目来探索尝试。当然，也有同学对于自己想要做的方向非常明确，再去找对应方向的老师交流。这样当然是最好的。不过我当时缺乏这个意识，总体还是在迷茫中探索的过程。

##### Q2：对了，那学姐你当时为什么选择了孙猛老师作为导师呢？

A2：我对院系老师的了解主要是通过专业课上课、答疑。在选择指导老师的时候，先去看了数院网站各位老师的主页，去了解各个老师的研究方向。

我记得当时看到孙猛老师的主页做的非常全面清晰，教学工作包括以往指导学生情况、对学生的要求等，建议阅读的资料，科研工作上的以往论著也都详细的放在上面。那个时候还不太懂得使用各大主流文献网站查找不同老师研究方向的论文，基本就是直接网页搜索论文题目，所以当时就大概浏览了一下各位老师的研究大方向，然后再邮件联系孙猛老师约时间讨论交流。

其实我当时对老师具体做的科研细节也不懂，所以，有机会的话一定多跟老师直接面对面交流，老师的介绍和现场交流对理解课题项目比啃一篇专业论著要直接和有帮助的多。

接着说本研：

我的研究项目是关于协调语言的。可以理解为关注的是一个大型系统里面各个子系统的通信交互。我要做的就是对这个协调过程进行建模，基于模型做一些性质验证的工作。当时使用的技术是定理证明，所有要证明的性质都是通过机器检验过的。

#### **Q2：学姐能举个具体的例子吗？**

A2：比如说，银行的各个设备之间有数据传输的协议。那么我要做的，就是验证某种通信模式是否存在安全问题——一个外人可不可能通过这个系统的某些漏洞来把你的钱偷偷取出来。类比一下，当时我的工作就是证明某个特定的通信模式是安全的，不会被人找到漏洞。

#### **Q3：那学姐在本研中有没有遇到什么机遇或者挑战呢？**

A3：初接触一个新的研究对象，理解问题和研究对象本身就会遇到困难。在之后技术开发中又会遇到大大小小的难题。在这个过程中，多跟老师同学讨论交流，对于解决问题的心态还有效率都很有好处。

在我的本研之中，尤其在最初阅读关于研究对象的原始文献的时候，有很多不懂的东西，去找老师讨论，孙老师都很有耐心地答疑解惑，提供了很多帮助。另外，也很幸运遇到一个做本研的“战友”和在实践上帮助我们代码开发的师兄。一个人做本研项目读论文读不懂，或者遇到困难时，就会比较烦躁。当时我跟另一位同样也是由孙猛老师指导项目的同学，会一起读相应的经典论著，这样的话，遇到了不懂的东西，我们之间可以交流，说说各自的理解，再把我们都不懂的东西汇总起来去找孙猛老师答疑解惑。

另一个是同组师兄。他的编程能力非常强，之前也用过相关的技术和工具，在写代码过程中遇到的困难和不懂的地方，师兄都会很耐心地帮我们解决，给了我们很多的帮助。

总之，在本研的时候能够有这么好的一个科研初体验，真的是很感谢，也感到很幸运。

有了第一个工作基础和项目经验，对之后的工作方向和开展有很大的帮助，起码已经熟悉了研究的一个过程。在做下面的时间和概率扩展工作时候，我感觉到更有条理，更清晰，更有把握了。

#### **Q4：那学姐你对本研有什么感受呢？**

A4：我个人最大的感受是，专业课的学习和科研没有像我想象的会有相互冲突，比如时间上的占用分配等问题，反而有一种相辅相成的感觉。

一方面，我可以将所学习到的东西应用在实践中；另一方面，我的科研也为专业课学习提供了更多的动力和方向感。当然了，同学们如果要做本研，也要把握好自己的课程选择、本研时间分配。

### **第二部分 读博经历**

#### **Q1：那学姐能否简略地介绍一下博士之后的科研经历呢？**

A1：在读博士的第一年，我首先对协调语言做了时间扩展和概率扩展，这样可以用来表征现实任务中需求的更多行为，后来又通过循环神经网络对寻找证明策略的方法做了一些改进。

本科结束去暑期交流的时候，由于之前定理证明的经验，访问的老师对形式化方法应用于区块链安全很感兴趣，接下来读博士的一年半的时间开始探索，并做了一些关于区块链及智能合约的安全性的工作。

结束关于智能合约安全的课题任务后，主要的研究课题定为了深度学习系统的质量保证。我们或多或少对深度学习的对抗样本缺陷有些了解，但是，深度学习在生活中的有些应用场景是不允许有这些漏洞缺陷的。比如说现在的自动驾驶，医学诊断，这些地方如果要应用深度学习系统，就必须要求安全性。这和我之前做的安全性质验证的工作相关——我现在做的，就是把包含了深度学习组件的应用作为新型系统，然后研究在这个系统上的建模和性质保证。

### **第三部分 科研生活与建议**

#### **Q1：那请问学姐你的科研生活是怎么样的呢？**

##### **Reasoning about connectors using Coq and Z3**

Xiyue Zhang, Weijiang Hong, Yi Li, Meng Sun \*



IMAM & DI, School of Mathematical Science, Peking University, Beijing, China

##### **ARTICLE INFO**

###### **Article history:**

Received 29 June 2017

Received in revised form 12 October 2018

Accepted 16 October 2018

Available online 3 November 2018

###### **Keywords:**

Coordination language

Reo

Coq

Z3

Reasoning

##### **ABSTRACT**

Reo is a channel-based exogenous coordination language in which complex coordinators, called connectors, are composed by building up simpler ones. In this paper, we present an approach to model and reason about connectors using Coq and Z3. Both models reflect the original structure of connectors as closely as possible. In our framework, both basic connectors (channels) and composition operations are modeled as axioms. Then complex connectors are modeled as the combination of logical predicates which correspond to simpler connectors. With such definitions provided, connector properties, as well as equivalence and refinement relations between different connectors, can be formalized as goals in Coq and proved using pre-defined tactics, if satisfied by connectors. When failing to prove whether a property is satisfiable or not with Coq, we use Z3, an SMT solver, to search for possible bounded counter examples automatically.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

A1：比起本科生来说，博士生的主要任务就是课题研究了。

科研生活也是围绕着做的课题展开，包括读文献、听会议报告中获取课题方向新进展；根据要解决的问题设计方法，写代码实现，进行实验；与老师及课题组成员讨论课题进展，获取新的启发等等。

## **Q2：所以，本科生科研和正式的科研有什么区别呢？**

A2：本科生科研期间更多是指导老师提出一个问题，并且有一个预期解决方案，然后同学要做的事情就是着手展开探索、研究问题，目标是非常明确的，而且老师会对这个问题的了解比较多、比较深入，有一些不懂的问题老师可以给你解答。

但是后期的科研从提出问题到设计方案，期间通过和导师、同学的讨论来改善不足，遇到难点就需要自己去读文献，查资料，慢慢成长为一个独立的研究人员。

## **Q3：那学姐希望同学们在科研过程中要注意什么地方？**

A3：对于本科生科研，最好的方式当然是自己在学习的过程中找到了感兴趣的领域，然后去找对应的课题组，参与到一个项目工作中去，获得初步的科研经验，在项目中会成长的很快；再就是多和老师同学交流，比自己一个人陷在研究难点里，和别人讨论可以帮助你梳理难点，获取前进的动力。

读博第一年，我感觉我还没有从本科生转变过来，所以第一年也是每天按部就班的上课，写作业，看论文，参与课题组讨论班，没有太有意识地自己探索感兴趣的研究课题，并且在这个大方向下展开工作。前面三年虽然有一些成果，但是整体工作的系统性还是比较欠缺，希望同学们能够更快地完成这个转变，更早地把自己的课题研究掌握好，避免后期的焦虑。

另外，就是交流合作是很重要的。在交流合作的过程中，我们可以认识更多优秀的人，学习更多事情，受到更多启发。

## **Q4：那学姐博士毕业之后的打算是什么？**

A4：现在博士毕业以后大体包括两个方向，学术研究或者工业界工作。就课题的选择和时间的规划而言，学术研究是比较自由的；工业界的工作目标大多是和公司企业的需求直接挂钩，目标比较明确，理论

知识要转化为可落地的产品。当下整体就业竞争还是比较大，而且像北京这类大城市也都人才济济，目前我还没想好到底要怎么走，而且想法也会随着时间就业形势有所变化吧。

## **Q5：听起来科研生活的周期好像还挺漫长的，学姐会觉得累吗？**

A5：其实做任何工作都有累的时候。

对于博士生来讲，要想从头到尾了解一个课题，这是一个由浅入深的过程，不是一蹴而就的。可能一开始搞本研的时候，对于一个领域的了解程度只有5%，虽然按照这5%的理解也能做出来一些东西，但是只有慢慢地积累经验、厚积薄发，才能做出来更好的成果。这是一个不断成长的过程。在这个过程中，每当我做出一些科研成果，我还是非常开心的，就感觉我的付出没有白费。

当时我刚刚读博的时候，也觉得5年的时间还挺长的。但其实真正做起研究来，时间还是过得很快的，第一年的时候学习一些专业课程，第二年的时候开始深入理解和研究一个方向，第三年到第五年慢慢做出一些比较有分量的工作，也算是乐在其中。

## 刘水根：本研路与学术情

(采访 | 郭纬)

人物简介 INTERVIEW



刘水根：信息与计算科学系 2017 级本科生，2020 年北京大学“五·四”奖学金获得者。目前本研导师为周珍楠老师，研究方向为随机算法、贝叶斯反问题等。

### 第一部分 本研经历

#### Q1：学长高中毕业后是因为什么才选择了数学系呢？

A1：我觉得来数学系是一件有些“阴差阳错”的事，不过现在看来也是一个相当正确的选择。

我高中学的是物理竞赛，由于在学习物理的过程中接触了高数，甚至是一些数学物理方法的内容，对物理中蕴含的数学技巧十分感兴趣，所以在高考结束以后最终选择了来数学系学习。

我想，北大数院的宽口径培养方案，让我能够接触到与数学相关联的各个前沿领域。随着学习研究的深入，我越来越感受到，数学不仅在这些领域中有着巨大的需求，更能展现其神奇的力量。比如说，一门科学开始成熟的一大标志就是引入数学作为方法。许多科学问题中蕴含了很多很好的数学问题，这对于数学本身的发展也非常有益。

#### Q2：那么，学长能再谈谈在计算数学方向的学习研究感受吗？

A2：我在大二时进入周珍楠老师的组里，当时老师并不着急给我们具体的问题，而是让我们先旁听讨论班，学各种各样的内容。在讨论班和阅读课上也主要是读一些文章和书，在打好基础的同时接触一些前沿的进展。

机缘巧合，我在大二的春季学期上了两门讨论班，学习的内容都在后续的研究工作中用上了。一个是在周老师阅读课上学习的反问题的贝叶斯方法，一个是在“3+X”讨论班中学习的蒙特卡洛（Monte-Carlo）方法。参加各种各样的讨论班还是非常有益的，尤其是在自己兴趣还不明确的时候——至少你能学习到很多将来可能用到的知识。

关于计算系，它有着显著的多学科交叉的特点，与物理学、信息科学、生物学等很多领域有着极为密切的联系，计算数学的方法作为重要工具能在这些领域大展身手。选择计算数学方向的人并不多（虽然我这届比往年稍多），但是师资力量和科研水平都很强，某些方面大概已经达到顶尖水平了。计算系这几年都有一些很厉害的大佬，每年名校 offer 也不少。能在这样高手如云的环境中学习、科研，对于个人来说有很大的帮助和提升。

#### Q3：谈到本研，学长刚才回顾了自己的学术经历，那么对大一大二的萌新们选择学术方向有什么建议吗？

A3：安排好本科的学术生涯是一件非常非常重要的事情！

我在大二第一学期加入了基础数学拔尖计划，主要是因为刚进大学的时候跟很多同学一样都心怀着研究基础的梦想。当时我感觉自己还需要学习更多的基础知识，就在大二修完了实变、泛函等课程，希望把这些知识都“学完了”再开始考虑科研问题。但其实这样并不太合理，“要学的”知识无穷无尽，在科研

中遇到不懂的问题再去补充学习相关知识才是最高效的办法。

对我们计算系来说，大二结束到大四开始前是科研非常最重要的一段时间，一定要把握好。

大二的时候可以先进一个课题组或者讨论班，慢慢接触科研的模式。

大二暑假开始之前，可以多了解各种科研领域的东西，阅读一些相关的文献，最重要的是找到自己的兴趣和擅长点，随后再去选择相应的科研课题。当然这个过程中可以多问问学长学姐，还有研究方向你比较感兴趣的老师。即使是未必研究同一个方向的学长学姐，多去跟人家交流，也能在科研的视野和学术规划上让你有更加清晰的认识。研究方向比较接近的同学可以组成小圈子，大家互相交流、互相督促，大家一起往前走，也是非常有帮助的。另外，数院的老师人都挺好的，你有问题想咨询可以发邮件，或者约时间面谈，人家只要有空一定会认真地回答你的疑惑。

大三的课程、讨论班、阅读课等等都为大三结束后的暑研打下重要基础，所以一定要好好上。暑研就是出成果的时候了，有了不错的科研经历到大四的时候申请就有底了。

## 第二部分 课余生活

### Q1：那学长有什么学工的经历呢？

A1：我大二担任了学生会运营部的副部长，留部的人不算少，但相比工作量来说还是略紧张，有些时候安排任务的节奏非常快。当时恰逢百年校庆，参与了数语日历的编纂，这些工作非常需要精力，因此对学习稍微有些影响，但我觉得这是好事。

学术科研规划当然关乎前途，但综合能力的发展，学工经验的积累，社交范围的扩大和综合能力的发展，也都是很重要的。大家应该还记得刚入学的时候讲的“ $\Sigma \leq 1$ ”，一定要平衡好投入在学工上跟学术上的精力。

### Q2：在学习和学工之外，学长在大学里还发展了哪些兴趣爱好呢？

A2：比如滑板、画画、网球。我觉得对于课余爱好总有一种“三分钟热血”的感觉，非常喜欢去尝试各种新奇的事情，虽然并不一定会在以后还保持这种爱好，只要体验的时候开心就行。

滑板是去年暑假结束以后开始接触的，当时玩了玩双翘，还想尝试各种动作，后来发现摔得太痛了，就只刷刷街了，心态越来越佛系了。

### Q3：说到佛系，能具体说说在北大过了三年心态到底有什么变化吗？

A3：真的是越变越佛系了。

大一可能会有很多目标，想努力向大佬靠齐。一开学进来的时候可能还会担心大佬太多自己被虐，后来会慢慢感到自己也不算太差，还是想努努力，说不定就成为大佬了（雾）。

到大三大四的时候渐渐会开始觉得，有些事情（比如分数）其实也没那么重要了，很多专业课也不会像以前那样投入这么多精力去准备考试，更多的是你会慢慢想明白你真正想要去做什么、对什么感兴趣。

佛系不是说不努力，而是尽力而为，不要给自己太大的压力。让自己感到快乐的才是最好的！

## 吴林桐：平凡中的不平凡

(采访 | 陈泓宇、殷琪川)

### 人物简介 INTERVIEW



吴林桐：金融系 2017 级本科生，数学科学学院学生团委副书记，前任学生会主席，2020 年国家奖学金获得者。

### 第一部分 学习方法

#### Q1：学长可以分享一下本科的学习经验吗？

A1：在大一大二的时候，我平常会花更多的时间在课业上，相比一些平时看起来几乎不学习但还是学会了很多东西的真的大佬，我自身天赋有限，可能做不太到那样，所以就只能靠平常的积累。

所以说，我反而可能在前面几年的时候，那些很基

础的课的时候，还更适应一些，像数分高代这些课，因为它是最基础的，有很多题目可以刷。我个人其实对于刷题这件事情不是那么反感，我认为这些基础的内容确实需要大量的练习，所以大一大二这两年的学习生活反而是我比较习惯的。我会在基础的课业上面花更多的时间去认真刷题。

在大三大四的时候，我才突然感觉到这种方式不太适用于后面更加深入的课程。可能像数分这样的课程多做题多看教科书就能取得高分，但是到后面的一些高年级的课程，你不只是需要做课业了，可能还要做科研。但是科研的感觉和经验并不是刷题能刷出来的。所以，我会感到到了高年级，尤其是大三那一年，反而有点不适应。到大三会感觉事情一下明显变多了，另外还有未来出路的选择，给我感觉压力是最大的。

#### Q2：那么，学长能再谈谈自己在学习课程时的学习方法吗？学长有没有过拖延的习惯？（笑）

A2：如果说学习方法的话，我可能和大多数同学不太一样，很多同学学习时喜欢图书馆那样安静的环境，我想问题时喜欢自己一个人走来走去，又特别喜欢和人讨论，所以在图书馆那样的环境会让我感觉特别不自在。在期末复习的时候，我很喜欢找一个同学一起出来，把这学期都学了什么整理一遍，比如找张纸，第一章学了什么，第二章学了什么…照着这样去复习。即便是把这门课的所有定理都抄一遍其他什么都不写，我觉得也很有意义。

其实说起来我也算非典型性拖延症，我写作业从来不拖，在这点上我挺小镇做题家的（笑），因为我很清楚我不是那种可以在考前三天把一学期的课全部学完的人，所以也算是通过写作业来督促课后复习吧，另外我对自己的熬夜能力有非常明确的认识，我是非常熬不了那种，所以也不大敢把事情堆起来。

### 第二部分 专业选择

#### Q1：那么，学长当初是为什么选择了金融这个方向呢？

A1：我最开始是跟风选了金数引，后来下学期选了随机分析。逐渐发现自己对这些金融的理论很有兴趣。学经双也是这样，从开始的跟风到逐渐喜欢上了。我很喜欢这种能把数学理论讲一个现实的故事出来的感觉。

## Q2：学长对金融的就业现状有什么看法？金融行业的人才饱和现象严重吗？

A2：中国的金融市场目前还很不成熟嘛，我是感觉中国现在在一步一步开放和建设金融市场，现在金融人才饱和这件事还为之尚早。最简单的饱和就是供大于需嘛，供大于需的最直接结果就是工资往下掉，但我去实习的几家公司给我感觉，现在人才肯定是非常非常缺的。（我本来是拒绝的，但他给的实在是太多了.jpg）

## 第三部分 课余生活

### Q1：作为学生会主席，学长的学工经历想必是非常丰富了吧。关于这段经历，学长有什么想说的吗？

Q2：我感觉本科期间最有意义的事情就是参加学生会。

我在学生会呆了三年，还挺改变我的。很多人来数院总会有很自卑的时候，能不能扛过来很多只在一念之间，但是确实在学生会工作，在学生会认识的一群人，帮我扛过了相当多的压力。现在关系最好的一群人，基本都是学工认识的，以及包括大部分认识的外院系的同学，也大多都是学工认识的。所以说我觉得大学四年能比较开心的走下来，学生会功不可没。如果以后跟别人聊起本科的故事的话，我自己也比较愿意讲学生会的故事。

我觉得学生会的生活还为我带来了很多快乐。只要看到我们做的事情让大家开心，比如一个活动结束了，看到大家说学生会太棒了，即便说一个活动大家没意识到是学生会办的，你看到一个正好认识的同学发朋友圈，说玩的很开心，发了张照片，拍了个纪念品，我就会觉得很开心很自豪，很有触动。所以即使现在已经跟我关系不大了，我也很乐意去学生会帮忙办活动，比如今年文化节当了一天志愿者。

当然，学生会确实有一些很有意义的活动，比如说学术方面的数学一小时，比如说帮大家适应大学考试的模拟期中考，但我感觉学生会更主要的作用，还是让大家开心，让大家享受课余生活，我对学生会的感觉大概是这样吧。

### Q2：学长当时的学工应该还挺忙的吧，那学长是如何处理学工和学习的关系的呢？

A2：我生活和学习分的比较开。

我平常一直不紧不慢的，甚至有些懒散，但一旦要做某件事时，我会努力以最高的效率完成。学工和学习也是这样，实话实说，我不觉得学工占了我很长时间。就像大三上学期真的很忙，但每周开例会的时候我都特别愿意过去，开例会是我和学习最无关的时候，反而感觉还蛮开心的。

学工的事比较琐碎，比如我写着写着作业，舞会出事情了；写着写着作业，推送又出问题了。但是其实它们都是离散的，都是积分为零的零散集。我觉得很多人感觉很占时间是因为他们把每个点都找了一个小邻域，搞得积分起来就很大了。所以说只要尽量把邻域取小，每件事出来很快把它做完，就不会感觉很占时间。

### Q3：那么，学长有什么感情生活吗？不愿意说可以不说哦~

A3：我没那么不愿意不说 \*3（笑）（正合我意）。初中和高中的同班，认识今年是第10年了。说来比较好笑，家长不算很熟但也算是认识吧，所以因为工作的缘故，中学的时候关系就很好。但那个时候，比较专注学习，又比较羞涩，反而是到了大学，都离了2000km了，才开始交往了。

就关系一直比较好嘛，她高考考砸了，就找她打电话，然后情绪就起来了，之后就一直有保持联系。上大学第一个学期后，就什么事都会聊一聊，然后到了寒假，就过年嘛，就新年新气象（笑）。她现在保来软微了，这几年隔了2000km确实挺……而且说实话她比我还忙，时间管理比我还猛，很适合出现在你们这种专栏里面，什么一个学期拿了多少个奖啊，参加了多少个比赛啊，还做什么学工啊，还写了多少篇论文啊，还参加多少个项目组啊。所以很多时候也就是平常打个电话，说个早安晚安，虽然比较平淡，但是也挺好的吧。因为主要是太熟了，比较有感情基础，所以也就熬过来了。

大概就像柯南剧场版迷宫的十字路口的最后小兰说的一样：“因为等的越久，再见面的时候不就更开心吗？”

@\_@：呃……呃呃……（你看这碗狗粮，它又大又圆）感谢学长的耐心解答！

## 杨舍：怀年少初梦，踏无涯数海

(采访 | 梁思威)

### 人物简介 INTERVIEW



杨舍：数学系基础数学方向 2018 级本科生，2020 年国家奖学金获得者。

### 第一部分 学习方法

#### Q1：学长可以分享一下本科的学习经验吗？

A1：大一的课程感觉都不是特别难，把课后习题做一做，往年题做一做，考试认真考就行了。大二上也和大一差不多，大二下我因为疫情上网课占了点便宜，比如应数导这课我肯定考不高，但是最后成绩都算 pf。

首先如果能认真学好一门课，考试到 90 分应该没问题，如果要追求更高的分数，也需要考试的运气：像我数分 2 期末考试就被一个题卡住了；但也有可能你一门课没怎么学懂，但老师考的正好是你会的，那也能拿高分。

#### Q2：那么，学长能再谈谈自己在学习课程时的学习方法吗？

A2：倒也没有什么。我就是上课认真听课、记笔记，课后认真做作业。课本上的话都会尽量多搞懂，可以想得仔细一点，有时候一句话可能一下子就看过去了，可能可以再仔细地琢磨琢磨。

我的学习效率感觉不算特别高，主要可能是学的时间长一点。我也认识一些学弟，他们非常聪明，上课的时候就能把内容都掌握了，我是不太行，课后会再花几个小时看一遍。做题的话其实我觉得把课后习题都做了就够了。像抽代有一本《近世代数三百题》，很多同学做过，挺难的，我没太做，也没啥影响。像中学里学的初等数学，包括数学分析也是，都可以无穷无尽地学，我觉得没有太大意思。学习习惯的话，我比较喜欢自己学，不懂的地方会请教老师同学。

和别人讨论的话，我一般比较喜欢在双方都学懂一些之后再讨论，否则讨论的时候会比较混乱，我会听不懂他在说什么，我自己的想法也屡不清，说不出什么有用的话。

### **Q3：看来学长在考试方面很有经验，请问学长在考试时的心态是怎样的呢？有过什么不满意的考试吗？**

A3：考试前肯定会紧张，但也要看这门课掌握得怎么样。掌握好的话也不会太紧张，搞得不好的话也会很紧张。发下来卷子看一眼，如果题目都出的比较常规那也不会太紧张，如果看到有奇怪的题也会比较紧张。但真正做起来了也不会说什么紧张不紧张了。

我记得当年拓扑考得比较差。期中考试考砸了，主要是考了一个定理的证明，有一定技巧性，但是我没有注意去看；期末也考得挺难的，最后只有80多分。

### **Q4：听说学长同时取得了数学和物理竞赛的一等奖，有什么经验吗？**

A4：我觉得大数竞考前看看往年题然后直接去考就行。那个物理竞赛我能拿一等奖，其实是因为初中学过一点物理竞赛，所以到大学以后普物对我就不很难了。备考的话，其实和其他考试都是一样的，就找往年题做做熟悉一下题型就好了。这个比赛比起物理组来说我们算得上只是菜鸡互啄（笑），具体来说就是这比赛他们是比谁扣的分少，我们是比谁得的分多（笑），所以尽量把会的题都好好做对就可以了。

## **第二部分 生活漫谈**

### **Q1：学长日常的生活作息是怎样的呢？**

A1：看早上几点开始有课。如果有早八，那就七点起床。上完课也就找一个空教室自习。然后晚上大概十二点睡，也不一定是学到这么晚，有时候晚上会在网上下下围棋。

### **Q2：在“内卷”时代，学长感觉压力如何？**

A2：也没有太大的压力吧。因为也差不多了，大三还有不到一年就大四了，没多久要毕业了。卷这个字也是今年才流行起来的，大一大二的时候也不知道有那么多要卷的东西（笑）。其实本科这几年心态变化也不是很大。

## **第三部分专业选择**

### **Q1：学长你当时为什么要选择基础数学专业呢？是因为有比较兴趣的方向吗？**

A1：我中学的时候也搞数学竞赛嘛，那时特别喜欢数论那个方向。中间也有想过看看其他方向怎么样，但我觉得那些应用数学也都挺难的，没有说哪个就比基础数学容易，所以还是坚持学基础了，可能也是因为我从小对数字比较敏感吧。

数学竞赛不是有四个板块嘛，我每次看到数论都会有点儿兴奋（笑），但像平面几何就可能觉得不太好玩。不过好像大学里学的数论跟数没有什么太大关系，不那么在乎数本身了，我感觉它往往要从其他方向汲取一些方法。

### **Q2：那学长你对未来的规划是什么呢？**

A2：我升学打算直博，能学得懂基础数学就一直学呗，学不懂也不知道怎么办（笑）。反正我觉得，回中学教竞赛总是一个出路吧。

### **Q3：能够坚持这么久，学长对数学的热爱一定很深厚吧？**

A3：和同学比起来也没什么太特殊的。从小学学上来，感觉学数学是自然而然的，没有想过干别的事情。

## 罗霄：科研中的酸与甜

(采访：夏一航)

### 人物简介 INTERVIEW



罗霄：概率统计系 2017 级博士生，2020 年度国家奖学金获得者，研究方向为生物信息学和深度学习（推荐系统）。

### 第一部分 科研经历

#### Q1：学长能简单介绍一下自己的科研经历吗？

A1：我在本科的学习还是侧重于打基础，真正接触科研要到直博到概率统计系了。当时我学习的是生物信息学，主要是要通过数学模型去研究一些生物问题。

博士一年级我大部分时间也是在上课，真正开始接触科研还是在博一下学期到博二上学期这个阶段。当时，我和一个同学一起做了关于蛋白质结构预测的一个课题，后来那个课题失败了，不过我还是觉得有很多收获。至少，我原来没有接触过科研，但是从那时候开始接触了以后就有了一些变化。相当于我通过这些科研经历知道了科研的目的和过程，比如看文献、写文章、做实验等等。

然后，在博二上学期的时候，在一门课上，有一个大三的学弟找到我，问了一个他们正在做的问题。

我跟他讨论了这个问题后产生了一个还不错的想法，于是以此为契机和他开始了合作。当时我的代码能力不够强，所以我们的分工就是他帮我写代码，由我来写文章、读文献。我在二年级末的时候把这篇论文写完了，然后就发给期刊，等到三年级的时候这篇论文被期刊正式接收，便成了我的第一篇论文。这篇论文还是挺不错的，发的期刊在我们领域也算是 Top 级别的了。通过这篇文章，我对这个领域产生了更深的了解，在那年暑假，我便很快做完了第二篇文章，相当于博士三年级的时候就有了两篇文章。

在这个时候，我对更加基础的深度学习算法产生了兴趣，于是我就跟我导师招的一个博士后，本来也是我们组的一个同学，两个人开始研究计算机视觉和推荐系统的一些问题。博士生三年级这一年其实就是在尝试这个领域，一直做到现在，目前我是在做计算机视觉，推荐系统的一些问题。

### 第二部分 专业选择

#### Q1：那么，请问学长在本科选择方向的时候为什么要选择概率统计系呢？

A1：说实话，我学概率统计的一个原因就是基础太难了（笑）。我感觉就是一些特别厉害的人会留在基础，他们都对纯数学更感兴趣；而我觉得我对建模啊应用啊这些问题更感兴趣，从这个角度看，大部分情况下别的系都是一样的，所以我就来了概率统计。

#### Q2：如果学长当时只是对应用感兴趣的话，为什么没有去概率统计以外的其它系，比如计算和金融呢？

其实我现在做的东西也是有点更倾向于信科那边做的东西，比如推荐系统几乎是纯信科的，可能在数学系来说更接近于计算；但是，计算系本科所接触的一些计算可能还是更偏数学，比如数值分析，还是更偏向理论的。

但我当时是想做一些更偏应用的东西。当时深度学习这个领域还没有火起来，所以统计的应用前景肯定是最大的，所以就选择了统计。至于没有选择金融的话，可能是个人偏好，因为我觉得金融的模型太理想化了，不太喜欢这种东西。我更喜欢解决一些非常现实的问题，比如现在正在做的推荐系统。

### 第三部分 科研心态与建议

#### **Q1：从本科一路走来，学长对科研的看法想必也发生了很大的变化吧，觉得当年对科研是否存在认识偏差呢？**

A1：其实我觉得很多同学最开始可能有些误区，特别是一些数学系的同学，都是觉得你得把所有东西搞清楚，或者有一个理论性的，系统的理解之后，你再做其实比较好。当然基础的我不了解，不过概率统计，计算机视觉等等，我觉得完全不是这样。

当时跟我一起发 top 文章的人，他是生科院的一个大三的本科生，所以他的数学基础肯定比大部分数院的人要弱，但是同样能在很早的时候发出来文章。所以，像概率统计和深度学习这些领域，其实需要的理论或者需要的基础并没有很深，我建议还是以边学边做为主，就是在实验中去寻找问题比较好。

#### **Q2：学长在做科研之外，平时会有心理压力吗？**

A2：其实我确实是运气比较好，两年就中了两篇文章。当然，我也算是遇到了比较好的合作者，他们帮我解决了不少问题。

但是，我目前做的计算机视觉还是有一定的瓶颈的，因为我是接触完全不了解的方向；和我合作的学长他以前也做一些偏应用的问题，所以我跟他探讨这个问题的时候，还是会有一些瓶颈。两个人没有什么经验，一些实验最开始都做不全，但我们在逐渐反思，跟别人对比，通过差不多一年时间，质量才逐渐提高上来。在这一年里面，我有时候也会自我怀疑，压力也挺大的，因为我之前的项目都是一帆风顺。

但是，我觉得还是要把心态放的更平一点，不要觉得自己达到要求比别人早就一定什么都能做的好，或者一定不需要特别多的努力就可以做好。做科研的时候，还是得好好努力，认真研究跟别人的差距，保持一个积极乐观的态度，去度过这些瓶颈期。大部分博士生其实都会遇到这个问题，很多时候也不要怕经历一些挫折，就像张益唐对吧，一个非常典型的例子，虽然也不能举大佬的例子（笑），但大概还是要鼓励一下自己的。

#### **Q3：一些大一大二的同学，还不太确定自己要选择怎样的路，也不知道大概要怎么去判断。对此，学长有什么建议吗？**

A3：对于道路选择的话，我觉得，本科目前在数

学系里可能最重要的还是学习，虽然说有个目标很重要，但很多时候你目标最开始是不确定的。我觉得这时候还是要先做对自己有最有益的事情，像大部分同学现在没有确定下来目标，就可以先把科研当做可能的一个方向，总是不会错的，因为你做别的，也不能发挥自身的优势，毕竟你在数院对不对？（笑）

所以目前可以先搞科研做一个基础的方案，然后先做下去，看看会有什么样的结果。在选择方面，最开始模糊的时候，还是要跟着大部队去做的，很多时候你赶鸭子上架，可能也会有一个还不错的，至少中等偏上的结果。如果你没有特别清晰的目标，拿到中等偏上的结果也还是不错的。

在选课方面，我觉得大一大二的话主要还是上课，当然你如果学有余力的话，可以提前多上点课。如果你觉得目前的课业压力不大的话，可以多选点课。我觉得很多课的质量是很高的，然后你会从这些课去了解，去有更多感兴趣的东西，我感觉也很好。有的时候专业课老师大概就照着一本书就随便念念，是这样，但是你可以顺着思路去自学。其实很多人可能也不太上课，但是他还是会照着大纲去读。选课本身是为了督促自己去学这门课的内容。可能很多同学也会有这种感觉，旁听了，但是听着就渐渐的就落后了，因为旁听没有压力，其实很多时候你课就上不下来了。就很多时候你坐到后面，你会想突然给自己一点借口。比如说什么考试了，这课就不去了，要复习等等，然后就再也不去了（笑）。

至于科研这条道路怎么走，我觉得如果你要保研或者出国，要么你得有绩点，要么得有文章，或者你得有一个好的科研经历。所以，进组是一个很好的选择。很多老师他招学生还是会亲自去面的，如果你去参加他的讨论班，然后你成绩不差，拿到保研名额，他大概率肯定会要你。但是，如果你想找什么专硕或者你要去比如光华的话，绩点肯定比科研经历要重要，所以这两个就有一个取舍。你如果不注意绩点，你可能会学的更多，你在意绩点你可能会学的更少一点，二者之间你可以做一个平衡。

^\_^：谢谢学长的耐心解答！

# Chapter 3

## 游于艺数



“游于艺数”是这一期心桥曾经要使用的主题。然而，投稿数量的下降造成了无法单独撑起一期心桥的尴尬局面。后来，在增添了另外两个主题部分之后，我们决定将游于艺数作为一个单独的部分，并且在其中放入我们收集到的所有投稿，也是我们对往期心桥的这种展现自我平台的风格的继承。

我们希望大家在这一部分中能够欣赏数院人的各种奇思妙想。总有一瞬间，你也会与作者会产生奇妙的共鸣！

## Part I 数学专栏

### 幻方——自然数的明珠

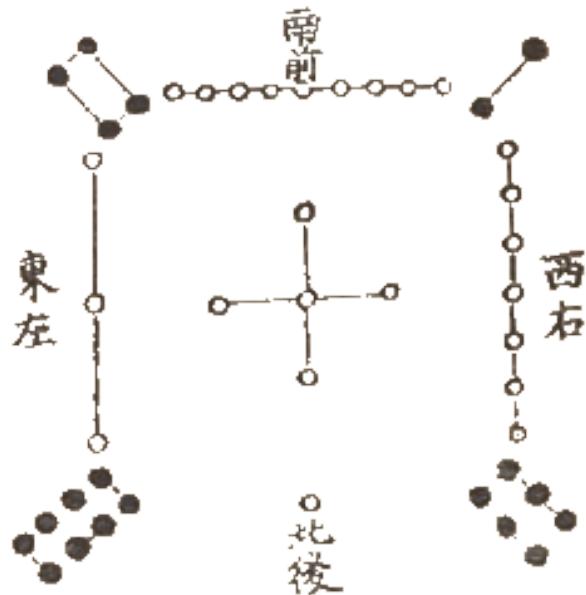
(文 | 郭纬)

#### 幻方的概念与历史

幻方指由  $n^2$  个互不相同的整数（一般规定为 1 到  $n^2$ ）排成的一个  $n$  行  $n$  列的表格，使得每行、列和对角线上的所有数字之和相等。

大多数读者可能在小学奥数题中接触过幻方，但对其深入了解知之甚少。在组合数学中，对幻方的研究主要集中于它的构造方法和分类。目前，虽然已经发现了多种构造  $n$  阶幻方的通用方法，但对于  $n$  阶幻方的一般形式并没有得出通用的公式。

我们约定：如果两个幻方可通过旋转或镜像对称转化为同一个幻方，则将它们视为同一种幻方。目前已知的 1、2、3、4、5 阶幻方数目分别为 1、0、1、880、275305224，而 6 阶幻方数目据估计约有  $(1.7745 \pm 0.0016) \times 10^{19}$ 。至今仍未得出计算  $n$  阶幻方的数目的通项公式。



《周易本义》中的《洛书》记载的一个三阶幻方，这是三阶幻方的唯一形式。

中国是最早开始研究幻方的国家。幻方的传说可以追溯到《易经》的时期，而对幻方最早的明确记载出现在春秋时期《大戴礼记》中。已知最早的关于构造高阶幻方的论述出现在南宋时期杨辉撰写的《续古摘奇算法》中，下图为书中杨辉构造的3~9阶幻方。杨辉的研究标志古代中国对幻方研究的顶峰。

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 4  | 9  | 2  | 2  | 16 | 13 | 3  | 1  | 23 | 16 | 4  | 21 | 13 | 22 | 18 | 27 | 11 | 20 |
| 15 | 14 | 7  | 18 | 11 |    |    | 31 | 4  | 36 | 9  | 29 | 2  |    |    |    |    |    |
| 24 | 17 | 13 | 9  | 2  |    |    | 12 | 21 | 14 | 23 | 16 | 25 |    |    |    |    |    |
| 20 | 8  | 19 | 12 | 6  |    |    | 30 | 3  | 5  | 32 | 34 | 7  |    |    |    |    |    |
| 5  | 3  | 10 | 22 | 25 |    |    | 17 | 26 | 10 | 19 | 15 | 24 |    |    |    |    |    |
| 8  | 1  | 6  | 14 | 4  | 1  | 15 | 5  | 35 | 28 | 1  | 6  | 33 |    |    |    |    |    |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| 46 | 8  | 16 | 20 | 29 | 7  | 49 | 61 | 3  | 2  | 64 | 57 | 7  | 6  | 60 | 31 | 76 | 13 | 36 | 81 | 18 | 29 | 74 | 11 |  |
| 3  | 40 | 35 | 36 | 18 | 41 | 2  | 12 | 54 | 55 | 9  | 16 | 50 | 51 | 13 | 22 | 40 | 58 | 27 | 45 | 63 | 20 | 38 | 56 |  |
| 44 | 12 | 33 | 23 | 19 | 38 | 6  | 20 | 46 | 47 | 17 | 24 | 42 | 43 | 21 | 67 | 4  | 49 | 72 | 9  | 54 | 65 | 2  | 47 |  |
| 28 | 26 | 11 | 25 | 39 | 24 | 22 | 37 | 27 | 26 | 40 | 33 | 31 | 30 | 36 | 30 | 75 | 12 | 32 | 77 | 14 | 34 | 79 | 16 |  |
| 5  | 37 | 31 | 27 | 17 | 13 | 45 | 29 | 35 | 34 | 32 | 25 | 39 | 38 | 28 | 21 | 39 | 57 | 23 | 41 | 59 | 25 | 43 | 61 |  |
| 48 | 9  | 15 | 14 | 32 | 10 | 47 | 44 | 22 | 23 | 41 | 48 | 18 | 19 | 45 | 66 | 3  | 48 | 68 | 5  | 50 | 70 | 7  | 52 |  |
| 1  | 43 | 34 | 30 | 21 | 42 | 4  | 52 | 14 | 15 | 49 | 56 | 10 | 11 | 53 | 35 | 80 | 17 | 28 | 73 | 10 | 33 | 78 | 15 |  |
|    |    |    |    |    |    |    | 5  | 59 | 58 | 8  | 1  | 63 | 62 | 4  | 26 | 44 | 62 | 19 | 37 | 55 | 24 | 42 | 60 |  |
|    |    |    |    |    |    |    |    | 71 | 8  | 53 | 64 | 1  | 46 | 69 | 6  | 51 |    |    |    |    |    |    |    |  |

而在西方，幻方与宗教、文化和艺术联系紧密。在波兰克拉科夫的 Picatrix (《贤者之书》) 等文艺复兴时期欧洲的宗教文献中，已出现了3到9阶的幻方。同一时期，Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim 在著作 De occulta philosophia (《神秘理念》，1531年) 中将3到9阶幻方分别与土星、木星、火星、太阳、金星、水星和月球联系在一起。

1514年德国画家 Albrecht Dürer (丢勒) 的铜版画 Melencolia I (《忧郁》，见下面左图。中图为幻方部分的细节放大) 中出现了4阶幻方，被视为欧洲艺术中最早出现幻方的作品。这个幻方中，最下方的15、14代表创作年份，这也是画家母亲去世的时间；1和4分别对应字母A和D，为画家名字的首字母。而在巴塞罗那的 Sagrada Família (神圣家族) 教堂中也出现了一个4阶类似幻方的结构(下面右图)，其行和、列和、对角线元素和均为33，象征耶稣受难时的年龄。



## 幻方的一些性质

### (一) 幻数

我们称n阶幻方每行、列和对角线上的所有数字之和为幻数  $M(n)$ 。容易得出， $M(n) = n(n^2 + 1)/2$ 。

### (二) 质心

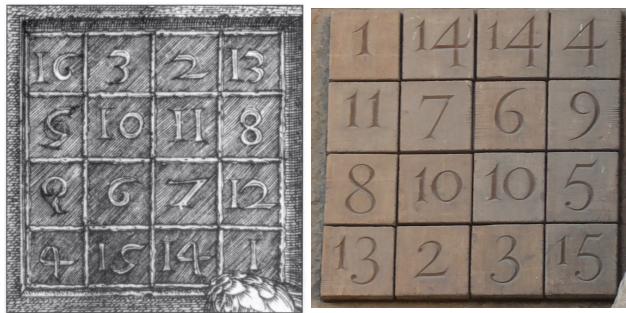
仿照物理学中的概念，我们将幻方中的数字视为分布在不同格子中的质量，那么根据每行、列和对角线上的所有数字之和相同，可以得出幻方的质心位于其几何中心。

### (三) 转动惯量

我们定义幻方的转动惯量为：所有质点到幻方质心的距离的平方与质点的质量之积的求和 ( $I = \sum m_i d_i^2$ )。计算距离时，把相邻两个数字的距离视为1(例如，3阶幻方角落的数字到质心的距离为 $\sqrt{2}$ ，4阶幻方角落的数字到质心的距离为 $1.5\sqrt{2}$ )。易证： $n$ 阶幻方的转动惯量  $I(n) = n^2(n^4 - 1)/12$ 。

### (四) Birkhoff–von Neumann 分解定理

将幻方视为矩阵，所有元素同除  $M(n)$  后可得到一个特殊的随机矩阵  $A$ ，其行和、列和、对角线和都为1。故存在和为1的非负实数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  与置换矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_k$ ，使得  $A = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots +$



$\theta_k P_k$ 。（置换矩阵指将单位矩阵的列向量重新排列得到的矩阵。）

## 构造 $n$ 阶幻方的通用方法

以下为方便叙述，我们定义  $a$  行  $b$  列的格子的坐标为  $(a, b)$ 。如果  $a_1$  和  $a_2$  模  $n$  同余，则将  $a_1$  和  $a_2$  行 / 列视为同一行 / 列。

### (一) 3 阶幻方

19 世纪时，douard Lucas 给出了构造 3 阶幻方的通用形式（这里去除幻方中的整数为 1~9 的条件）：

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| $c-b$     | $c+(a+b)$ | $c-a$     |
| $c-(a-b)$ | $c$       | $c+(a-b)$ |
| $c+a$     | $c-(a+b)$ | $c+b$     |

其中正整数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足： $0 < a < b < c - a$ ， $b \neq 2a$ 。

### (二) 奇数阶幻方的构造方法——暹罗方法 (Siamese method)

法国数学家兼外交官 Simon de la Loubère 在其著作《暹罗王国》(Du Royaume de Siam, 1693 年) 中记载了一种构造奇数阶幻方的方法。虽然由于 Simon de la Loubère 出任暹罗外交官的经历，后人称此方法为暹罗方法，但实际上 Simon de la Loubère 是从法国人 M. Vincent (曾前往波斯、暹罗，并与 Simon de la Loubère 一同从暹罗回到法国) 处了解到这一方法，而后者是在印度西部的港城 Surat 学得这种方法的。

首先将数字 1 填入第一行的最中间一格。

归纳地填入接下来的数字。假设  $k$  的坐标为  $(a, b)$ ：如果  $(a-1, b+1)$ （广义的右上方格）没有填入数字，则将  $k+1$  填入这一格。反之，则将  $k+1$  填入  $(a+1, b)$ （广义的下方格）。反复执行此操作直到所

有数字填入。

用暹罗方法构造 3、5、9 阶幻方的结果如下图。

| Order 9 |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 47      | 58 | 69 | 80 | 1  | 12 | 23 | 34 | 45 |
| 57      | 68 | 79 | 9  | 11 | 22 | 33 | 44 | 46 |
| 67      | 78 | 8  | 10 | 21 | 32 | 43 | 54 | 56 |
| 77      | 7  | 18 | 20 | 31 | 42 | 53 | 55 | 66 |
| 6       | 17 | 19 | 30 | 41 | 52 | 63 | 65 | 76 |
| 16      | 27 | 29 | 40 | 51 | 62 | 64 | 75 | 5  |
| 26      | 28 | 39 | 50 | 61 | 72 | 74 | 4  | 15 |
| 36      | 38 | 49 | 60 | 71 | 73 | 3  | 14 | 25 |
| 37      | 48 | 59 | 70 | 81 | 2  | 13 | 24 | 35 |

| Order 5 |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|
| 17      | 24 | 1  | 8  | 15 |
| 23      | 5  | 7  | 14 | 16 |
| 4       | 6  | 13 | 20 | 22 |
| 3       | 5  | 7  | 10 | 12 |
| 4       | 9  | 2  | 11 | 18 |

| Order 3 |   |   |
|---------|---|---|
| 8       | 1 | 6 |
| 3       | 5 | 7 |
| 4       | 9 | 2 |

如果其他步骤不变，只是把 1 填入其他格子中，仍然可以保证填充完成后每行、每列的数字和相同，但对角线上数字和不一定相同。

### (三) 4k 阶幻方的构造方法

先构造 4 阶。将 1~16 从左到右、从上到下填入每个格子。保留两对角线上数字不动（下图中灰色格子），将其他数字与和它中心对称的数字交换位置，即构造出 4 阶幻方。

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 15 | 14 | 4  |
| 12 | 6  | 7  | 9  |
| 8  | 10 | 11 | 5  |
| 13 | 3  | 2  | 16 |

再用同样方法构造 4k 阶。

先构造一个辅助表，将  $4k$  阶方格划分为  $k^2$  个 4 阶小方格，每个小方格的对角线上格子标 1，其余格子标 0。

分别构造两个  $4k$  阶数表：表①，从  $(1, 1)$  开始，将  $1 \sim k^2$  从左往右、从上往下地填充入每一行；表②，从  $(4k, 4k)$  开始，将  $k^2 \sim 1$  从右往左、从下往上地填充入每一行。

在辅助表中，标 1 的格子填入表①相同位置中数字，标 0 的格子填入表②相同位置中数字，即可得到  $4k$  阶幻方。下图展现了 8 阶幻方的构造方法。

| $M = \text{Order } 8$ | $M = \text{Order } 8$ | $M = \text{Order } 8$   |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1 0 0 1 1 0 0 1       | 1 4 5 8               | 1 63 62 4 5 59 58 8     |
| 0 1 1 0 0 1 1 0       | 10 11 14 15           | 56 10 11 53 52 14 15 49 |
| 0 1 1 0 0 1 1 0       | 18 19 22 23           | 48 18 19 45 44 22 23 41 |
| 1 0 0 1 1 0 0 1       | 25 28 29 32           | 25 39 38 28 29 35 34 32 |
| 1 0 0 1 1 0 0 1       | 33 36 37 40           | 33 31 30 36 37 27 26 40 |
| 0 1 1 0 0 1 1 0       | 42 43 46 47           | 24 42 43 21 20 46 47 17 |
| 0 1 1 0 0 1 1 0       | 50 51 54 55           | 16 50 51 13 12 54 55 9  |
| 1 0 0 1 1 0 0 1       | 57 60 61 64           | 57 7 6 60 61 3 2 64     |

#### (四) $4k+2$ 阶幻方的构造方法

##### (1) John Horton Conway 的 LUX 方法

先构造一个  $2k+1$  阶辅助表：其中前  $k+1$  行填入  $L$ ，第  $k+2$  行填入  $U$ ，最后  $k-1$  行填入  $X$ ，再将第  $k+2$  行最中间的  $U$  与其上方的一个  $L$  交换位置。在辅助表中，每个字母即将被替换为一个  $2\times 2$  小数表（于是最后生成的就是  $4k+2$  阶幻方）。

从第一行最中间的  $L$  开始，仿照暹罗方法遍历辅助表中的所有字母，将数字  $1, 2, \dots, (4k+2)^2$  依次填充入每个字母。其中，将  $L, U, X$  分别替换为

$$\begin{pmatrix} t+4 & t+1 \\ t+2 & t+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 & t+4 \\ t+2 & t+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 & t+4 \\ t+3 & t+2 \end{pmatrix}$$

以下是在 Conway 的 LUX 方法构造 10 阶幻方的步骤，左侧为辅助表，右侧为 10 阶幻方。用  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  替换  $(1, 3)$  的  $L$ ，用  $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$  替换  $(5, 4)$  的  $X$ ，用  $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$  替换  $(4, 5)$  的  $U$ ，以此类推。

|     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |    |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
|     | 68  | 65  | 96  | 93  | 4   | 1   | 32 | 29 | 60 | 57 |
|     | 66  | 67  | 94  | 95  | 2   | 3   | 30 | 31 | 58 | 59 |
|     | 92  | 89  | 20  | 17  | 28  | 25  | 56 | 53 | 64 | 61 |
|     | 90  | 91  | 18  | 19  | 26  | 27  | 54 | 55 | 62 | 63 |
|     | 16  | 13  | 24  | 21  | 49  | 52  | 80 | 77 | 88 | 85 |
|     | 14  | 15  | 22  | 23  | 50  | 51  | 78 | 79 | 86 | 87 |
|     | 37  | 40  | 45  | 48  | 76  | 73  | 81 | 84 | 9  | 12 |
|     | 38  | 39  | 46  | 47  | 74  | 75  | 82 | 83 | 10 | 11 |
|     | 41  | 44  | 69  | 72  | 97  | 100 | 5  | 8  | 33 | 36 |
|     | 43  | 42  | 71  | 70  | 99  | 98  | 7  | 6  | 35 | 34 |
| $L$ | $L$ | $L$ | $L$ | $L$ | $L$ |     |    |    |    |    |
| $L$ | $L$ | $L$ | $L$ | $L$ | $L$ |     |    |    |    |    |
| $L$ | $L$ | $U$ | $L$ | $L$ | $L$ |     |    |    |    |    |
| $U$ | $U$ | $L$ | $U$ | $U$ | $U$ |     |    |    |    |    |
| $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |     |    |    |    |    |

##### (2) Strachey 方法

先将  $n=4k+2$  阶数表分割为 4 个  $2k+1$  阶数表  $A, B, C, D$ （位置分别为左上、右下、右上、左下）。

运用暹罗方法分别填充  $2k+1$  阶数表  $A, B, C, D$ ，其中  $A$  中的数字为  $1 \sim n^2/4$ ， $B$  中的数字为  $n^2/4 + 1 \sim n^2/2$ ， $C$  中的数字为  $n^2/2 + 1 \sim 3n^2/4$ ， $D$  中的数字为  $3n^2/4 + 1 \sim n^2$ 。

接下来，将  $A$  的最左边  $k$  列数字与  $D$  的最左边  $k$  列数字平移对调，将  $B$  的最右边  $k-1$  列数字与  $C$  的最右边  $k-1$  列数字平移对调。

最后，交换  $A$  和  $D$  第一列的中心元素，交换  $A$  和  $D$  的最中心元素。于是  $4k+2$  阶幻方构造完成。

下图为用 Strachey 方法构造的 6 阶幻方。

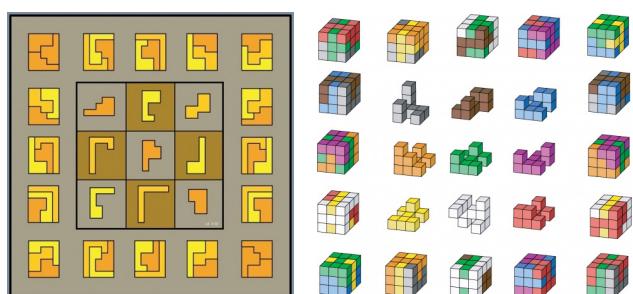
|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 35 | 1  | 6  | 26 | 19 | 24 |
| 3  | 32 | 7  | 21 | 23 | 25 |
| 31 | 9  | 2  | 22 | 27 | 20 |
| 8  | 28 | 33 | 17 | 10 | 15 |
| 30 | 5  | 34 | 12 | 14 | 16 |
| 4  | 36 | 29 | 13 | 18 | 11 |

## 幻方的一些推广

### (一) 几何幻方

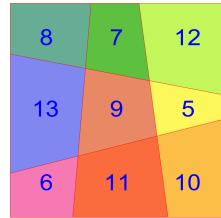
2001 年由 Lee Sallows 发明。几何幻方的每一个元素由数字换成了图形，而每行、每列、每条对角线上的元素可以拼在一起形成同一个图形。

下面两张图片分别是二维、三维的 3 阶几何幻方，构造之妙令人拍案叫绝。



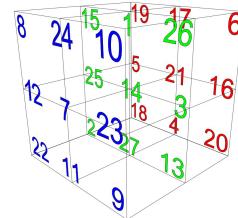
### (二) 面积幻方

2017 年，根据 William Walkington 和 Inder Taneja 二人提出的想法，Walter Trump 第一个构造出了线性的面积幻方，如图。数字代表该区域的面积。



### (三) 幻立方体

将幻方的概念推广到 3 维，类似地得到幻立方体。下图就是一个 3 阶幻立方体的构造，所有共线得三个数字之和都是 42。



### 参考文献及图片来源：

维基百科词条 Magic square、Siamese method、Conway's LUX method for magic squares、Geometric magic square、Melencolia I、Magic cube。

# 最小数独问题

(文 | 李晓坤)

## 一、数独起源与最小数独问题简介

数独是源于 18 世纪瑞士的一种逻辑游戏，它脱身于欧拉所研究的“拉丁方阵”（Latin Square）。20 世纪 70 年代，数独游戏以“数字拼图”（Number Place）的名字在美国迅速流行起来，并在传入日本后被改名为“数独”（すうどく），而如今数独的英文名字 sudoku 也正是由日语音译而来的。

在数独游戏中，玩家需要根据  $9 \times 9$  盘面上的已知数字推理出所有剩余空格的数字，并满足每一行、每一列和每一粗线宫（ $3 \times 3$ ）内的数字均含有且仅含有 1 至 9。

数独游戏的规则较为简单，但数独却让众多数学家着迷。起初，一个非常自然的问题是，数独游戏有多少种不同的解。2005 年，Bertram Felgenhauer 证明了，数独共有  $6,670,903,752,021,072,936,960$  种不同的解 [1]。

此外，还有一个被讨论了很久的问题，也是这篇文章主要介绍的问题——最小数独问题，即至少给定多少个初始数字，才能使得一个数独问题有唯一解。已经有人给出了一些包含 17 个初始数字的数独问题，并利用程序证明了其解的唯一性。但从未有人找到过 16 个初始数字的仅有唯一解的数独问题。因此，人们自然地猜测，问题的答案就是 17。最终，在 2012 年，Gary McGuire，Bastian Tugemann 和 Gilles Civario 三人利用程序证明了最小数独问题的答案的确是 17[2]。

|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|---|---|---|--|--|---|---|--|--|
|   | 8 | 1 |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  | 4 | 3 |  |  |
| 5 |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |

|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|--|---|---|--|--|--|--|--|--|
|  | 7 | 8 |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |
|  |   |   |  |  |  |  |  |  |

|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 2 | 3 |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |  |  |  |  |  |  |  |

|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|---|---|---|--|--|---|---|--|--|
| 6 |   |   |  |  | 7 | 5 |  |  |
|   | 3 | 4 |  |  |   |   |  |  |
|   | 2 |   |  |  | 6 |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |
|   |   |   |  |  |   |   |  |  |

一个有 17 个初始数字且有唯一解的数独问题

本文主要介绍的是 Gary McGuire，Bastian Tugemann 和 Gilles Civario 三人证明的主要思路，并会给出一些关键概念的定义，如不可避免集和碰撞集问题等。但本文不会给出特别具体的理论细节或是代码，对细节感兴趣的读者可以查阅原文，本文内容主要参考三人发表的论文 There Is No 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem via Hitting Set Enumeration[2]。

## 二、与数独相关的证明

在对主要证明思路进行介绍之前，有必要对最小数独问题已有的若干成果进行简单介绍。由于在 2012 年，这一问题已被彻底解决，因此在此只列举 2012 年之前的一些重要结果。（事实是小编太懒没去找最新的结果）

很长一段时间内，一直有人在尝试用纯粹的数学的方法——即不利用计算机，去证明最小数独问题的答案是 17。但无一例外，他们都失败了。到 2012 年时，甚至没有人能用纯数学的方法证明仅有 8 个初始数字的数独没有唯一解。

近 50000 个有 17 个初始数字且有唯一解的数独问题（数独问题的定义将在后文给出）已被找到，其中绝大多数都是由来自 University of Western Australia 的 Gordon Royle 发现的 [3]。并且，人们还发现，这其中 29 个数独问题的解是相同的。也就是说，在这一特定的填满了数字的数独方格中，存在着 29 个不同的有 17 个初始数字的且有唯一解的数独问题。到目前为止，人们并没有发现有超过 29 个 17 初始数字数独问题的数独方格。因此，人们在试图寻找 16 初始数字的数独问题时，往往是在这一张特殊的数独方格中寻找。

事实上，如果存在 16 初始数字且有唯一解的数独问题，那么由这一数独问题，可以构造出 65 个不同的

17 初始数字数独问题并且它们都是具有唯一解的（只需在剩下的 65 个方格中任意挑选一个作为第 17 个初始数字），这与目前已知的 29 相差甚远。虽然我们还不能证明已发现的 49151 个有唯一解的 17 初始数字数独问题是完全的，但这一事实无疑使人们更加相信，问题的答案就是 17。

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 | 2 | 4 | 1 | 7 | 8 | 5 |
| 2 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 9 | 3 |
| 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 5 | 7 | 9 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 6 | 4 | 3 | 2 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 6 | 1 | 9 | 2 | 3 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 6 | 1 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 |
| 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 8 |

有 29 个不同的 17 元恰当数独问题的数独终盘

在 2007—2008 年，匈牙利的一支团队验证了 11 个初始数字的数独问题都没有唯一解。之后他们开始证明 12 个初始数字的情形，并在 2009 年时，已经完成了绝大部分计算。之后，他们开始致力于证明 16 个初始数字的情形，但遗憾的是，到 2010 年时，他们的工作还是没有任何进展。

2008 年，一个 17 岁的女孩向 Jugend forscht（德国全国中学生科学竞赛）提交了一份不存在 16 个初始数字且有唯一解的数独问题的证明，并在该刊发表 [4]。但不幸的是，来自 University of Bayreuth 的数学家 Sascha Kurz 发现了证明中一个无法修补的漏洞。

2010 年 10 月，台湾交通大学的一支团队开始利用 BOINC（伯克利开放式网络计算平台）对 16 个初始数字的数独问题进行分布式搜索。这支团队的思路与本文将要介绍的思路几乎完全相同，但在计算速度上还是略逊一筹——他们估计大约要用 2400 年 CPU 时间完成计算，而 Gary McGuire 等三人只用了约 800 年 CPU 时间。在 Gary McGuire 等人宣布他们的工作成果前一天，这支团队已完成了约 26.5% 的验证工作，他们最终在 2013 年 9 月完成了所有的验证 [5]。

在本文介绍的证明中，需要解决一个碰撞集问题，而碰撞集问题是 Karp 提出的 21 个 NP 完全问题之一。已有的简化算法中，最优的时间复杂度为  $O(\alpha k + n)$ ，其中  $\alpha = d - 1 + O(1/d)$ ， $k$  是碰撞集的基数， $d$  是待碰撞集合中元素数目的最大值；Gary McGuire 等人估计他们给出的算法的时间复杂度为  $O(dk^2)$ 。

### 三、证明思路概述

首先，我们有必要引入若干概念，以便后文展开介绍。

数独终盘，或简称解，是指一个由  $\{0, \dots, 80\}$  到  $\{1, \dots, 9\}$  的满足数独规则的映射，即  $\{0, \dots, 80\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$ 。其中 0~80 对应格子，而 1~9 则对应格子中的数字。另外，当我们称“X 是数独终盘 G 的子集”时，我们将 G 视为  $\{0, \dots, 80\} \times \{1, \dots, 9\}$  的一个子集，而 X 是该集合的子集。

数独问题是指  $\{0, \dots, 80\} \times \{1, \dots, 9\}$  的某一满足数独规则的子集。如果存在唯一的数独终盘 G 包含数独问题 P，则称 P 有唯一解，且称 P 为一个恰当数独问题。如果一个数独问题具有 n 个元素，则称其为 n 元数独问题。

称数独问题中的元素为初始数字，由上述定义可以看出一个初始数字实际上可以看作一个二元有序数对。

接下来，我们先给出证明的大体框架，再具体介绍每一步的细节。证明最小数独问题的答案为 17 的思路其实很简单——枚举法，对每一种不同的数独终盘进行讨论，找出其中所有的 16 元数独问题，然后验证其解不唯一。反之，如果某一 16 元数独问题有唯一解，则构成该命题的反例。计算的实现主要分为三步：

1. 找到并存储所有的数独终盘；
2. 实现一个高效算法 checker，用来搜索某一数独终盘中所有的 16 元恰当数独问题；
3. 遍历并搜索所有的数独终盘。

然而，由于数独不同的解的数目多达  $6.7 \times 10^{21}$  个，而从某一解中挑选出 16 元数独问题的组合数也太大，这样简单而粗糙的枚举法的时间开销是巨大的，实际上是不可行的，因此我们需要通过数学的方法缩小搜索空间，提高搜索效率。

### 四、引入等价类

不难发现，搜索所有的解不是必要的。例如，将某一数独终盘中的数字 1 与数字 2 交换，或是将  $9 \times 9$  方格的第一列与第二列互换，并没有从本质上改变解。更确切的说，这里所说的解的本质不发生改变是指，在变换前后，该数独终盘中所含有的所有的 16 元数独问题的恰当性不发生改变。我们所关心的这一性质在

这类变换之下保持不变，因此我们可以定义解在一定关系下的等价类，从而只需要搜索这些等价类中的代表元。

为此，我们需要先确定哪些变换是保持上述性质的等价变换。为方便表述，我们称 $9\times 9$ 方格的第1—3列、第4—6列、第7—9列为堆(stack)，称第1—3行、第4—6行、第7—9行为带(band)。等价变换除之前提到的数字1~9的置换，还有堆的置换、带的置换，堆内部的列置换、带内部的行置换，以及 $9\times 9$ 方格的转置。可以证明，其他等价变换例如旋转、对称等均可以由上述四种等价变换复合得到。

其次，我们还需要确定有多少个不同的等价类，并在每一个等价类中挑选一个代表元。上述四类等价变换在映射复合运算下构成了一个群，我们称之为数独群。数独群作用在全体数独终盘构成的集合上，构成一个群作用。要计算数独终盘等价类的个数，只需要计算这一群作用的轨道数。如果我们记

$$T = \{\sigma \in S_9 \mid \forall 1 \leq i < j \leq 9: \lceil \frac{i}{3} \rceil = \lceil \frac{j}{3} \rceil \rightarrow \lceil \frac{\sigma(i)}{3} \rceil = \lceil \frac{\sigma(j)}{3} \rceil\}$$

那么我们可以证明，数独群可以表示为， $(S_9 \times T \times T) \rtimes C_2$  其中  $S_9$  是9次对称群，对应于数字1—9的置换；两个  $T$  分别对应于行置换与列置换（其中“ $\lceil \cdot \rceil$ ”为向上取整）； $C_2$  是二阶循环群，对应于转置。之所以是  $S_9 \times T \times T$  与  $C_2$  的半直积，是因为数字置换与任何其他等价变换是可交换的，行置换与列置换是可交换的，因此这三种变换产生的是直积；而转置与行列的置换并不交换，但转置复合一个行置换等于一个相应的列置换复合转置，因此数独群是  $S_9 \times T \times T$  与  $C_2$  的半直积。进一步的，我们还可以证明  $T$  同构于  $S_3 \times S_3 \times S_3 \times S_3$ ，这是由于带(堆)的置换有  $3!=6$  个，而每个带(堆)内部的行(列)置换也有  $3!=6$  个。这样一来，数独群的结构就被完全确定下来了，我们从而可以利用 Burnside 引理来计算群作用轨道数目。利用计算机可以得到，该群作用共有 5,475,730,538 个轨道，即所有的数独终盘可以被划分为 5,475,730,538 个等价类，我们只需要讨论这些等价类的代表元，这与先前需要讨论近  $6.7 \times 10^{21}$  个解相比，计算量得以大大减少。

仅知道等价类的数目不足以完成这一证明，我们还需要从每一个等价类中挑选出一个代表元。幸运的是，Glenn Fowler 已经完成了这一工作，通过他实现的工具，可以得到所有等价类的代表元，每一个代表

元是它所在的等价类中按某种字典序排序得到的最小的元素 [6]。

## 五、不可避免集与碰撞集

证明的第二步是在某一数独终盘中搜索所有的 16 元恰当数独问题。一个简单而直接的想法是穷举所有的种组合，但稍加思考，我们就可以给出更加高效的算法。我们关心的是那些有可能具有唯一解的数独问题，因此可以通过某种方法直接排除那些不可能具有唯一解的情形。为此，我们引入不可避免集(unavoidable set) 与碰撞集(hitting set)。

定义：设是一个数独终盘，若数独问题不具有唯一解，则称的子集为的不可避免集，或称子集关于是不可避免的。称一个不可避免集关于为最小的，若该集合的任何真子集都不是关于的不可避免集。

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 3 | 7 | 8 | 5 | 6 | 2 | 4 | 1 |
| 5 | 6 | 2 | 1 | 9 | 4 | 3 | 8 | 7 |
| 4 | 8 | 1 | 2 | 7 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| 8 | 2 | 3 | 6 | 4 | 7 | 9 | 1 | 5 |
| 6 | 1 | 5 | 9 | 3 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| 7 | 4 | 9 | 5 | 8 | 1 | 6 | 2 | 3 |
| 3 | 7 | 8 | 4 | 6 | 9 | 1 | 5 | 2 |
| 1 | 9 | 6 | 7 | 2 | 5 | 8 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 4 | 3 | 1 | 8 | 7 | 9 | 6 |

例如上图中有两组不可避免集。如果将浅灰色区域中的 5 和 9 交换，那么就得到了一个新的解，也就是说这张数独终盘在去掉灰色区域中的数字后作为一个数独问题有两组不同的解，所以浅灰色区域中的数字 5 和 9 构成了一组不可避免集。类似的，深灰色区域中的数字 1、2 和 7 进行适当的交换也可以得到一个新的解；这张数独终盘在去掉深灰色区域中的数字之后也有两组不同的解，因此深灰色区域中的数字也构成了一组不可避免集。

定义：设  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  是集合  $S$  的子集族，称  $S$  的子集  $H$  为  $S_1, S_2, \dots, S_m$  的碰撞集，若  $H \cap S_i (i=1, 2, \dots, m)$  非空。对于含有  $K$  个元素的碰撞集  $K$ ，称其为  $K$  元碰撞集。

不难看出，如果一个数独问题  $P$  有唯一解  $G$ ，那么  $P$  与  $G$  的所有不可避免集的交集都非空，从而恰当

数独问题一定是某一数独终盘的所有不可避免集的碰撞集。反之，任一数独终盘 G 的所有不可避免集的碰撞集 H 也一定是以 G 为解的恰当数独问题。这是因为若 H 不是恰当的，则  $G \setminus H$  关于 G 是不可避免的，这与 H 为碰撞集相矛盾。

因此如果对任一数独终盘我们能够找到其所有不可避免集，那么在该数独终盘下搜索 16 元恰当数独问题就归结为寻找这些不可避免集的 16 元碰撞集。但是要找到所有的不可避免集仍是一个困难的问题，因此我们退而求其次，只找到所有的元素个数不超过 12 个的不可避免集，再求它们的碰撞集。很显然这时求出的碰撞集并不一定与其他不可避免集交集非空，但所有不可避免集的碰撞集一定全都包含其中，所以，我们最后还需要判断求出的碰撞集是否具有唯一解。这样的做法看似增加了额外的计算，但其实是在计算不可避免集与验证数独问题恰当性之间进行权衡——计算所有的不可避免集的开销过高，而又有较高效率的算法来验证数独问题恰当性，因此我们选择只计算部分不可避免集，而 12 这一数字的选取就是经过尝试后折中的最终结果。

根据以上分析我们可以设计出 checker 的核心算法：

1. 对一给定的数独终盘，找出其所有元素个数不超过 12 的不可避免集；
2. 计算这些不可避免集的 16 元碰撞集；
3. 判断找到的碰撞集是否具有唯一解。

接下来我们首先介绍初代 checker 的较为朴素的回溯算法，同时分析其中存在的问题，随后再给出改进之后算法的一些细节。

## 六、初代 checker 算法

在 checker 核心算法的第一步中，我们需要对一指定的数独终盘搜索其所有元素个数不超过 12 的不可避免集。由于已经有人将所有的不超过 12 个元素的不可避免集列举了出来（在先前定义的等价关系下），所以 checker 只需要在指定的数独终盘中匹配相应的不可避免集模式。但是事实上，由于列举的不可避免集两两不等价，所以 checker 需要首先对指定的数独终盘进行等价变换，再对这些等价的解逐一进行匹配，匹配得到的不可避免集可以通过相应的逆变换还原为原数独终盘中的不可避免集。

这样的算法思路是很直接的，但是由之前的数独群理论我们不难发现，与某一指定数独终盘等价的解的数目是十分巨大的：而且上述算法在枚举时会出现严重的重复。因此初代 checker 在枚举不可避免集上的性能其实是有提升空间的。作者在论文中提到初代 checker 在一个指定的数独终盘中匹配所有的元素个数不超过 12 个的不可避免集大概需要 30 秒，而经过改进后的 checker 可以在 0.1 秒内完成同样的任务。

checker 核心算法的第二步大约占据了 95% 的 CPU 周期，但这也是意料之中的，因为第二步实际上是在求解一个 NP 完全的碰撞集问题。针对最小数独这一问题而言，我们实际上是在求解任一数独终盘的不可避免集的 16 元碰撞集。通常人们处理碰撞集问题采用的是贪心法，即保证求解过程中的每一步是局部最优的。但事实上，贪心法并不总能得到全局最优解，而 checker 的目标是完成一个数学证明，因此我们需要另寻他路，也即使用回溯法。

我们首先从最朴素的思路出发，假设现在给定了一个数独终盘以及一列不可避免集，求解其 16 元碰撞集可以通过以下几步来完成：首先从任一不可避免集中挑选一个初始数字作为我们要构造的 16 元碰撞集的第一个元素，随后我们从这些不可避免集中挑选出一个不包含已选元素的不可避免集，并从中挑选一个初始数字作为第二个元素。随后如此重复，直到我们挑选出 16 个元素。如果在挑选出 16 个元素之前，就已经构造出一个与所有不可避免集相交的集合，我们只需随意添加剩余的几个元素，并确保穷尽所有的可能；反之如果我们挑选出 16 个元素之后，仍存在与当前构造的集合交集为空的不可避免集，则说明当前的构造是失败的，需要进行回溯。

上述算法十分简单，但是效率也不高，在此我们举一例来说明该算法的弊端。假设我们有三个不可避免集  $U_1 = \{0, 3, 9, 12\}$ ,  $U_2 = \{0, 1, 27, 28\}$ ,  $U_3 = \{3, 4, 66, 67\}$ （对于给定的数独终盘，我们只需要考虑初始数字的第一个分量，即方格的位置），当我们从  $U_1$  中挑选 0 作为第一个元素时，由于  $U_2$  中也含有 0，所以我们只能从  $U_3$  中挑选第二个元素。 $U_3$  的第一个元素是 3，所以碰撞集前两个元素的选取有一种可能是  $\{0, 3\}$ 。但如果我们将 0 从  $U_1$  中挑选 3 作为第一个元素，由于  $U_3$  中也含有 3，所以我们只能从  $U_2$  中挑选第二个元素。而 0 是  $U_2$  的第一个元素，因此这时我们在搜索树的

不同分支上再一次构造出了 $\{0, 3\}$ 这样的集合，这就造成了重复枚举，势必会降低 checker 的性能，所以我们需要设法消除这种重复。

为解决这一问题，我们需要引入失效方格 (dead clue) 的概念。其基本想法是：当我们从某个不可避免集  $U$  中挑选了一个元素  $d$  加入碰撞集时，我们视  $U$  中所有数值比  $d$  更小的元素为失效方格（假设我们总是从不可避免集中由小及大依次枚举），即在元素  $d$  相应的搜索树分支中，我们将这些失效方格排除在考虑范围之外，但在其他的分支中，我们仍视这些元素为普通的元素。因此，在引入失效方格这一概念后，在构造过程中向碰撞集加入的元素的大小是严格递增的。

针对上一例子而言，当我们从  $U_1$  中挑选 3 作为碰撞集的第一个元素时，在以  $\{3\}$  为根节点的搜索树中，所有比 3 小的元素就都被标记为失效的了，从而在  $U_2$  中挑选第二个元素时，我们不再考虑 0。这时  $U_2$  的第一个元素就是 1，这样我们就避免了重复。在做出了这一改进之后，checker 的性能得到了一定提升。

checker 核心算法的第三步需要验证第二步中求出的碰撞集作为一个数独问题是否具有唯一解。这里 Gary McGuire 等人直接利用 Guenter Stertenbrink 发布的 suexk[7] 工具进行验证。

## 七、对初代 checker 进行改进

虽然初代 checker 对朴素回溯算法进行了一定的优化，但其整体性能还远不能达到预期，因此需要对其进行进一步改进。改进版本的 checker 在其核心算法的三步中均做了一定的优化。

改进后的 checker 在枚举不可避免集时利用了不可避免集与等价变换的性质缩小了搜索空间，而不是原来的简单的模式匹配。这一部分涉及较多的与不可避免集相关的定理，不详细展开介绍。

改进后的 checker 在核心算法的第二步上有三点主要优化：第一是利用高阶不可避免集对搜索树进行剪枝，这也是最主要、最显著的优化，下文将对此进行介绍；第二是对数据结构进行优化，降低 checker 运行所需内存，这一优化涉及较多数据结构的细节，感兴趣的读者可以查阅原文；第三是对不可避免集的挑选进行优化，主要是将失效方格纳入考虑范围，即在挑选元素最少的不可避免集并从中挑选下一元

素时，只考虑那些没有失效的元素的个数 (effective size)。

在验证数独问题恰当性的第三步中，改进后的 checker 换用了更为高效的 Brian Turner 发布的 BBSudoku[8] 验证工具。该工具是当时效率最高的求解器，Gary McGuire 等人并未使用其高级求解功能，但也能在一秒钟内完成对超过 50000 个 16 元数独问题恰当性的判定。

接下来我们介绍利用高阶不可避免集进行优化的大致思路。首先引入高阶不可避免集的概念，并由此给出剪枝算法。根据不可避免集的定义，我们可以将其概念进行推广，引入高阶不可避免集。直观上来讲，不可避免集是指任何一个恰当数独问题在其中都包含至少一个元素的集合，那么我们可以自然地将 1 个推广至  $n$  个，这就是高阶不可避免集。高阶不可避免集的严格定义如下：

定义：若对数独终盘  $G$  的非空子集  $U$  中任意元素  $c$ ， $U \setminus \{c\}$  都是  $k-1$  阶不可避免集，则称  $U$  为一个  $k$  阶不可避免集；称不可避免集为 1 阶不可避免集。若一个  $k$  阶不可避免集的任意真子集均不是同阶的不可避免集，则称该  $k$  阶不可避免集为最小的。

利用如上定义的高阶不可避免集，我们可以在回溯算法中更早地进行回溯，从而完成剪枝。这是由于在用回溯法求解碰撞集的过程中，如果正在构造的碰撞集中已有  $k-1$  个初始数字，并且存在一个 2 阶不可避免集，它与当前正在构造的集合交集为空，那么我们就可以推知，无论怎样向当前集合添加新的元素，最终得到的  $k$  个元素的碰撞集都不可能是恰当的——它与上述 2 阶不可避免集交集的元素个数至多为 1，由高阶不可避免集的定义可知构造出的集合是没有唯一解的。类似的，如果当前正在构造的碰撞集元素个数为  $k-2$ ，并且它与某个 3 阶不可避免集交集为空，我们同样也可以判断正在构造的这个碰撞集不可能具有唯一解，从而可以直接进行回溯而不必继续添加元素。更一般地，如果正在构造的碰撞集中有  $k-d+1$  个元素 ( $1 < d \leq k$ )，且存在一个  $d$  阶不可避免集与该集合交集为空，那么我们直接进行回溯而不必再对该分支进行搜索。

以上是利用高阶不可避免集进行剪枝的大致思路，但我们还需要回答如何求出高阶不可避免集。事实上，在针对最小数独问题的证明中，我们并不需要

求出所有的高阶不可避免集，哪怕我们只是有一部分高阶不可避免集，我们也可以对搜索树进行剪枝；过多的高阶不可避免集反而会降低性能。实际上 Gary McGuire 等人在 checker 中只利用了平凡的高阶不可避免集——互不相交的一阶不可避免集的并集所构成的高阶不可避免集。至于非平凡的高阶不可避免集，即不可分解为若干一阶不可避免集之并的集合，它们对 checker 的性能似乎并没有多少影响，因此他们也没有对高阶不可避免集进行深入的研究。

原文还给出了一些其他关于计算的细节，例如在计算时所采取的并行计算策略，针对特定的运行平台将内层核心循环用汇编语言改写，将所有递归函数改写为非递归形式，利用超线程模式提高计算效率等。

至此，我们已经对 Gary McGuire, Bastian Tugemann 和 Gilles Civario 三人给出的证明思路进行了较为完整的介绍。证明一经公布，很快就得到了数学家们的认可，并被视为数独领域的一项重要进展。最小数独问题的证明思路是暴力而机械的，但借助数学的力量，却又呈现出一种暴力美学。Gordon Royle 曾表示：“这是一个极具挑战性的问题，它可以激发人们将计算与数学方法推向极限，就像在攀登最高的山峰。”

#### 参考文献：

- [1] Bertram Felgenhauer and Frazer Jarvis. “Mathematics of Sudoku I”. Mathematical Spectrum 39:1 (2006), 15–22.

[2] Gary McGuire, Bastian Tugemann and Gilles Civario.

“There Is No 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem via Hitting Set Enumeration.” Experimental Mathematics 23:2(2014), 190–217.

[3] Gordon Royle. “A Collection of 49, 151 Distinct Sudoku Configurations with 17 Entries”. Available online(<http://school.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php>), 2009.

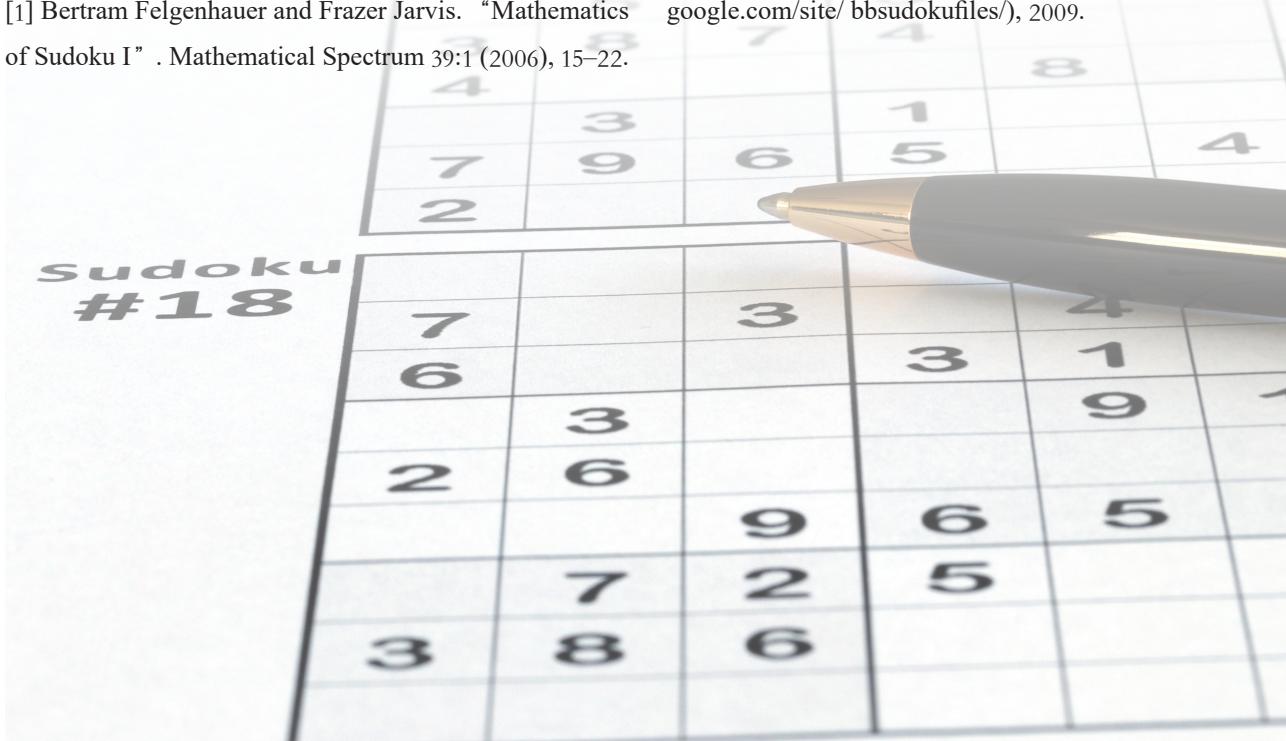
[4] Ariane Papke. “Mindestens 17 müssen es sein Untersuchungen zur eindeutigen Lösbarkeit von Sudokus”. Junge Wissenschaft No.84(2009), 24–31.

[5] Hung-Hsuan Lin and I-Chen Wu. “An Efficient Approach to Solving the Minimum Sudoku Problem”. ICGA Journal 34 (2011), 191–208.

[6] Glenn Fowler. “A 9×9 Sudoku Solver and Generator”. Available online (<http://www2.research.att.com/~astopen/sudoku/>), 2012.

[7] Guenter Stertenbrink. “suexk” (sudoku solver). Available online (<http://magictour.free.fr/sudoku.htm>), 2005.

[8] Brian Turner. “BBSudoku” (bit based sudoku solver), v1.0(Oct.2009). Available online(<https://sites.google.com/site/bbsudokufiles/>), 2009.





## 摆摊数学引论

数院学生会 编著

数院出版社

### 引言

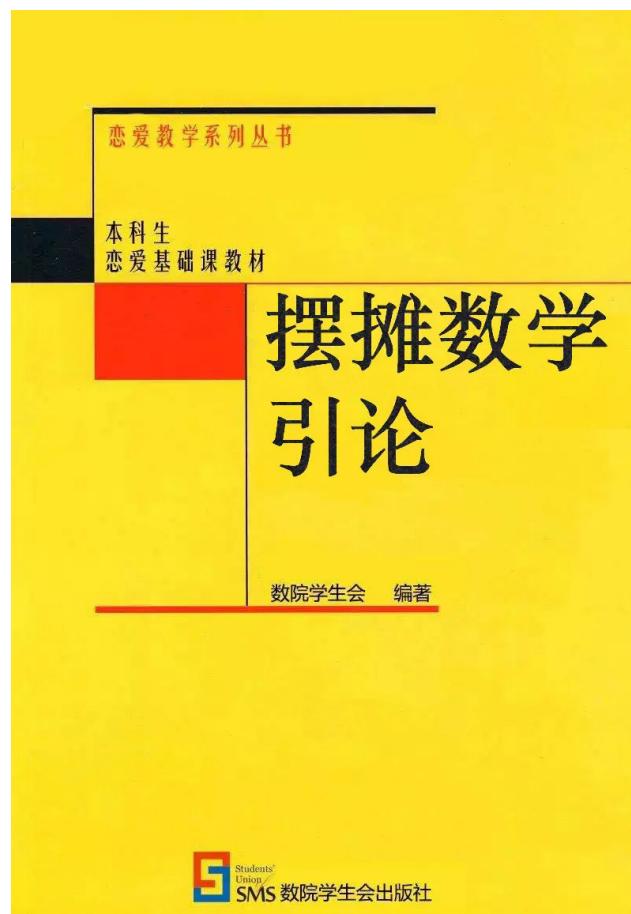
“摆摊分析”，是研究空间上的摊位数量  $u(t,x)$  随时间演化的学科。摆摊不是野蛮生长，也要满足自然规律：既受摆摊区域（边界条件）影响，又受当地既有情形（初值条件）影响。

在讨论摊位数量的变化前，我们先讨论摊位的分布。

### 第一节 二维摊位的几何问题

*The knowledge at which geometry aims  
is the knowledge of the eternal.*

——柏拉图



随着摆摊事业的蒸蒸日上，很多地方划出一大片二维区域（如广场、荒地等）以供摊贩做生意，人来人往，非常热闹。

二维区域上的摆摊问题与平时常见的沿街摆摊大不相同。这是因为：摊位设置的自由度变高了。

一种常见的设想是让摊位矩形排布，如下图：

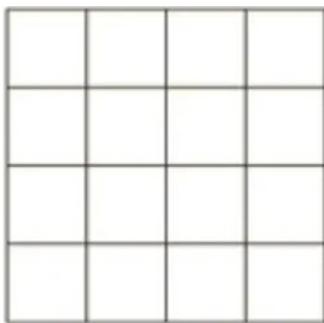


图 1.1 矩形排布

但其实，我们也可以让摊位三角形排布，如下图：

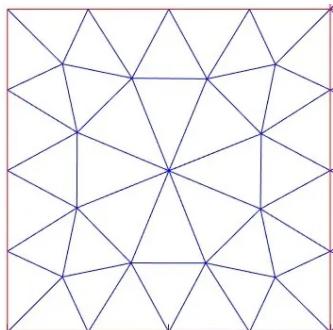


图 1.2 三角形排布

可能有人会问：摊位矩形排布就很简便，为什么要考虑三角形排布？这是因为：三角形排布能够更好地处理不规则的边界。

比如下面这个例子：一个 L 型区域挖掉三个“洞”（在现实生活中，“洞”可以代表此处有房屋，自然就不能摆摊）。摊位的三角形排布就可以合适地与这三个“洞”相适应（如下图），但矩形摊位排布很难做到这一点。

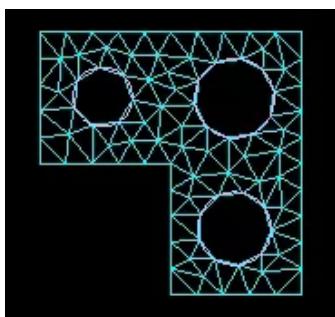


图 1.3 一个更适宜三角形分布的特例（图片来自网络）

除了研究摆摊位置，我们还要研究摊位与摊位之间边界的划分。

通常的处理方式可能是每个摊位附近分配一个相同面积的矩形区域（如下图所示），在此区域内安置排队的消费者、摆放桌椅（如果该摊位是小吃，这一点就非常重要）。

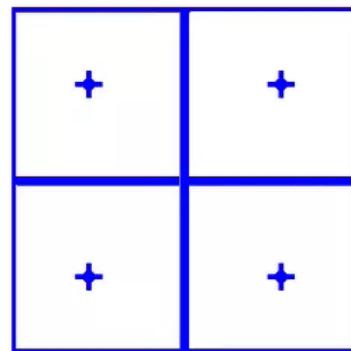


图 1.4 摊位边界划分示例

但是，不同摊位的生意有大有小，况且可能整个广场的形状就不是矩形，因而给每个摊位都分配相同面积的矩形是不合适的。在这种情况下，如何合理高效、尽量不浪费空间，为各摊位划定“势力范围”呢？

其实在应用数学中，类似的问题早已经被认真研究。这类问题被称为质心 Voronoi 镶嵌 (Centroidal Voronoi Tessellations, CVT)。什么意思呢？试想一下：商家在某点处摆摊，该点附近的一片区域便是该摊位的“势力范围”。或者可以这样说：每一个摊位，都在其“势力范围”的中心处。（如下图所示）

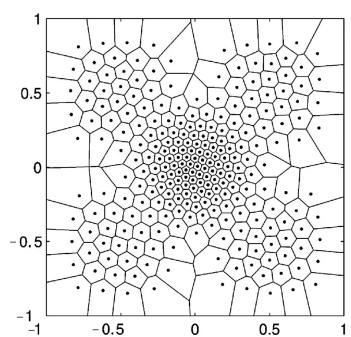


图 1.5 质心冯洛诺伊镶嵌（图片来自 Ju L, Du Q, Gunzburger M. Probabilistic methods for centroidal Voronoi tessellations and their parallel implementations[J]. Parallel Computing, 2002, 28(10): 1477-1500.）

图中黑点是“摊位”，多边形区域是其“势力范围”；黑点在其势力范围的质心处，这就是 Centroidal Voronoi Tessellations。

Centroidal Voronoi Tessellations 考虑的就是这样一个问题。一定区域内有若干个点（摊贩），现在要给整个区域做一个划分（相当于给每个摊位划分势力范围），使得摊位在其“势力范围”的正中央（即质心）。

计算 Centroidal Voronoi Tessellations 的理论和方法已经很成熟了，我们可以通过下图感受一下：

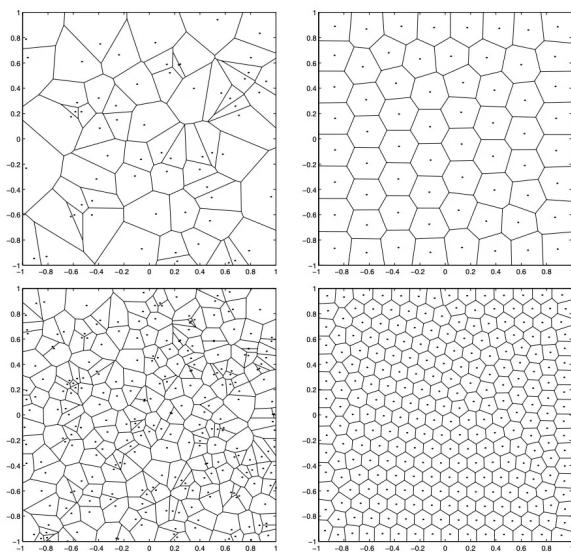


Fig. 7.1 Two-dimensional Voronoi diagrams for a constant density function in  $[-1, 1]^2$ ; left: Monte Carlo simulation; right: centroidal diagrams; top: 64 generators; bottom: 256 generators.

图 1.6 计算 CVT (图片来自 Du Q, Faber V, Gunzburger M. Centroidal Voronoi tessellations: Applications and algorithms[J]. SIAM review, 1999, 41(4): 637-676.)

运用 CVT 的手段，我们就可以帮助摊贩更因地制宜、更高效地划分摊位，提升空间利用率。

二维摊位的几何问题，有时可以归为应用数学中的网格生成 (mesh generation) 问题。感兴趣的的同学可以自行查阅相关文献 [3][4]。

## 第二节 一维摆摊边值问题

*Religion is a boundary condition.*

——Alan Turing

下面，我们讨论一种具体的摆摊情形：沿街摆摊。沿街摆摊本质上是一维问题，因而在街上摆摊摆不出太多“花样”。上一节中，我们讨论了二维摆摊中复杂的几何问题；这些问题在一维沿街摆摊中便不复存在。

换言之，沿街摆摊是一种较为清晰的摆摊形式。在本节，我们对这种摆摊进行研究。

### 定义 1

(一维摆摊边值问题) 在一条街上，假设从街头到街尾 (用闭区间  $[a,b]$  表示) 都被开辟为摆摊区域。给定这条街的边值条件 (即街头和街尾  $a, b$  两点处的摆摊情形)，这样的问题称为一维摆摊边值问题。

一般而言，我们有如下几种摆摊边界条件：

### 例 1

狄利克雷摆摊条件：给定  $a, b$  处的摆摊数目。例如，管理部门规定：任何摊位不得超出本条街或占领十字路口。这就意味着：在街头和街尾处没有摊位，即对所有的时间  $t$  有：

$$u(t,a)=0, u(t,b)=0$$

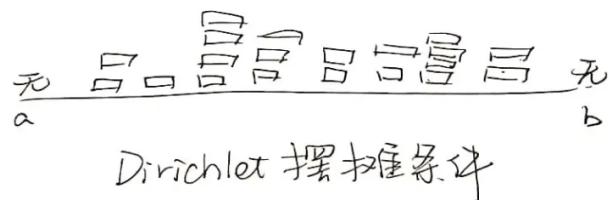


图 2.1 狄利克雷摆摊条件

### 例 2

诺伊曼摆摊条件：给定  $a, b$  处摆摊的变化情形。例如：由于街道宽窄的客观条件，客流量在  $a$  处和  $b$  处的导数值是确定的，即对所有的时间  $t$  有

$$u_x(t,a)=c, u_x(t,b)=d$$

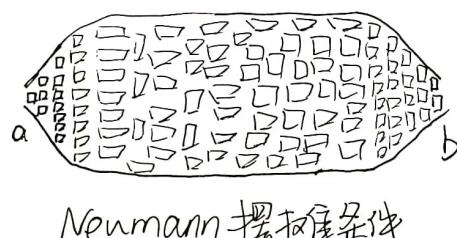


图 2.2 诺伊曼摆摊条件

例 3

第三类摆摊条件：

上述两种摆摊条件的混合，通常具有如下形式：

$$\begin{cases} u(t, a) + k_1 u_x(t, a) = c \\ u(t, b) + k_1 u_x(t, b) = d \end{cases}$$

例 4

周期摆摊条件：

即街头和街尾的摆摊条件完全一样：

$$u(t, a) = u(t, b), u_x(t, a) = u_x(t, b)$$

下面我们来探讨：摊位的分布究竟满足什么规律？

摆摊的重要逻辑之一是：占据空余的位置。如果街上的一侧很拥挤，但另一侧很宽松，那么摊贩势必会向宽敞的一侧移动；而且，这两侧的拥挤程度差异越大，摊贩移动的速度越高。这些翻译成严肃的语言，即为：

定义 2

（傅立叶定律）：摊位移动的速度，正比于该位置摊位数目的空间变化率，方向为从摊位密集处到摊位稀疏处。

傅立叶定律其实很常见，比如热传导方程就由傅立叶定律导出。

同时，我们的摊位上也总有新的摆摊人员在加入。注意，新的摆摊人员只能从街的两侧和街中的十字路口进入，因而我们只需要考虑几个特殊点处人员进入的情形，这一点我们用源函数  $S(t, x)$  描述。

除此之外，街上不同地区的热闹程度不尽相同。街头街尾处容易做生意，因而也许人们更愿意在街头街尾处摆摊；街中心也许过于深邃，因而也许人们不愿意摆摊。这一点，我们用势能函数  $V(x)$  描述。

为了多卖出去东西，大家会争先在十字路口摆摊，例如在“街头”和“巷尾”。但若都挤在“街头”、“巷尾”，恐怕就会人挨人、人挤人、人山人海，卖货效率会降低，也不利于疫情防控；这时摊贩就会按照上述傅立叶定律进行移动。为了综合并定量考虑上述所有因素，我们就可以有如下的方程：

$$u_t = a u_{xx} + V(x) u + S(t, x)$$

### 第三节 习题

习题 1：对你身边的沿街摆摊进行实地调查和统计，利用第二节中的模型建模，并进行理论分析和数值模拟。

习题 2：基于第一节中二维摊位的几何问题，试给出二维摆摊的摊位数量的理论模型。

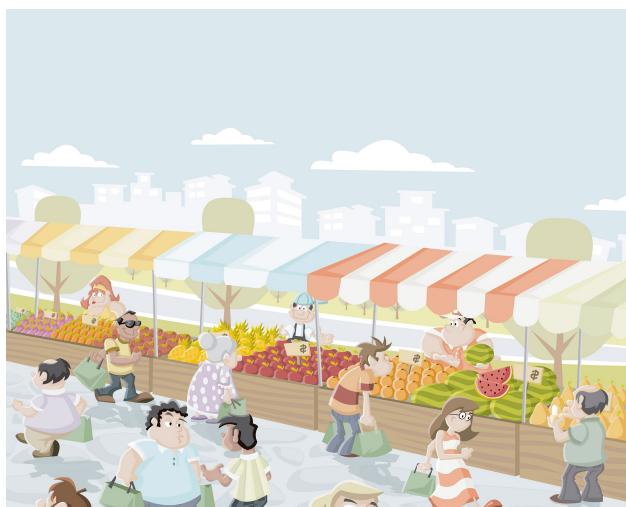
习题 3：对你身边的二维摆摊进行实地调查和统计，利用习题 2 中的模型建模，并进行理论分析和数值模拟。

习题 4：试考虑，是否可以有三维摆摊？

注：如果这些习题读者都能解决，那么作者估计：以读者的功力，发个领域内顶刊没有任何问题。

参考文献：

- [1]Du Q, Faber V, Gunzburger M. Centroidal Voronoi tessellations: Applications and algorithms[J]. SIAM review, 1999, 41(4): 637-676
- [2]Ju L, Du Q, Gunzburger M. Probabilistic methods for centroidal Voronoi tessellations and their parallel implementations[J]. Parallel Computing, 2002, 28(10): 1477-1500.
- [3]Edelsbrunner, Herbert. Geometry and topology for mesh generation. Cambridge University Press, 2001.
- [4]Frey, Pascal Jean; George, Paul-Louis (2000). Mesh Generation: Application to Finite Elements, Hermès Science.
- [5]边值问题及其应用，周珍楠，Lecture notes for mathematical modeling



# 浅谈游戏中的战斗数值公式设计 ——以 Dota2 为例

(文 | 郭纬)

## 一、导言

游戏中的数值公式往往是构成一款游戏的骨架，良好的数值设计是玩家游戏体验的重要保证。《Dota2》是一款经典的 MOBA（多人在线战术竞技）类游戏，本文中我们将以其为引初步探讨一下游戏中一些常见的战斗数值公式设计。

首先，让我们带着两个问题开始今天的讨论，分别对应着游戏中的物理伤害公式和魔法伤害公式：

1. 游戏中一次普通攻击所造成的战斗伤害其数值计算公式为“对于防御方的造成的真实伤害 = 攻击方的攻击力 \* [1 - (0.052 \* 防御方的护甲) / (0.9 + 0.048 \* 防御方的护甲)]”，为什么会展开这样的战斗公式设计呢？

2. 一个基础魔法抗性为 25% 的英雄，在装备了一件能够提供 25% 魔法抗性的挑战头巾后，若该英雄被恶魔巫师释放了能够造成 600 点魔法伤害的死亡一指，其实际将会承受到多少点真实伤害？

## 二、减法公式、乘法公式和除法公式

在一款对抗游戏中，应该如何设定一次攻击所能造成的伤害量呢？有三种常见的公式，大多数游戏的战斗数值公式设计皆是以它们为基础进行的衍生设计：

### 1. 减法公式

单次输出伤害 = 攻击方攻击力 - 防御方防御力

减法公式的特点是简单直观，是早期游戏中常见的伤害计算方式，如《星际争霸》《游戏王》《征途》。计算简单是其最大的优点，但是必须严格控制

其数值投放，减法公式里最常见的问题就是不破防，一旦防御属性投放过高导致无法破防，甚至会出现早期 MMO 端游中经典的超级付费用户数值无敌一人灭国的现象。

### 2. 乘法公式

单次输出伤害 = 攻击方攻击力 \* (1 - 防御减伤百分比)

乘法公式的模型实质上是真实伤害 = 税前伤害 \* 系数，而系数一般由防御属性折算为百分比来体现。相比于减法公式，其最大的优点就是不会出现不破防的现象。《魔兽争霸 3》《魔兽世界》《Dota2》等游戏中的战斗公式都是在乘法公式的基础上衍生出的变形公式。

### 3. 除法公式

单次输出伤害 = 攻击方攻击力 / 防御方防御力

除法公式实际上也是乘法公式的一种变体，当将乘法公式中的防御减伤百分比设计为“防御减伤百分比 = (防御方防御力 - 1) / 防御方防御力”时，除法公式就变成了乘法公式，除法公式中的 (1 / 防御) 正是防御减伤百分比的另外一种表现形式。

不同的游戏会采取不同的原型公式并在其基础上基于各自的设计目的进行衍生和调整，也并非所有游戏都必须采用以上三种公式作为原型，只要能够满足设计需求能够为玩家带来良好的体验，就是好的数值公式。

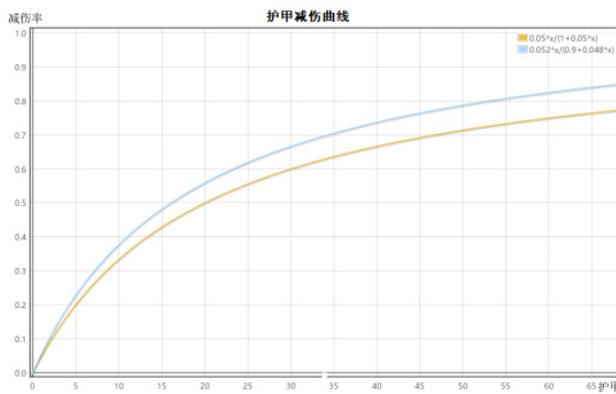
## 三、Dota2 中普通攻击战斗数值 公式设计

在不考虑伤害格挡等附加设计的情况下，Dota2中的普通攻击所能造成的真实伤害取决于两个数值，攻击方的攻击力和防御方的护甲（防御力），“对于防御方造成的真实伤害 = 攻击方的攻击力 \*[1-(0.052 \* 防御方的护甲)/(0.9+ 0.048 \* 防御方的护甲)]”这个公式实际上是乘法公式的衍生公式，下面让我们来探究一下其变形过程：

1. 将乘法公式中的防御减伤百分比设定为“防御减伤百分比 = 护甲 / (1+ 护甲)”（也可以认为是用除法公式中的“防御方防御力 -1”来定义“护甲”），此时当护甲为 0 时减伤 0%，护甲为 1 时减伤 50%，护甲为 2 时减伤 66.7%，以此类推。

2. 为了方便在游戏里中投放数值，将护甲数值放大 20 倍（如板甲能够提供 10 点护甲比板甲能够提供 0.5 点护甲更加易于玩家理解和接受），此时“防御减伤百分比 = 0.05 \* 护甲 / (1+0.05 \* 护甲)”这就是 Dota2 旧版的普通攻击战斗数值公式。

3. 新版的普通攻击战斗数值公式为了实现游戏中平衡性调整，强化护甲这一属性在游戏中的价值，对公式中的三个系数进行了微调。从下图可以看出，同样的护甲值在新版公式中能够带来更高的减伤百分比。



## 四、数值叠加的若干种方式

在游戏中，同类的数值有着若干种不同的叠加方式，装备两件能够提供 9 点攻击力的攻击之爪能够为英雄带来 18 点攻击力的提升，那么装备两件能够提供 15% 魔法抗性的抗魔头蓬是否能够为英雄带来 30% 的魔法抗性提升呢？这就需要从 Dota2 的数值叠加方式开始说起。

### 1. 加法叠加

也称线性叠加，是最简单的数值叠加方式，攻击力、生命值、魔法恢复速度、移动速度、力量敏捷智力、施法距离等等绝大多数数值属性采用的都是加法叠加。举例：蛇发女妖的基础攻击距离是 600，当其装备一把能够为她增加 140 攻击距离的魔龙枪之后，她的攻击距离将会达到 740。

### 2. 乘法叠加

乘法叠加常见于一些增伤或减伤效果。举例：幽鬼的技能折射能够为其提供 22% 的伤害减免，当她被血魔施加了血怒获得了 25% 的伤害加深时，其受到的伤害都将乘以  $(1-22\%) * (1+25\%) = 97.5\%$  的伤害减免 / 加深系数。

### 3. 补数乘法叠加

补数乘法叠加的基本公式为:  $1-S_{\text{总}}=(1-S_1)(1-S_2)(1-S_3) \dots \dots$  魔法抗性、状态抗性、闪避率等数值采用的都是补数乘法叠加公式。

问题 2 中，英雄的总魔法抗性 =  $1 - (1 - \text{基础魔法抗性 } 25\%) (1 - \text{挑战头巾提供的魔法抗性 } 25\%) = 43.75\%$ ，所以当其受到 600 点魔法伤害的死亡一指时，实际受到的真实伤害为  $600 * (1 - 43.75\%) = 337.5$ 。

### 4. 山峰法则

在游戏中，暴击率、普通攻击的伤害格挡等少量属性采用的是取最大值的山峰法则。举例，拥有技能恩赐解脱（15% 概率攻击造成 450% 暴击）装备了一把效果为 30% 概率攻击造成 235% 暴击的代达罗斯之殇时，两个概率会首先分别独立结算，若同时触发了恩赐解脱暴击和代达罗斯之殇的暴击，则根据山峰法则造成 450% 暴击。

## 五、结语

游戏数值设计是一门非常有深度的学科，对于虚拟世界架构师来说，数值设计的本质是构建游戏的骨架和基础运行法则，最终服务于设计师心目中的需求和玩家游戏过程中的体验。本文以经典游戏 Dota2 为例，分析了其中一部分数值公式设计，希望能够抛砖引玉，引起更多有趣的讨论和同学们对于游戏数值设计的兴趣。

# 数游奇境

Mathematic Adventures in Wonderland

(文 | 陈芷芮)



## 爱丽丝之奇境

《爱丽丝漫游奇境》是举世闻名的儿童读物、荒诞文学，其癫狂色彩及现实意义被反复剖析，且已被数度开发为影视作品，其中由鬼才蒂姆·波顿导演的争议性影片也在当代人的记忆中留下了怪异而绚丽的一笔。你或曾听闻，作者刘易斯·卡洛尔——真名查尔斯路

德维奇道奇森——在牛津大学任基督堂学院数学讲师，但为何有文学评论称“只有数学家才能写出爱丽丝系列”？书中丰富而生动的数学元素是否在初见时逃过了你的眼睛？

此书本是 1862 年 7 月 4 日道奇森与院长利德尔之女洛丽娜 (Lorina)、爱丽丝 (Alice) 与伊迪丝 (Edith) 在泰晤士河上泛舟时为她们编造的故事，后他应爱丽丝的要求将其写下，出版后引起轰动。故事的主角爱丽丝、在“眼泪的池塘”一章中出现的角色鹦鹉 (lory) 和小鹰 (eaglet) 无疑是女孩们的化身，渡渡鸟 (dodo) 则带有受口吃困扰的道奇森本人 (Do-do-dodgson) 的影子，疯帽子自称唱过的《闪闪的小蝙蝠》(《小星星》的改编) 中蝙蝠 (bat) 是指作者的好友 Bartholomew Price，其中诸多地点也与牛津的校园相关。值得注意的是，1864 年的原稿 (Alice's Adventures Under Ground) 中并无柴郡猫、公爵夫人的婴儿、疯帽子的茶会等“名场面”，而这些在正式出版时加入的内容正是解析《爱丽丝漫游奇境》中数学元素的关键。

在道奇森所在的十九世纪，数学研究高速发展、趋于抽象，且表现出公理化倾向，数论、射影几何、复变函数、微分几何、非欧几何、群论等领域皆有开创性成果，拓扑和抽象代数的观点和方法对 20 世纪影响深远。这些伟大的思想在当时尚未被广泛接受，道奇森身为数学工作者对此潮流或有比常人更多的了解但并不认同。以奇思妙想著称的道奇森其实数学思想较为保守，较少创造性成果，他将欧几里得的《几何原本》奉为圭臬，为之写了几本笔记并曾探讨第五公

设，对行列式和逻辑学也颇有研究。在学者 Melanie Bayley 看来，道奇森后来加入的以上内容是对这些疯狂的新发展的讽喻。尽管道奇森的描绘出自他本人对这些理论的不认可，爱丽丝在奇境中的探险的确让我们体验到了数学界新发现的精彩纷呈。

爱丽丝不慎掉进了兔子洞，念叨着心爱的小猫黛娜……“可是猫不吃蝙蝠呢？”她自问，“猫吃蝙蝠吗？猫吃蝙蝠吗？蝙蝠吃猫吗？”爱丽丝的冒险从这个奇特的问题开始，年幼的她尚不懂得包括“吃”在内的二元关系及其诸性质的表述。后来，她试着背乘法表，却发现一切都乱了套，这则是因为十进制传统的改变。

### 蘑菇与水烟的游戏

进入奇境的爱丽丝试图进入向往的花园，她饮下写有“喝我”的药水，害怕自己如蜡烛的火苗般缩没（这里似乎涉及了极限的概念），又吃下嵌着“吃我”的点心，不断变化大小的离奇经历想必令读者印象深刻。在离开自己泪水的池塘与白兔的住处之后，她在蓝色毛虫的建议下食用蘑菇的两边（“由于它十分圆，这个问题可不容易解决”）以调整自己的身形。道奇森是文字游戏的老手，本书对数学潮流的讽喻在此片段可见端倪。

奇境中，想当然的传统（生活——乃至数学）法则不再适用，爱丽丝认为一天多次改变大小非常难以理解，毛虫则告诉她并非如此。毛毛虫的重要建议‘keep your temper’中 temper 一词看似“脾气”之意，实则可延拓至状态、性情乃至比例，一语双关，似是道奇森在警醒保持几何比例的重要性，及对欧氏几何的尊崇。

De Morgan 曾在脚注中提及 algebra 一词来自阿拉伯短语 al jebr e al mokabala，意为“恢复与缩减”，他认为即使数学进入看似荒谬的境地，譬如负数的平方根，最终也能找到新的意义。道奇森作为一名循规蹈矩的逻辑学家则认为这样的看法不可理喻。毛毛虫坐在大蘑菇上抽着水烟 (hookah，阿拉伯词源)，或许暗示了抽象代数这一新兴领域 ‘mushroomed up from

nowhere’，而爱丽丝本想恢复到自己原本的大小，啃了一口蘑菇后却立即迅速缩小，下巴甚至碰着了脚背。

需要注意的是，这并非整体的缩小，还涉及比例的变形。毛毛虫曾告诉爱丽丝，蘑菇“一边会使你长高，另一边会使你变矮”，而实际上，它的一边使她的脖子伸长，另一边则缩短躯干。最终爱丽丝谨慎地小口食用手中的蘑菇，时而长高时而缩小，终于回到了自己原本的比例。

### 蛇姑娘与猪孩子

爱丽丝吃下两口蘑菇，却发现找不到自己的肩了，往下看时只能见到长长的脖子，且可以象蛇一样自由扭转。她将脖子伸入树林，当真被一只大鸽子当作了蛇。爱丽丝试图辩解：“我可不是蛇！……我是一个……我是一个小姑娘。”这一天中经历的许多变化使她自己也拿不太准了。鸽子则表示“我这辈子见过许多小姑娘，可从来没有一个长着像你这样的长脖子的！”爱丽丝在形态比例的变化之后失去了小姑娘的特征。

在接下来的一章中，爱丽丝恢复了身为小姑娘的身材比例，缩小进入了公爵夫人的房子。厨师在汤里放了过多的胡椒，屋中除了厨师和咧嘴笑着的柴郡猫外都在打喷嚏。声称自己受不了数字的公爵夫人前去和王后玩槌球，将婴孩扔给了爱丽丝，而它竟在她的注视下变成了一只猪。在得知婴儿变成猪后，柴郡猫竟说：“我就想它会那样的。”

十九世纪，综合几何学在 Monge 的刺激下复兴，Caron 和 Poncelet 为射影几何做出巨大贡献，非欧几何随着对平行公设的质疑而问世，与抽象代数共同发展，数学家对其认识日趋深化，拓扑学亦于此起源。Poncelet 提出其主导观念“连续性原理”，曾遭 Cauchy 批评。欧氏几何自古希腊始即被视作客观物质空间唯一正确的理想模型，对之推崇备至的道奇森不接受非欧几何，且认为连续性原理荒谬至极，孩子变猪的连续变化过程便是对之极为讽刺的应用。

事实上，道奇森还曾在 1879 年以本名发表戏剧

《欧几里得和他的现代对手 (Euclid and his Modern Rivals)》，它是对现代几何课本的讽喻，试图论证《几何原本》的优越性，或许也可视为《爱丽丝漫游奇境》某种意义上的延伸。

## 时间缺席的疯狂茶会

书中另一不可不提的著名场景是三月兔房前的疯狂茶会 (A Mad Tea-Party)，其中 tea 一词音同 t，使人联想到其常指代的变量“时间”。由于与时间失和，帽匠、三月兔和睡鼠被困在 6 点，围着桌子转举办茶会，使人联想到 Hamilton 的四元数系统。

十九世纪，Peacock 和 de Morgan 为代数结构观点的形成及代数公理化做出贡献，Boole 代数创立，Galois 更是传奇人物……同时 Hamilton 的成就也不容忽视。他试图找到三维旋转的描述方式，但只能使之在一个平面上旋转，偶然得到加入第四维的灵感，并于 1843 年创立了四元数的概念。四元数是首个被构造出的不满足乘法交换律的数学对象，是复数的延伸，代表着一个四维空间。甚至道奇森也认为四元数非常精巧，但它无疑也令当时的学生们一一以及书中的爱丽丝困惑。关于 “I say what I mean/I mean what I say” “I see what I eat/I eat what I see” 等表述的争论也与交换性相关。

在 1853 年的一篇序言中，Hamilton 表示他很自然地将三维空间之外的单位与时间联系了起来。因时间的缺席而只能在茶桌所在的平面上旋转的角色们正像是缺少第四维的四元数，虽有爱丽丝的加入，但她仍是三维空间中的存在，不能像时间一样将他们从平面上的旋转中解脱。爱丽丝离开茶会时，帽匠和三月兔正试图将睡鼠塞进茶壶，以离开这疯狂的旋转。

此外，帽匠莫名其妙的谜题 “Why is a raven like a writing desk?” 也反映了 Hamilton 的观点，他将数的运算视作“纯时间”中的举措，与康德的思想有共通之处。在“纯时间”中不再有明确的因果，这也使道奇森着迷。

## 柴郡猫之笑

《爱丽丝漫游奇境》最为标志性的象征大约就是

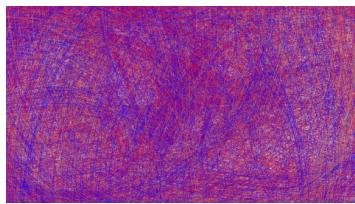
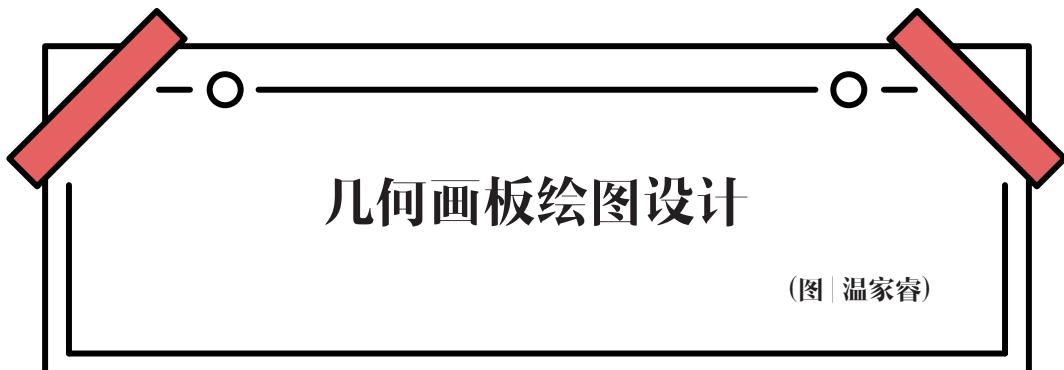
柴郡猫了，它曾从尾巴尖开始慢慢消失，最终只剩那奇异的笑容在身体消失后停留许久，或许象征了数学逐渐抽象的进程。柴郡猫在奇境中随意来去，且告诉爱丽丝：“我们这儿全都是疯的，我是疯的，你也是疯的。”“不然你就不会到这里来了。”它对此的论证（“狗是不疯的……”）是一个典型的逻辑陷阱。De Morgan, Poncelet, Hamilton, Galois… 这些人不也是在数学奇境中遨游的疯子吗？

此外，爱丽丝和仿龟 / 素甲鱼（译名不统一）的对话中 ambition, distraction, uglification, derision 则是对加法 (addition), 减法 (subtraction), 乘法 (multiplication), 除法 (division) 四则运算的戏讽，或也体现对抽象代数任意定义符号运算规则的质疑。红桃王后莫名其妙的怒火可能象征着无理数。而续集《爱丽丝镜中奇遇》中的著名角色叮当兄和叮当弟 (Tweedledum&Tweedledee)、汉普蒂·邓普蒂 (Humpty Dumpty) 则与逻辑学紧密相关，Humpty Dumpty 在书中的言论反映出道奇森在语言哲学方面的某些认识甚至早于维特根斯坦，而其也与抽象代数中的运算有关。

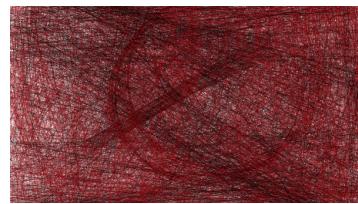
在 Bayley 看来，若非这些数学元素离奇的应用，《爱丽丝漫游奇境》可能会和道奇森后来的作品《西尔薇与布鲁诺 (Sylvie and Bruno)》一样无味，它的原稿也不会有着如此深远的文化影响力。对十九世纪数学的讽喻赋予了“爱丽丝”系列更多的深意，并将在接下来的百年中为不同背景的读者带去乐趣。有人震惊于卡洛尔丰富的想象力，有人以心理学、社会学的角度对它加以分析。本文试图阐述它对十九世纪数学发展趋于抽象的影射，但并未对数学本身过多解释。道奇森并非顶尖的数学工作者，却因光怪陆离的讽喻和奇思妙想的谜题留名后世，《爱丽丝漫游奇境》以爱丽丝 - 道奇森的视角代表了对数学新兴领域的守旧看法，本是讽刺，却令人着迷。学习数学的我们可以从数学的角度看待这一作品，对其相关抽象代数与非欧几何的背景与盲区有更全面的理解，从不同的维度欣赏文本的荒诞与玄妙，数学的抽象与严谨……

## Part II 杂绘

-----



星空倒映在这汹涌的海面上，便随波  
上下跳舞，时现时灭。



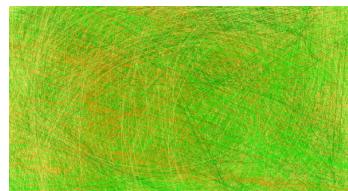
红楼飞雪，一时英杰。



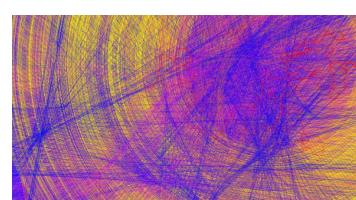
焰火熄灭，空间在瞬间如水晶般透  
明，星辰用晶莹的光芒织成银色的巨  
毯；群星振动着，奏出华美的音乐；  
星海在变密，像涌起的海潮。



记忆穿过子午线，然后在云层的上空  
飞行。



风的柔，就如她的丝带般飘拂稻香隐  
约飘来，拔开稻草，仿佛萤火虫会悄  
悄的冒出来。



小半轮紫红色的火焰，立刻将暗淡的  
天空照亮了，在一道道鲜艳的朝霞背  
后，像是撑开了一匹无际的蓝色的绸  
缎。



冰缩寒流，川凝冻蔼，前回鹭渚冬晚。  
慢慢得势的阳光里，白蒙蒙的雾点子，  
一陣一陣地翻腾，飘散，好像沙沙有声。



## Part III 小说

### 打 铁

(文 | 景文博)

#### (一)

今天上午的风，让钟会很满意。

春末夏初，风来自洛阳城外的山间，暖如微阳，轻如柳絮，刚刚好吹起衣襟，又刚刚好不吹起地上的粉尘。

他喜欢这样的风。

只有在这样的风里，他才可以把身体定格到最佳的状态。

刚刚出门前，他在江南橡木做成的浴盆中静静地沐浴了半个时辰，其间换过三次水，一炷香一次。每换一次，他便觉得灵魂中的污垢涤去一分。直至确保每一寸肌肉彻底舒展，每一处关节灵活无碍，他才走出浴盆，换好衣衫，唤一声守在外边的钟义。

钟义立即递进来一柄玄鞘软剑。



钟会微微一笑。他并没有吩咐取这柄剑。若是普通人看来，这不过是柄做工精细的长剑；然而内行一眼便可分辨出，这便是当今神剑谱上稳居榜首的旷世神兵——“烛阴”。

当年，钟家花了万两重金，购得西域玄铁，再请全国最负盛名的铸剑大师徐子，花了三天三夜锻铸成此剑。据说剑成之时，天地也为之泣血。

“烛阴”即上古神兽烛九阴，双目可控昼夜。睁眼时普天光明，即是白天；闭眼时天昏地暗，即是黑夜。

此剑一出，便如烛龙闭目，日月无光，给敌人带来的只有无尽的黑夜。

钟会于此剑上的造诣，更是出神入化，登峰造极。然而，他绝不轻易使用此剑。

事实上，他只佩戴过两次，从未真正使用过。

钟义完全了解这一点。他跟了钟二少爷十年。

钟会第一次带这柄剑，是和大少爷钟毓一起去帝王谷拜见武林至尊曹先生。那次回来，他只见大少爷满头大汗，而二少爷却泰然自若，倍加潇洒。

他没有问，却已能猜的八九不离十。曹先生必是对这位二少爷赞赏有加。

钟会第二次带这柄剑是在不久前。钟义并不知道二少爷要去哪里，他想跟去，却被钟会拦住。二少爷回来后，看上去似乎仍如往常一样潇洒飘逸，然而他可以敏锐地觉察出，二少爷的双眼中，不时有担忧、焦虑一闪而过。

他依然没有问，却难以猜出二少爷的心思了。他想不出这位贵为太傅之子、家财万贯、读书五车、武力压群豪、机变权谋冠绝当世、仕途如青云直上的钟会公子，还有何事忧虑。

两次带此剑之前，二少爷都要沐浴半个时辰，其间换三次水，一炷香一次。今天是第三次。他从二少爷的眼睛中读出了一种极其复杂的情感，一种坚定的不可抗拒的决心，却又夹杂着不安与恐惧。他想跟去，

却再一次被钟会拦住。

“二少爷这是要去哪？”他忍不住问。

“去见一个人。”钟会头也不回地回答道。

## (二)

去见他，钟会决心已定。从他十岁那年起，他决定的事，即便是父兄也不会违背。因为事实证明，他的决断异乎寻常地精确而且完美。

有一位蒋先生曾经说他是异人，身边的亲友都说他如有神助。他只是笑笑。

只有他自己知道，这些所谓的神助是有多么滑稽。这一切，靠的是他广博的储备，缜密的分析和果断的决策。

如果真有神助，他也不会像上次那样丢人现眼。

想到上次，他又一次懊悔起来。

明明是穷尽了心力写成的武学巨著《四本论》，明明已经达到了巅峰状态，为什么还是没有勇气去拿给他看？既然不敢给他看，为什么不索性一走了之？为什么要从墙头扔进去？

这还算什么名士？什么贵族？什么剑客？

那天回家后，他立即派人暗中打探消息，而他表面上还要保持镇定，像往常一样淡定自如，谈笑风生。别人应该没察觉什么吧？他想。

昨夜，一个探子来报，说那位嵇先生似乎对那篇文章评价还不错，这个消息竟让他激动得一夜未眠。明天一定要见他，钟会暗下决心。

想到嵇先生，钟会的心已由懊悔转为激动振奋。嵇康，这个近些年在江湖中声名鹊起的名字，不知在他心中反反复复默念了多少遍。



但凡有耳朵的人，不会没听过“竹林七贤”的名号。这七人时而独行，时而群集，往来飘忽，神鬼莫测。近年来江湖中惊天动地的大事，九成是他们所为。

而在这“七贤”中，最令钟会寝食难安的，便是这位嵇先生。他不过比钟会大一岁，却拥有远非钟会

能及的声名。

这些年，钟会已经收集了他能收集到的关于嵇康的全部信息。

传说这位嵇先生自幼过目不忘，饱读群书，在文采上除了另一位阮先生，无同龄人可望其项背。他的武学造诣更是非凡，无数一流剑客，在他手下过不去三招。这些年，他俨然成为天下名士的精神领袖，一呼百应。据说他将武学心得编入旷世名曲《广陵散》中，却从未传与旁人。这名曲，更为天下武林人士所神往。连帝王谷的曹先生，也曾两次登门拜访。

武林至尊曹先生，钟会是见过的，他在帝王谷也得到过曹先生的极力称赞。

他曾问曹先生：“我与嵇康相比如何？”

曹先生摇了摇头，一言不发。

他又问：“曹先生，您与嵇康相比如何？”

曹先生沉默。许久，他黯然道：“再过五年，我便奈何他不得。”

钟会只觉得背后发凉。

而嵇先生对这些赞誉似乎毫不在意，依然优哉游哉，过着自己的日子。他家离钟会家并不远，却俨然成了钟会心中难以到达的圣地。

前些天，钟会花尽心力写成《四本论》，本想请嵇康品评。他从心底里，希望自己的成果能得到嵇康的认可。然而在嵇康门前，他却踌躇犹豫了良久，想走，心中自然不甘；想进去，却说什么也迈不动步子。最后，他竟将写成的《四本论》从墙头扔了进去，然后以最快的速度离开。

现在，他再一次走向了这里。熟悉的道路，熟悉的房屋。

今天的风很好，他的状态也极佳。

## (三)

钟会忽然听到了一种奇怪的声音。

叮铛——叮铛——，一声声金铁交击的声音，从那个方向远远地传来。交鸣声涤荡在空气中，每一声都凝重有力，声与声之间却飘逸流动，浑然天成。

那似乎是打铁的声音。

打铁的声音并不奇怪。在这城中至少有十家铁匠铺，每一家从清晨开张到黄昏打烊，都被这种声音充斥着。

徐子为他铸剑时，他在旁边守了三天三夜，也时时听到打铁之声。徐子的每一锤下去，都重逾千钧，仿佛将太古洪荒时代的天地之力，都凝聚在这锤底，熔铸在这柄神剑中。

然而现在听到的打铁声却是奇怪的。它厚重，却在厚重中平添了灵动飘逸，它有力，却在力量中蕴含了若隐若现的渺茫悠长。

这实在不像寻常打铁的声音。

更奇怪的是，它居然就来自那个方向，那个让钟会魂牵梦萦的屋子。

嵇康的家。

大门敞开着，那金铁交击的声音愈加明晰。钟会展了展衣裳，抚摸着腰中宝剑的剑柄，再一次确保浑身上下毫无半点障碍后，一咬牙，迈步跨进门槛。

一股热气扑面而来。

门后是一个院子。院子正中央矗立着一棵大柳树，树下是一片池塘，池塘边摆着一座烧得火红的熔炉。炉内正燃着熊熊烈火，不时有一股股劲风鼓入，将火激荡得更烈。

炉旁坐着一个人，正潇洒地拉着风箱。炉后立着一个人，手持一柄大锤，一锤一锤地砸下。两个人都赤裸着上身，配合默契得宛如一个人。那厚重却飘逸流动，浑然天成的交鸣声，果然便是出自这二人的手下。

钟会愣住。



他对这屋里的景象有过上千种想象，却绝没料到会是这般情景。

“请问嵇先生在吗？在下钟会，特来拜访。”

没有人搭话。

钟会看向那两个打铁的人。拉风箱那人看了钟会一眼，又看了一眼抡锤那人。抡锤那人却始终未抬头，自顾自地看着面前的铁器。

钟会不由得仔细打量这位抡锤者。

此人的身高足有七八尺，比钟会尚高出几寸。当他将大锤举起时，浑如天上神灵下界。

他须发蓬乱，尘垢满面，不知已有多少天未曾洗澡。相比身居富贵世家，又刚刚沐浴更衣精心打理的钟会，可谓判若云泥。

然而，钟会却觉得那人身上有一股夺人的英朗清举之气，由内而外地迸发充盈，掩盖住外在的一切看似缺陷的东西。无论面容还是躯体，每一寸、每一分都未经丝毫地打点与修饰，就那样出现在他的身上，竟是异常地和谐，宛如天造地设。

钟会本身便是美男子，从小到大很少能见到与他颜值比肩之人。然而相比面前这位奇人，居然自愧不如起来。钟会想从自己脑海的词汇库中翻出一个词来形容面前这个人，却总觉他想到的词都难以与之相配。思索良久，终于灵光一现。

天人之姿！这人，当真便如天人！

他一定是嵇康了，绝无旁人。

钟会近前一步，微一拱手，“嵇先生，前几日那篇《四本论》，便是在下之作。”

他颌首低眉，却依然很有信心。《四本论》是他最得意的作品，嵇康即便不完全赞成，也必将刮目相看，与他讨论一番。那时，他定当获益匪浅。

依然没有人答话。

嵇康兀自打着锤。锤声厚重却飘逸流动，浑然天成。

钟会白皙的脸正在变红，不知是因为羞愧还是愤怒。

他突然抬首，利剑般的目光直射嵇康的双眼。嵇康的眼睛清朗如晨星，目光专注在眼前的铁器上，恰似一颗孤星之光洒落绝顶险峰，凝蓄了睥睨天地的孤傲与绝美。十步外射来利剑般的目光，嵇康似乎丝毫没有发觉。

钟会不知为何突然打了一个冷战。他赶忙移开了自己的目光。

#### (四)

钟会再次镇定下来。

他决心与嵇康来一场终极较量。

钟会刚刚进门时，原是诚心诚意地拜会武学领袖，虽然这位领袖和他心目中嵇康的形象相去甚远，但钟会能从他的身上领悟一种举世无双的魅力。他虽略有失望，但自忖如能讨教一二亦不虚此行。即便被嵇先生痛骂一番，亦可无憾。若是可闻得圣曲《广陵散》，更是三生有幸。

然而，嵇康的漠然，让他感受到了前所未有的耻辱。他自幼尊崇，长辈对他青眼有加，同龄人皆举他为尊，下人更是唯命是从。

他无法忍受被人忽略无视的感觉。他心中暗思，今天嵇康如果不死，他便无法在江湖上立足。他的野心雄图，那梦想中武林至尊的地位，更是从此化为泡影。

下一个武林至尊，不应该姓曹，也不应该姓司马。他应该姓钟！钟会的钟！

所以，嵇康必须死。

钟会的手已按上剑柄。他只需一个机会，只要嵇康漏出一点点破绽，哪怕一瞬，他就有把握在这一瞬拔剑出鞘，长剑直出，一击致命。

此剑若出，便如烛龙闭目，日月无光，给敌人带来的只有无尽的黑夜。

这一剑，他每天要练习一千遍，早已炉火纯青。从最不可能的方位、以最快的速度和最强的力量刺出的一剑，绝无人可以闪避。

何况，嵇康抡锤，钟会凝立。嵇康是动，钟会是静。动则必会漏出破绽，静便能制动。

他当然也知道嵇康可能提前对他下手，但如果这样嵇康势必会有动作的转换交接，他的破绽只会漏出得更快。

钟会已经有了十足的把握。他只是在等待机会。

空气凝结，万物肃杀。只有一声声金铁交鸣远远荡开，厚重却飘逸流动，浑然天成。

钟会有些不安起来。嵇康一锤锤砸下去，本来毫无精妙之处，浑身上下处处皆有破绽可进攻。然而钟会只觉那些看上去毫无防范的破绽中，隐藏着难以领悟的玄机。

他眼前的嵇康就像一片大海，在任何一处刺一剑都能刺破海面。

然而海面被刺上一剑，于海洋又有何损伤呢？反而是剑，会被茫茫苍溟吞噬。

他不敢出手。

日已偏西，夕照越过墙头，洒在柳树下的熔炉上。

钟会的脸已变得比炉中火焰还红。他的身体已经到了极限，半天的时间积蓄的一股真气在体内急剧膨胀。如果再不出手，真气逆行，性命定然难保。箭在弦上，已不得不发。

剑已出鞘！钟会一剑刺向嵇康，剑气如虹，排山倒海般地向嵇康射去。



与此同时，钟会的身体借着剑气的反冲力，闪电般退向门外。

他这一剑并非要取嵇康的性命，而是要保着自己全身而退。他已深知今天绝无可能取胜。

嵇康没有趁机出手。他仍然一锤锤地打下，亘古不变。

黄昏的风依然轻柔，却蕴含着一股无端的凄凉。钟会呆立在门外。他已不知此时心里是什么感受。刚刚赤红的脸，此时已苍白无色。

许久，他转身。突然，一个浑厚悠长的声音从门内传来：

“何所闻而来？何所见而去？”

嵇康终于说话了，钟会却哭笑不得。他勉强调匀气息，稳定心神，提气答道：

“闻所闻而来，见所见而去。”

语罢，钟会快步离开，走进洛阳的黄昏里。一声声金铁交鸣从身后远远地传来。锤声厚重却飘逸流动，浑然天成。

当锤声终于停止时，嵇康满意地看着眼前的作品，细细端量品味一番。继而，他跳入身后的水池，招呼一声旁边的向秀。

向秀的眼中，却露出了深深地忧虑。

二少爷去了哪里，钟义依然没有问。然而，他的内心却万分惊异。二少爷的眼睛里，失去了往日的潇洒飘逸，取而代之的是狼狈与怨毒。

晚饭后，二少爷吩咐他送一封信给西域星宿海的

丁先生，还嘱咐他乔装打扮，晓住夜行，严守机密。

当晚，钟会房内的灯亮了一夜。

### (五)

钟会看着法场上的嵇康，长抒一口气。

刚刚驱散了三千太学生，嵇康此刻已绝不可能生还。

钟会冷笑，任你武功出神入化，终究斗不过我的奇谋妙计。

欲加之罪，何患无辞？只要说动了司马先生，便没有办不成的事。权大可以通天，此言当真不虚。

有人来报，嵇康死前想索要一张琴，说要最后弹一次《广陵散》。

钟会一惊。传说嵇康能在琴声中注入无穷无尽的内力，内功浅薄之人听罢便会五脏崩裂。然而，星宿海的奇毒“化功散”，已尽数将嵇康的神功化去。他此刻不过是待宰的羔羊，又能怎生挣扎？

“给他。”钟会道。他也盼望着听一次闻名天下的《广陵散》。

琴声响起。

钟会的精神忽然恍惚起来。这琴声，如天海风涛，厚重却飘逸流动，浑然天成。

他瞬间回忆起那天的打铁声。那声音早已深深烙印在他记忆最深处。锤声本是打击声，琴声是弦乐声，本来大相径庭。钟会悟性却极高，他只觉其中的灵魂完全相通。



莫非那天，嵇康随意的打铁竟是一门至高的武学？

钟会细细地回忆，回忆嵇康将锤举起又落下的每一个细节，愈回忆愈觉奥妙无穷。他极力想分析出其中的精妙所在，却头昏脑涨，毫无思绪。那种道法自然、随性随心的玄功，已经超出了他的理解能力。不行！一定要向嵇康问明白！若是领悟了这些，武林至尊便唾手可得！

钟会从幻想中猛地醒来，慌忙地吩咐左右：“快，

快传令！刀下留人！”

然而，琴声早已终了。

### 后记：

这是我在2016年寒假完成的一篇小说。灵感来源于大学国文的期末考试题目（选张一南老师大学国文的小伙伴注意了！真题啊！）：

钟士季精有才理，先不识嵇康；钟要于时贤俊之士，俱往寻康。康方大树下锻，向子期为佐鼓排。康扬槌不辍，傍若无人，移时不交一言。钟起去，康曰：“何所闻而来？何所见而去？”钟曰：“闻所闻而来，见所见而去。”

——《世说新语·简傲》

请就上述材料写一篇议论文或从钟会角度写一篇小小说。

涉及一些典故（梗），简要解释一下。

1. 帝王谷的曹先生。“帝王谷”一词在很多地方都可见到，我的想法直接来源于古龙《情人箭》中武林至尊萧王孙的住处。而本文的“武林至尊”喻指皇帝，曹先生指的是魏文帝曹丕。后文曾有交代钟会有夺取“武林至尊”的野心，亦即篡位之想，这是我个人的推测。钟毓、钟会面见曹丕的故事如下：“钟毓、钟会少有令誉，年十三，魏文帝闻之，语其父钟繇曰：‘可令二子来。’于是敕见。毓面有汗，帝曰：‘卿面何以汗？’毓对曰：‘战战惶惶，汗出如浆。’复问会：‘卿何以不汗？’对曰：‘战战栗栗，汗不敢出。’（《世说新语·言语》）

2. 有一位蒋先生曾经说他是异人。这是把《三国志·钟会传》里的记载作了改动。原文如下：“中护军蒋济着论谓：‘观其眸子，足以知人。’”

3.《四本论》。这个故事应该很有名了，依然出自《世说新语》：“钟会撰《四本论》。始毕，甚欲使嵇公一见，置怀中。既诣，畏其难，怀不敢出，于户外遥掷，便回急走。”

4. 星宿海的丁先生。《天龙八部》中的星宿老怪丁春秋，擅使化功大法化去人的功力。

5. 嵇康之死。司马先生指司马昭。嵇康因事触怒了司马昭，钟会在旁陷害，将嵇康处死。嵇康死时三千太学生为之哀悼，未准。死前嵇康最后弹了一曲《广陵散》，并遗憾此曲从此失传。

# 布局·定式·中盘·死活·三劫循环

(文 | 景文博)

## 一、大数定律 布局

我开始与自己下棋。

一黑一白十九道，落子，再落子，一黑一白，宛如左手和右手之间进行一场旷日持久的猜拳

假如我代表了左手，那么它能够打败“我”所代表的右手吗？

猜拳平局第一千次后，我拿出了棋盘

石头剪刀布若抛去心理战是没有高手的，但围棋有就算我能够战胜当世国手，也不过是“人类第一”，那么，“棋道第一”是什么？

若我手边的是象棋棋盘，那么答案将会是“必胜策略”

从第一步开始，慢慢将对手逼入立于不胜的陷阱  
但围棋……第一步将如何前进？

大数定律说过，统计量达到一定数量时，均值将会趋于所统计的事物的期望值

于是一枚在阳光下透得出墨绿色的云子落定，放在一颗星位上

星。脱去座子桎梏后的第一步，在一百年来，通过成千上万的棋手以智慧不断罗列组合排布，终于稳定在了闪耀着的星星之上

## 二、狄拉克函数 定式

现实中的一切事物都可以用统计解决

真实发生的，与未曾发生的，以统计与概率作为桥梁，就可以达到“最优”的解决方案

镜子中的我咧嘴一笑，开口说道，就像做统计题是的，就像是一道题。左手为黑，右手为白，如

何才能延续出之前奠定的“不败”基础？

黑白寥寥，好似晨星

我在问，你有没有听过狄拉克函数？

问风吗？问云吗？还是在，问我自己？

在唯一一点取值高耸入云，无穷无尽；其余诸点皆为零。即就是所谓必争之地

由万千棋局演化而来的棋形，黑与白双方在一隅之地的厮杀与妥协

也许有人能感受到无数场厮杀，无数次分出胜负，而眼前所见，只有已经被画好的，在纵横十九道之外的“和平”。十分简单，简单到小儿也能记住顺序，同样，那唯一的地点如同狄拉克函数绘出的锋芒一般耀眼

耀眼到，如朔月夜空中盛开的一束烟火

黑子落下，攻守易位，轮到镜中的我开始沉思

定式在发展，围棋在继续，定式走向极致将会如何？三十手，四十手……抑或是一个行走完全局的定型？

镜中的我会考虑这些吗？

## 三、先验概率 中盘

“我”用手拈起一颗黑子放在棋盘一旁，同时“我”的一颗白子也陷入重重包围

镜子中的虎口与我的虎口遥遥相对，我手指微曲，夹取一枚黑子，开始权衡与计算。

双方相争，谓之劫

这个世界上所有事情的发生，都存在它的概率，对世界上发生之事而言，若当真存在无数次相同的实

验，自然也能够逼近那个冥冥中存在的数值

相争不可解，谓之打劫

棋子偏离相互纠缠迷乱的劫本身，落定，在这片星云宇宙之中构建一个交换的雏形

因而，“我”所做出的选择也有一定的概率。回应，还是交换，棋盘，我，世界，宇宙，被一个疑问所分成两条相异岔道

转而置之不理，谓之应劫

白子落下，镜中的我收回手掌，于是现今的世界踏上其中一条道路渐行渐远，继续了两条虎口之间的纠缠

迫使对方以应对，谓之劫材

第一个劫材的应劫概率名为先验概率

我看着镜子，黑子落下，手掌翻起掌心向天。翻手为云，覆手为雨，手掌翻覆间，先验与后验一字之差，概率之差宛如天地。

若是第一个劫材应劫，那么其后六个劫材价值更高，是必须要应劫的了。我说

是的，否则一个变化之间吃了大亏，棋也不必下了。我说

是了。我又说

镜子两端一实一虚，嘴唇蠕动时机不差毫分，因为白子的落下，先验概率转而为后验概率

劫争继续，概率流转，先后之间只容得下一声棋子落秤之声

“嗒”

#### 四、古典概型 死活

棋生两眼方为活，未活之棋注定生死相搏，正如同左手与右手注定要争其一胜

黑死，白活；黑活，白死；黑活，白活

一切可能罗列于前，其概率之和恒为常数1

正是古典概型

古色古香，正如这传承数千年的黑白棋子

黑者如墨，白者似纸

两种纯粹而质朴之极的颜色构筑出的世界也染上了古典的气息

我熏香，我与镜中我共同沐浴在香气之中

左手与右手开始厮杀，黑与白开始交汇，即使终有一方倒下，仍然一步一步向前……

#### 五、矛盾 三劫循环

围棋的和棋不止于双方恰巧达到了所规定的那个目数之比

三劫循环，三个劫共生于两块相互厮杀之棋形之间，黑与白落入提劫应劫打劫的循环之中，无穷无尽，古典概型达成了珍稀而又完美的平衡状态

三个劫，两块棋，连为一体——

三生万物

于是万物共生，角落已了无生机的弃子，中腹处处碰壁的浮萍，边路爬行六路力竭而亡的入侵者，一切足以影响一盘棋的砝码都已失重，在棋盘上漂浮，在宇宙中茫然地遥望着……

三劫循环。

是的，在概率与统计之下，人也许有一天会破解棋盘之上所有的着法，所有的状态，所有的排列，然而却未必能有所谓的不败策略。

镜子像是裂开一道缝隙，镜中我扭曲的笑着

身边一切事物都在矛盾，云子透过光线泛出血红色泽，棋盘溅上斑斑血迹，镀上银层的玻璃崩碎，一瞬间多出无数个镜中我，我嘴张了张，没有声音，然而无数个镜中我都似在问我

棋道第一？棋道第一？棋道第一？棋道第一……

#### 六、一场雨 终局

我没有疯，不曾用电钻戳进脑壳，也没有臆想出什么。

不过是左手与右手下了一盘棋。

阳台门大开，门外突然传来雨声。

雨声可以被计算机所完全模拟么？

自然界的一切巧合可以经由人类之手重现么？

有一个声音告诉我，不能。

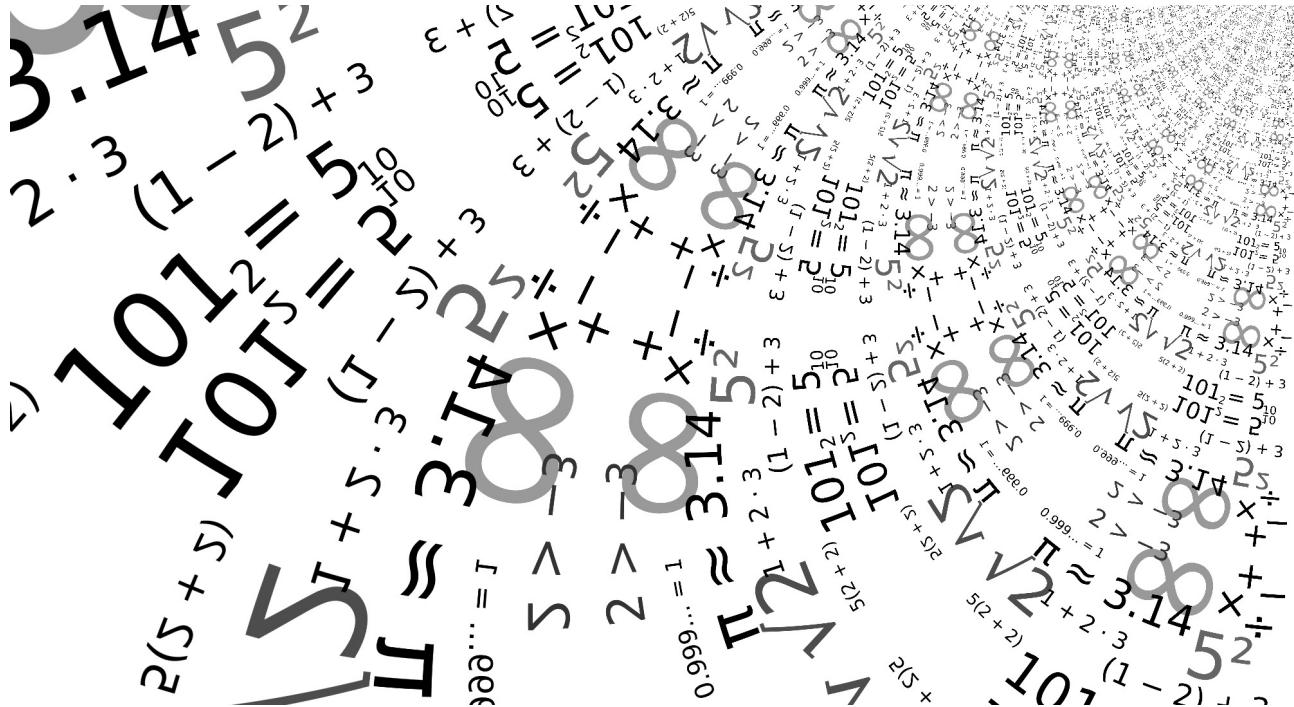
精确到每一个雨点与每一个雨点之间的关联，找到所有函数与函数的碰撞扰动，信号通过无量大数次计算碰撞最终得到的声音，是我们无法抓住的心跳。

三劫循环的围棋，突兀起来的雨，宇宙的心跳。

左手与右手相握，我躺倒，在雨声中入眠。

## 鲁一假

(文 | 小唐)



2018年11月的某个早晨，p大数学学院本科生小唐正在抽象代数期中考试的考场里发呆。

自从他莫名其妙地混进p大数院（公认是中国最好的数学系），他就一直挣扎在挂科边缘。幸好他的室友兰老师是学术大牛（因而被尊称为“老师”），这才在兰老师的帮助之下勉强度过了大一。结果一到大二就要学什么抽象代数，课如其名，那是真的抽象，小唐从第一节课开始就没太听懂过。浑浑噩噩地混到抽代期中考试，小唐花了一个半小时才勉强做了几个简单题，也不知做的对不对。他瞅着后面那几道题如同天书，心知自己定是做不出来了，便发起呆来。他看向坐在前几排的兰老师，正在奋笔疾书，看来又像以往一样会得个高分。

考试结束的铃声响起，小唐收拾好书包跟兰老师一起走出了考场。当务之急是问问兰老师考试的这几道题的答案和证明思路，好估计一个自己的得分。兰老师耐心地跟小唐讲解这几道题目的解法，小唐大概地估了一下分，及格还是有希望的。忽然有人拍了一下小唐的书包，他回头一看，映入眼帘的是一张颓丧

的脸。

“鲁一假，你又要得100分了？”小唐下意识地喊道。

被称作鲁一假的人苦笑一下，“我有一道大题没做，前面也是瞎写的。”

“鲁一假，你又在假啦？”兰老师笑道。听到这句话，小唐忽的想起第一次认识鲁一假的情景。

鲁一假是个绰号，据说他很“假”，本名里又带个“一”字，因而名唤“一假”，取“第一假”之意。

这个“假”是这么回事儿：p大数学系大半都是中学时的数学竞赛生，竞赛圈的风气是吹捧他人，贬低自己，尤其喜欢在自己的考试分数上“作假”。比方说一次竞赛6道题，自己明明做出了5道，非要跟周围人说只做出3道。倘若有人说他只做了两道（当然，这多半是假的），你就更加得“假”一把，说自己其实只做出一题。这种比“假”大赛，鲁一假是其中翘楚。鲁一假是上海人，上海教育发达，他又天赋异禀，是竞赛圈中数一数二的人物，高二的时候就获得保送p大数学系的资格。但是他尤其的“假”，凡是考试，

宣称自己得了多少分，最后改出卷来往往能得两倍于自己宣称的分数。偏偏他演技又好，考试完真摆出一副考砸了的样子，第一次认识他的人往往会上当受骗。

大一时小唐第一次见鲁一假，就看到他在和聪聪打赌。聪聪是小唐的高中同学，是典型的少年天才，数学天赋惊人，奈何年龄比同学小一些，没什么城府，在打赌这种事上完全不是鲁一假的对手。小唐看着鲁一假愁眉苦脸地对聪聪说，“我数学分析考砸了，好几道题都是瞎写的。”聪聪也依样画葫芦，说自己数学分析考砸了。只是聪聪的嘴角止不住地往上翘，说话的尾音也往上挑着，任谁都能感觉出他其实考得不错，只是要依高中时的惯例来“假”一下。鲁一假却似没看出来，问聪聪“赌不赌？谁分数低谁请吃饭。”聪聪欣然答应。此时远处几个人朝鲁一假大喊，“鲁一假，你又在假啦？”小唐当时听不太懂，不过第二天就明白了。

小唐和鲁一假、聪聪选了同一个老师的数学分析，第二天发期中考试卷子。正当小唐对着自己堪堪及格的卷子唉声叹气之时，却听到前面聪聪的喊声：

“怪不得叫鲁一假，明明考了100分，还说什么自己都是瞎写的。”原来聪聪得了95分，确实考得好，但还是不如鲁一假的满分，自然要履行赌约请鲁一假吃饭。小唐想起前一天那几个人的喊声，觉得鲁一假这个称号真是名副其实。

后来小唐和鲁一假渐渐熟络起来，摸出一些鲁一假的门道来。比方说鲁一假说自己考试的某道题是“瞎写的”，那其实多半是答出来了，顶多是少写了一个“解”字。又比如说鲁一假称自己“考砸了”，那基本上是九十分以上，只不过可能没满分。鲁一假多次试图跟小唐打赌，就像第一次和聪聪赌一样，但小唐从未答应过。原因有二，一是鲁一假此人城府深不可测，传说打德州扑克无往不利，小唐自觉不是对手；二是两人成绩差异悬殊，实在没什么可赌的。不过聪聪成绩上和鲁一假旗鼓相当，因而两人经常赌各种成绩，从数学分析赌到高等代数，从专业课赌到通选课，从期中赌到期末。聪聪从没赢过，不过这反而激起了他的斗志，愈发想要赌赢一把鲁一假。

小唐正回忆着，兰老师已经打开了宿舍的门，原来已经走回到宿舍了。兰老师笑道，“鲁一假说他这次恐怕要挂科，说什么最后一题基本没做，跟我对了答案之后又发现前面有几题做错了。你信吗？”

“废话，当然不信，”小唐不假思索地回答，“鲁一假说自己基本没做，那就是做了，说有几题做错了，那就是没错，这我还不了解吗？”这时门外传来聪聪的声音，“鲁一假，赌不赌？我这次肯定比你低，我又有好几道题没做。”小唐正准备看个热闹，发现鲁一假居然没理聪聪，径自走回了自己宿舍。兰老师告诉聪聪，鲁一假说自己考砸了。周围围观的几个同学瞬间爆发出巨大的笑声，“鲁一假这也太假了吧？”“我赌他又是一个90+。”“上次他这副样子最后得了94分。”

只有兰老师提出了不同意见：“说不定他真考砸了呢？我看他心情不是很好。”

“反正我要去跟他赌了，”聪聪边说边向鲁一假的宿舍走去，“你们来不来？”

有热闹当然要看，小唐想，便和几人一起走了过去。聪聪一把推开鲁一假的宿舍门，看到鲁一假躺在下铺，目光呆滞地望着上铺的床板。

“喂，赌不赌？”聪聪再次问鲁一假。

“我说了我真的考砸了，没心情陪你们玩。”

“真考砸了？”聪聪探过头去。鲁一假不答，翻身把头埋进枕头里，再没理旁人。

众人只好走出鲁一假宿舍，想着过段时间再来凑热闹。

回到宿舍，兰老师说：“我觉得鲁一假恐怕是真的考得不好。”

小唐点头。他虽然竞赛成绩一般，但对竞赛圈子里的事也有所耳闻。当年他们搞竞赛时，虽然考完试总喜欢聚在一起“假”，仿佛一个考得比一个差，但其实真正考得差的人是不会参与这种“比‘假’大赛”的。要知道竞赛的成绩可以直接决定一个学生是否能够被心仪的大学录取（对于数学竞赛生，那当然就是指p大数学系），每年也就那么一次机会，对停课搞竞赛的竞赛生而言，其意义甚至不亚于高考。倘若考砸了，没当场哭出来就不错了，哪还有心情去“假”？

其实对于p大数院的学生也是一样。保研，出国，哪个不靠绩点？按照p大的绩点计算方式，100分绩点为满分4分，90分绩点还有3.8以上，80分就只有3.2多。因此p大学生最怕的就是哪一门课考砸了。对于鲁一假、聪聪和兰老师这样成绩优异，平均每门课都九十多分的学生而言，考砸一门，考十门100分都补不回被拉下的绩点。小唐知道鲁一假以后想出国深造，

如果这一门抽象代数太低，很影响以后出国申请的总绩点。他问兰老师，“你觉得鲁一假考砸了，大概有多少分？”

“按他说的有一题没怎么做，八十多吧。”兰老师答，“这个分对鲁一假来讲很低了。”

“嗯。”小唐觉得可以理解，但他觉得自己如果能拿到八十分就已经谢天谢地了。

下午四点左右，鲁一假来到小唐和兰老师的宿舍。“我得认真估个分，”他对兰老师说，“真的考得好差。”

这时聪聪正好也来了，便和鲁一假、兰老师一起复盘上午的考试。小唐估计自己听不懂，便躺到床上去了。

“第一题就是用有限交换群的结构定理，”兰老师说，“200 阶阿贝尔群应该有 6 种。”

“第二题是一个西罗定理。”这是聪聪的声音。

“第三题用那个伯恩什么引理。”鲁一假低声说。

……

“这题很简单，答案是  $2n+2$ ，”聪聪快速地说，“下一题……”

还不等他说完，鲁一假忽然猛地一抬头，“这个题答案是多少？”

“ $2n+2$ ，就是直接算一个……”

鲁一假再次打断了聪聪，“我好像写成  $2n$  了，”说着便往旁边床柱上踢了一脚，“我 XXX 的。”

小唐一下子从床上坐了起来，心里想，鲁一假这么温文尔雅的人居然爆粗了？只见聪聪和兰老师也震惊地盯着鲁一假，却又不敢再说什么。鲁一假狠狠地抿了一下嘴，好像想说什么又没说出来，然后颓然地坐到小唐的床上，“我比上午估计的又多错了一题。”

小唐探询地看了兰老师一眼，兰老师小心翼翼地说，“其实也没有很差，你看这道题十分，就算按你说的最后一题没做十分，还有那道你觉得做得不好的题也就 5 分，而且可能不一定会扣光过程分……”

“大概七十五分，”聪聪直截了当地说，没注意到兰老师使的眼色，“换算成绩点就是……”他没算出来，因为他平时甚至没考过这么低的分。

“我要考虑中期退课了，”鲁一假的声音闷闷的，“真的不能接受这样的一个分数。”

鲁一假走出小唐的宿舍，兰老师跟上去安慰他。宿舍里聪聪愣了一会儿，对小唐说：“我还是不相信鲁一假就这么多分。他上次说他考砸了，也是说有一

道简单题错了，结果最后发现根本没错，是他跟我对答案的时候记错了。”

小唐没接他的话，只是想着，对鲁一假来说考这么低分，恐怕比普通学生挂科还要难受。

晚上兰老师回到宿舍，说他也不知道鲁一假到底会不会退课。毕竟中期退课的话成绩单上会有记录，而且又影响以后的安排，如果不是真的受不了很差的成绩，p 大的学生一般是不会选择退课的。此时走廊上隐约传来声音，小唐把宿舍门开了一条缝朝外看去，原来是鲁一假在打电话。鲁一假的声音似乎带着哭腔，眼睛也红红的，时不时还揉一把，似乎是哭过一场。小唐关上门，对兰老师、聪聪和以及其他几个上午就准备看热闹的同学说，还是别打扰鲁一假了。但聪聪没听进去，居然等鲁一假打完电话，又去问他“赌不赌”。这次鲁一假怒了，大吼出声，“好啊，赌啊！我要是有九十分就请你一百顿饭，赌不赌？”鲁一假显然说的是气话，饶是聪聪这种直肠子也听出来了，默默地走开了，不再提“赌不赌”。

过了几天，抽象代数课程的微信群里冯教授说可以查期中考试成绩。鲁一假没退课，来找兰老师帮忙查分。兰老师拍拍他，说“放轻松，肯定比你想象的要好。”鲁一假笑笑没说话。旁边聪聪也来找兰老师帮忙查分，看到鲁一假，似乎要脱口而出“鲁一假赌不赌？”不过话到嘴边还是咽下去了。兰老师把小唐，鲁一假，聪聪和自己的学号用微信发给冯教授等着回复。过了一个小时还没有回复，于是聪聪和鲁一假先离开了。

又过了好几个小时，兰老师终于等到了回复。他念出回复的内容，“17000xxxxx, 100。”这是兰老师的学号，显然兰老师获得了满分，他满意地咧开了嘴。

“17000xxxxx, 80。”这是小唐的学号，小唐居然得了八十分，几乎要立刻感谢冯教授不挂之恩，作势磕起头来。

“17000xxxxx, 99。”这是聪聪的学号，99 分。

“我发微信告诉聪聪。”小唐说，此时他还保持着磕头的姿势，没注意到兰老师古怪的脸色。兰老师好几秒没说话，小唐这才抬起了头。

“怎么了？不是还有鲁一假的分吗。总不至于挂科吧。”

“一百。”

## Part IV 诗歌

### 新年，新的梦想

(文 | 江雨翔)

新年，新的梦想正在发芽  
根  
缠在曾经的梦想上  
吸枯了那些  
未熄灭的零星  
新年，新的梦想正在开花  
氤氲的香气  
裹挟着它们扎根的土腥  
新年，新的梦想正在结果  
结出一个又红  
又大，又新的果子  
再送给时间  
制成果酱  
新年，新的梦想冒了出来  
打量着眼前，这个过期的梦想  
已经腐烂，枯黄  
  
新年，新的梦想走在路上  
跟随着欢笑，痛苦和迷茫  
它用开水冲了碗板蓝根  
踏上了面前的浓雾和冰霜  
  
新年，新的梦想四处流浪

到了东西南北各个地方  
它看到了崭新的花朵和荆棘  
把它们折下，放进行囊

新年，新的梦想扬帆起航  
在滔天巨浪中横冲直撞  
它和现实撞了个满怀  
苦涩的海水吞没了它的匆忙

新年，新的梦想跃了出来  
拉扯着曾经的渴望  
它手舞足蹈，大声地笑  
一点一点，把过往丢掉

新的梦想跌入了悬崖  
坠落了，坠入了现实  
被空气中，活泼的氧气，无情地撞  
氧化了它的表面  
剥落了它的伪装  
新的梦想是个什么东西  
你口中的梦想又是什么

**Jan.1 2019 Tue.**

# 0D940

(文 | 江雨翔)

我走在路上，周围是什么呢，好像是一片天，蓝色的，有点浅。

还有什么呢，应该没有了吧，只有蓝天，白云，嗯，还有白云。

还有我走着的这条路。

我在干什么呢？我自己也说不清楚，可能是在走路吧，但我又要去哪里呢？

我为什么要走到这里呢？

可能是在做梦吧，我想。

既然这样，那是不是我想要什么就能梦到什么呢？

那就让她来陪我吧。

于是她就来了，我也不知道她什么时候来的，穿着黑色的羽绒服。

梦醒之后我看到她，果然是我梦中的样子。

既然我让她来到了我的梦里，那我干点什么呢？

走路吧，继续往前走，反正都走了。

她也陪我走吧，她应该直到是我让她来的，至于她愿不愿意来，能不能来，没想到她真来了。

怎么说，毕竟是我的一场梦吧，出了这场梦，她不过是，唉。

那就好好享受一下这场梦吧，毕竟我很少在梦里意识到自己做梦，这种想梦到什么就梦到什么的梦，我还是第二次做。

而第一次做这种梦，好几年前了吧，最后我没控制住梦的发展，然后梦就成了噩梦，我惊醒了。

而这次做梦，我有准备吗。我应该是有准备的，日有所思，夜有所梦，只是整日整夜地想，转眼快一年了，有时连个虚幻的影像都看不到。而这次我竟然可以主动让她进到梦里。

其实并不是整日整夜地想吧，只是我在想

她的时候，感觉我已经想了她一整天。

有一年了吗，半年不到吧，前半年我连幻象都看不到，不过是在想一个空洞的前景，给自己画了一张饼。

而当这张饼真的出现的时候，我又在干什么呢，等着那张饼被别人吃掉，不，是在心里想不要让别人吃掉这张饼，而自己又不敢去尝这张饼。

以饼作比好像有点不合适，但是前半年，我就是靠着我画下的饼，在幻想中到处游玩，或者我只活在幻想之中。

后来有人把我画的饼撕掉了，  
哧啦撕成两半，四半，六十四半，  
三千三百五十五万四千四百三十二半。

但她还是进到了我的梦里，我只是想和她一起走走。

我也只是在和她走在路上。  
这梦好简单啊，只有蓝天，白云，她，还有路。  
让我一直呆在这场梦里吧。

于是我醒了，躺在一个红毯子上面，毯子旁边是我的书桌，桌子上什么都没有。

然后我从毯子上坐了起来，回想着刚刚做过

的梦。

桌子上还有我看不懂的公式和没做完的作业。  
床是双人床，枕头是红的，被子是红的。

我努力地想着曾经做过的这个梦，想把它记

下来，就坐到书桌前，想要将它描绘出来。

我写，写了好多，然后闹钟响了。

我出现在宿舍的床上，舍友都去上课了。这

一天是周一，他们都有早课。其实他们周一到周

五都有早课。

九点半，该去上课了。

我犹豫了一下，然后把 D940 给的动卧晚餐

又放回了书桌。

**Jan. 16 2019 Wed.**

记一个二十三天前的梦。

## 石女·其五

(文 | 何离哀)

巴别塔上我邂逅这女郎。  
传言她曾与贤者一同会饮，  
也曾与血玉和白骨合葬。  
——她是一尊亘古孤独的石像。

“我注视无数寂寞的过客，  
其中有位塞浦路斯的国王。  
彼时我与他坠入了爱河……”  
——她是一尊完美无缺的石像。

“他爱我无瞳的眼与僵硬笑颜，  
爱我每寸纹理与脚下阶梯。  
我很高兴他爱石头甚于爱我。”  
——她是一尊不会说谎的石像。

“我目送皮格马利翁离去，  
祈愿他登上塔顶实现理想。  
如若你在前路与他相遇……”  
——她是一尊永远微笑的石像。

夜路（文 | 何离哀）  
夜路如荒诞剧的布景  
不见前路，不见归途  
演员忘却戈多的名姓  
笑语在寒凉中飘忽

帘幕后无数面孔叫嚣  
舞台下的看客沉默  
谁的信仰等待被动摇  
晚风仍一阵阵吹过

## 冬夜咏雪

(文 | 传古)

风透寒窗夜梦凉，幽燕万里染冬霜。轻烟几点西山翠，碎玉三分庾岭香。  
月照蝉纱鸿爪暗，灯明孤案卷宗长。试梳头上书生绺，愁思纷飞雪数行。



用心桥

将每一位数院人连接

加入我们

在 PHMO

在心桥之上

书写你的故事





“当我们在谈论数院人的2020年时  
我们在谈些什么”

— Heart Bridge —