

基于机理分析于最优化的同心鼓运动模型

摘要

“同心协力”（又称“同心鼓”）是一个锻炼团队合作能力的体育运动。该运动使用一面均匀分布绳的鼓，多个人发力，尽可能使球弹起足够多的次数。在整个问题解答过程中，我们从理想化情景开始分析，建立了优化模型，并尝试求解，再建立了鼓面倾斜模型，对 9 种情形进行模型求解，最后给出相应求解策略。

针对问题一，基于理想化情形，我们选择了优化目标，考虑最小高度 40cm 等限制条件，建立了优化模型。最终得到的最优协作策略为：所有队员发力大小、时机、方向一致，在每次球下落后 0.05 到 0.11 秒内以 81N 的恒力击球，此时颠球高度为 0.404m。

针对问题二，首先将题目 9 种情况分为 4 种类型，每种类型下的模型求解策略相同；通过数学、物理方法求解鼓的转动惯量、线的角度等物理量，根据刚体转动定律建立鼓面倾斜模型，并给出结合微元思想的小步长求解算法；最终在 4 种类型、9 种情况中应用算法，求解模型，得到 0.1s 时的倾斜角度。

针对问题三，我们提出了针对出错个体的改正策略，即若发力过大了或发力提前，则应当在下一次减小发力或延后发力。

针对问题四，我们沿用了问题二的模型，尝试了模型的求解。

关键词：刚体转动定律，最优化，微元

一、 问题重述

“同心协力”（又称“同心鼓”）是一个锻炼团队合作能力的体育运动。该运动需要的道具包括一面双面鼓，鼓上按均匀分布固定着若干绳子。运动开始前，由不少于 8 人的参赛选手每人各拉一绳，所有成员只能拉住绳子末端。运动开始时，球从鼓面正中心的上方 40cm 处竖直下落，要求每次颠球高度大于 40cm 且各成员之间的间距大于 60cm 该项运动以颠球次数尽可能多为目标。已知参数包括球重 270g、鼓面直径 40cm，鼓高 22cm，鼓重 3.6kg。需要解决以下若干问题。

- ◆ **问题一：**要求给出在每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度的理想状态下，团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度；
- ◆ **问题二：**要求建立模型描述队员发力时机和力度出现的误差与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系，并求出给定情况下的数值解；
- ◆ **问题三：**要求根据问题 2 的模型，调整问题 1 中给出的策略；
- ◆ **问题四：**要求给出具体情形下当鼓面发生倾斜时队员的调整策略，并分析在现实情形中这种调整策略的实施效果。

二、 问题分析

2.1 问题一分析

问题一要求给出在每个人都可以精确控制用力方向、时机和力度的理想条件下，团队的最佳协作策略，并计算该策略下的颠球高度。颠球过程是一个具有周期性的过程，在理想条件下会随时间趋于稳定。系统状态的改变取决于决策变量用力大小、用力时机、用力方向。因此最佳的协作策略可以被定义为一组适当的用力大小、用力时机、用力方向，使得在不违反规则的条件下，所有成员用力最省。基于此，可以首先对球和鼓进行运动分析，从而建立起受到颠球高度、队员距离约束的优化模型，求解最优的协作策略。

2.2 问题二分析

问题二要求建立模型描述队员发力时机和力度出现的误差与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系，并计算题目给出的若干种情况的数值解。我们认为本质需要建立一个正确的物理模型，并通过小步长迭代的方式模拟真实情况，求出各种情形下 0.1s 时的倾斜角度。

2.3 问题三分析

问题三需要根据问题二的模型，考虑问题一中的策略是否需要调节，其实也即需要考虑实际情况相对理想化多了哪些差距，并设法弥补这一差距。

2.4 问题四分析

问题四设计到斜抛运动，依然需要将数学、物理相结合，模拟实际情景；同时可以借助问题二的模型，对实现目标的步骤进行求解。

三、 模型假设

- 1. 将球简化为质点，鼓简化为圆柱体，忽略鼓和球运动过程中受到的空气阻力；
- 2. 不计所用绳子质量，且不可伸长，人拉绳子的力始终沿绳子的方向；
- 3. 球和鼓的碰撞视为完全弹性碰撞，不计碰撞时间；
- 4. 所有人手的高度一致，能在瞬间发力和卸力，每次发力过程力的大小不变；
- 5. 队员均匀站位，任意相邻队员间距相同，在颠球过程中保持不变；
- 6. 在周期运动中，鼓在完成一次碰撞后能立即恢复到初始位置，不考虑鼓的复原过程。

四、 变量说明

变量名	变量解释
M	鼓的质量
m	球的质量
D	鼓面直径
A	鼓的高度
N	参加同心鼓的总人数
L	绳长
H_M	颠球所能达到的最高高度
$x(t)$	球的位置关于时间的函数
$h(t)$	鼓的位置关于时间的函数
T_i	第 i 个队员的发力时机
F_i	第 i 个队员的发力力度

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：理想情况下的同心鼓建模与最优决策

5.1.1 影响同心鼓运动状态的因素

问题一着重研究理想状态下能够描述同心鼓颠球高度与各类型影响因素之间的函数关系模型，选择决策变量，通过最优化方法找到点球的最优策略。首先需对影响同心鼓运动状态的变量进行分析和处理。

通过综合分析，我们认为存在的影响因素如下：

(1) 系统的参数设置

已经给定的参数包括鼓的质量 M ，球的质量 m ，鼓面直径 D ，鼓高 A ；未给出的参数包括参与颠球的人数 N ，使用的绳长 L ，其中要求 $N \geq 8$ 。

(2) 系统的运动状态

初始状态时，有鼓的初始位置 H_0 ，球的初始位置 H_{M0} ，运动过程中，可以推导每个时刻球和鼓的位置 $x(t)$ 、 $h(t)$ ，从而计算在每个周期内球的最高位置 H_M 。

(3) 系统的决策变量

系统的运动状态由每一次颠球过程中队员的动作，不同的发力时机大小和方向决定了不同的结果。因此设置决策变量为每个队员的发力时机 T_i 、发力大小 F_i 和发力方向 θ_i 。

5.1.2 问题一的额外假设

在本问中假设了参赛成员能够精准把握自身用力方向、时机和角度，而始终保持球的竖直上下运动显然是最优的颠球方式，因此我们有理由做出如下假设，来保证球仅在数值方向运动而不发生偏移。

- ◆ 所有人发力时机一致，即

$$T_1 = T_2 = \dots = T_N = T_0;$$

- ◆ 所有人发力大小一致，即

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \dots = |\vec{F}_N| = F_0;$$

- ◆ 所有人发力方向一致，体现在几何上为每条绳与水平方向夹角相等，即

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta_0$$

5.1.3 运动状态分析

系统由鼓和球组成，进行周期性运动，且二者的运动过程相互独立，仅在碰撞时发生一次速度变化。以该时刻为基准将一个周期的运动过程分为三个阶段——碰撞前、碰撞时、碰撞后。碰撞前球从最高点由静止开始下落，鼓从初始位置择机开始上升；碰撞时二者速度发生瞬时变化；碰撞后球以新的速度回到最高点完成一个周期，鼓则在球回到最高点前回到初始位置完成一个周期，具体过程不考虑。

(1) 碰撞前

首先分析球的受力和运动状态。

由于不考虑球的空气阻力，球仅受到重力的作用，由牛顿第二定律可得

$$-mg = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

其中初始位置为 $x(0) = A$ ，初始速度为 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 。

再分析鼓的受力和运动状态。

考虑所有队员对鼓所做的功

$$W_1 = \int_0^{h_1} N \frac{(H_0 - h)F_0}{L} dh \quad (2)$$

根据机械能守恒定律，这些功一部分转化为鼓的动能，一部分转化为鼓的势能，即

$$\frac{1}{2}M \left| \frac{dh}{dt} \right|^2 = \int_0^h N \frac{(H_0 - h)F_0}{L} dh - Mgh \quad (3)$$

整理可得描述鼓运动状态的微分方程

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{NF_0}{ML} h = \frac{NH_0F_0}{ML} - g \quad (4)$$

其中初始位置为 $h(0) = 0$ ，初始速度为 $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 。

(2) 碰撞时

根据假设，球和鼓的碰撞为完全弹性碰撞且碰撞时间不计。根据动量守恒定律和能量守恒定律可得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}Mv_M'^2 + \frac{1}{2}mv_m'^2 \\ Mv_M + mv_m = Mv_M' + mv_m' \end{cases} \quad (5)$$

其中， v_M ， v_m 表示碰撞前鼓和球的速度， v_M' ， v_m' 表示碰撞后鼓和球的速度，求解上述方程组可得

$$\begin{cases} v_M' = \frac{(M-m)v_M + 2mv_m}{M+m} \\ v_m' = \frac{(m-M)v_M + 2Mv_M}{M+m} \end{cases} \quad (6)$$

(3) 碰撞后

碰撞后球只在重力作用下向上减速运动，直至到达最大高度，由牛顿第二定律可得

$$-mg = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (7)$$

由碰撞结束后的位置和速度可求解上升的最大高度 H_M 。

5.1.4 最优决策模型的建立

➤ 目标函数

在同心鼓运动的规则中，要求颠球高度不小于 40cm，颠球更多者胜。通过上述分析可知，颠球的高度由颠球力度、方向、时机决定。因此，我们认为最优策略应该是在不违反规则的前提下，每次颠球所有人所用合力最小，从而使颠球数量尽可能多，即我们的目标函数设计为

$$\min \sum_{i=1}^N F_i \quad (8)$$

对于问题一，由于我们额外假设了所有人发力时机、用力角度和用力大小一致，有 $F_1 = F_2 = \dots = F_N = F_0$ ，故目标函数简化为

$$\min F_0 \quad (9)$$

➤ 约束条件

(1) 颠球高度约束

根据规则，每次点球后球需离开鼓面不小于 0.4m，根据上文对球和鼓运动状态的分析，在每个周期中，球离开鼓的最大距离为 $H_M - \frac{A}{2}$ ，其中 H_M 为球上升的

最大高度， A 为鼓的厚度，则应有

$$H_M - \frac{A}{2} \geq 0.4 \quad (10)$$

这是从颠球高度角度对模型做出的约束。

(2) 队员距离约束

根据规则，相邻队员间距不应小于 0.6m。画出同心鼓运动在进行过程中的俯视图如图 1 所示。

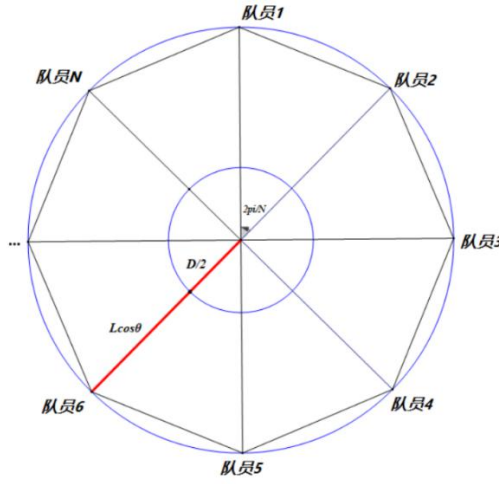


图 1 同心鼓运动俯视图

根据假设， N 个队员均匀分布，相邻两队员间的夹角为 $\frac{2\pi}{N}$ ，而任一队员到鼓面中心的距离为 $\frac{D}{2} + L \cos \theta_0$ ，根据正弦定理应有

$$2 \left| \frac{D}{2} + L \cos \theta_0 \right| \sin \frac{\pi}{N} \geq 0.6 \quad (11)$$

这是从队员站位角度对模型做出的约束。

➤ 模型的确定

综上，最终建立起的理想状态下的同心鼓最优颠球策略模型为以下最优化模型。

$$\begin{aligned} & \min F_0 \\ & s.t. \begin{cases} H_M - \frac{A}{2} \geq 0.4 \\ 2 \left| \frac{D}{2} + L \cos \theta_0 \right| \sin \frac{\pi}{N} \geq 0.6 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

5.1.5 模型的求解

➤ 求解算法

Step1: 设置初始值。首先为所有变量设置合适初始值，并为需要搜优的两个参数设置初始值：全体力度 $F_0=90\text{N}$ ，全体反应时机 $T_0=0\text{s}$;

Step2: 计算碰撞前鼓、排球状态。在已知系统时间、反应时机的情况下,计算鼓运动速度的解析解和各时刻排球的位置、速度信息;

Step3: 寻找碰撞位置。根据 Step2 得到的排球与鼓的时空信息，求解两物体相互接触的时刻与位置，得到球与鼓的碰撞位置;

Step4: 计算碰撞后排球状态。找到碰撞位置后由 Step2 中提到的运动方程可求出鼓和球碰撞前的速度可求出碰撞后速度，从而得出该策略的颠球高度;

Step5: 遍历力度、发力时机。判断当前决策是否可行，若可行则减小力的大小，同时将发力时机置为 0 s 并返回 Step2; 若当前决策不可行，则继续遍历该力度下的所有发力时机，之后进入 Step6;

Step6: 寻找最小力度，确定最优决策方案。

➤ 求解结果

理想情况下，最优的协作策略为：所有队员发力大小、时机、方向一致，在每次球下落后 $[0.05,0.11](\text{s})$ 内以 81N 的恒力击球，此时颠球高度为 0.404m。

5.2 问题二：发力存在偏差时鼓面倾斜情况的建模

5.2.1 现实情况分类

题目提供的表格共有 9 种不同情况，根据发力时机和用力大小，可将这 9 种情况分为 4 类，如表 1 所示。

表 1 偏差情况的分类

类型	包含序号	描述
一	1, 2, 3	发力时机相同，有一个或多个人用力不同
二	4, 5, 6, 7	有一个或多个人发力时机提前，提前的人可能有不同用力
三	8	发力提前造成的倾斜与用力不同造成的倾斜不在同一平面
四	9	发力提前造成的倾斜与用力不同造成的倾斜在同一平面

这四类情况都使用相同的模型，只不过处理方式略有不同。关于鼓面倾斜模型，我们将在接下来进行论述。

5.2.2 鼓面倾斜模型

a. 模型准备

在所有情况中，人数 n 均为 8，则每个人的正对方向都有另一个人，彼此间夹角 45° 。一个过圆柱体中心、平行与圆柱体底的平面，截圆柱体的截面是一个圆，任取该圆的一条直径 d ，平面记圆柱体绕 d 旋转的转动惯量为 J ，容易计算 $J = 0.05052 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。计算过程如下。

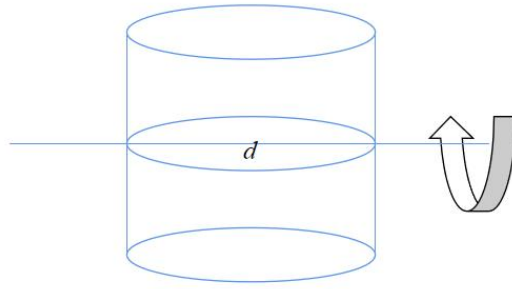


图 2 旋转方向示意图

先研究旋转对称轴与转轴垂直且与转轴距离为 l 的圆面的转动惯量，取质量微元 dm 为 $\frac{dx dy}{\pi r^2} m$ ，取积分 $J = \iint_D (x^2 + l^2) \frac{dx dy}{\pi r^2} m = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r (\rho^2 \cos^2 \theta + l^2) \rho d\rho$ ，易得

$$J = ml^2 + \frac{1}{4} mr^2 \quad (13)$$

再研究圆柱关于通过圆柱中心且与轴线垂直转轴的转动惯量，圆柱可看作无数个圆面构成，取质量微元 dm 为 $\frac{\pi r^2 dx}{\pi r^2 l} m = \frac{mdx}{l}$ ，结合公式 (13)，可取积分

$$J = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{mdx}{l} \right) x^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{mdx}{l} \right) r^2 \right], \text{ 易得}$$

$$J = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} mh^2 \quad (14)$$

代入数据即得圆柱体的转动惯量为 0.05052 kg m^2 。

设在整个过程中 8 个队员的力分别是 $F_1 = F_1(t)$, $F_2 = F_2(t)$, \dots , $F_8 = F_8(t)$ 。

初始时，鼓的位置较绳子水平时下降 11 cm，示意图如图 3，仅展示了一个截面上的力 F_1 、 F_5 ，由几何关系容易解出， $\theta = \arcsin(\frac{h}{2l}) = 3.7100^\circ$ ，做受力分析，可得 $8F_1(0)\sin\theta = Mg$ ，解得初始时各拉力为 $F_1(0) = F_2(0) = \dots F_8(0) = 68.0155N$ 。

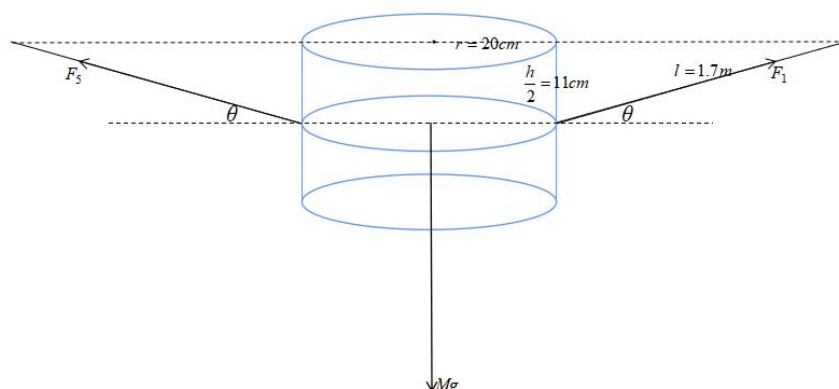


图 3 初始时刻的示意图

设鼓的倾斜角度是 α ，发力方向与水平面夹角是 θ ，设力为 \vec{F} ，力大小为 F 。若发力方向与倾斜方向一致，由几何关系，在高处的 \vec{F} 的力矩 $M = Fr \sin(\theta - \alpha)$ ，在低处的 \vec{F} 的力矩 $M = Fr \sin(\theta + \alpha)$ ；若发力方向与倾斜方向不一致，则考虑此发力方向时倾斜角度 α 应该修正为 $\alpha' = \arctan \left| \frac{\tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi}} \right|$ ，其中 φ 如图 4 所示，

计算过程如下。

建立坐标系如图 4 所示。

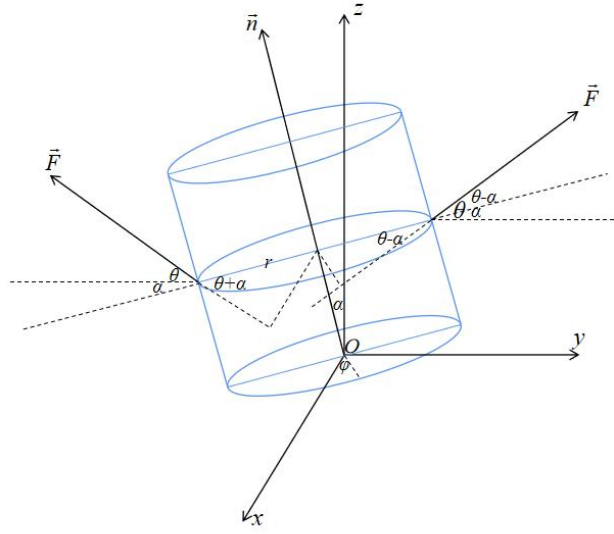


图 4 坐标系建立

首先计算圆 O 的参数方程。显然圆 O 所在平面的法向量 $\vec{n} = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)$ ，则平面的方程为

$$-y \sin \alpha + z \cos \alpha = 0 \quad (15)$$

以 r 为半径、以 O 为球心的球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (16)$$

联立方程(15)(16)，即为圆的表达式：

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = r^2 \quad (17)$$

令 $x = r \cos \varphi$ ， $y = r \cos \alpha \sin \varphi$ ，则解得 $z = r \sin \alpha \sin \varphi$ ，故圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \cos \alpha \sin \varphi \\ z = r \sin \alpha \sin \varphi \end{cases} \quad (18)$$

在圆上一点 (x, y, z) 到圆心的直线斜率（即修正后的倾斜角度）为

$$\alpha' = \arctan \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \left| \frac{\tan \alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi}} \right| \quad (19)$$

b. 模型建立

图 5 展示了 8 名队员的分布，圆形为鼓的俯视图，若鼓水平则 Ox 方向默认指向 1 号队员，若鼓倾斜则使 Ox 的方向逆时针旋转 90° 能指向最高点，这样便于与 a 统一起来。

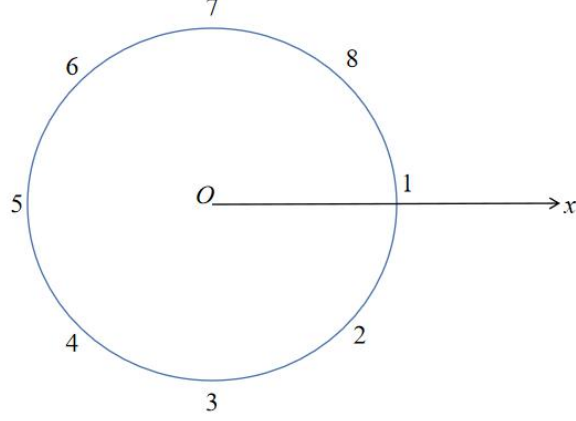


图 5 队员分布

设在某时刻，在 Ox 极坐标下队员 1 的坐标为 (r, φ_1) ， $\varphi \in (-180^\circ, 180^\circ]$ ，则队员 i 的坐标为 $(r, \varphi_i) = (r, (\varphi_1 + i \times 45^\circ - 45^\circ) \bmod 360^\circ)$ ，此时每个队员的力的力矩都将为鼓提供一个角加速度，合角加速度决定了鼓下一时刻旋转速度、方向的改变，如公式(20)，其中 β 表示角加速度。

$$\sum_{i=1}^8 F_i r \sin(\theta - \arctan \frac{\tan \alpha \sin \varphi_i}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cos^2 \varphi_i}}) = J\beta \quad (20)$$

此公式即鼓面倾斜模型。利用此公式，在初始条件已知的情况下以一个小步长进行迭代，即能求出系统 0.1s 后的状态，也即能够完成问题求解。

5.2.3 模型求解

a. 算法总览

以恒定步长迭代，如 $\Delta t = 0.001s$ ，在 Δt 足够小时，可以认为能够近似模拟整个过程的情景。以 0 到 0.1s 为例，则 t 从 0 到 0.1s 共需要 100 步、经历 101 个状态，记为 0~100，则

$$\beta^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^8 F_i^{(k)} r \sin(\theta - \arctan \frac{\tan \alpha^{(k)} \sin \varphi_i^{(k)}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha^{(k)} \cos^2 \varphi_i^{(k)}})}{J}$$

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} + \beta^{(k)} \Delta t$$

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \omega^{(k)} \Delta t + \frac{\beta^{(k)} \Delta^2 t}{2}$$

$$\varphi^{(k+1)} = f(\alpha^{(k+1)})$$

$$(k = 0, 1, \dots, 99)$$

其余场景也类似，此处不再过多展示。

b. 类型一的求解

以序号 1 为例，只需考虑 1、5，其余力的力矩抵消；而其余几种类型可通过力的合成化简为类似的情景。在序号 1 中原算法可化简为

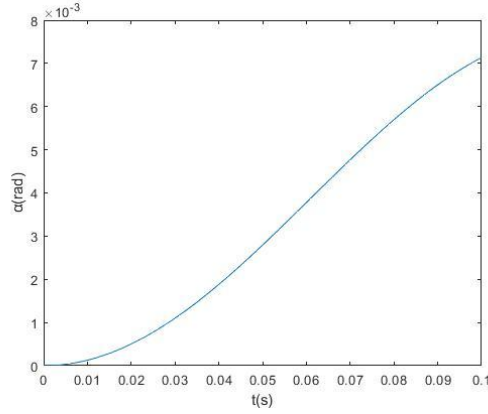
$$\beta^{(k)} = \frac{F_1^{(k)} r \sin(\theta - \arctan \frac{\tan \alpha^{(k)} \sin 90^\circ}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha^{(k)} \cos^2 90^\circ}}) - F_5^{(k)} r \sin(\theta - \arctan \frac{\tan \alpha^{(k)} \sin(-90^\circ)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha^{(k)} \cos^2(-90^\circ)}})}{J}$$

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} + \beta^{(k)} \Delta t$$

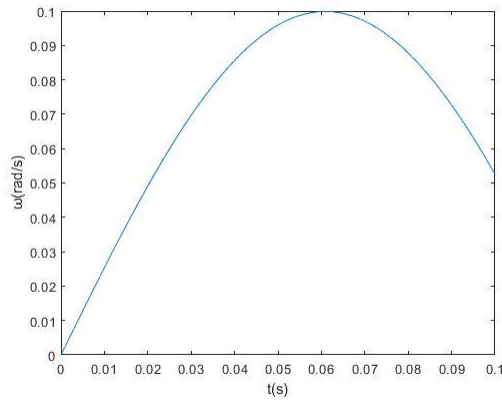
$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \omega^{(k)} \Delta t + \frac{\beta^{(k)} \Delta^2 t}{2}$$

$$(k = 0, 1, \dots, 99)$$

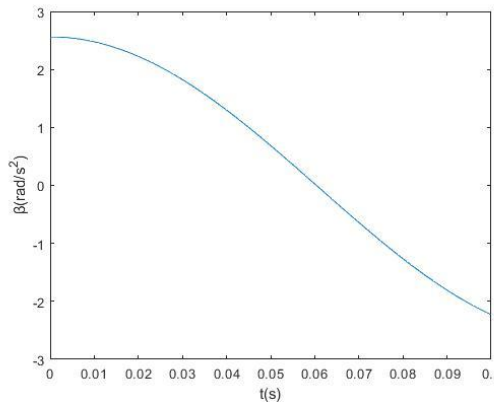
使用 matlab 编程求解，可得到 0 到 0.1s，鼓面倾角、角速度、角加速度与时间的关系，如图 6 所示。同时得到 0.1s 时鼓面倾角为 0.0071rad，即 0.4068°。



(a)



(b)



(c)

图6 鼓面倾角、角速度、角加速度与时间的关系

再考察**序号 2**，可以求队员 1、2 的合力，求队员 5、6 的合力，其余力的力矩抵消。队员 1、2 的合力为 $2 \times 90 \cos 22.5^\circ = 166.2983N$ ，队员 5、6 的合力为 $2 \times 80 \cos 22.5^\circ = 147.8207N$ ，即可沿用序号 1 的算法，解得 0.1s 时鼓面倾角为 0.0075rad, 即 0.4297° 。同理可得序号 3, 0.1s 时鼓面倾角为 0.0063rad, 即 0.3438° 。

c. 类型二的求解

在此类型中，有一个或多个人发力时机提前，提前的人可能有不同用力，这样以来，在 0 时刻鼓的倾斜角度、角速度都可能不为 0，这是与类型一的区别，但我们仍然可以通过鼓面倾斜模型计算出 0 时刻鼓的倾斜角度、角速度，其余步骤与类型一一样。可以解得序号 4，0.1s 时鼓面倾角为 -0.0374rad，即 -2.1429° ；对于序号 5，将队员 1、2 的力合成，结合序号 2、序号 4 的讨论，容易解得序号 5，0.1s 时鼓面倾角为 -0.1218rad，即 -6.9786° ；同理易得序号 6，0.1s 时鼓面倾角为 -0.0003rad，即 -0.0172° ；序号 7，0.1s 时鼓面倾角为 -0.0425rad，即 -2.4351° 。

d. 类型三的求解

发力提前造成的倾斜与用力不同造成的倾斜不在同一平面，0s 后需要矫正，我们仍然可以通过鼓面倾斜模型计算出 0 时刻鼓的倾斜角度、角速度，仿真与前面类似，可得序号 8，0.1s 时鼓面倾角为 0.0032rad，即-2.4351°。

e. 类型四的求解

结合序号 2、5 的求解，同样可以求解斜面倾斜模型，解得序号 9，0.1s 时鼓面倾角为-0.1000rad，即-5.7296°。

f. 结果

整合以上求解结果，如表 2 所示。

表 2 不同情景的鼓面倾斜角

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角（度）
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4068
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4297
	用力大小	90	90	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3438
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
4	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	-2.1429
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	-0.1	-0.1	0	0	0	0	0	0	-6.9786
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0	-0.0172
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	-2.4351
	用力大小	90	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	-0.1	0	0	-0.1	0	0	0	0.1833
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	-0.1	0	0	-0.1	-5.7296
	用力大小	90	80	80	90	80	80	80	80	

5.3 问题三

沿用问题二中的情景，假设出错的总是少数人，大部分人是能够正确操作的。那么我们仅需要考虑出错个体的改正策略，容易得到：对于出错的个体，若发力过大或发力提前，则应当在下一次减小发力或延后发力；若发力过小或发力延后，则应当在下一次增加发力或提前发力。

六、 模型的优缺点

6.1 优点

1. 通过机理分析完成正确物理模型的建立，模型是可靠的
2. 选用最优化模型，可以找到理想情况下的最优方案

6.2 缺点

1. 在坐标系选取方面存在一定问题，求解复杂
2. 在处理不同转动角速度问题时困难

七、 参考文献

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版)[M]. 高等教育出版社, 1987.
- [2] 孙云卿, 雷雨. 大学物理学[M]. 科学出版社, 2010.

八、 附件

附件一 程序文件夹

文件夹内含有 8 个 matlab 程序，为题目求解中使用到的程序。