Cálculo Numérico

3.0. Zero de Funções

Vamos conhecer os métodos numéricos necessários para calcular funções não lineares. Antes entendendo o que é zero da função. Valor de x que faz f(x) ser zero. f(x)=0.

Zero da função

- Calcular analiticamente, de forma simples:

1. 1º Grau – Função afim (reta) (tipo especial Função Linear, a <> 0, b=0).

f(x) = ax + b => 0 = ax + b => x = -b/a (Zero da função)

2. 2º Grau (Parábola) – Função não linear

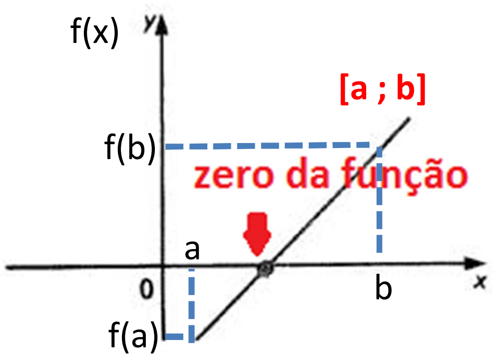
f(x) = ax^2 + bx + c => 0 = ax^2 + bx + c; Fórmula de Bhaskara.

Δ = b^2 – 4*a*c; $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; Soma=(-b/a) e Produto=(c/a); Delta (> 0 [duas raízes reais e distintas], = 0 [uma única raiz real], < 0 [nenhuma raiz real]);

3. Calcular utilizando Métodos Numéricos

Na medida em que a complexidade aumenta nas soluções analíticas, faz-se necessário o uso de métodos numéricos.

Vamos utilizar a propriedade da **determinação do Intervalo em que o Zero Pertence**:



Se f(a) * f(b) < 0, então vai existir um zero da função no intervalo **[a ; b]**. Zero de funções não lineares e reais.

x	-∞	-99	-13	-7	-5	-1	0	2	4	6	8	10
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

$f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow x_o \in [a ; b]$

+ -

4. Método Numérico da Bissecção

Recorremos aos métodos numéricos, quando se torna inviável calcular, os zeros de função reais não lineares, de função polinomial com grau muito elevado através de soluções, equações matemáticas muito complexas inerentes ao método, ou seja, através de métodos analíticos.

Este método numérico da bissecção pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares quando a raiz **x = xo** está no **intervalo de [a ; b].**

A raiz da função não linear pode ser estimada pela média aritmética do intervalo $x_k = \frac{a+b}{2}$, em que a tolerância (**restrição)** de **$|f(x_k)| < \varepsilon$, ou $|b - a| < \varepsilon$**.

Onde X_k, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) * f(b) < 0**.

Exemplo:

- +

$f(x) = x^2 + \ln(x)$; Intervalo: [0.5; 1]; **restrição: $| f(x) | < 0.05$**

Passo 1, verificando se f(a) * f(b) < 0.

f(a) = f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.44**;

f(b) = f(1) = 1 + 0 => **f(b) = 1**;

f(a) * f(b) < 0, **verdadeiro**.

Passo 2, calculando x_k e $f(x_1)$ e verificando se atende a restrição.:

$x_1 = \frac{a+b}{2}$= (0.5 + 1) / 2 => **$x_{1=}$ 0.75**

$f(x_1)$ = f(0.75)= 0.5625 + (-0.287682072) => f(0.75) = 0.274817927 => **f(0.75) = 0.27**.

$f(x_1)$ = |0.27 |< 0.05, **não atende a tolerância**.

Passo 3, calculando x_k e $f(x_2)$ e verificando se atende a restrição.

Definindo novo intervalo: Como o $f(x_2) > 0$, então, [0.5; 0.75]

$x_2 = \frac{a+b}{2}$= (0.5 + 0.75) / 2 => **$x_{2=}$ 0.625**

$f(x_2)$ = f(0.625)= 0.390625+ (-0.470003629) => f(0.625) = -0.079378629 => **f(0.625) = -0.079**.

$f(x_2)$ = |-0.079| < 0.05, **não atende a tolerância**.

Passo 4, calculando x_3 e $f(x_3)$ e verificando se atende a restrição.:

Definindo novo intervalo: Como o $f(x_3) < 0$, então, [0.625;0.75]

$x_3 = \frac{a+b}{2}$= (0.625 + 0.75) / 2 => **$X_{3=}$ 0.6875**

$f(x_3)$ = f(0.6875)= 0.47265625 + (-0.3746934) => f(0.6875) = 0.09796285 => **f(0.6875) = 0.098**.

$f(x_3)$ = |0.098| < 0.05, **não atende a tolerância**.

Passo 5, calculando x_4 e $f(x_4)$ e verificando se atende a restrição.:

Definindo novo intervalo: Como o $f(x_4) > 0$, então, [0.625; 0.6875]

$x_4 = \frac{a+b}{2}$= (0.625 + 0.6875) / 2 => **$X_{4=}$ 0.65625**

$f(x_4)$ = f(0.6563)= 0.43072969 + (-0.421137277) => f(0.6563) = 0.0095924 => **f(0.6563) = 0.0095**.

$f(x_4)$ = |0.01| < 0.05, **ATENDE a tolerância**.

Logo, a raiz aproximada da função não linear é igual a x_4= 0.65625.

$f(x) = x^2 + \ln(x)$; Intervalo: [0.5; 1]; **condição de parada: | f(x) | < 0.05**

K	a_k	b_k	X_k	$f(X_k)$	$\lvert f(X_k)\rvert<0.05$
1	0.5	1	0.75	0.27	Falso
2	0.5	0.75	0.625	-0.079	Falso
3	0.625	0.75	0.6875	0.098	Falso
4	0.625	0.6875	**0.65625**	**0.0095**	**Verdade**

Exercício: a) $x = \sqrt{17}$; Restrição: | f(x) | < 0.02; intervalo [4; 4.3]

Resposta: $f(X_3)$ = -0.01. Logo, $|f(X_3)|$ < 0.02 e X_3 = 4,1125, é a raiz aproximada da função não linear.

$x - \sqrt{17 = 0}$; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: | f(x) | < 0.02**

K	a_k	b_k	X_k	$f(X_k)$	$\lvert f(X_k)\rvert<0.02$
1	4	4.3	4.15	0.027	Falso
2	4	4.15	4.075	-0.048	Falso
3	4.075	4.15	**4.1125**	**-0.01**	**Verdade**

5. Método Numérico da Falsa Posição

Este método numérico da falsa posição pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

Então, dado o **intervalo de [$\overset{-}{a}$; $\overset{+}{b}$],** a raiz aproximada da função não linear pode ser estimada por $X_k = \frac{a*f(b)-b*f(a)}{f(b)-f(a)}$, em que a tolerância (**restrição)** de **$|f(x_k)| < \varepsilon$, ou $|b - a| < \varepsilon$**.

Onde **X_k**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **$f(a) * f(b) < 0$**.

Exemplo:

$f(x)= x^2 + \ln(x)$; Intervalo: [0.5; 1]; **restrição: $|f(x)| < 0.05$**

Passo 1, verificando se $f(a) * f(b) < 0$.

f(a) = f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.443**;

f(b) = f(1) = 1 + 0 => **f(b) = 1**;

f(a) * f(b) < 0, **verdadeiro**.

Passo 2, calculando x_k e $f(x_1)$ e verificando se atende a restrição.

f(a) => **f(a)=-0.443**;

f(b) => **f(b) = 1**;

$X_k = \frac{a*f(b)-b*f(a)}{f(b)-f(a)}$ => $X_1 = \frac{0.5*f(1)-1*f(0.5)}{f(1)-f(0.5)}$ => $X_1 = \frac{0.5 * 1-1 *(-0.443)}{1-(-0.443)}$ =>

$X_1 = 0.6535$

$f(X_1)=f(0.6535)= 0.6535^2 + \ln(0.6535)$ => **f(0.6535) = 0.0016**.

$f(X_1) = |f(0.6535)| < 0.05$, **não atende a tolerância**.

Passo 3, calculando x_k e $f(x_1)$ e verificando se atende a restrição.:

Definindo novo intervalo: Como o $f(x_1) > 0$, então, [0.5; 0.6535]

f(a) = f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.443**;

f(b)= f(0.6535) = 0.42706225 + (– 0.425412745) => f(a) = 0.001649504 => **f(b)=0.0016**;

$X_k = \frac{a*f(b)-b*f(a)}{f(b)-f(a)}$ => $X_2 = \frac{0.5*f(0.6535)-0.6535*f(0.5)}{f(0.6535)-f(0.5)}$ =>

$X_2 = \frac{0.5 * 0.0016-0.6535* (-0.443)}{0.0016-(-0.443)}$ =>

X_2= 0.6529

$f(X_2)$=f(0.6529)= 0.6529^2 + ln(0.6529) => **f(0.6529) = 0.0000529**.

$f(X_2)$ = | f(0.0000529) | < 0.05, **ATENDE a tolerância**.

Logo, a raiz aproximada da função não linear é igual a x_2= 0.6529.

f(x)= x^2 + ln(x); Intervalo: [0.5; 1]; **condição de parada: | f(x) | < 0.05**

K	**a_k**	**b_k**	**X_{k+1}**	**$f(X_{k+1})$**	**$\|f(X_{k+1})\|<0.05$**
0	0.5	1	**0.6535**	**0.0016**	**Verdade**
1	0.5	0.6535	0.6529	-0.0000529	**Verdade**

Exercício:

a) $x = \sqrt{17}$;

$x - \sqrt{17} = 0$; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: | f(x) | < 0.02**

K	**a_k**	**b_k**	**X_{k+1}**	**$f(X_{k+1})$**	**$\|f(X_{k+1})\|<0.02$**
0	0.5	1	**4.123**	**-0.00010563**	**Verdade**

Resposta:

$f(X_1)$ = | f(-0.00010563) | < 0.02, **ATENDE a tolerância**.

Logo, a raiz aproximada da função não linear é igual a x_1= 4.123.

6. Método Numérico do Ponto Fixo

Este método numérico iterativo, ponto fixo, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

A partir da expressão f(x) = 0, podemos determinar a expressão **x = g(x)**, que é a função de iteração que será utilizada para calcular o valor de x. Para tanto, temos: **X_{k+1}= g(X_k).** Sendo X_{k+1}, a estimativa da raiz da função não linear atual e g(X_k), a estimativa da raiz da função não linear anterior. Na qual, a estimativa da raiz atual depende da estimativa da raiz anterior.

Para calcular a raiz aproximada da função não linear no método ponto fixo, precisamos de uma estimativa de raiz inicial X_0.

Exercício:

f(x) = X^3 – X – 1; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4^a casa decimal; para **X_0 = 1**; e intervalo [1;2]

Passo 1, verificando se f(a) * f(b) < 0.

Então, f(x)=0; x = g(x); X_{k+1}=g(X_k)

f(a) = f(1) = 1^3 – 1 – 1=> **f(1) = -1**;

f(b) = f(2) = 2^3 – 2 – 1 => **f(2) = 5**;

f(a) * f(b) < 0, **verdadeiro**.

Passo 2, definindo a função x = g(x).

f(x) = X^3 – X – 1 => 0 = X^3 – X – 1 => -X^3 = – X – 1 => X^3 = X + 1 =>
$X = \sqrt[3]{X+1}$, então:

$$X_{k+1} = \sqrt[3]{X_k + 1}$$

Para k=0, temos:

$X_1 = \sqrt[3]{X_0 + 1}$ => X_1 = 1,25992105

Para k=1, temos:

Para k=4, temos:

$X_5 = \sqrt[3]{X_2 + 1}$ => X_5 = 1,324632625

Para k=5, temos:

$X_6 = \sqrt[3]{X_2 + 1}$ => X_6 = **1,324701749**

Para k=6, temos:

$X_7 = \sqrt[3]{X_2 + 1}$ => X_7 = **1,324714878**

$X_2 = \sqrt[3]{X_1 + 1}$ => X_2 = 1,312293837

Para k=2, temos:

$X_3 = \sqrt[3]{X_2 + 1}$ => X_3 = 1,322353819

Para k=3, temos:

$X_4 = \sqrt[3]{X_2 + 1}$ => X_4 = 1,324268745

Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a **1,3247,** existiu uma convergência para a raiz.

$X_{k+1} = \sqrt[3]{X_k + 1}$ =; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4^a casa decimal; X_0 = 1; [1;2]

K	X_{k+1}	Repetição 4^a casa decimal
0	1.25992105	Falso
1	1.312293837	Falso
2	1.322353819	Falso
3	1.324268745	Falso
4	1.324632625	Falso
5	1.324701749	Falso
6	1.324714878	**Verdade (Convergência)**

6.1. Método Numérico do Ponto Fixo: Convergência e Divergência

f(x) = $X^3 - X - 1$; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4^a casa decimal; X_0 = 1; [1;2]

Passo 1, verificando se f(a) * f(b) < 0.

Então, f(x)=0; x = g(x); $X_{k+1}=g(X_k)$

f(a) = f(1) = $1^3 - 1 - 1$=> **f(1) = -1**;

f(b) = f(2) = $2^3 - 2 - 1$ => **f(2) = 5**;

f(a) * f(b) < 0, **verdadeiro**.

Passo 2, definindo a função x = g(x).

$f(x) = X^3 - X - 1 \Rightarrow 0 = X^3 - X - 1 \Rightarrow X = X^3 - 1$, então:

$X_{k+1} = X_k^3 - 1$

Para k=0, temos:

$X_1 = X_0^3 - 1 \Rightarrow X_1 = 0$

Para k=1, temos:

$X_2 = X_1^3 - 1 \Rightarrow X_2 = -1$

Para k=2, temos:

$X_3 = X_2^3 - 1 \Rightarrow X_3 = -2$

Para k=3, temos:

$X_4 = X_3^3 - 1 \Rightarrow X_4 = -9$

Para k=4, temos:

$X_5 = X_4^3 - 1 \Rightarrow X_5 = -730$

Para k=5, temos:

Nesta solução ocorreu uma divergência para o valor da raiz estimada da função não linear, portanto, não é possível encontrar o valor da raiz estimada.

$X_{k+1} = X_k^3 - 1$; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4^a casa decimal; $X_0 = 1$; [1;2]

K	X_{k+1}	Repetição 4^a casa decimal
0	0	Falso
1	-1	Falso
2	-2	Falso
3	-9	Falso
4	-730	Falso
5	-3.8×10^8	**Falso (Divergência)**

7. Método Numérico da Newton-Raphson

Este método numérico iterativo, Newton-Raphson, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

Dada à expressão f(x) = 0 e a estimativa inicial X_0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a estimativa atual (X_{k+1}) e a estimativa anterior (X_k), a partir da expressão $X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$.

Este é o método no qual a estimativa atual depende da estimativa anterior, além disso, o método depende do **valor da função f no ponto X_k da estimativa anterior** e também do **valor da derivada da função f no ponto X_k da estimativa anterior**.

Para calcular a raiz real aproximada da função não linear através do método de Newton-Raphson, iremos precisar de uma estimativa inicial para X_0.

Exemplo: Dado X_0 = 1 e f(x) = X^3 – X -1 e **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4ª casa decimal.

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$$

Passo 1, calculando a derivada da função f'(x).

f'(x) = $3x^2$ – 1 (derivada da função)

Passo 2, calculando a raiz real estimada da função não linear.

Para k = 0 (primeira iteração), temos:

$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$ => $X_1 = 1 - (\frac{-1}{2})$ => X_1 = 1.5

Passo 3, calculando a raiz real estimada da função não linear.

Para k = 1 (segunda iteração), temos:

$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)}$ => $X_2 = 1{,}347826087$

Passo 4, calculando a raiz real estimada da função não linear.

Para k = 2 (terceira iteração), temos:

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} \Rightarrow X_3 = 1{,}325200399$$

Passo 5, calculando a raiz real estimada da função não linear.

Para k = 3 (quarta iteração), temos:

$$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)}{f'(X_3)} \Rightarrow X_4 = \mathbf{1{,}3247}18174$$

Passo 6, calculando a raiz real estimada da função não linear.

Para k = 4 (quinta iteração), temos:

$$X_5 = X_4 - \frac{f(X_4)}{f'(X_4)} \Rightarrow X_5 = \mathbf{1{,}3247}17957$$

Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a **1,3247,** existindo uma convergência para a raiz.

Este procedimento pelo método de Newton-Raphson foi mais rápido do que pelo método de Ponto Fixo, no qual obtivemos o mesmo resultado na sétima iteração do procedimento.

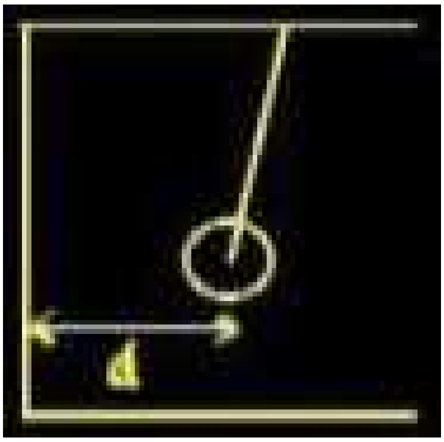
$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$; $X_0 = 1$; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição da 4ª casa decimal.

K	X_{k+1}	Repetição 4ª casa decimal
0	1.5	Falso
1	1.347826087	Falso
2	1.325200399	Falso
3	1.324718174	Falso
4	1.324717957	**Verdade**

Exercício:

a) Dado: $80 + 90 * cos\left[\frac{\pi}{3}t\right]$=d; d = 10cm; t_0 = 4s; e | f(t) | < 0.002 (critério de parada), qual o t = ?

Nota: Argumento em radianos



$t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$; t_0 = 4s ; **Condição de Parada:** |f(t)| < 0.002.

K	t_{k+1}	$f(t_k)$	|f(t)| < 0.002
0	3.6937061693	2.72	Falso
1	3.650232375	0.07	Falso
2	3.6937061693	$5{,}44 \times 10^{-5}$	**Verdade**

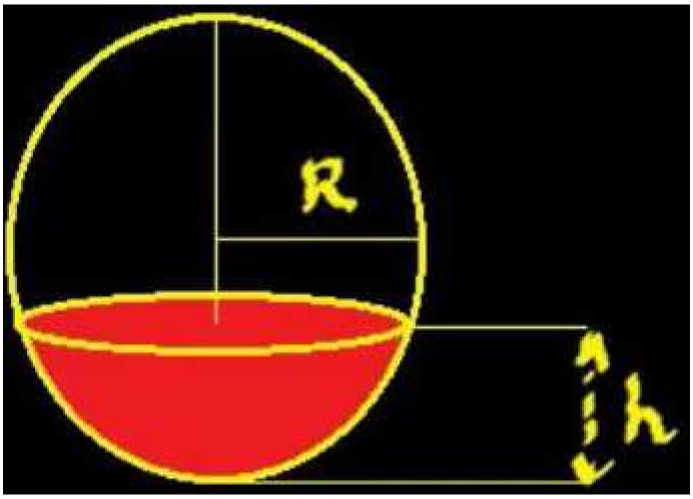
8. Método Numérico da Secante

Este método numérico iterativo, Secante, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

Dada duas raízes reais com estimativas iniciais: X_0 e X_1 e à expressão f(x) = 0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a estimativa atual (X_{k+1}) e as duas estimativas anteriores (X_k e X_{k-1}), a partir da expressão $X_{k+1} = \frac{X_{k-1}*(f(X_k)-X_k*f(X_k-1)}{f(X_k)-f(X_{k-1})}$, sendo que, a estimativa atual depende das duas estimativas anteriores.

Exercício: Dado R = 1; v = 0.5, h_o = 0.25e h_1 = 0.5 e |f(h)|< 0.002, qual o valor de h =?

a) $\frac{\pi*h^2*(3*R-h)}{3} = v$



<u>Solução</u>: f(x) = 0

Passo 1, encontrando a função não linear.

$\frac{\pi*h^2*(3*1-h)}{3} = 0.5$ => $\frac{\pi*h^2*(3-h)}{3} - 0.5 = 0$

f(h) = $\frac{\pi*h^2*(3*1-h)}{3} - 0.5$

Passo 2, calculando as raízes da função não linear, h_0 e h_1.

Dados: h_0=0.25 e h_1=0.5

f(0) = $\frac{\pi * h^2 * (3*1-h)}{3} - 0.5$

Para f(0.25) = -0,3200 e Para f(0.5) = 0.1545

f(h_0) = -0.3200 e f(h_1) = 0.1545

Passo 3, calculando a raiz real estimada da função não linear, h_0 e h_1.

Para k = 2, qual o valor de h_2=?

$$h_2 = \frac{h_0 * f(h_1) - h_1 * f(h_0)}{f(h_1) - f(h_0)}$$

h_2= 0.25 * 0.1545 – 0.5 * [-0,32] / (0.1545 – [-0.32])

h_2 = 0.4186 e f(h_2) = -0.0263

Passo 4, calculando a raiz real estimada da função não linear, h_1 e h2.

$$h_3 = \frac{h_1 * f(h_2) - h_2 * f(h_1)}{f(h_2) - f(h_1)}$$

h_3= 0.5 * [-0.0263] – 0.4186 * [0,1545] / (-0.0263 – 0.1545])

Logo, a raiz estimada da função não linear é: **h_3 = 0.4304**.

f(h_3) = -0.0015 < 0.002

$h_{k+1} = \frac{h_{k-1} * (f(h_k) - h_k * f(h_k - 1)}{f(h_k) - f(h_{k-1})}$; **Condição de Parada |f(h)|< 0.002**

K	h_{k-1}	h_k	f(h_k)	f(h_{k-1})	h_{k+1}	|f(h)|< 0.002
1	0.25	0.5	0.1545	-0.3200	0.4186	Falso
2	0.5	0.4186	-0.0263	0.1545	0.4304	Falso
3			**-0.0015**			**Verdade**