

Aula 6 – Aritmética Computacional

Introdução à Computação
ADS - IFBA

Representação de Números



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Inteiros
- Vírgula fixa (Fixed Point)
- Ponto Flutuante
- Para todos, a quantidade de valores possíveis depende do número de bits (N)
 - 2^N valores

Números com Sinal e Números sem Sinal



- **Base 10:**

- $2543_{(10)} = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0_{(10)}$

- **Base 2:**

- $1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_{(10)}$

- **Representação no Z80 (8 bits)**

0 0 0 0 1 0 1 1



Bit Mais Significativo (MSB)



Bit Menos Significativo (LSB)

Aritmética Binária



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- SOMA: Semelhante à soma decimal

$$0+0 = 0$$

$$0+1 = 1+0 = 1$$

$$1+1 = 0, \text{ com vai '1'}$$

- Ex:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1111 \leq \text{vai '1'} \\ 101101 \\ + 101011 \\ \hline 1011000 \end{array}$$

Aritmética Binária



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- **SUBTRAÇÃO:** semelhante, porém o 'empréstimo' agora vale 2 (na base decimal quando temos 0-N pegamos 10 emprestado ao algarismo da esquerda).
 $0-0=0$, $1-1=0$, $1-0=1$, $0-1 \Rightarrow$ 'empréstimo'

2
002

- **Ex: 101101**

```
  - 100111
  -----
 000110
 100001
```

Aritmética Não-Decimal

Aritmética Binária – Subtração Binária

Exemplos:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ \underline{100111} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1010-1 \\ \underline{100111} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 100--1 \\ \underline{100111} \\ 000110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 01202 \\ 100101 \\ \underline{11010} \\ 001011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 02 \quad 012 \\ 100110001 \\ \underline{10101101} \\ 10000100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 011212 \\ 11001001 \\ \underline{10111011} \\ 00001110 \end{array}$$

Adição e Subtração



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- No computador: soma semelhante à soma no sistema decimal.
- Soma: soma cada bit, mais o vai-um.

...	0	0	0	1	1	1
...	0	0	0	1	1	0
<hr/>						
...	(0) 0	(0) 0	(0) 1	(1) 1	(1) 0	(0) 1

Adição e Subtração (8 bits)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- $6_{(10)} = 0000\ 0110_{(2)}$
- $7_{(10)} = 0000\ 0111_{(2)}$

adição



$$\begin{array}{r} +\ 0000\ 0111 \\ +\ 0000\ 0110 \\ \hline 0000\ 1101 \end{array}$$

subtração



$$\begin{array}{r} -\ 0000\ 0111 \\ -\ 0000\ 0110 \\ \hline 0000\ 0001 \end{array}$$

Subtração com
complemento a 2



$$\begin{array}{r} +\ 0000\ 0111 \\ +\ 1111\ 1010 \\ \hline 0000\ 0001 \end{array}$$

Aritmética Binária



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Exemplo: Vamos multiplicar 1001_2 de 1100_2

Multiplicando

1001

Multiplicador

x 1100

Terceiro produto parcial

100100

Quarto produto parcial

1001

Produto Final

1101100

Exemplo: como na prática

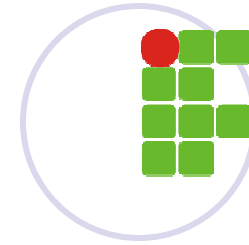
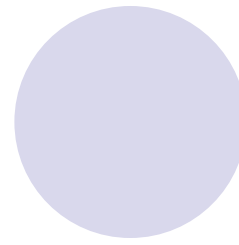
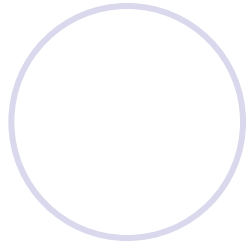


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

$$\begin{array}{r} \text{multiplicando} \quad 1000 \\ \text{multiplicador} \times \quad \underline{1001} \\ \hline 1000 \\ 0000 \\ 0000 \\ \underline{1000} \\ \text{produto} \quad 1001000 \end{array}$$

- Número de dígitos:
multiplicando + multiplicador.
- 32 bits x 32 bits = 64 bits.

Divisão



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- A operação recíproca da multiplicação é a divisão, operação que é ainda menos freqüente que a multiplicação e mais artilosa. Além disso, ela oferece uma rara oportunidade de se efetuar uma operação matemática inválida: a divisão por zero.
- $\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$

Aritmética Binária



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Divisão: igual a divisão binária

$$\begin{array}{r} 100111 \\ -110 \\ \hline 0011 \\ 1 \downarrow \\ 100111 \\ -110 \\ \hline 0011 \\ -110 \\ \hline 001 \end{array} \quad \begin{array}{r} 110 \\ \hline 1 \\ 110 \\ \hline 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 100111 \\ -110 \\ \hline 0011 \\ -110 \\ \hline 00110 \\ -110 \\ \hline 0000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 110 \\ \hline 110,1 \end{array}$$

Exercício



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Dividir $0000\ 0111_2$ por 0010_2 .
- Valores iniciais:
 - Quociente = 0000
 - Divisor = 0010 0000
 - Resto = 0000 0111

Representação de Números



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Inteiros
- Vírgula fixa (Fixed Point)
- Ponto Flutuante
- Para todos, a quantidade de valores possíveis depende do número de bits (N)
 - 2^N valores

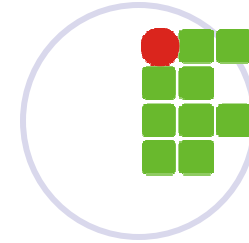
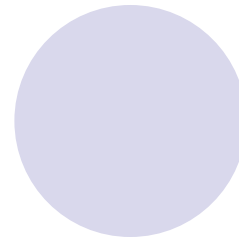
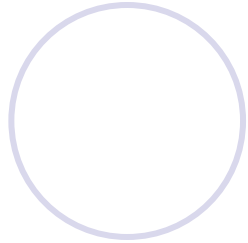
Representação de números



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Números reais: infinitos.
- No computador: finitos.
- Maioria: grande quantidade de zeros à esquerda.
- Computador: pode lidar com números até um certo tamanho.
- *Overflow*: tratado pelo sistema operacional.
- No computador: é preciso representar números com sinal.
 - Solução: usar 1 bit (sinal magnitude).
- Primeira tentativa: o bit mais significativos (MSB) é usado para sinal.
 - Problema: duas representações para o zero
 - Solução mais usada: complemento a 2

Inteiros



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Positivos

- Mesmo valor, limitado ao número de bits

- Exemplo: $6_{10} = 110_2$

- Negativos: mesma limitação, de 4 formas

- Módulo e sinal

- Complemento de 1 (C-1)

- Complemento de 2 (C-2)

- Excesso de 2 elevado a (N-1)

Módulo e Sinal (MS)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- O **bit** mais à esquerda representa o sinal
 - valor **0**: sinal **+**; valor **1**: sinal **-**
- **(N-1) bits** restantes: **módulo** do número
- Quantidade: $-2^{N-1}+1 \leq X \leq 2^{N-1}-1$
 - $N = 8$, $-127 \leq X \leq 127$
- Exemplo: limitação de **8 bits (N=8)**
 - $00101010_2 = +42_{10}$
 - $10101010_2 = -42_{10}$

Complemento de 1 (C-1)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- O **bit** mais à esquerda representa o sinal
 - valor **0**: sinal **+**; valor **1**: sinal **-**
- (**N-1**) **bits** restantes: **módulo** do número
- O simétrico é o complemento de 1
 - Troque 0 por 1 e vice-versa incluindo o sinal;
ex.:
 - $00101010_2 = +42_{10}$
 - $11010101_2 = -42_{10}$
- Mesmo que MS: $-2^{N-1}+1 \leq X \leq 2^{N-1}-1$

Complemento de 2 (C-2)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- O **bit** mais à esquerda representa o sinal
 - valor **0**: sinal **+**; valor **1**: sinal **-**
- **(N-1) bits** restantes: **módulo** do número
- Simétrico em dois passos
- Passo 1: **calcula-se C-1**
- Passo 2: **Soma-se 1 a esse C-1**
 - Despreza-se transporte no último, caso exista
- Quantidade assimétrica: $-2^{N-1} \leq X \leq 2^{N-1}-1$

Complemento de 2 (C-2)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

Número 10:

0 0 0 1 0 1 0
sinal + módulo

Número -10:

Primeiro passo

1 1 1 1 0 1 0 1
1

Segundo passo

1 1 1 1 0 1 0 1
+ 1
1 1 1 0 1 1 0
sinal - módulo

Excesso de 2 elevado a (N-1)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Não usa **bit** de sinal
- Valor é o **número mais um excesso**
 - $N \text{ bits} = 2^{N-1}$
- Exemplo
 - Para 8 bits o excesso é 128_{10} ($2^7 = 128$)
 - $10_{10} = 10001010_2$ ($10_{10} + 128_{10} = 138_{10}$)
 - $-10_{10} = 01110110_2$ ($-10_{10} + 128_{10} = 118_{10}$)

Exercícios



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

1. Converta $-15_{(10)}$ para binário com representação em sinal/magnitude (16 bits).
2. Converta $-15_{(10)}$ para binário com representação em complemento a 2 (16 bits).
3. Qual é o número, em decimal, representado em complemento a 2 por $1010\ 0011_{(2)}$?
4. Usando complemento a 2 qual é a faixa de números que podem ser representados com 8 bits?

Overflow



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Ocorre sempre que o resultado de uma operação não pode ser representado no hardware disponível.

Operação	Operando A	Operando B	Resultado
A+B	≥ 0	≥ 0	< 0
A+B	< 0	< 0	≥ 0
A-B	≥ 0	< 0	< 0
A-B	< 0	≥ 0	≥ 0

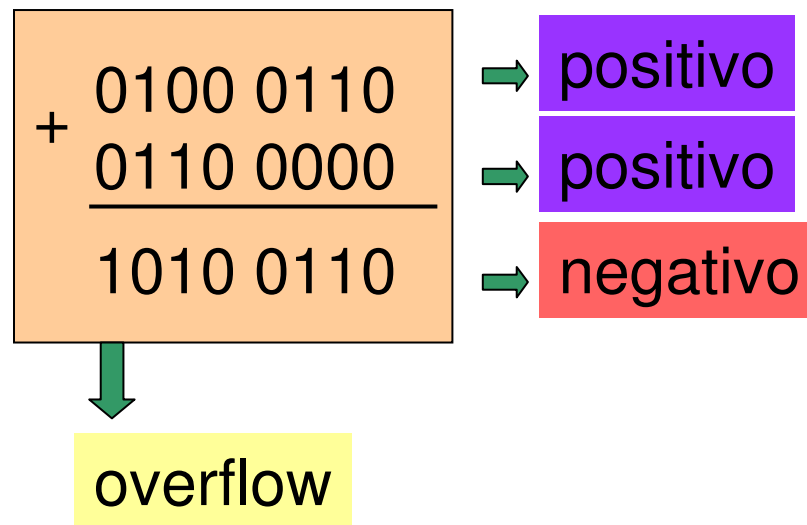
- Se um número for negativo, e o outro positivo, não ocorrerá overflow.

Exemplo de overflow

Adição de 2 operandos positivos (8 bits)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA



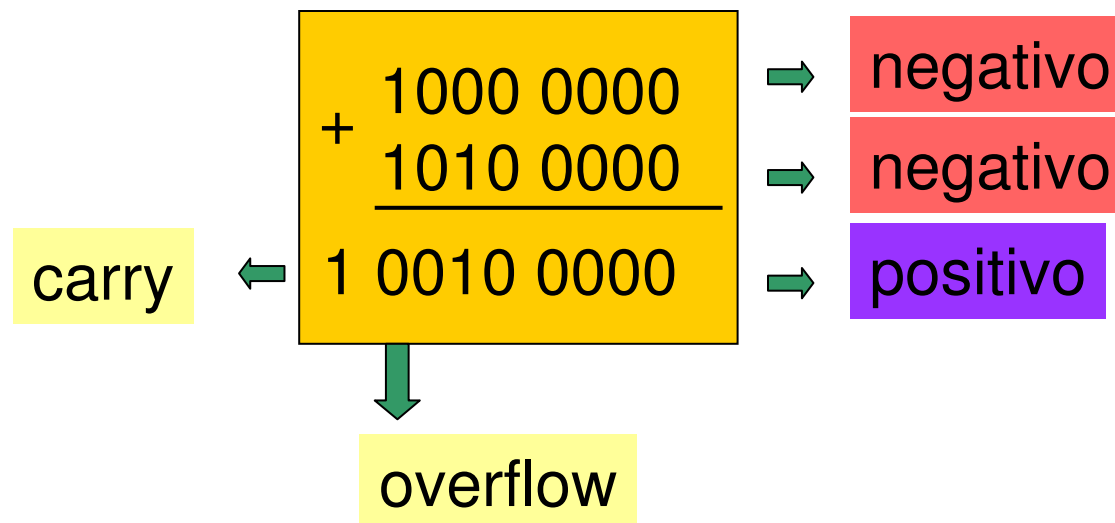
- Isto significa que o resultado está correto se o bit de sinal for ignorado

Exemplo de overflow

Adição de 2 operandos negativos (8 bits)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA



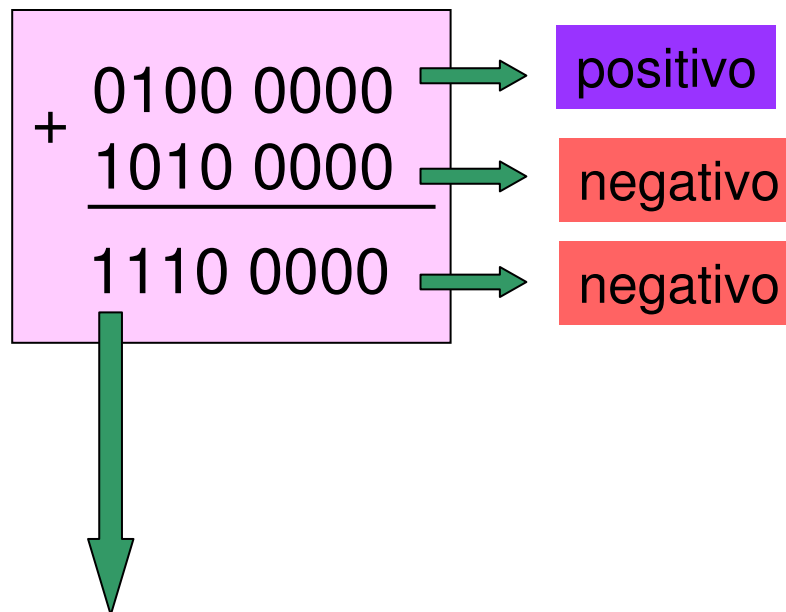
- Isto significa que o resultado é negativo e está em complemento a 2

Exemplo de overflow

Adição de operandos com sinais opostos (8 bits)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA



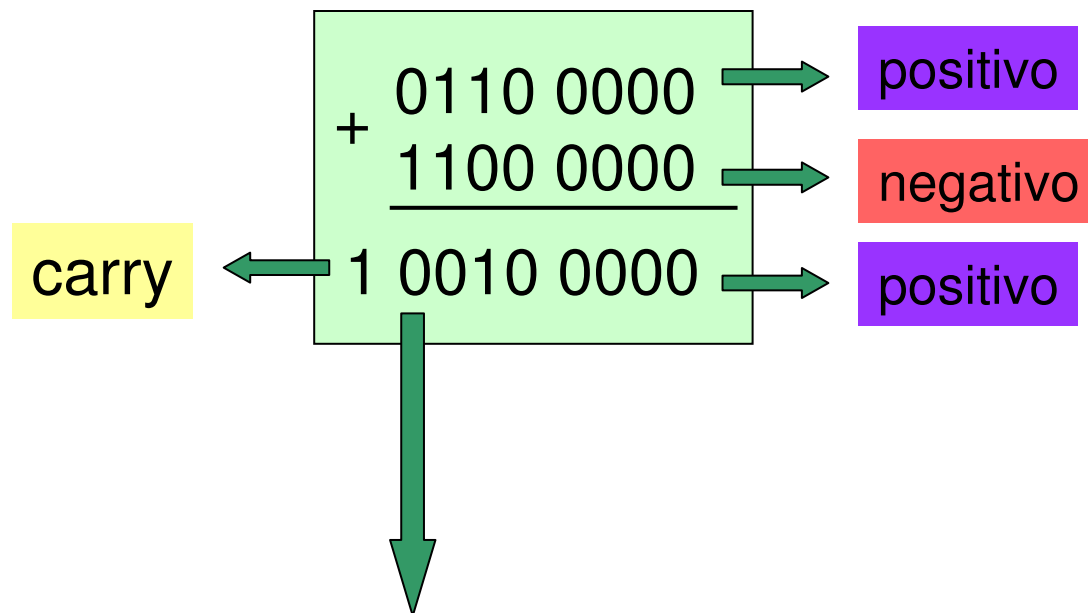
- Não ocorre overflow, o resultado é negativo e está em complemento a 2

Exemplo de overflow

Adição de operandos com sinais opostos (8 bits)



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA



- Não ocorre overflow, o carry é ignorado e o resultado é positivo

Interface Hardware/Software



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Na ocorrência de overflow: a máquina precisa decidir como tratá-lo.
 - Linguagem C: não toma conhecimento do overflows. A tarefa é do programador.
 - FORTRAN: trata o overflow

Exercícios



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Faça as operações aritméticas abaixo utilizando números binários de 8 bits e complemento a 2:

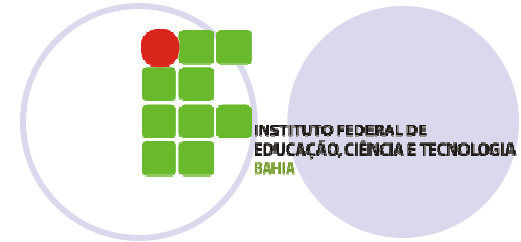
1. $+9 + 4$

2. $+9 - 4$

3. $-9 + 4$

4. $-9 - 4$

Vírgula fixa (Fixed Point)



- Usada apenas para inteiros
- Situada à direita dos dígitos
- Quatro maneiras
 - Binário puro
 - Decimal
 - Decimal não compactado
 - Decimal compactado

Referências



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA

- Professora Maria Clicia Stelling de Castro.
Organização de Computadores I. Capítulo 6 –
Aritmética Computacional.
http://www.ime.uerj.br/professores/Mariaclicia/Oc1/Cap6_aritm.pdf. Rio de Janeiro. 2005.
- [http://www.gia.deinf.ufma.br/~geraldo/disciplinas/intoe2008_2/9_aritmetica.ppt#256,1,Aritmética Binária](http://www.gia.deinf.ufma.br/~geraldo/disciplinas/intoe2008_2/9_aritmetica.ppt#256,1,AritméticaBinária)
- <http://www.g6-team.com/attachment/7/1/5/0/5029.attach>