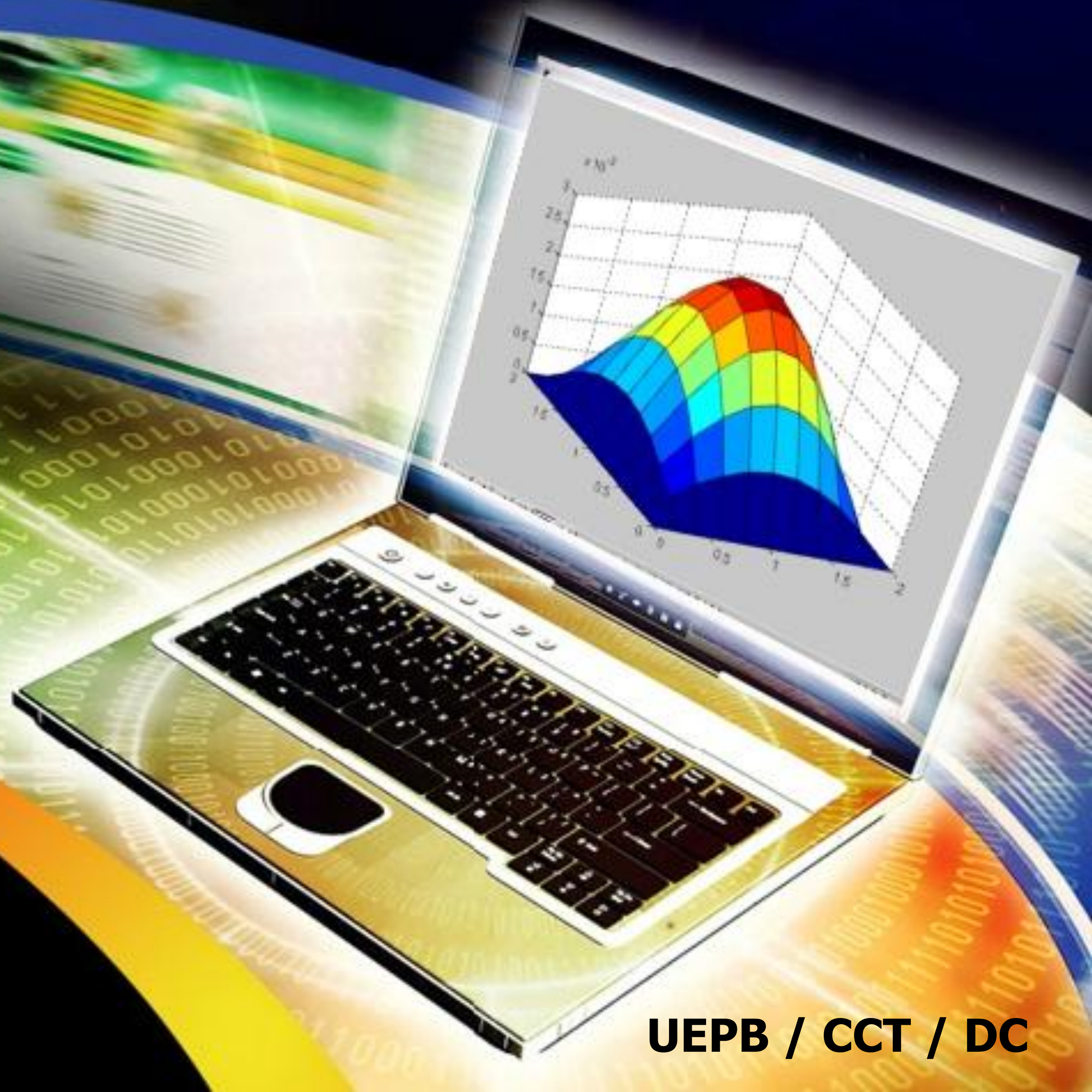
Métodos Numéricos

Soluções de Sistemas: Métodos Diretos



Material baseado nos slides dos Professores:

- ✓ Bruno C. N. Queiroz (UFCG);
- ✓ José Eustáquio Rangel de Queiroz (UFCG);
- ✓ Marcelo Alves de Barros (UFCG);

UEPB / CCT / DC

Sistemas Lineares

- Forma Geral

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

onde:

a_{ij} → coeficientes / x_i → incógnitas

Sistemas Lineares

- Exemplo 01

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$

$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

2, 4, -5, 4, 1, -5, 2, 4 e 5 → coeficientes

x_1, x_2 e x_3 → incógnitas

Sistemas Lineares

- Forma Matricial

$$Ax = b$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Exemplo 02
  - Forma Geral

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$
$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

  - Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Classificação I
  - Impossível → Não possui solução
    - Exemplo 03

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- Classificação II
  - Possível → Possui 1 ou mais soluções
    - Determinado → Solução única
      - Exemplo 04

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- Classificação III
  - Possível → Possui 1 ou mais soluções
    - Indeterminado → Mais de uma solução
      - Exemplo 05 → Algumas soluções: (3,5),(4,4),(5,3)...

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 16 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- Classificação IV
  - Possível → Possui 1 ou mais soluções
    - Homogêneo → Vetor b=0 (x=0 sempre existe solução)
      - Exemplo 06

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- Sistemas Triangulares:
  - Superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Sistemas Triangulares:
  - Inferior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Exemplo 7:
  - Dado o sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\
x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
4x_3 - 5x_4 &= 3 \\
2x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

  - Primeiro passo para sua resolução:

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$

Sistemas Lineares

- Exemplo 7:
  - Segundo passo:

$$4x_3 - 5x_4 = 3$$
$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3$$
$$x_3 = 2$$

  - Terceiro passo:

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -1$$
$$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1$$
$$x_2 = -1$$

Sistemas Lineares

- Exemplo 7:
  - Último passo:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\
&3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \\
&x_1 = 1
\end{aligned}
$$

Métodos Numéricos

- Diretos
  - Solução pode ser encontrada através de um número finito de passos
    - Método de Gauss
    - Método da Eliminação de Jordan
    - Fatoração LU

Métodos Numéricos

- Iterativos
  - Solução a partir de uma seqüência de aproximações para o valor do vetor solução *x*, até que seja obtido um valor que satisfaça à precisão pré-estabelecida
    - Método de Jacobi
    - Método de Gauss – Siedel

Método de Gauss

- Propósito
  - Transformação do sistema linear a ser resolvido em um sistema linear triangular;
  - Resolução do sistema linear triangular de forma retroativa

Método de Gauss

- Transformação do Sistema Linear
  - Troca da ordem das linhas;
  - Multiplicação de uma das equações por um número real não nulo;
  - Substituição de uma das equações por uma combinação linear dela mesma com outra equação.

Método de Gauss

- Passos do Método de Gauss
  - Construção da matriz aumentada Ab

$$[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Passos do Método de Gauss
  - Passo 1:
    - Eliminar os coeficientes de x_1 presentes nas linhas 2,3,...,n - sendo $a_{21} = a_{31,} = ... = a_{n1} = 0$ - sendo a_{11} chamado de pivô da coluna
    - Substituir a linha 2, L_2, pela combinação linear

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad \text{onde:} \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Método de Gauss

- Passos do Método de Gauss
  - Substituir a linha 3, L_3, pela combinação linear:

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad \text{onde:} \qquad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Método de Gauss

- Passos do Método de Gauss

  – Deve-se continuar a substituição até a linha n;

  – Caso algum elemento $a_{pp}=0$, achar outra linha k onde $a_{kp} \neq 0$ e trocar tais linhas. Caso a linha k não exista, o sistema linear não possui solução.

Método de Gauss

- Passos do Método de Gauss
  - Eliminar os coeficientes de x_2 nas linhas 3, 4, ..., n (fazer $a_{32}=a_{42}=...=a_{n2} = 0$);
  - Eliminar os coeficientes de x_3 nas linhas 4, 5, ..., n (fazer $a_{43}=a_{53}=...=a_{n3} = 0$) e assim sucessivamente.

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

    - Matriz aumentada Ab

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Faz-se:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$$

  - Assim:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Faz-se:

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{23} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$$

  - Assim:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Obtém-se a matriz:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Substituindo a linha 3 por:

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_1, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

  - Têm-se:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 & -7 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:

  – A matriz [Ab] fica assim com os seguintes valores:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - Usa-se a solução retroativa:

$$\begin{cases} 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\ \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = 7 \Rightarrow x_2 = 2 \\ \\ 2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:
  - Resolver o sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38 \end{aligned}$$

  - Representando o sistema pela matriz aumentada:

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:
  - Escolhendo a primeira linha como pivô, obtém-se:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134] - (27/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$

$$L_2 = [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$

$$L_3 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210]$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:
  - Representando o sistema pela matriz aumentada:

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:

  – Escolhendo agora a segunda linha como pivô, têm-se:

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{bmatrix} - (-86/2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1400 & -1410 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{bmatrix}$$

  – Obtêm-se a seguinte matriz ampliada:

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:
  - O que termina com a triangulação:

$$\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 + 52 \cdot x_3 = 57 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1.40 \times 10^3 \cdot x_3 = -1.41 \times 10^3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 6.13 \times 10^4 \cdot x_3 = -6.18 \times 10^4 \end{cases}$$

Método de Gauss

- Exemplo 9:
  - Com solução:

$$x_3 = -61800/(-61300) = 1.01$$

$$x_2 = [-1410 - (-1400) \cdot 1.01]/2 = 0.0$$

$$x_1 = [57 - 52 \cdot 1.01 - 4 \cdot 0.0]/1 = 4.5$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Semelhante ao método de Gauss;
- Minimiza a amplificação de erros de arredondamento durante as eliminações;
- Consiste em escolher o elemento de maior módulo em cada coluna para ser o pivô.

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:
  - Resolver o sistema com precisão de 3 casas decimais

$$\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 + 52 \cdot x_3 = 57 \\ 27 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 134 \\ 22 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 = 38 \end{cases}$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:
  - Matriz aumentada original deve ser ajustada:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:
  - Sistema inalterado, elemento pivô 27.
  - Encontrar as novas linhas:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57] - (1/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$

$$L_2 = [0 \quad -0.07 \quad 52.1 \quad 52]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$

$$L_3 = [0 \quad -87.6 \quad 16.5 \quad -71]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:

  - A matriz ampliada fica da forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0.07 & 52.1 & 52 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \\ 0 & -0.07 & 52.1 & 52 \end{array}\right] \Leftarrow$$

  - Usando o elemento -87.6 como pivô, tem-se:

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -0.07 \quad 52.1 \quad 52] - (0.07/87.6) \cdot [0 \quad -87.6 \quad 16.5 \quad -71]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 52.08 \quad 52.56]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:
  - A matriz ampliada fica na forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \\ 0 & 0 & 52.08 & 52.56 \end{array}\right]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- Exemplo 10:
  - A solução do sistema triangular que resultou dessas operações é:

$$x_3 = 52.08/52.56 = 0.991$$
$$x_2 = [-71-16.5\cdot 0{,}991]/(-87.6) = 0.997$$
$$x_1 = [134-(-3)\cdot 0{,}991-110\cdot 0.997]/27 = 1.011$$

  - Solução muito próxima da exata.

Método de Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema, com a finalidade de obter um sistema diagonal equivalente;

- Um sistema diagonal é aquele em que os elementos a_{ij} da matriz coeficiente [A] são iguais a zero, para $i \neq j$,

$i, j = 1,2,\ldots,n$.

Método de Jordan

- Sistema diagonal equivalente:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - A partir do sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

  - Com matriz aumentada:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - Substituindo a linha 2 por:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 5 \quad 1 \quad 1] - (1/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1], \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1/5 = 0.2$$

$$L_2 = [0 \quad 4.6 \quad 0.4 \quad 0.8]$$

  - Substituindo a linha 3 por :

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2 \quad 3 \quad 2 \quad 4] - (2/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] \quad , m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 2/5 = 0.4$$

$$L_3 = [0 \quad 2.2 \quad 0.8 \quad 3.6]$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:

  – A matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & 2.2 & 0.8 & 3.6 \end{bmatrix}$$

  – Substituindo a linha 3 por:

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad 2.2 \quad 0.8 \quad 3.6] - (2.2/4.6) \cdot [0 \quad 4.6 \quad 0.4 \quad 0.8] \;, m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 2.2/4.6 = 0.478$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 0.609 \quad 3.217]$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - A matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.609 & 0.478 \end{bmatrix}$$

  - Substituindo a linha 2 por

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4.6 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} - (0.4/0.609) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.609 & 3.217 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4.6 & 0 & -1.3141 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - Matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4.6 & 0 & -1.314 \\ 0 & 0 & 0.609 & 0.478 \end{bmatrix}$$

  - Substituindo a linha 1 por

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4.6)\cdot[0 \quad 4.6 \quad 0 \quad -1.314] \qquad , m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = 2/4.6$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1.5714]$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - Substituindo a linha 1 por:

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1.5714] - (3/0.609) \cdot [0 \quad 0 \quad 0.609 \quad 0.478], \quad m_{13} = \frac{a_{13}}{a_{33}} = 3/0.609$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 0 \quad -14.277]$$

  - A matriz ampliada fica da seguinte forma:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -14.277 \\ 0 & 4.6 & 0 & -1.314 \\ 0 & 0 & 0.609 & 0.478 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- Exemplo 11:
  - E as soluções são:
    - $x_1 = 0.78$, $x_2 = -0.28$, $x_3 = -2.85$

Decomposição LU

- O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto de duas matrizes L e U.
  - Seja:

$$[LU]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- E a matriz coeficiente A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

– Têm-se:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = [LU] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- Uma matriz quadrada pode ser fatorada como duas matrizes quadradas triangulares

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Matematicamente: Ax = b → LUx = b
  Ly = b → Ux = y

Decomposição LU

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11$$
$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -15$$
$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29$$

- Ax = b

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- Para obter L: Eliminação de Gauss

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- Agora fazemos Ly = b e calculamos y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$y = [11 \quad 7 \quad -36]$$

Decomposição LU

- Para obter U: Eliminação de Gauss

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

- Sabemos que Ux = y então calculamos x

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

$$x = [2 \quad -1 \quad 3]$$

Decomposição LU

- Resumo de Passos:
  - Seja um sistema $Ax = b$ de ordem n, onde A satisfaz as condições da fatoração LU.
  - Então, o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:
    - $LUx = b$

Decomposição LU

- Resumo dos Passos:
  - Fazendo $Ux = y$, a equação acima reduz-se a $Ly = b$.
  - Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$, obtém-se o vetor y.

Decomposição LU

- Resumo dos Passos:
  - Substituição do valor de y no sistema Ux = y $\Rightarrow$ Obtenção de um sistema triangular superior cuja solução é o vetor x procurado;
  - Aplicação da fatoração LU na resolução de sistemas lineares $\Rightarrow$ Necessidade de solução de dois sistemas triangulares