Cálculo Numérico – Versão Atualizada

Revisão / Exercícios

(Professor Heleno Cardoso)

2. Teoria dos Erros

- Aritmética de Ponto Flutuante

2.1. Representação Numérica nas Máquinas Computacionais

dt = Número de dígitos

Número = $\underbrace{(0,d1d2...dt)}_{\text{Mantissa}} \times \underbrace{B}_{B = \text{Base}}{}^{e}$ e = Expoente

Aonde:

d1 ≠ 0;

exp ϵ [m, M] ; m = limitante inferior do expoente; M = limitante superior do expoente

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

Exercícios 1): Represente os números abaixo em aritmética de ponto flutuante. Considere t = 3 dígitos no sistema computacional.

a) $235,89_{(10)}$ =
b) $101,01_{(2)}$ =
c) $0,000875_{(10)}$=

2.2. Arredondamento e Truncamento de Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos de Arredondamento: Matemático; Estatístico e ABNT.

Critério Matemático:

Quando a casa decimal seguinte àquela que vamos arredondar for 0, 1, 2, 3 ou 4, esta casa decimal permanece como está. Se a casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9, somamos 1 à casa decimal a ser arredondada.

Ex.: a) $0,78645_{(10)}$= 0,786;

b) $0,4545_{(10)}$=0,455

c) $0,4575_{(10)}$=0,458

d) $0,4548_{(10)}$=0,455

Critério Estatístico:

Esse procedimento é denominado arredondamento e, conforme resolução 886/66 da fundação IBGE deve seguir os seguintes critérios:

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, não se altera o último algarismo a permanecer.

Exemplos: Se temos 25,62489 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 4, ficando 25,62

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se em uma unidade o último algarismo a permanecer.

Exemplo: Se temos 75,24623 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 6 porém, aumentamos uma unidade ao 4 que é o último algarismo a permanecer. Ficando 75,25.

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for o 5, temos que observar o seguinte: a) se após o 5 aparecer, em qualquer casa decimal, pelo menos um algarismo diferente de zero, aumenta-se uma unidade ao último algarismo a permanecer.

Exemplos: 54,265003 fica 54,27

12,4851 fica 12,49

b) se após o 5 não aparecer mais nenhum algarismo ou se aparecer apenas zero, somente será acrescentado uma unidade ao último algarismo a permanecer se ele for ímpar.

Exemplos: 18,145 fica 18,14

28,4650000 fica 28,46

41,375 fica 41,38

0,775000 fica 0,78

Critério ABNT:

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for > 5, então (soma +1);

Se for < 5, então (mantém o dígito)

Se for =5, então (Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

Exercícios 2): Calcule o arredondamento e truncamento da máquina computacional. Considere **t = 3 dígitos**, numa **base B = 10**, em uma máquina que opera com **Padrão ABNT** de arredondamento.

a) $235{,}89_{(10)} =$
b) $235{,}39_{(10)}=$
c) $235{,}59_{(10)}=$
d) $234{,}59_{(10)}=$
e) $12{,}76_{(10)}=$
f) $12{,}74_{(10)}=$

2.3. Overflow e Underflow - SPF (Sistema de Ponto Flutuante)

t = Número de dígitos

SPF(B, t, m, M) exp ϵ [m;M], máquina opera por arredondamento ABNT

B = Base

Exercícios 3): Calcule se no SPF ocorreu: Overflow, Underflow ou Nem Overflow / Nem Underflow. Considere B = 10, t = 3, exp ϵ[-5;5]

a) $235{,}89_{(10)}=$
b) $0{,}345 \times 10^{-7}=$
c) $0{,}875 \times 10^{9}=$

2.4. Representação de Palavra de 16bits

Nota: Existe também representação de palavra: 32bits, 64bits, 128bits.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Expoente (Posição 2 a 5)

Sinal do expoente (Posição 1)

Mantissa (Posição 6 a 15)

Sinal do número (Posição 0)

Nota: O que a máquina computacional faz. Ela pega o número que está representado em uma base qualquer, transforma em um sistema binário e em seguida transforma em aritmética de ponto flutuante, (sistema binário).

Representação do sinal: 0 (positivo); 1 (negativo)

Ex.: $5{,}75_{(10)}= 101{,}11_{(2)} \Rightarrow 0{,}10111 \times 2^{11}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Exercício: a) $12{,}25_{(10)}= 1100{,}01_{2} = 0{,}110001 \times 2^{100}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

2.5. Erro Absoluto e Relativo

Erro Absoluto (EA):

EA = |Vv – Va|

Vv = Valor verdadeiro, valor exato ou valor original;

Va = Valor aproximado

Erro Relativo (ER):

ER = $\frac{Ea}{Vv}$

Erro Relativo (ER) em percentual:

ER = $\frac{Ea}{Vv}$*100

Exemplo: Área do Círculo

R = 100m; π1 = 3,14 Valor aproximado; π2 = 3,141592 Valor verdadeiro.

$A = \pi r^2$ (Área da circunferência)

$A_{1=}$ π1 x $R^2{}_{=}$ 3,14 x 100^2=> A_1= 31400m^2

A_2=π2 x R^2 => 3,141592 x 100^2 => A_2=31415,92m^2

EA = |A_2 – A_1| = | 31415,92 – 31400| = 15,92m^2

ER = $\frac{EA}{A_2}$ = 15,92 / 31415,92 => ER = 5,07 x $10^{-4}m^2$

Exercícios 4): Calcule o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) dos valores abaixo:

a) Sejam os valores x=0.000006 e x'=0.000004

EA = |0.000006 - 0.000004| => EA= 0.000002; => EA = 2 x 10^{-6};

ER = EA/x; EA = 0.000002 / 0.000006 => ER = 0.33333

b) Seja p=π e p'= 3,1416; (π = **3,141592653589793**)

EA = |3,141592653 - 3,1416| = EA = -0,000007347 => EA = -7,347 x 10^{-6}

ER = EA/x; ER = -0,000007347 / 3,141592653 => ER = -0,000002338 => ER = 2,338 x 10^{-6}

c) Seja v = 40320 e v'= 40319,958

EA = |40320 - 40319,958| = EA = 0.042; => EA = 4,2 x 10^{-2};

ER = EA/x; EA = 0.042 / 40320 => ER = 0,000001041 => ER = 1,041 x 10^{-6};

2.6. Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de erro)

(Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante)

Onde: RA = $\frac{1}{2}x10^{-t+1}$, porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando ERx=0; ERy=0;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição $ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA$

Subtração $ER(x-y) < ERx\left|\frac{x}{x-y}\right| - ERy\left|\frac{y}{x-y}\right| + RA$

Divisão $ER(x/y) < ERx - ERy + RA$

Multiplicação $ER(x*y) < ERx + ERy + RA$

Exercícios 5): Calcule as operações aritméticas abaixo. A máquina opera por arredondamento ABNT e está exatamente representada.

Dados: X = 0,937 x 10^4; Y = 0,1272 x 10^2; Z = 0,231 x 10^1; t = 4 dígitos.

a) |E(x+y+z)|=?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 10^4 + 0,001272 x 10^4 => S1 = 0,938272 * 10^4

S1 + Z => 0,938272 * 10^4 + 0,000231 x 10^4

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 10^4.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

$$ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA$$

$$ER(X+Y) < ERx\left|\frac{0{,}937*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + ERy\left|\frac{0{,}001272*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < 0*\left|\frac{0{,}937*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + 0*\left|\frac{0{,}001272*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < \frac{1}{2}*10^{-3}$$

$$ER(s1+z) < ERs1\left|\frac{s1}{s1+z}\right| + ERz\left|\frac{z}{s1+z}\right| + RA$$

$$ER(s1+z) < \frac{1}{2}*10^{-3}*\left|\frac{0{,}938272*10^4}{0{,}938272*10^4+0{,}000231*10^4}\right| + 0*\left|\frac{0{,}000231*10^4}{0{,}938272*10^4+0{,}000231*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-4+1}$$

$$ER(s1+z) < \frac{1}{2}*10^{-3}*\left|\frac{0{,}938272*10^4}{0{,}938503*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-3}$$

$$ER(s1+z) < 0{,}499876931*10^{-3} + \frac{1}{2}*10^{-3} => ER(s1+z) = 0{,}999876931*10^{-3}$$

$$\boldsymbol{ER(s1+z) = ER(x+y+z) < 0{,}99987*10^{-3} => 9{,}9987*10^{-4}}$$

Dados: X = 0,937 x 10^4; Y = 0,1272 x 10^2; Z = 0,231 x 10^1; t = 4 dígitos.

b) $\left|E\left(\frac{x*y}{z}\right)\right|$=?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 10^4 + 0,001272 x 10^4 => S1 = 0,938272

S1 + Z => 0,938272 + 0,000231 x 10^4

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 10^4.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

$$ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA$$

$ER(X+Y) < ERx\left|\frac{0{,}937*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + ERy\left|\frac{y0{,}001272*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-4+1}$

$ER(X+Y) < 0*\left|\frac{0{,}937*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + 0*\left|\frac{y0{,}001272*10^4}{0{,}937*10^4+0{,}001272*10^4}\right| + \frac{1}{2}*10^{-4+1}$

$ER(X+Y) < \frac{1}{2}*10^{-3}$

$ER\left(\frac{s1}{z}\right) < ERs1 - ERz + RA$

$ER\left(\frac{S1}{z}\right) < \frac{1}{2}*10^{-3} - 0 + \frac{1}{2}*10^{-3}$=> $ER\left(\frac{s1}{z}\right) = 1*10^{-3}$=> $\boldsymbol{ER\left(\frac{S1}{z}\right) = ER\left(\frac{x+y}{z}\right) < 10^{-3}}$

Respostas:

Exercícios 1)

a) 0,23589 x 10^3; b) 0,10101 x 2^{11} c) 0,875 x 10^{-3}

Exercícios 2)

a) 0,236x10^3(A); 0,235 x 10^3 (T)
b) 0,235x10^3(A); 0,235x10^3 (T)
c) 0,236x10^3(A); 0,235x10^3 (T)
d) 0,234x10^3(A); 0,234x10^3 (T)
e) 0,128x10^2(A); 0,127x10^2 (T)
f) 0,127x10^2(A); 0,127x10^2 (T)

Exercícios 3)

a) 0,236x10^3; 3 $\in$ [-5;5] => Nem Overflow / Nem Underflow
b) 0,345x10^{-7}; -7 $\notin$ [-5;5] => Underflow
c) 0,875x10^9; 9 $\notin$ [-5;5] => Overflow

Exercícios 4)

a) Erro absoluto é de $2x10^{-6}$ e o erro relativo é de 0,33333...
b) Erro absoluto é de $7,347x10^{-6}$ e o erro relativo é de $2,338x10^{-6}$
c) Erro absoluto é de $4,2x10^{-2}$ e o erro relativo é de $1,041x10^{-6}$

Exercícios 5)

a) $9,9987x10^{-4}$
b) 10^{-3}