LISTA 3 DE EXERCÍCIOS

Professor Heleno Cardoso

SISTEMAS LINEARES

1) Escalone e resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 & \text{multipl. (-3)} \\ 3x + 5y = 0 & \oplus \end{cases} \sim \begin{cases} \cancel{-3x} - 6y = 0 \\ \cancel{3x} + 5y = 0 \end{cases}$ $\quad \boxed{-y = 0}$

Substituindo na 1ª eq.

$x + 2y = 0$
$x + 2(0) = 0$
$x + 0 = 0$

$\boxed{x = 0}$

$S = \{(0,0)\}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \text{multipl. (-2)} \quad \text{multipl. (-3)} \\ 2x + y - z = 3 & \oplus \\ 3x - y - 2z = -4 & \oplus \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 & \text{divid. (-3)} \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$

P.S: A divisão é feita para simplificar a equação e facilitar os cálculos. Ela não altera em nada o resultado.

$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 & \text{multipl. (7)} \\ -7y - 5z = -31 & \oplus \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$ $\quad \boxed{z = 2}$

Substituindo na 1ª e na 2ª eq.

$\boxed{y = 3}$
$\boxed{x = 1}$

$S = \{(1,3,2)\}$

02. Resolva os sistemas abaixo por escalonamento:

a) $\begin{cases} x + y - 2z = -1 & .(-2) \quad .(-1) \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - 6z = 4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x - 2y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ \hline -y + 5z = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -x - y + 2z = 1 \\ x + 4y - 6z = 4 \\ \hline 3y - 4z = 5 \end{array} \qquad \begin{cases} -y + 5z = 2.(3) \\ 3y - 4z = 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -3y + 15z = 6 \\ 3y - 4z = 5 \\ \hline 11z = 11 \end{array}$$

$\boxed{z = 1}$

$3y - 4z = 5$
$3y - 4.1 = 5$
$3y = 9$
$\boxed{y = 3}$

$x + y - 2z = -1$
$x + 3 - 2 = -1$
$x + 1 = -1$
$\boxed{x = -2}$

$S = \{(-2;3;1)\}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 & .(2) \\ x + 3y = 2 \\ 3x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 2y - 2z = -5 \\ \hline 5x + 4y = -1 \end{array} \qquad \begin{cases} x + 3y = 2 & .(-5) \\ 5x + 4y = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -5x - 15y = -10 \\ 5x + 4y = -1 \\ \hline -11y = -11 \end{array}$$

$\boxed{y = 1}$

$x + 3y = 2$
$x + 3 = 2$
$\boxed{x = -1}$

$x + y + z = 2$
$z + 1 + (-1) = 2$
$\boxed{z = 2}$

$S = \{(-1,1,2)\}$

c) $\begin{cases} x-2y+3z=1 & .(-2)\ .(-3) \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x+4y-6z=-2 \\ 2x+y-z=0 \\ \hline 5y-7z=-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3x+6y-9z=-3 \\ 3x-y+2z=4 \\ \hline 5y-7z=1 \end{array} \qquad \begin{cases} 5y-7z=-2 & .(-1) \\ 5y-7z=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -5y+7z=2 \\ 5y-7z=1 \\ \hline 0=3 \end{array} \text{ (impossível)}$$

$S=\varnothing$

d) $\begin{cases} x+2y+3z=4 & .(-2)\ .(-5) \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+8y+5z=8 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x-4y-6z=-8 \\ 2x+3y+z=2 \\ \hline -y-5z=-6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5x-10y-15z=-20 \\ 5x+8y+5z=8 \\ \hline -2y-10z=-12 \end{array} \qquad \begin{cases} -y-5z=-6 & .(-2) \\ -2y-10z=-12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2y+10z=12 \\ -2y-10z=-12 \\ \hline 0=0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -y-5z=-6 \quad .(-1) \\ y+5z=6 \\ \boxed{y=6-5z} \end{array}$$

$x+2y+3z=4$

$x+2.(6-5z)+3z=4$

$x+12-10z+3z=4$

$x=10z-3z+4-12$

$\boxed{x=7z-8}$

$S=\{(7z-8;\ 6-5z;\ z)/z\in$

$$\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+y+4z=15 \\ 3y+2z=9 \end{cases}$$

O conjunto solução do sistema proposto é: **x = 2, y = 1 e z = 3.**

$$\begin{cases} 8x+4y+5z=-23 \\ 4x+8y+1z=-7 \\ -2x-10y+2z=0 \end{cases}$$

A solução do sistema é, portanto, **(-4,1,1)**.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Calcule $P_1(0,2)$ dados os pontos abaixo (retirados da equação $f(x)=e^{2x}$):

1) Calcule P1(0.07) dados os pontos abaixo (retirados da equação f(x)= x + 1, determinar o polinômio interpolador.

i	*0*	*1*
x_i	*0,1*	*1,52*
y_i	*1,1*	*2,52*

$f(x) \approx P_1(x) = a_0+a_1.x$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.(x - x_0)$$

2) Considerando os dados da tabela, determinar o polinômio interpolador, usando:

i	x	Y
0	-1	1
1	0	1
2	1	0

Calcular P(0.5)

a) **Método de Lagrange**

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

b) **Método de Newton**

Primeiro devemos calcular os operadores da diferença dividida.

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

c) **Método de Gregory Newton**

Devemos calcular os operadores de diferenças finitas, h e u_x

$$h = x_1 - x_0$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h}$$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}.(u_x - 0) + \frac{\Delta y_0}{2!}.(u_x - 0).(u_x - 1)$$

Respostas:

a) Lagrange

$$L_2(x) = 1.\frac{x-0}{-1-0}.\frac{x-1}{-1-1} + 1.\frac{x-(-1)}{0-(-1)}.\frac{x-1}{0-1} + 0.\frac{x-(-1)}{1-(-1)}.\frac{x-0}{1-0}$$

$$L_2(x) = \frac{x}{-1}.\frac{x-1}{-2} + \frac{x+1}{1}.\frac{x-1}{-1} + 0$$

$$L_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - x^2 + 1$$

$$L_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

b) Newton

i	x	Y	Δy	Δ²y
0	-1	1	0	-1/2
1	0	1	-1	
2	1	0		

$$P_2(x) = 1 + 0.(x-(-1)) + \left(\frac{-1}{2}\right).(x-(-1)).(x-0)$$

$$P_2(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2}.(x+1).x$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta^i y_0.\prod_{j=0}^{i-1}\left(x-x_j\right)\right]$$

c) Gregory Newton

$$h = x_1 - x_0 = 0-(-1) = 1$$

$$u_x = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-(-1)}{1} = x+1$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{0}{1}.(x+1) + \frac{-1}{2}.(x+1).(x+1-1)$$

$$P_2(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2}.(x+1).(x)$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

Para calcular, pegamos qualquer uma das equações encontradas (são iguais!) e substituímos o valor 0,5 no lugar dos x:

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

$$P_2(0{,}5) = -\frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{0{,}5}{2} + 1$$

$$P_2(0{,}5) = -\frac{0{,}25}{2} - 0{,}25 + 1$$

$$P_2(0{,}5) = -0{,}125 - 0{,}25 + 1$$

$$P_2(0{,}5) = 0{,}625$$