

Cálculo Numérico – Versão Atualizada

Revisão / Exercícios
(Professor Heleno Cardoso)

2. Teoria dos Erros

- Aritmética de Ponto Flutuante

2.1. Representação Numérica nas Máquinas Computacionais

Número = $(0,d_1d_2\dots d_t) \times B^e$ dt = Número de dígitos
Mantissa B = Base

Aonde:

$d_1 \neq 0$;

$\exp \in [m, M]$; m = limitante inferior do expoente; M = limitante superior do expoente

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

Exercícios 1): Represente os números abaixo em aritmética de ponto flutuante. Considere $t = 3$ dígitos no sistema computacional.

- a) $235,89_{(10)} =$
- b) $101,01_{(2)} =$
- c) $0,000875_{(10)} =$

2.2. Arredondamento e Truncamento de Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos de Arredondamento: Matemático; Estatístico e ABNT.

Critério Matemático:

Quando a casa decimal seguinte àquela que vamos arredondar for 0, 1, 2, 3 ou 4, esta casa decimal permanece como está. Se a casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9, somamos 1 à casa decimal a ser arredondada.

- Ex.:
- a) $0,78645_{(10)} = 0,786$;
 - b) $0,4545_{(10)} = 0,455$
 - c) $0,4575_{(10)} = 0,458$
 - d) $0,4548_{(10)} = 0,455$

Critério Estatístico:

Esse procedimento é denominado arredondamento e, conforme resolução 886/66 da fundação IBGE deve seguir os seguintes critérios:

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, não se altera o último algarismo a permanecer.

Exemplos: Se temos 25,62489 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 4, ficando 25,62

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se em uma unidade o último algarismo a permanecer.

Exemplo: Se temos 75,24623 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 6 porém, aumentamos uma unidade ao 4 que é o último algarismo a permanecer. Ficando 75,25.

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for o 5, temos que observar o seguinte: a) se após o 5 aparecer, em qualquer casa decimal, pelo menos um algarismo diferente de zero, aumenta-se uma unidade ao último algarismo a permanecer.

Exemplos: 54,265003 fica 54,27

12,4851 fica 12,49

b) se após o 5 não aparecer mais nenhum algarismo ou se aparecer apenas zero, somente será acrescentado uma unidade ao último algarismo a permanecer se ele for ímpar.

Exemplos: 18,145 fica 18,14

28,4650000 fica 28,46

41,375 fica 41,38

0,775000 fica 0,78

Critério ABNT:

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for > 5 , então (soma +1);

Se for < 5 , então (mantém o dígito)

Se for $=5$, então (Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

Exercícios 2): Calcule o arredondamento e truncamento da máquina computacional. Considere **t = 3 dígitos**, numa **base B = 10**, em uma máquina que opera com **Padrão ABNT** de arredondamento.

- a) $235,89_{(10)} =$
- b) $235,39_{(10)} =$
- c) $235,59_{(10)} =$
- d) $234,59_{(10)} =$
- e) $12,76_{(10)} =$
- f) $12,74_{(10)} =$

2.3. Overflow e Underflow - SPF (Sistema de Ponto Flutuante)

t = Número de dígitos
 SPF(B, t, m, M) $\exp \in [m; M]$, máquina opera por arredondamento ABNT

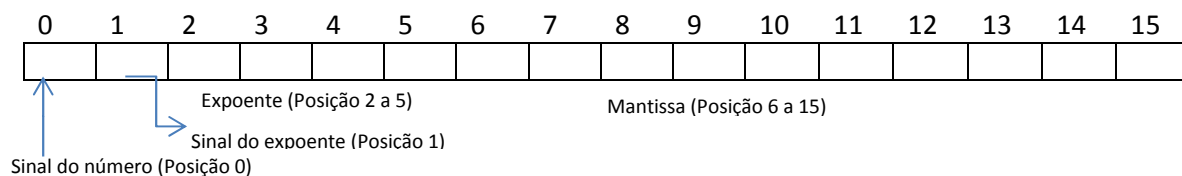
B = Base

Exercícios 3): Calcule se no SPF ocorreu: Overflow, Underflow ou Nem Overflow / Nem Underflow. Considere B = 10, t = 3, $\exp \in [-5; 5]$

- a) $235,89_{(10)} =$
- b) $0,345 \times 10^{-7} =$
- c) $0,875 \times 10^9 =$

2.4. Representação de Palavra de 16bits

Nota: Existe também representação de palavra: 32bits, 64bits, 128bits.



Nota: O que a máquina computacional faz. Ela pega o número que está representado em uma base qualquer, transforma em um sistema binário e em seguida transforma em aritmética de ponto flutuante, (sistema binário).

Representação do sinal: 0 (positivo); 1 (negativo)

Ex.: $5,75_{(10)} = 101,11_{(2)} \Rightarrow 0,10111 \times 2^{11}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Exercício: a) $12,25_{(10)} = 1100,01_2 = 0,110001 \times 2^{100}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

2.5. Erro Absoluto e Relativo

Erro Absoluto (EA):

$$EA = |X - X_a|$$

X = Valor exato ou valor original;

X_a = Valor aproximado

Erro Relativo (ER):

$$ER = \frac{EA}{|X_a|}$$

Erro Relativo (ER) em percentual:

$$ER = \frac{EA}{|X_a|} * 100$$

Exemplo: Área do Círculo

R = 100m; π₁ = 3,14 Valor aproximado; π₂ = 3,141592 Valor original.

$A = \pi r^2$ (Área da circunferência)

$$A_1 = \pi_1 \times R^2 = 3,14 \times 100^2 \Rightarrow A_1 = 31400m^2$$

$$A_2 = \pi_2 \times R^2 \Rightarrow 3,141592 \times 100^2 \Rightarrow A_2 = 31415,92m^2$$

$$EA = |A_2 - A_1| = |31415,92 - 31400| = 15,92m^2$$

$$ER = \frac{EA}{A_1} = 15,92 / 31400 \Rightarrow ER = 5,07 \times 10^{-4}m^2$$

Exercícios 4): Calcule o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) dos valores abaixo:

a) Sejam os valores X=0.000006 e X'=0.000004

$$EA = |0.000006 - 0.000004| \Rightarrow EA = 0.000002; \Rightarrow EA = 2 \times 10^{-6};$$

$$ER = EA/X'; EA = 0.000002 / 0.000004 \Rightarrow ER = 0.5 \times 10^{-6}$$

b) Seja P=π e P'= 3,1416; (π = **3,141592653589793**)

$$EA = |3,141592653589793 - 3,1416| = EA = 0,000007347 \Rightarrow EA = 7,347 \times 10^{-6}$$

$$ER = EA/P'; ER = 0,000007347 / 3,1416 \Rightarrow ER = 0,000002338 \Rightarrow ER = 2,338 \times 10^{-6}$$

c) Seja V = 40320 e V' = 40319,958

$$EA = |40320 - 40319,958| = EA = 0.042; \Rightarrow EA = 4,2 \times 10^{-2};$$

$$ER = EA/V'; EA = 0.042 / 40319,958 \Rightarrow ER = 0,000001041 \Rightarrow ER = 1,041 \times 10^{-6};$$

2.6. Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de erro)

(Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante)

Onde: $RA = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$, porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando $ERx=0$; $ERY=0$;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição
$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x+y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x+y} \right| + RA$$

Subtração
$$ER(x - y) < ERx \left| \frac{x}{x-y} \right| - ERY \left| \frac{y}{x-y} \right| + RA$$

Divisão
$$ER(x/y) < ERx - ERY + RA$$

Multiplicação
$$ER(x * y) < ERx + ERY + RA$$

Exercícios 5): Calcule as operações aritméticas abaixo. A máquina opera por arredondamento ABNT e está exatamente representada.

Dados: $X = 0,937 \times 10^4$; $Y = 0,1272 \times 10^2$; $Z = 0,231 \times 10^1$; $t = 4$ dígitos.

a) $|E(x+y+z)|=?$

$$S1 = (X + Y) = 0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4 \Rightarrow S1 = 0,938272 \times 10^4$$

$$S1 + Z \Rightarrow 0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4$$

$$S2 = S1 + Z = 0,938503 \times 10^4.$$

$$ER(X+Y) = ERX + ERY + RA$$

$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x+y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x+y} \right| + RA$$

$$ER(X + Y) < ERx \left| \frac{0,937 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + ERY \left| \frac{0,001272 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < 0 \times \left| \frac{0,937 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + 0 \times \left| \frac{0,001272 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$ER(s1 + z) < ERs1 \left| \frac{s1}{s1 + z} \right| + ERz \left| \frac{z}{s1 + z} \right| + RA$$

$$ER(s1 + z) < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times \left| \frac{0,938272 \times 10^4}{0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4} \right| + 0 \times \left| \frac{0,000231 \times 10^4}{0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(s1 + z) < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times \left| \frac{0,938272 \times 10^4}{0,938503 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$ER(s1 + z) < 0,499876931 \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow ER(s1 + z) = 0,999876931 \times 10^{-3}$$

$$ER(s1 + z) = ER(x + y + z) < 0,99987 \times 10^{-3} \Rightarrow 9,9987 \times 10^{-4}$$

Dados: $X = 0,937 \times 10^4$; $Y = 0,1272 \times 10^2$; $Z = 0,231 \times 10^1$; $t = 4$ dígitos.

b) $\left| E\left(\frac{x \cdot y}{z}\right) \right| = ?$

$$S1 = (X + Y) = 0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4 \Rightarrow S1 = 0,938272$$

$$S1 + Z \Rightarrow 0,938272 + 0,000231 \times 10^4$$

$$S2 = S1 + Z = 0,938503 \times 10^4.$$

$$ER(X+Y) = ERX + ERY + RA$$

$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x + y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x + y} \right| + RA$$

$$ER(X + Y) < ERx \left| \frac{0,937 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + ERY \left| \frac{y \cdot 0,001272 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < 0 \cdot \left| \frac{0,937 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + 0 \cdot \left| \frac{y \cdot 0,001272 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$ER\left(\frac{S1}{Z}\right) < ERs1 - ERz + RA$$

$$ER\left(\frac{S1}{Z}\right) < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} - 0 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \Rightarrow ER\left(\frac{S1}{Z}\right) = 1 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{ER\left(\frac{S1}{Z}\right) = ER\left(\frac{x+y}{z}\right) < 10^{-3}}$$

Respostas:

Exercícios 1)

a) $0,23589 \times 10^3$; b) $0,10101 \times 2^{11}$ c) $0,875 \times 10^{-3}$

Exercícios 2)

- a) $0,236 \times 10^3$ (A); $0,235 \times 10^3$ (T)
- b) $0,235 \times 10^3$ (A); $0,235 \times 10^3$ (T)
- c) $0,236 \times 10^3$ (A); $0,235 \times 10^3$ (T)
- d) $0,234 \times 10^3$ (A); $0,234 \times 10^3$ (T)
- e) $0,128 \times 10^2$ (A); $0,127 \times 10^2$ (T)
- f) $0,127 \times 10^2$ (A); $0,127 \times 10^2$ (T)

Exercícios 3)

- a) $0,236 \times 10^3$; $3 \in [-5;5] \Rightarrow$ Nem Overflow / Nem Underflow
- b) $0,345 \times 10^{-7}$; $-7 \notin [-5;5] \Rightarrow$ Underflow
- c) $0,875 \times 10^9$; $9 \notin [-5;5] \Rightarrow$ Overflow

Exercícios 4)

- a) Erro absoluto é de 2×10^{-6} e o erro relativo é de $0,5 \times 10^{-6}$
- b) Erro absoluto é de $7,347 \times 10^{-6}$ e o erro relativo é de $2,338 \times 10^{-6}$
- c) Erro absoluto é de $4,2 \times 10^{-2}$ e o erro relativo é de $1,041 \times 10^{-6}$

Exercícios 5)

- a) $9,9987 \times 10^{-4}$
- b) 10^{-3}