

# Cálculo Numérico – Versão Atualizada

Revisão / Exercícios

(Professor Heleno Cardoso)

## 2. Teoria dos Erros

### - Aritmética de Ponto Flutuante

#### 2.1. Representação Numérica nas Máquinas Computacionais

$$\text{Número} = (0, \underset{\text{Mantissa}}{d_1 d_2 \dots d_t}) \times B^{\underset{\text{B = Base}}{e}} \quad \begin{array}{l} \text{e = Expoente} \\ \text{dt = Número de dígitos} \end{array}$$

Aonde:

$$d_1 \neq 0;$$

$$\text{exp} \in [m, M]; m = \text{limitante inferior do expoente}; M = \text{limitante superior do expoente}$$

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

**Exercícios 1):** Represente os números abaixo em aritmética de ponto flutuante. Considere  $t = 3$  dígitos no sistema computacional.

a)  $235,89_{(10)} =$

b)  $101,01_{(2)} =$

c)  $0,000875_{(10)} =$

#### 2.2. Arredondamento e Truncamento de Aritmética de Ponto Flutuante

**Tipos de Arredondamento:** Matemático; Estatístico e ABNT.

### Critério Matemático:

Quando a casa decimal seguinte àquela que vamos arredondar for 0, 1, 2, 3 ou 4, esta casa decimal permanece como está. Se a casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9, somamos 1 à casa decimal a ser arredondada.

Ex.: a)  $0,78645_{(10)} = 0,786;$

b)  $0,4545_{(10)} = 0,455$

c)  $0,4575_{(10)} = 0,458$

d)  $0,4548_{(10)} = 0,455$

## **Critério Estatístico:**

Esse procedimento é denominado arredondamento e, conforme resolução 886/66 da fundação IBGE deve seguir os seguintes critérios:

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, não se altera o último algarismo a permanecer.

Exemplos: Se temos 25,62489 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 4, ficando 25,62

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se em uma unidade o último algarismo a permanecer.

Exemplo: Se temos 75,24623 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 6 porém, aumentamos uma unidade ao 4 que é o último algarismo a permanecer. Ficando 75,25.

- Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for o 5, temos que observar o seguinte: a) se após o 5 aparecer, em qualquer casa decimal, pelo menos um algarismo diferente de zero, aumenta-se uma unidade ao último algarismo a permanecer.

Exemplos: 54,265003 fica 54,27

12,4851 fica 12,49

b) se após o 5 não aparecer mais nenhum algarismo ou se aparecer apenas zero, somente será acrescentado uma unidade ao último algarismo a permanecer se ele for ímpar.

Exemplos: 18,145 fica 18,14

28,4650000 fica 28,46

41,375 fica 41,38

0,775000 fica 0,78

## **Critério ABNT:**

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for  $> 5$ , então (soma +1);

Se for  $< 5$ , então (mantém o dígito)

Se for  $=5$ , então ( Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

**Exercícios 2):** Calcule o arredondamento e truncamento da máquina computacional. Considere **t = 3 dígitos**, numa **base B = 10**, em uma máquina que opera com **Padrão ABNT** de arredondamento.

- a)  $235,89_{(10)} =$
- b)  $235,39_{(10)} =$
- c)  $235,59_{(10)} =$
- d)  $234,59_{(10)} =$
- e)  $12,76_{(10)} =$
- f)  $12,74_{(10)} =$

### 2.3. Overflow e Underflow - SPF (Sistema de Ponto Flutuante)

t = Número de dígitos  
 SPF(B, t, m, M)  $\exp \in [m; M]$ , máquina opera por arredondamento ABNT

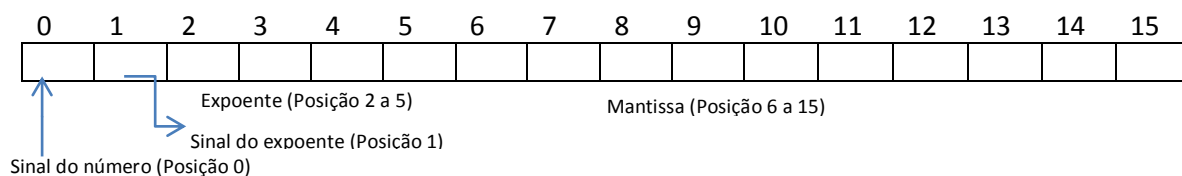
B = Base

**Exercícios 3):** Calcule se no SPF ocorreu: Overflow, Underflow ou Nem Overflow / Nem Underflow. Considere B = 10, t = 3,  $\exp \in [-5; 5]$

- a)  $235,89_{(10)} =$
- b)  $0,345 \times 10^{-7} =$
- c)  $0,875 \times 10^9 =$

### 2.4. Representação de Palavra de 16bits

**Nota:** Existe também representação de palavra: 32bits, 64bits, 128bits.



**Nota:** O que a máquina computacional faz. Ela pega o número que está representado em uma base qualquer, transforma em um sistema binário e em seguida transforma em aritmética de ponto flutuante, (sistema binário).

Representação do sinal: 0 (positivo); 1 (negativo)

Ex.:  $5,75_{(10)} = 101,11_{(2)} = 0,10111 \times 2^{11}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

**Exercício:** a)  $12,25_{(10)} = 1100,01_2 = 0,110001 \times 2^{100}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

## 2.5. Erro Absoluto e Relativo

### Erro Absoluto (EA):

$$EA = |X - X_a|$$

X = Valor exato ou valor original;

X<sub>a</sub> = Valor aproximado

### Erro Relativo (ER):

$$ER = \frac{EA}{|X_a|}$$

### Erro Relativo (ER) em percentual:

$$ER = \frac{EA}{|X_a|} * 100$$

Exemplo: Área do Círculo

R = 100m;      π<sub>1</sub> = 3,14 Valor aproximado;      π<sub>2</sub> = 3,141592 Valor original.

A = πr<sup>2</sup> (Área da circunferência)

$$A_1 = \pi_1 \times R^2 = 3,14 \times 100^2 \Rightarrow A_1 = 31400m^2$$

$$A_2 = \pi_2 \times R^2 \Rightarrow 3,141592 \times 100^2 \Rightarrow A_2 = 31415,92m^2$$

$$EA = |A_2 - A_1| = |31415,92 - 31400| = 15,92m^2$$

$$ER = \frac{EA}{A_1} = 15,92 / 31400 \Rightarrow ER = 5,07 \times 10^{-4}m^2$$

**Exercícios 4):** Calcule o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) dos valores abaixo:

a) Sejam os valores X=0.000006 e X'=0.000004

$$EA = |0.000006 - 0.000004| \Rightarrow EA = 0.000002; \Rightarrow EA = 2 \times 10^{-6};$$

$$ER = EA/X'; EA = 0.000002 / 0.000004 \Rightarrow ER = 0.5 \times 10^{-6}$$

b) Seja P=π e P'= 3,1416; (π = 3,141592653589793)

$$EA = |3,141592653589793 - 3,1416| = EA = 0,000007347 \Rightarrow EA = 7,347 \times 10^{-6}$$

$$ER = EA/P'; ER = 0,000007347 / 3,1416 \Rightarrow ER = 0,000002338 \Rightarrow ER = 2,338 \times 10^{-6}$$

c) Seja V = 40320 e V' = 40319,958

$$EA = |40320 - 40319,958| = EA = 0.042; \Rightarrow EA = 4,2 \times 10^{-2};$$

$$ER = EA/V'; EA = 0.042 / 40319,958 \Rightarrow ER = 0,000001041 \Rightarrow ER = 1,041 \times 10^{-6};$$

## 2.6. Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de erro)

(Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante)

Onde:  $RA = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$ , porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando  $ERx=0$ ;  $ERY=0$ ;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição 
$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x+y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x+y} \right| + RA$$

Subtração 
$$ER(x - y) < ERx \left| \frac{x}{x-y} \right| - ERY \left| \frac{y}{x-y} \right| + RA$$

Divisão 
$$ER(x/y) < ERx - ERY + RA$$

Multiplicação 
$$ER(x * y) < ERx + ERY + RA$$

**Exercícios 5):** Calcule as operações aritméticas abaixo. A máquina opera por arredondamento ABNT e está exatamente representada.

Dados:  $X = 0,937 \times 10^4$ ;  $Y = 0,1272 \times 10^2$ ;  $Z = 0,231 \times 10^1$ ;  $t = 4$  dígitos.

a)  $|E(x+y+z)|=?$

$$S1 = (X + Y) = 0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4 \Rightarrow S1 = 0,938272 \times 10^4$$

$$S1 + Z \Rightarrow 0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4$$

$$S2 = S1 + Z = 0,938503 \times 10^4.$$

$$ER(X+Y) = ERX + ERY + RA$$

$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x+y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x+y} \right| + RA$$

$$ER(X + Y) < ERx \left| \frac{0,937 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + ERY \left| \frac{0,001272 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < 0 \times \left| \frac{0,937 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + 0 \times \left| \frac{0,001272 \times 10^4}{0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$ER(s1 + z) < ERs1 \left| \frac{s1}{s1 + z} \right| + ERz \left| \frac{z}{s1 + z} \right| + RA$$

$$ER(s1 + z) < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times \left| \frac{0,938272 \times 10^4}{0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4} \right| + 0 \times \left| \frac{0,000231 \times 10^4}{0,938272 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-4+1}$$

$$ER(s1 + z) < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times \left| \frac{0,938272 \times 10^4}{0,938503 \times 10^4} \right| + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$ER(s1 + z) < 0,4999 \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow ER(s1 + z) = 0,9999 \times 10^{-3} \quad \mathbf{ER(s1 + z) =}$$

$$\mathbf{ER(x + y + z) < 0,9999 \times 10^{-3} \Rightarrow 9,999 \times 10^{-4}}$$

Dados:  $X = 0,937 \times 10^4$ ;  $Y = 0,1272 \times 10^2$ ;  $Z = 0,231 \times 10^1$ ;  $t = 4$  dígitos.

$$b) \left| E \left( \frac{x \cdot y}{z} \right) \right| = ?$$

$$S1 = (X + Y) = 0,937 \times 10^4 + 0,001272 \times 10^4 \Rightarrow S1 = 0,938272$$

$$S1 + Z \Rightarrow 0,938272 + 0,000231 \times 10^4$$

$$S2 = S1 + Z = 0,938503 \times 10^4.$$

$$ER(X+Y) = ERX + ERY + RA$$

$$ER(x + y) < ERx \left| \frac{x}{x + y} \right| + ERY \left| \frac{y}{x + y} \right| + RA$$

$$ER(X + Y) < ERx \left| \frac{0,937 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + ERY \left| \frac{0,001272 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < 0 \cdot \left| \frac{0,937 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + 0 \cdot \left| \frac{0,001272 \cdot 10^4}{0,937 \cdot 10^4 + 0,001272 \cdot 10^4} \right| + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4+1}$$

$$ER(X + Y) < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$ER \left( \frac{s1}{z} \right) < ERs1 - ERz + RA$$

$$ER \left( \frac{s1}{z} \right) < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} - 0 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \Rightarrow ER \left( \frac{s1}{z} \right) = 1 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{ER \left( \frac{s1}{z} \right) = ER \left( \frac{x+y}{z} \right) < 10^{-3}}$$

## Respostas:

### Exercícios 1)

$$a) 0,23589 \times 10^3; \quad b) 0,10101 \times 2^{11} \quad c) 0,875 \times 10^{-3}$$

### Exercícios 2)

- a)  $0,236 \times 10^3$ (A);  $0,235 \times 10^3$  (T)
- b)  $0,235 \times 10^3$ (A);  $0,235 \times 10^3$  (T)
- c)  $0,236 \times 10^3$ (A);  $0,235 \times 10^3$  (T)
- d)  $0,234 \times 10^3$ (A);  $0,234 \times 10^3$  (T)
- e)  $0,128 \times 10^2$ (A);  $0,127 \times 10^2$  (T)
- f)  $0,127 \times 10^2$ (A);  $0,127 \times 10^2$  (T)

### Exercícios 3)

- a)  $0,236 \times 10^3$ ;  $3 \in [-5;5] \Rightarrow$  Nem Overflow / Nem Underflow
- b)  $0,345 \times 10^{-7}$ ;  $-7 \notin [-5;5] \Rightarrow$  Underflow
- c)  $0,875 \times 10^9$ ;  $9 \notin [-5;5] \Rightarrow$  Overflow

#### Exercícios 4)

- a) Erro absoluto é de  $2 \times 10^{-6}$  e o erro relativo é de  $0,5 \times 10^{-6}$
- b) Erro absoluto é de  $7,347 \times 10^{-6}$  e o erro relativo é de  $2,338 \times 10^{-6}$
- c) Erro absoluto é de  $4,2 \times 10^{-2}$  e o erro relativo é de  $1,041 \times 10^{-6}$

#### Exercícios 5)

- a)  $9,9987 \times 10^{-4}$
- b)  $10^{-3}$