Sistemas de Numeração

Este material é uma adaptação das notas de aula dos professores Edino Fernandes, Juliano Maia, Ricardo Martins e Luciana Guedes

Sistemas de Numeração

- Prover símbolos e convenções para representar quantidades, de forma a registrar a informação quantitativa e poder processá-la.

- A representação de quantidades se faz com os números.

Sistemas de Numeração Não Posicionais

- Uma das primeiras tentativas de sistema de numeração bem sucedida é o sistema romano.

- É capaz de representar uma grande variedade de números.

- Há um conjunto finito de símbolos e uma lei de formação.

- Eram usados símbolos (letras) que representavam as quantidades
  - I (valendo 1),
  - V (valendo 5),
  - X (valendo 10),
  - C (valendo 100)

Sistemas de Numeração Não Posicionais

- Letras que representavam quantidades menores e precediam as que representavam quantidades maiores eram somadas.

- Se o inverso ocorresse, o menor valor era subtraído do maior.

- Assim, a quantidade 128 era representada por:
  - CXXVIII =100+ 10 +10+ 5 +1 +1 + 1=128.

- Por outro lado, a quantidade 94 era representada por
  - XCIV = (-10 + 100) + (-1 + 5) = 94.

Sistemas de Numeração Não Posicionais

- Nesses sistemas, os símbolos tinham um valor intrínseco, independente da posição que ocupavam na representação

- Problemas:
  - Não consegue representar qualquer quantidade o zero por exemplo.
  - Dificuldade de realizar operações com essa representação.
  - Experimente multiplicar CXXVIII por XCIV!

- Posteriormente foram criados sistemas em que a posição dos algarismos no número passou a alterar seu valor (sistemas de numeração posicionais).

Sistemas de Numeração Posicionais

- O valor representado pelo algarismo depende da posição em que ele aparece na representação.

- O primeiro sistema desse tipo foi inventado pelos chineses.
  - Não existia representação para o zero

- O sistema mais bem sucedido foi o sistema decimal.
  - Ele usa dez símbolos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} e uma regra de formação capaz de representar qualquer quantidade finita.

Sistemas de Numeração Posicionais

- Foi originalmente inventado pelos matemáticos hindus aproximadamente em 400 D.C.
  - Seus matemáticos criaram uma representação para os números em que existiam diferentes símbolos para os as unidades, incluindo um símbolo para representar o zero.
  - Por volta do ano de 650, os hindus inventaram um método de produzir papel.
  - Isso permitiu que se processasse a aritmética decimal e se fizesse contas - no papel!

Sistemas de Numeração Posicionais

- Os árabes começaram a usar o sistema em +/- 800 D.C. , quando ficou conhecido como o Sistema Numérico Arábico.

- Por volta de 830, um matemático persa (Al-khwarismi, que inspirou o nome algarismo) escreveu um livro (Al-gebr we'l Mukabala, ou álgebra) em que apresentava os algarismos hindus.

- O livro foi levado para a Europa e traduzido, e foi a base da matemática do Renascimento onde adquiriu o título de "sistema numérico decimal"

Base de um Sistema de Numeração

- É a quantidade de algarismos disponíveis para representação em um sistema.

- A base 10 é hoje a mais usualmente empregada, embora não seja a única.
  - No comércio pedimos uma dúzia de rosas ou uma grosa de parafusos (base 12)
  - Marcamos o tempo em minutos e segundos (base 60).

- Os computadores utilizam a base 2 (sistema binário) e os programadores, por facilidade, usam bases que sejam potência de 2, como 2^4 (base 16 ou sistema hexadecimal) ou ainda 2^3 (base 8 ou sistema octal).

Sistema Decimal

- A cada dígito (símbolo) do número decimal é atribuído um certo peso em função da sua posição no número.
  - (Forma Posicional) 3475=3000 + 400 + 70 + 5
  - (Forma Polinomial) $=3x\ 10^3 + 4x\ 10^2 + 7x\ 10^1 + 5x\ 10^0$

- 10 é a base do sistema, e 10^3 , 10^2 ,10^1 e 10^0 representam os pesos.

- Outro exemplo:
  - 123,456 = 100 + 20 + 3 + 0,4 + 0,005 + 0,0006
  - $=1x\ 10^2 + 2x\ 10^1 + 3x\ 10^0 + 4x\ 10^{-1} + 5x\ 10^{-2} + 6x\ 10^{-3}$

Sistema Decimal

- O princípio da atribuição de pesos pode ser estendido a qualquer sistema numérico.

- Na base 10, dispõe-se de 10 algarismos para a representação.
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

- Na base 2, temos apenas 2 algarismos:
  - 0 e 1.

- Na base 16, temos:
  - os 10 algarismos da base aos quais estamos acostumados,
  - mais os símbolos A, B, C, D, E e F, representando respectivamente 10, 11, 12, 13, 14 e 15 unidades.

Base diferente de 10

- Generalizando, temos que uma base b qualquer disporá de b algarismos, variando entre 0 e (b-1).

- Ou seja, podemos representar uma quantidade N qualquer, numa dada base b, com um número tal como segue:

  $Nb = an.b^n + ... + a2.b^2 + a1.b^1 + a0.b^0$

- O maior número que podemos representar, com n algarismos, na base b, será o número composto n vezes pelo maior algarismo disponível naquela base (ou seja, b -1).
  - Por exemplo, o maior número que pode ser representado na base 10 usando 3 algarismos será 999 (ou seja, 10^3 -1 = 999).

Base diferente de 10

- A regra de formação de nosso sistema de numeração não depende do número de símbolos usados.
  - podemos pensar em sistemas de numeração com qualquer quantidade de símbolos ou qualquer base.

- Algumas bases particularmente importantes para nós são as bases 2, 8 e 16 ditas binária, octal e hexadecimal respectivamente.

Sistema Binário

- Criado por um matemático alemão do século dezessete, Golttfried Wilhelm von Leibniz, o sistema binário de numeração tem por base o número 2, usando apenas os símbolos 0 e 1

- Os computadores modernos utilizam apenas o sistema binário,
  - Todas as informações armazenadas ou processadas no computador usam apenas DUAS grandezas, representadas pelos algarismos 0 e 1.
  - maior facilidade de representação interna no computador, que é obtida através de dois diferentes níveis de tensão.
  - Havendo apenas dois algarismos, portanto dígitos binários, o elemento mínimo de informação nos computadores foi apelidado de bit (uma contração do inglês binary digit).

Sistema Binário

- Adequada para utilização pelos computadores, mas pode apresenta muitos bits, ficando longo e passível de erros quando manipulado por seres humanos
- Para facilitar a visualização e manipulação por programadores usualmente são adotadas as representações octal (base 8) e principalmente hexadecimal (base 16).
- <u>O computador opera apenas na base 2</u> , as representações octal e hexadecimal não são usadas no computador,
- Exemplo:
  - 1001_2

Sistema Octal e Sistema Hexadecimal

- No sistema octal (base 8), cada três bits são representados por apenas um algarismo octal (de 0 a 7).

- No sistema hexadecimal (base 16), cada quatro bits são representados por apenas um algarismo hexadecimal (de 0 a F). Usam-se os dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 e as letras A, B, C, D, E e F, que correspondem aos algarismos decimais 10,11,12,13,14 e 15, respectivamente.

- Nota: a base 16 ou sistema hexadecimal pode ser indicada também por um "H" ou "h" após o número;
  - por exemplo: FFH significa que o número FF (ou 255 em decimal) está em hexadecimal.

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Conversões de Bases

- Representar um número dado em um sistema de numeração posicional em um outro sistema de numeração posicional com uma base diferente.

- Convenciona-se indicar em subescrito o valor da base.
  - Assim, o número dezessete em diversas bases seria:
    17_{10}, 17_8 ou 17_{16} etc.

- Para transformar um número decimal inteiro em um número em uma base b qualquer:
  - fazer divisões inteiras sucessivas do número por b
  - reunir os restos em ordem inversa.

Conversões de Bases

- Da base 10 para uma base b
- Qual é a representação de 13_{10} na base 2?
  - Executando divisões sucessivas até encontrar quociente 0, obtemos:

$$13 \div 2 = 6 \text{ , resto } 1$$
$$6 \div 2 = 3 \text{ , resto } 0$$
$$3 \div 2 = 1 \text{ , resto } 1$$
$$1 \div 2 = 0 \text{ , resto } 1$$

- Tomando os restos das divisões em ordem contrária a que eles aparecem temos que:
  - $13_{10} = 1101_2$

Conversões de Bases

- De uma base b para a base 10, basta expandir o polinômio que é representado por este número.

- Se temos o número $N_b = \alpha\beta\gamma_b$, onde α, β e γ são algarismos da base b, basta expandir e calcular o polinômio para determinar N_{10}.

  $N10 = \alpha \times b^2 + \beta \times b^1 + \gamma \times b^0$

- Exemplo, qual o valor de 1101_2 na base 10?

  $N10 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

  $N10 = 8+4+0+1$ $N10 = 13$

Conversões de Bases

- De uma base “a” para uma base “b”, basta passar da base “a” para a base 10 e depois passar da base 10 para a base “b”.

- Por exemplo, 31_4 correspondo ao que na base 6?
  - Primeiro, passamos 314 para a base 10:

    $N_{10} = 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 = 12 + 1 = 13_{10}$
  - Depois, passamos o 1310 para a base 6:

    $13 \div 6 = 2$ r=1

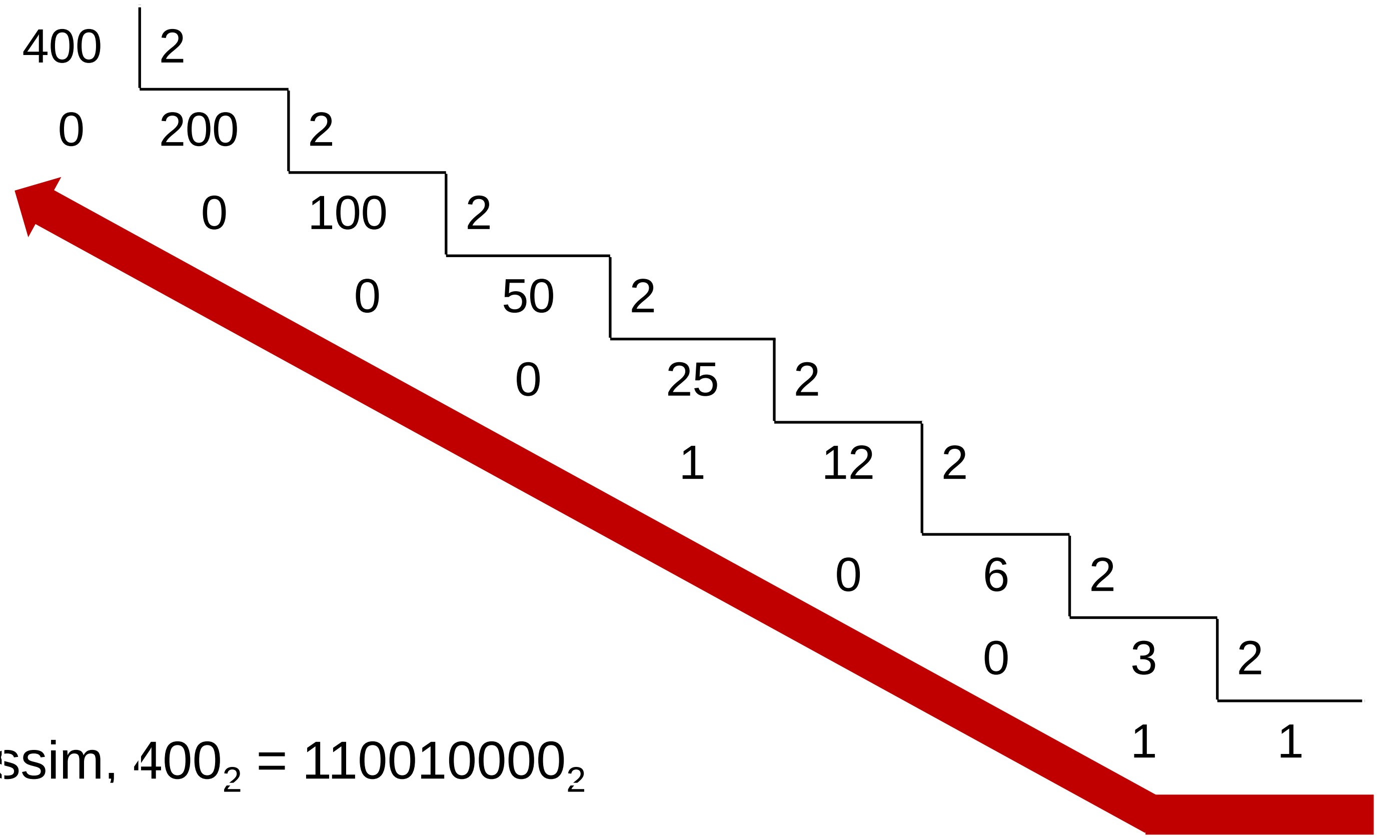
    $2 \div 6 = 0$ r=2

- Portanto, concluímos que 31_4 é igual a 21_6.

Conversões de Bases

- De base 10 para base 2.

  Converter o número 400_{10} para binário.



Assim, $400_2 = 110010000_2$

Conversões de Bases

- De base 2 para base 10.

$1001101 = 1x2^6 + 0x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$

$= 64 + 0 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 77_{10}$

Conversões de Bases

- De base 2 para base 8.
  - Para transformar um número binário em octal, basta separá-lo em grupos de três algarismos a partir da direita, por exemplo:

110010.

Separando, em grupos de 3:

110 010

Faz-se então a conversão de cada grupo para o sistema decimal. Como o maior número que se pode formar com três algarismos é 7, a conversão irá resultar diretamente no número no sistema octal.

$110_2=6_8$ $010_2=2_8$

Portanto, $110010_2 = 62_8$

Conversões de Bases

- De base 8 para base 2. Desmembra-se o número e transforma-se cada algarismo no correspondente binário.

  27_8

  2 = 010 e 7 = 111,

  portanto $27_8 = 010111_2$

- De base 2 para base 16. É análogo à conversão do sistema binário para octal, com grupos de 4 algarismos da direita para a esquerda.

  Exemplo: Converter o binário 10011000 em hexadecimal.

  1001=9 e 1000=8

  Portanto 10011000_2 = 98H

Conversões de Bases

- De base 16 para base 2. É análogo à conversão do sistema octal para binário, sendo que nesse caso, necessitamos de 4 algarismos binários para representar o número hexadecimal.

  Exemplo: Converter o número C13 em binário.

  C=1100 1=0001 3=0011

  Portanto, C13H = 110000010011_2

- De base 10 para base 8.

  Exemplo: Converter 125_{10} para base 8.

  $125_{10} = 175_8$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 8 \\ \hline 5 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 8 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

O mesmo raciocínio vale para conversão da base 10 para uma base r , menor que 10.

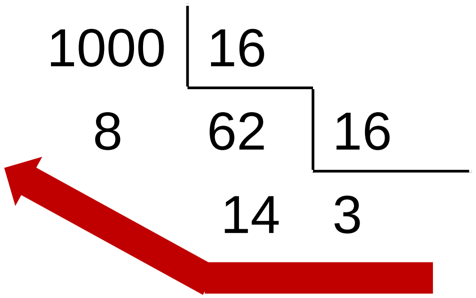
Conversões de Bases

- De base 8 para base 10

  Exemplo: Converter 174_8 para decimal.

  $174_8 = 1x8^2 + 7x8^1 + 4x8^0 = 64+56+4 = 124_{10}$

- De base 10 para base 16



  - 1000_{10} = 3E8h

- De base 16 para base 10

  $1C3 = 1x16^2 + Cx16^1 + 3x16^0 = 1x16^2 + 12x16^1 + 3x16^0 = 451_{10}$

Conversões de Bases

- De base 16 para base 8
  - Para fazer transformações entre as bases 8 e 16, que não são potências uma da outra, usamos a base 2 como intermediária nestas transformações. Por exemplo:

$1BC4_{16} = 0001.1011.1100.0100_2$

Reagrupando de três em três temos:

$0.001.101.111.000.100_2 = 15704_8$

Portanto $1BC4_{16} = 15704_8$.

Conversões de Bases

- De base 8 para base 16
  - Por outro lado, se tivermos, por exemplo, o número 235_8 para transformá-lo para a base 16:

$235_8 = 010.011.101_2$

Em seguida grupamos os algarismos binários de quatro em quatro.

$0.1001.1101_2 = 9D_{16}$

Portanto $235_8 = 9D_{16}$.

Referências Bibliográficas:

- Referências Bibliográficas:
- (1) http://www.users.rdc.puc¬rio.br/rmano/comp1inf.html
- (2) http://www.inf.puc¬rio.br/~francis/Organizacao.htm
- (3) http://icea.gov.br/ead/anexo/index.htm
- (4) Gonick, L. Introdução Ilustrada à Computação. Editora Harper & Row do Brasil, 1984.
- (5) Monteiro, M. Introdução à Organização de Computadores. Editora LTC, 2ª Edição.

- Transforme:
  - 17_d -> $?_b$
  - 43_d -> $?_b$
  - 1001_b -> $?_d$
  - 10011_b -> $?_d$