CAP. IV – *INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL*

INTRODUÇÃO

Muitas funções são conhecidas apenas num conjunto finito e discreto de pontos de um intervalo [a,b].

Exemplo:

A tabela seguinte relaciona calor específico da água e temperatura:

temperatura (ºC)	20	25	30	35
calor específico	0.99907	0.9985	0.9982	0.9918

Suponhamos que se queira calcular:

a) calor específico da água a 27.5ºC;

b) a temperatura para a qual o calor específico é 0.9983.

INTERPOLAÇÃO

quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função num ponto não tabelado

quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a integração e diferenciação sejam difíceis

Tendo-se que trabalhar com esta função e sem se dispôr da sua forma analítica, substitui-se esta, por outra função, que é uma aproximação da função dada, deduzida a partir dos pontos conhecidos.

FUNÇÃO APROXIMANTE

Estas funções podem ser de vários tipos tais como exponencial, logarítmica, trigonométrica e polinomial.
Aqui vamos estudar apenas as funções polinomiais.

CONCEITO DE INTERPOLAÇÃO

Consideremos **(n+1)** pontos distintos, $\mathbf{x_0, x_1, \ldots, x_n}$, no intervalo [a, b] e os valores da função f(x) nesses pontos, $\mathbf{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)}$.

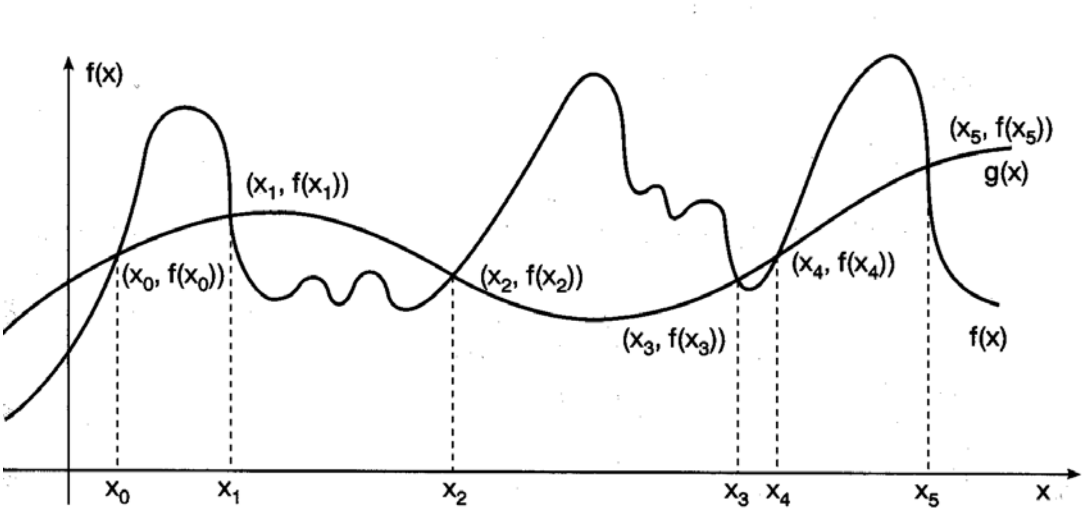
Uma das formas de interpolação de f(x) que iremos ver consiste em se obter uma função g(x) tal que:

↓

função aproximante

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \ldots\ldots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

GRAFICAMENTE:



Função aproximante → polinómio → interpolação polinomial

Conhecidos os pontos (***suporte da interpolação***)

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ com $x_i < x_{i+1}$, $i=0,\ldots,n-1$ e $x_0=a$ e $x_n=b$,

pretende-se aproximar f(x), por um polinómio

$$\mathbf{p_n(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

tal que

$$p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, n.$$

Os coeficientes a_0, a_1, ..., a_n são determinados à custa da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0) \\ p_n(x_1) = f(x_1) \\ \ldots\ldots. \\ p_n(x_n) = f(x_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = f(x_1) \\ \ldots\ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots\ldots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots\ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \ldots\ldots\ldots. & & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots.. & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \ldots. \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \ldots. \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

A solução do sistema anterior é única se o determinante da matriz for diferente de zero, o que acontece se os (n+1) pontos, x_0, x_1, ..., x_n forem todos distintos.

Temos o seguinte teorema:

<u>TEOREMA 1</u>:

Sejam dados (n+1) pontos distintos (x_0, $f(x_0)$), (x_1, $f(x_1)$), ... , (x_n, $f(x_n)$).

Então existe um ***único polinómio $p_n(x)$ de grau inferior ou igual a n***

que satisfaz $p_n(x_i) = f(x_i)$, i=0, ... ,n.

FORMAS DE OBTER O POLINÓMIO:

- resolução do sistema linear obtido anteriormente;
- interpolação de Newton com diferenças divididas;
- interpolação de Newton com diferenças finitas.

teoricamente, conduzem ao mesmo polinómio

FÓRMULA DO ERRO (*TRUNCATURA*)

Os cálculos anteriores estão afectados de dois tipos de erros:

a) erro de arredondamento

b) erro de truncatura - cometido quando decidimos aproximar a função f por um polinómio de grau n.

$$\boxed{E_n(x) = (x - x_0).(x - x_1).\ldots.(x - x_n).\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$, para algum $\xi \in \left]x_0, x_n\right[$

4.1 Resolução do Sistema Linear

Exemplo 1 **(*Interpolação Linear*) :**

Determinar o polinómio interpolador para a função f conhecida pelos seguintes pontos e calcular o valor de f(1.5).

x_i	1	2
y_i	0.84	0.91

Exemplo 2 **(*Interpolação Quadrática*):**

Determinar o polinómio interpolador para a função conhecida pelos pontos:

x_i	-1	0	2
y_i	4	1	-1

4.2 INTERPOLAÇÃO COM DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Conceito de Diferença Dividida

Seja f uma função da qual se conhecem os (n+1) pontos $(x_i, f(x_i))$, i=0 ,..., n.

A 1ª derivada de f(x) no ponto x_0 é por definição:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A diferença dividida de 1ª ordem é definida como uma aproximação da 1ª derivada:

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

Se fizer $x = x_1$ em (1), tem-se a diferença dividida de 1ª ordem em relação aos argumentos x_0 e x_1 : $\nabla y_0 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

4.2.1 OPERADOR DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Ordem	
0	$\nabla^0 y_i = f[x_i] = f(x_i) = y_i$
1	$\nabla y_i = f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\nabla^0 y_{i+1} - \nabla^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}$
...	
n	$\nabla^n y_i = f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}] = \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+n}] - f[x_i, ..., x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$ $\nabla^n y_i = \dfrac{\nabla^{n-1} y_{i+1} - \nabla^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$

TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS:

x_i	$\nabla^0 y_i$	$\nabla^1 y_i$	$\nabla^2 y_i$	....	$\nabla^n y_i$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$
		$f[x_2,x_3]$			
....	...	...	...		
			$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$		
		$f[x_{n-1},x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

EXEMPLO:

Determinar a tabela das diferenças divididas da função f definida pelos seguintes pontos:

$\mathbf{x_i}$	0.3	1.5	2.1
$\mathbf{y_i}$	3.09	17.25	25.41

Resolução: Começamos por construir a tabela das diferenças divididas

x_i	$f(x_i)=\nabla^0_{yi}$	∇^1_{yi}	∇^2_{yi}
0.3	3.09		
1.5	17.25		
2.1	25.41		

4.2.2 POLINÓMIO INTERPOLADOR DE NEWTON PARA DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Consideremos os (n+1) pontos $(x_i, f(x_i))$, i=0 ,..., n, e $p_n(x)$ o polinómio interpolador de f(x) nesses pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x_i) = p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x_i)^j$$

Pela definição de ***diferença dividida de 1ª ordem***, tem-se que:

$$p_n[x, x_0] = \frac{p_n[x_0] - p_n[x]}{x_0 - x} = \frac{p_n(x_0) - p_n(x)}{x_0 - x}$$

$$\Leftrightarrow p_n(x) = p_n(x_0) + (x - x_0).p_n[x, x_0] \quad (1)$$

Pela definição de ***diferença dividida de 2ª ordem***, tem-se que:

$$p_n[x, x_0, x_1] = \frac{p_n[x_0, x_1] - p_n[x, x_0]}{x_1 - x}$$

$$\Leftrightarrow p_n[x, x_0] = p_n[x_0, x_1] + (x - x_1).p_n[x, x_0, x_1]$$

Substituindo $p_n[x, x_0]$ em (1), obtém-se:

$$p_n(x) = p_n(x_0) + (x - x_0).p_n[x_0, x_1] + (x - x_0).(x - x_1).p_n[x, x_0, x_1]$$

Continuando assim sucessivamente, obtemos:

$$p_n(x) = p_n(x_0) + (x - x_0).p_n\left[x_0, x_1\right] + (x - x_0).(x - x_1).p_n\left[x_0, x_1, x_2\right] + ...$$

$$... + (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_{n-1}).p_n\left[x_0, x_1, ..., x_n\right] + (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_n).p_n\left[x, x_0, x_1, ..., x_n\right]$$

Como

- $p_n(x)$ é de grau n, então $p_n\left[x, x_0, x_1, ..., x_n\right] = 0$
- $p_n(x_0) = f(x_0) = y_0$
- $p_n[x_0, \ldots, x_i] = f[x_0, \ldots, x_i] = \nabla^i y_0$

podemos escrever:

$$p_n(x) = y_0 + (x - x_0).\nabla^1 y_0 + (x - x_0).(x - x_1).\nabla^2 y_0 + ... + (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_{n-1}).\nabla^n y_0$$

$$= y_0 + \nabla^1 y_0 (x - x_0) + \nabla^2 y_0 (x - x_0).(x - x_1) + ... + \nabla^n y_0 (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Ou ainda,

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \nabla^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)}$$

<u>Polinómio Interpolador</u>
<u>de Newton</u> para
<u>diferenças divididas</u>

<u>EXEMPLO</u>:

Determinar o polinómio interpolador de Newton para a função f definida pelos seguintes pontos:

$\mathbf{x_i}$	0.3	1.5	2.1
$\mathbf{y_i}$	3.09	17.25	25.41

PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS:

Admitamos que os pontos x_i são igualmente espaçados, isto é:

$x_{i+1} = x_i + h$, $i=0, ...,n$, sendo h uma constante denominada ***passo***.

Consideremos a variável auxiliar, z, dada por $z = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Tem-se que:

$$x-x_0 = h.z$$

$$x-x_1 = x-(x_0+h) = x-x_0-h = h.z-h = h.(z-1)$$

$$x-x_2 = x-(x_1+h) = x-x_1-h = h.(z-1)-h = h.(z-2)$$

.....

$$x-x_{n-1}= x-(x_{n-2} +h) = x- x_{n-2}-h = h.(z-(n-2))-h = h.(z-(n-1))$$

Substituindo os valores anteriores no polinómio interpolador de Newton para diferenças divididas

$$p_n(x) = y_0 + (x - x_0).\nabla^1 y_0 + (x - x_0).(x - x_1).\nabla^2 y_0 + ... + (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_{n-1}).\nabla^n y_0$$

obtém-se:

$$p_n(x) = y_0 + hz.\nabla^1 y_0 + hz.\, h(z-1).\nabla^2 y_0 + ... + hz.\, h(z-1).\, h(z-2)...h(z-(n-1)).\nabla^n y_0 ,$$

isto é,

$$p_n(x) = y_0 + h^1 \cdot \nabla^1 y_0 \cdot z + h^2 \cdot \nabla^2 y_0 \cdot z \cdot (z-1) + ... + h^n \cdot \nabla^n y_0 \cdot z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot ... \cdot (z-(n-1)),$$

Ou ainda:

$$\boxed{p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} h^i.\nabla^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (z - j)}$$

<u>Polinómio Interpolador de Newton para pontos igualmente espaçados</u>

4.3 INTERPOLAÇÃO COM DIFERENÇAS FINITAS

Seja f uma função da qual se conhecem os (n+1) pontos (x_i, $f(x_i)$), i=0 ,..., n, onde os pontos x_i são igualmente espaçados:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i=0, ...,n$$

4.3.1 OPERADOR DE DIFERENÇAS FINITAS

Ordem	
0	$\Delta^0 y_i = f(x_i) = y_i$
1	$\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$
...	
n	$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

EXEMPLO:

Determinar a tabela das diferenças finitas da função f definida pelos seguintes pontos:

x_i	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y_i	9.82	10.84	12.88	13.98	16.99

Resolução: Começamos por construir a tabela das diferenças finitas

x_i	$f(x_i)=\Delta^0_{yi}$	Δ^1_{yi}	Δ^2_{yi}	Δ^3_{yi}	Δ^4_{yi}
3.5	9.82	1.02	1.02	-1.96	4.81
4.0	10.84	2.04	-0.94	2.85	
4.5	12.88	1.10	1.91		
5.0	13.98	3.01			
5.5	16.99				

4.3.2 Polinómio Interpolador de Newton para Diferenças Finitas

Nesta secção vamos considerar que os (n+1) pontos x_i são igualmente espaçados: $x_{i+1} = x_i + h, \quad i=0, ...,n.$

Segue-se um teorema que relaciona as diferenças divididas com as diferenças finitas.

Teorema 2:

Seja f uma função definida nos pontos (x_i, y_i), $i=0, ... ,n$ tais que, $x_{i+1} - x_i = h$, $i=0, ..., n$.

Tem-se que:

$$f[x_i, x_{i+1},...,x_{i+k}] = \nabla^k y_i = \frac{\Delta^k y_i}{k!.h^k}, \qquad \forall k \geq 0$$

Considere-se o polinómio interpolador de Newton para pontos igualmente espaçados:

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} h^i.\nabla^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (z - j)$$

Substituindo $\nabla^i y_0$ por $\frac{\Delta^i y_0}{i!.h^i}$, $i = 1, ..., n$, obtém-se:

$$\boxed{p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (z - j) \quad \text{com} \quad z - j = \frac{x - x_j}{h}}$$

Polinómio Interpolador

Gregory-Newton

para diferenças finitas

EXEMPLO:

Dada a função f, conhecida nos pontos abaixo tabelados, calcule f(0.25).

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001

Resolução: Começamos por construir a tabela das diferenças finitas

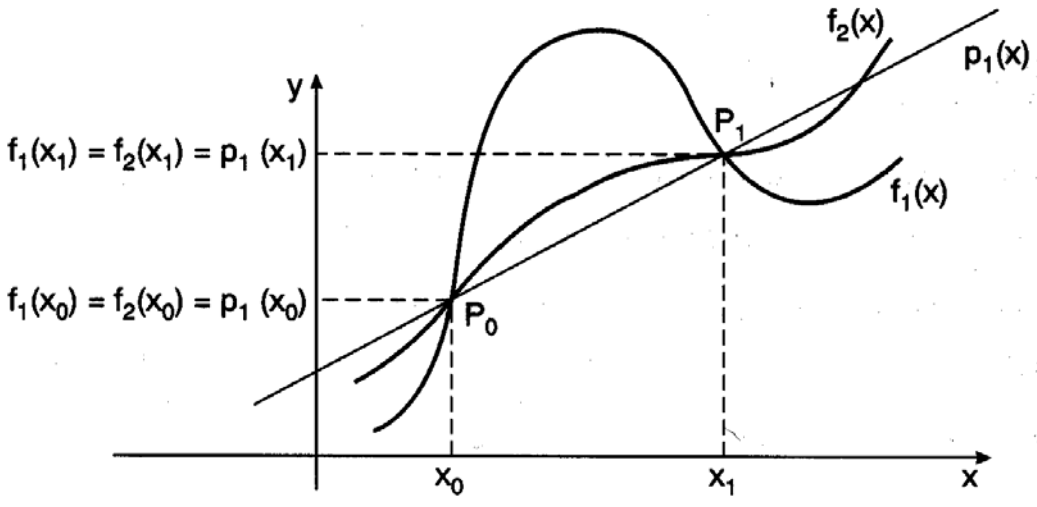
x_i	$\Delta^0_{y_i}$	$\Delta^1_{y_i}$	$\Delta^2_{y_i}$	$\Delta^3_{y_i}$	$\Delta^4_{y_i}$
0.1	0.125	-0.061	0.024	-0.006	0
0.2	0.064	-0.037	0.018	-0.006	
0.3	0.027	-0.019	0.012		
0.4	0.008	-0.007			
0.5	0.001				

4.4 ESTUDO DO ERRO NA INTERPOLAÇÃO

Como já observamos, ao se aproximar uma função real f(x) em [a, b], nos nós distintos $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$, por um polinómio de grau $\leq n$, $p_n(x)$, comete-se um erro de interpolação (***erro de truncatura***) da função f pelo polinómio p_n , ou seja,

$$e_n(x) = f(x)-p_n(x), \text{ para todo o } x \in [a, b]$$

EXEMPLO:



Temos que:

- $p_1(x)$ interpola $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em x_0 e x_1;
- $e^1=f_1(x)-p_1(x) > e^2=f_2(x)-p_1(x)$, para todo o $x \in [x_0,x_1]$.
- ...

Fórmulas para o erro de interpolação:

TEOREMA 3

Seja f uma função com derivadas contínuas até à ordem n+1 em [a, b] e

p_n um polinómio de grau $\leq$ n interpolador de f nos pontos distintos

$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$, então, para todo o $x \in [a, b]$, temos

$$e_n(x)=(x - x_0).\ (x - x_1).\ (x - x_2)...(x - x_n).\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \text{(A)}$$

em que $\xi = \xi(x) \in\ ]\min.\{ x_0, x_1, ..., x_n, x \}, \text{máx.}\{ x_0, x_1, ..., x_n, x \}[$

i.é, $\xi = \xi(x) \in X$, sendo $X \subset [a, b]$ um intervalo que contém $x_0, x_1, ..., x_n$ e x.

A fórmula (A), do teorema anterior, tem interesse limitado do ponto de vista prático uma vez que requer o conhecimento da derivada de ordem n+1 da função a interpolar.

Se $\qquad M_{n+1} = majr \left| f^{(n+1)}(x) \right|_{x \in X}$

podemos calcular um limite superior do erro de interpolação:

$$\boxed{|e_n(x)| \leq |(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}}$$

4.4.1 ERRO PARA O POLINÓMIO DE NEWTON

Vimos, na dedução da fórmula do polinómio de Newton, que a diferença dividida de ordem n está relacionada com a derivada de ordem n da função f, e que

$$\boxed{e_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0).(x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n).f\,[x_0, x_1,..., x_n, x]} \qquad (B)$$

Comparando (A) e (B) podemos concluir o

Teorema 4: $f\,[x_0, x_1,..., x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$,

com $\xi = \xi(x) \in X$, sendo X um intervalo que contém x_0, x_1, ..., x_n e x,

e $f \in C^{n+1}(X)$.

4.4.2 ERRO PARA O POLINÓMIO DE GREGORY-NEWTON

Efectuando a mudança de variável $x \to z = \dfrac{x - x_0}{h}$

e atendendo a que $x_i = x_0 + ih$, $i=0,1,...,n$,

temos que $z - i = \dfrac{x - x_i}{h} \quad \Rightarrow \quad x - x_i = h(z - i)$.

Substituindo, $x - x_i$ para $i=0, ..., n$, na fórmula (B)

$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0).(x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n).f\,[x_0, x_1,..., x_n, x]$

obtemos o erro de interpolação:

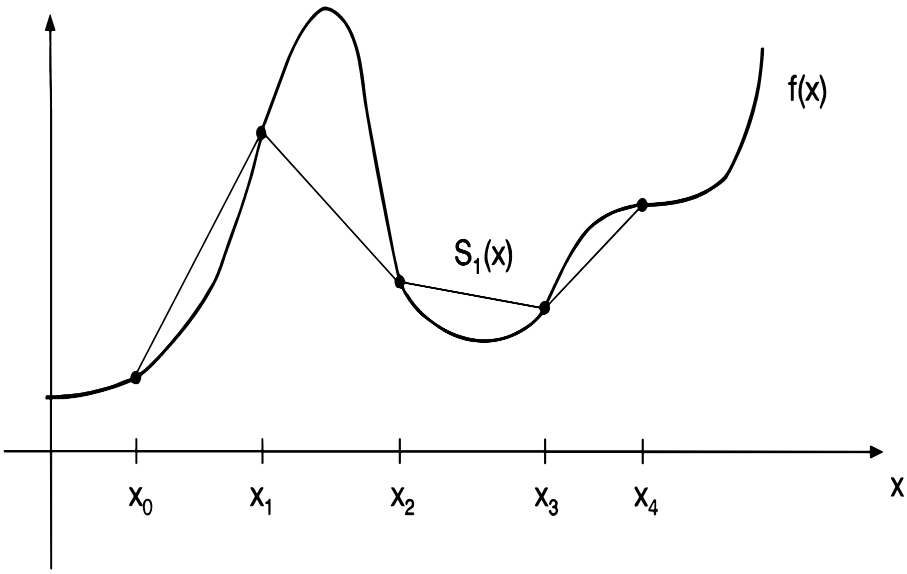
$$\boxed{e_n(x) = h^{n+1} \cdot z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot (z-3) \cdot ... \cdot (z-n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

4.5 OUTRA FORMA DE INTERPOLAÇÃO

INTERPOLAÇÃO COM SPLINES

Há casos em que o polinómio interpolador de grau elevado conduz a resultados erróneos. Uma aproximação alternativa consiste em ajustar polinómios de ordem mais baixa a subconjuntos dos dados. Tais polinómios chamam-se ***funções splines***.

EXEMPLO :



Consideremos uma função f(x) tabelada nos pontos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

DEFINIÇÃO ***(FUNÇÃO SPLINE)***

Uma função ***s(x)*** é denominada ***spline de grau m com nós nos pontos x_i***, se satisfaz as seguintes condições:

i) em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i=1, ..., n, $s_i(x)$ é um polinómio de grau m;

ii) ***s(x)*** é contínua e tem derivada contínua até à ordem (m-1) em [a,b].

DEFINIÇÃO ***(FUNÇÃO SPLINE INTERPOLADORA)***

Função spline que verifica:

$$\mathbf{s(x_i) = f(x_i)}, \ i=0, ..., n$$

- ***SPLINES LINEARES*:**

A função ***spline linear interpolante*** de f(x) pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i=1, ..., n como

$$s_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \ \ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

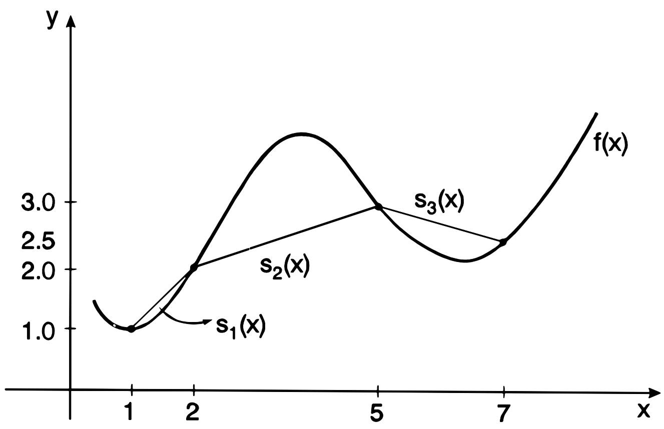
EXEMPLO:

Calcule a função spline linear que interpola a função tabelada.

x_i	1	2	5	7
y_i	1	2	3	2.5

$$\mathbf{s_1(x)} = f(x_0)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x, \quad x \in [1, 2]$$

$$\mathbf{s_2(x)} = \frac{1}{3}(x+4),\ x \in [2,5]; \qquad \mathbf{s_3(x)} = \frac{1}{2}(-0.5x + 8.5),\ \ x \in [5,7]$$



Desvantagem: primeira derivada descontínua nos nós x_i

$\Downarrow$

SPLINES DE ORDEM SUPERIOR (QUADRÁTICOS E CÚBICOS)

❑ SPLINES QUADRÁTICOS

A função ***spline quadrática interpolante*** de f(x) pode ser escrita em cada subintervalo como

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

(n+1) pontos $\Rightarrow$ n subintervalos $\Rightarrow$ 3n constantes desconhecidas

As 3n equações para determinar as 3n constantes são:

- O valor das splines quadráticas tem que ser igual nos nós interiores,

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f(x_i) \\ \\ s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

(2n-2) condições

- A primeira e a última spline têm que passar nos nós finais,

$s_1(x_0)=f(x_0)$ e $s_n(x_n)=f(x_n)$

2 condições

- A primeira derivada nos nós interiores tem de ser igual,

$s_i´(x_i) = s_{i+1}´(x_i)$, i=1, ..., n-1

(n-1) condições

- Escolha arbitrária num conjunto de opções.

Consideremos que a segunda derivada é nula no primeiro ponto:

$s_1´´(x_0)=0 \Leftrightarrow a_1=0$

1 condição

EXEMPLO:

Calcular splines quadráticos que interpolam a função tabelada.

x_i	3	4.5	7	9
y_i	2.5	1	2.5	0.5

❑ SPLINES CÚBICOS

A função ***spline cúbica interpolante*** de f(x) pode ser escrita em cada subintervalo como

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

(n+1) pontos $\Rightarrow$ n subintervalos $\Rightarrow$ 4n constantes desconhecidas

As 4n equações para determinar as 4n constantes são:

- O valor das splines cúbicas tem que ser igual nos nós interiores; (2n-2) condições
- A primeira e a última spline têm que passar nos nós finais; 2 condições
- A primeira derivada nos nós interiores tem de ser igual; (n-1) condições
- A segunda derivada nos nós interiores tem de ser igual; (n-1) condições
- A segunda derivada é nula nos nós finais (***spline natural***). 2 condições

Outra técnica - resolução de (n-1) equações:

Cada ***spline cúbico*** pode ser escrito em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i=1, ..., n como equação (3)

$$s_i(x) = \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 +$$
$$+\left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

Esta equação contém dois parâmetros desconhecidos (2^a derivada no final de cada subintervalo), que podem ser determinados usando a equação:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) =$$
$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}\left(f(x_{i-1}) - f(x_i)\right)$$

equação (4)

Para todos os nós interiores, temos (n-1) condições com (n-1) incógnitas

EXEMPLO:

Ajustar splines cúbicos aos dados. Utilizar os resultados para estimar o valor em x=5.

x_i	3	4.5	7	9
y_i	2.5	1	2.5	0.5

$$s_1(x) = \frac{f''(x_0)}{6(x_1 - x_0)}(x_1 - x)^3 + \frac{f''(x_1)}{6(x_1 - x_0)}(x - x_0)^3 +$$

$$+\left[\frac{f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{f''(x_0)(x_1 - x_0)}{6}\right](x_1 - x) + \left[\frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} - \frac{f''(x_1)(x_1 - x_0)}{6}\right](x - x_0)$$

$$= 0.1866(x - 3)^3 + 1.6667(4.5 - x) + 0.2469(x - 3)$$

$$s_2(x) = \frac{f''(x_1)}{6(x_2 - x_1)}(x_2 - x)^3 + \frac{f''(x_2)}{6(x_2 - x_1)}(x - x_1)^3 +$$

$$+\left[\frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f''(x_1)(x_2 - x_1)}{6}\right](x_2 - x) + \left[\frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f''(x_2)(x_2 - x_1)}{6}\right](x - x_1)$$

$$= 0.1119(7 - x)^3 + 0.1022(x - 4.5)^3 - 0.2996(7 - x) + 1.6388(x - 4.5)$$

$$s_3(x) = \frac{f''(x_2)}{6(x_3 - x_2)}(x_3 - x)^3 + \frac{f''(x_3)}{6(x_3 - x_2)}(x - x_2)^3 +$$

$$+\left[\frac{f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f''(x_2)(x_3 - x_2)}{6}\right](x_3 - x) + \left[\frac{f(x_3)}{x_3 - x_2} - \frac{f''(x_3)(x_3 - x_2)}{6}\right](x - x_2)$$

$$= - 0.1278(9 - x)^3 + 1.7610(9 - x) - 0.25(x - 7)$$

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 0.1866(x - 3)^3 + 1.6667(4.5 - x) + 0.2469(x - 3) \\ s_2(x) = 0.1119(7 - x)^3 + 0.1022(x - 4.5)^3 - 0.2996(7 - x) + 1.6388(x - 4.5) \\ s_3(x) = -0.1278(9 - x)^3 + 1.7610(9 - x) - 0.25(x - 7) \end{cases}$$