5- CÁLCULO APROXIMADO DE INTEGRAIS

5.1- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Integrar numericamente uma função y = f(x) num dado intervalo [a, b] é integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime f(x) no dado intervalo.

Em particular, se y = f(x) for dada por uma tabela ou, por um conjunto de pares ordenados $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$(onde os x_i podem ser supostos em ordem crescente) , x_0 = a, x_n = b, podemos usar como polinômio de aproximação para a função y = f(x) no intervalo [a, b] o seu polinômio de interpolação.

Em particular, o polinômio de interpolação para a função y = f(x) no intervalo [a, b], a = x_0, b = x_n é um polinômio de aproximação para f(x) em qualquer subintervalo$[x_i, x_j]$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le n$ do intervalo [a, b].

Podemos então usar o polinômio $P_n(x)$ para integrar f(x) em qualquer desses subintervalos.

As vantagens de se integrar um polinômio que aproxima y = f(x) ao invés de f(x) são principalmente duas:

a) f(x) pode ser uma função de difícil integração ou de integração praticamente impossível, enquanto que um polinômio é sempre de integração imediata;
b) As vezes a função é dada simplesmente através de uma tabela-conjunto de pares ordenados obtidos como resultados de experiências. Aí não se conhece a expressão analítica da função em termos do argumento x.

As fórmulas de integração são de manejo fácil e prático e nos permite, quando a função f(x) é conhecida, ter uma idéia do erro cometido na integração numérica, como veremos mais adiante.

Os argumentos x_i podem ser ou não igualmente espaçados, mas estudaremos aqui somente fórmulas de integração para o caso de argumentos x_i igualmente espaçados.

5.2– FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA ARGUMENTOS X_I IGUALMENTE ESPAÇADOS (FÓRMULAS DE NEWTON-COTES)

Seja y = f(x) uma função cujo valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ são conhecidos (por exemplo por meio de uma tabela).

Seu polinômio de interpolação sobre $[x_0, x_n]$ se escreve na forma de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)$$

Sabemos que: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ou que $f(x) \cong P_n(x)$.

Então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x)\right)dx \qquad (4.1)$$

Supondo os argumentos x_i igualmente espaçados de h e considerandose

$$u = \frac{x - x_0}{h} \tag{4.2}$$

temos que

dx = hdu; e quando $x = x_0 \Rightarrow u = 0$

$x = x_n \Rightarrow u = n$

Relembrando que, $L_k(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_k - x_i)}$, (4.3)

substituindo-se a (4.2) na (4.3) tem-se:

$$L_k(x) = \lambda_k(u) = \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(u - k)}{(k - i)} \tag{4.4}$$

ou ainda,

$$\lambda_k(u) = \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(u - k)}{(k - i)} = \frac{(u-0)(u-1)......(u-(k-1))(u-(k+1)......(u-n)}{(k-0)(k-1)......(k-(k-1))(k-(k+1)......(k-n)}$$

Então, substituindo a (4.4) na (4.1) resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_n} (\sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x))dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \int_{x_0}^{x_n} L_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \int_{0}^{n} \lambda_k(u)hdu =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_k h \int_{0}^{n} \lambda_k(u)du$$

Fazendo-se:

$\int_{0}^{n} \lambda_k(u)du = C_k^n$; temos:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong h \sum_{k=0}^{n} f_k C_k^n \tag{4.5}$$

Trataremos de obter, agora, algumas fórmulas de integração. Mais adiante analisaremos o termo do resto.

5.2.1- <u>1º Caso: Regra dos Trapézios</u>

Para n = 1; isto é, queremos obter uma fórmula para integrar f(x) entre dois pontos consecutivos x_0 e x_1, usando polinômio do primeiro grau.

Temos, em vista de (4.5) que, $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong h\sum_{k=0}^{n} f_k C_k^n$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong h\sum_{k=0}^{1} f_k C_k^1 \text{ ; onde, de } \int_0^n \lambda_k(u)du = C_k^n,$$

$$C_0^1 = \int_0^1 \lambda_0(u)du = \int_0^1 \frac{u-1}{0-1}du = \int_0^1 (1-u)du = \frac{1}{2}$$

$$C_1^1 = \int_0^1 \lambda_1(u)du = \int_0^1 \frac{u-0}{1-0}du = \frac{1}{2}$$

Portanto

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Esta fórmula é conhecida como *Regra do Trapézio*.

Obs.: Se o intervalo [a, b] é pequeno, a aproximação é razoável; mas se [a, b] é grande, o erro também pode ser grande. Neste caso dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos de amplitude $h = \frac{b-a}{n}$ de tal forma que $x_0 = a$ e $x_n = b$ e em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, j = 0, 1, ..., n–1 aplicamos a Regra do Trapézio.

Assim obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

Esta é a fórmula do *Trapézio Generalizada*.

Exemplo 5.2.1:

Calcular pela regra do Trapézio $\int_0^4 \ell n(1+x)dx$ usando 5 pontos e sabendo-se que:

x	0	1	2	3	4
ℓn (1 + x)	0	0.693	1.1	1.387	1.61

Temos:

$$\int_0^4 \ell n(1+x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 2(0.693 + 1.1 + 1.387) + 1.61]$$

$$= \frac{1}{2}[2(3.180) + 1.61] = \frac{1}{2}[7.970]$$

$$= 3.985.$$

4.2.2- 2º Caso: Regra 1/3 de Simpson

Para n = 2; isto é, queremos obter uma fórmula para integrar f(x) entre três pontos consecutivos x_0, x_1 e x_2, usando polinômio de 2º grau.

Temos de (4.5) que:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{2} f_k hC_k^2$$

onde

$$C_0^2 = \int_0^2 \lambda_0(u)du = \int_0^2 \frac{(u-1)(u-2)}{(0-1)(0-2)}du = \frac{1}{2}\int_0^2 (u^2 - 3u + 2)du = \frac{1}{3}$$

$$C_1^2 = \int_0^2 \lambda_1(u)du = \int_0^2 \frac{(u-0)(u-2)}{(1-0)(1-2)}du = -\int_0^2 (u^2 - 2u)du = \frac{4}{3}$$

e pelo exercício [4.1] temos $C_2^2 = C_0^2 = \frac{1}{3}$.

Então:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong h[\frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)]$$

Esta fórmula é conhecida como *Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.*

De maneira análoga à regra do Trapézio, a generalização da regra $\frac{1}{3}$ de Simpson para integração ao longo de um intervalo [a, b], é feita dividindo-se [a, b] num número par 2n (por que?) de subintervalos de amplitude $h = \frac{b-a}{2n}$ de tal forma que $x_0 = a$ e $x_{2n} = b$.

Usando a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson ao longo do intervalo $[x_j, x_{j+2}]$, j = 0, 2, ..., 2n–2, temos:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]$$

Esta é a *fórmula* $\frac{1}{3}$ *de Simpson Generalizada.*

Exemplo 5.2.2:

Calcular $\int_2^3 xe^{x/2}dx$ pela regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, dada a tabela:

x	2	2.25	2.5	2.75	3.0
$e^{x/2}$	2.71	3.08	3.49	3.96	4.48

Assim, temos

$$\int_2^3 xe^{x/2}dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$= \frac{0.25}{3}[5.42 + 4(6.93 + 10.89) + 2(8.725) + 13.44]$

$= \frac{0.25}{3}[5.42 + 71.28 + 17.45 + 13.44]$

$= \frac{0.25}{3}[107.59]$

$= 8.965833$

4.2.3- 3º Caso: Regra 3/8 de Simpson

Para n = 3; isto é, queremos obter uma fórmula para integrar f(x) entre 4 pontos consecutivos x_0, x_1, x_2 e x_3, usando polinômio do 3º grau. Temos

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \sum_{k=0}^{3} f_k hC_k^3$$

onde

$$C_0^3 = \int_0^3 \lambda_0(u)du = -\frac{1}{6}\int_0^3 (u^3 - 6u^2 + 11u - 6)du = \frac{3}{8}$$

$$C_1^3 = \int_0^3 \lambda_1(u)du = \frac{1}{2}\int_0^3 (u^3 - 5u^2 + 6u)du = \frac{9}{8}$$

Pelo exercício [4.1], temos:

$$C_3^3 = C_0^3 = \frac{3}{8}$$

e

$$C_2^3 = C_1^3 = \frac{9}{8}$$

Assim

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + f(x_3)]$$

Essa fórmula é conhecida como *Regra* $\frac{3}{8}$ *de Simpson*.

Para generalizar a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson devemos dividir o intervalo [a, b] em um número conveniente de subintervalos, de amplitude h de tal forma que $x_0 = a$ e $x_{3n} = b$.

Usando a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson ao longo do intervalo $[x_j, x_{j+3}]$, j = 0, 3, 6, ..., 3n–3, obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \cong \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + 2f(x_3) + 3(f(x_4) + f(x_5)) + 2f(x_6) +$$
$$+ \ldots + 2f(x_{3n-3}) + 3(f(x_{3n-2}) + f(x_{3n-1})) + f(x_{3n})]$$

Esta é a *fórmula* $\frac{3}{8}$ *de Simpson Generalizada.*

Exemplo 5.2.3:

Calcular $\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}$ pela regra $\frac{3}{8}$ de Simpson e h = 0.1.

Solução: Construímos a tabela de f(x) = $\frac{1}{1+x}$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(x)	1	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6666	0.625

Assim, temos

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x} \cong \frac{3}{8} h[f(x_0) + 3(f(x_1) + f(x_2)) + 2f(x_3) + 3(f(x_4) + f(x_5)) + f(x_6)]$$

$$= \frac{3(0.1)}{8}[1 + 3(0.9091 + 0.8333 + 0.7143 + 0.6666) + 2(0.7692) + 0.625]$$

$$= \frac{0.3}{8}[12.5333] = 0.469999$$

Obs.: Calcule diretamente $\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}$ e compare os resultados.

As fórmulas vistas são chamadas *fórmulas de Newton-Cotes*.

5.3 – ERRO NA INTERPOLAÇÃO E NA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

5.3.1 – Erro na Interpolação

Quando aproximamos a função f por Pn, ou seja, f(x) $\cong$ Pn(x), existe um erro cometido na interpolação expresso por Rn(x), assim, é válida a seguinte relação;

f(x) = Pn(x) + Rn(x),

Rn(x) é definido pelo fórmula do Resto de Lagrange, expresso por:

Teorema 5.3.1.1 - fórmula do Resto de Lagrange

$$\mathbf{Rn(x)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \leq$$

$$\leq \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_n)}{(n+1)!} \max_{t \in [x_0, \dots, x_n]} f^{(n+1)}(t);$$

A fórmula dada é válida quando conhecemos a lei de f.

Se não conhecemos esta lei, Rn(x) pode ser estimado por :

Teorema 5.3.1.2 – Lei de f desconhecida

$$\mathbf{R_n(x)} \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \; (\max_j |f[x_0, x_1, \dots, x_j]|/((n+1)!)).$$

Se os pontos são igualmente espaçados, vale também que:

Teorema 5.3.1.3 – Lei de f desconhecida e pontos igualmente espaçados.

$$\mathbf{Rn(x)} \leq \frac{h^{n+1} M_j}{4(n+1)}, \text{ onde } M_j = \max_j |\Delta^j f[x_0]|.$$

5.3.2 – Erro na Integração Numérica

Integrando-se ambos os lados de f(x) = Pn(x) + Rn(x), obtemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

Seja $T_n = \int_a^b R_n(x)dx$, o termo complementar.

Enunciaremos dois teoremas, cujas demonstrações aqui serão omitidas.

Teorema 5.3.2.1 – Se os pontos $x_j = x_0 + jh$, j = 0, 1, ..., n dividem [a, b] em um número ímpar de intervalos iguais e f(x) tem derivada de ordem (n + 1) contínua em [a, b], então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n ímpar é dada por:

$$T_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1)...(u-n)du \text{ para algum ponto } \xi \in [a, b].$$

Teorema 5.3.2.2 – Se os pontos $x_j = x_0 + jh$, j = 0, 1, ..., n dividem [a, b] em um número par de intervalos iguais e f(x) tem derivada de ordem (n + 2) contínua em [a, b], então a expressão do erro para as fórmulas de Newton-Cotes com n par é dada por:

$$T_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n u(u-\frac{n}{2})u(u-1)...(u-n)du \text{ para algum ponto } \xi \in [a, b].$$

<u>**Exemplo 5.3.1:**</u>

Determinar o menor número de intervalos em que podemos dividir [1, 2] para obter $\int_1^2 \ell n(x)dx$ pela regra do Trapézio com erro $\leq 10^{-4}$.

Solução: $T1 \leq \dfrac{nh^3}{12} \max\limits_{1\leq t\leq 2} |f''(t)|$

Temos que

$$f(t) = \ell n\, t,\ f'(t) = \frac{1}{t},\ f''(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$\therefore \quad \max\limits_{1\leq t\leq 2} |f''(t)| = 1$

$\therefore \quad T_1 \leq \dfrac{nh^3}{12} 1 \leq 10^{-4}$

Mas $h = \dfrac{b-a}{n} \Rightarrow h = \dfrac{2-1}{n} \Rightarrow h = \dfrac{1}{n}$

$$\therefore \quad n\frac{1}{n^3 12} \le 10^{-4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{12n^2} \le 10^{-4}$$

$$\Rightarrow n^2 \ge \frac{10^4}{12} \Rightarrow n^2 = 834$$

$$\therefore \quad n_{min} = 29$$

Assim devemos dividir o intervalo [1, 2] em 29 subintervalos iguais para obter $\int_1^2 \ell n(x)dx$ pela regra do trapézio com erro $\le 10^{-4}$.

5.4- Exercícios:

5.4.1) Provar que: $C_k^n = C_{n-k}^n$

(Sugestão: Faça a mudança de variável: u = n – v em C_k^n)

5.4.2) Determine h de modo que a regra do trapézio forneça o valor de

$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, com erro inferior a 0.5×10^{-6} .

5.4.3) Achar o número mínimo de intervalos que se pode usar para, utilizando a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, obter $\int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos x dx$ com erro inferior a 10^{-3} .

5.4.4) Nos exercícios [4.2] e [4.3], resolva as integrais numericamente pelas regras citadas de modo a satisfazer os limites de erros impostos.

5.4.5) Calcular $\int_2^3 xe^{x/2} dx$ pela regra $\frac{3}{8}$ de Simpson, sobre 07 pontos e dar um limitante para o erro cometido.