Interpolação polinomial

Leonardo Vasconcelos Alves [*leonardo.alves.professor@gmail.com*]

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Disciplina de Cálculo Numérico - DCC034
`http://www.dcc.ufmg.br/~lalves`

14 de outubro de 2008

Interpolação

Definição: [2]
Interpolação é um método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais conhecidos.

- Resolve o problema de se obter pontos fora de uma tabela qualquer!
- Útil em vários ramos da física, engenharia e matemática.
- Em cálculo numérico, usaremos a interpolação para calcular integrais, raízes de equações e para obter raízes de equações diferenciais ordinárias.

Interpolação

Sejam os dados coletados a seguir:

x	0,1	0,6	0,8
y	1,221	3,320	4,953

- Como calcular o valor de y para o valor de $x = 0,3$?
- Podemos procurar uma função que passa por esses três pontos e depois avaliamos o valor de y quando $x = 0,3$.
- Isso é interpolação!
- Vamos usar um polinômio que passa nesses pontos e depois calcular o valor em $x = 0,3$. Este polinômio é chamado de polinômio interpolador.

Interpolação linear

Sejam dois pontos diferentes P1 (x_1, y_1) e P2 (x_2, y_2) num plano cartesiano. Suponhamos que estes dois pontos façam parte de uma função qualquer $y = f(x)$.
Podemos fazer com que esses dois pontos pertençam a um polinômio de grau 1, ou seja, uma reta.
Dessa forma, temos:

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Ora, se temos dois pontos P1(x_1, y_1) e P2(x_2, y_2), podemos fazer:

$$\begin{aligned} P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 &= y_1 \\ P_1(x_2) = a_0 + a_1 x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

Interpolação linear

Podemos escrever o sistema

$$\begin{aligned} P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 &= y_1 \\ P_1(x_2) = a_0 + a_1 x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

... assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são os pontos P1 e P2 conhecidos e a_0 e a_1 as incógnitas.

Interpolação linear

Resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Vamos obter:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ e } a_0 = y_1 - a_1 x_1$$

Assim, temos:

$$P_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Obtivemos uma reta como nos velhos tempos de geometria analítica!

Interpolação linear - Exemplo

Vamos calcular os pontos $P_1(0,2)$ e $P_2(0,3)$ para a tabela abaixo:

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

Aplicando a solução proposta:

$$P_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Temos:

$$P_1(0,2) = 1,221 + \frac{3,32 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,2 - 0,1) = 1,641$$

E:

$$P_1(0,3) = 1,221 + \frac{3,32 - 1,221}{0,6 - 0,1}(0,3 - 0,1) = 2,061$$

Interpolação quadrática

Sejam três pontos diferentes P1 (x_0, y_0), P2 (x_1, y_1) e P3 (x_2, y_2) num plano cartesiano. Suponhamos que estes dois pontos façam parte de uma função qualquer $y = f(x)$.

Podemos fazer com que esses dois pontos pertençam a um polinômio de grau 2, ou seja, uma parábola.

Dessa forma, temos:

$$f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Ora, se temos três pontos P1 (x_0, y_0), P2 (x_1, y_1) e P3 (x_2, y_2), podemos fazer:

$$\begin{aligned} P_2(x_0) &= y_0 \\ P_2(x_1) &= y_1 \\ P_2(x_2) &= y_2 \end{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 &= y_2 \end{aligned} \right.$$

Interpolação quadrática

Assim:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 & = & y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 & = & y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a_0, a_1 e a_2 teremos a equação da parábola.

Esta idéia pode ser generalizada: para $n+1$ pontos na tabela, poderemos interpolar um polinômio de grau n, resolvendo um sistema de grau $n+1$. O determinante da matriz de coeficientes desse sistema é sempre não nulo (matriz de Vandermonde), logo há apenas um polinômio que passa pelos $n+1$ pontos [1].

Fórmula de Lagrange

O problema de fazer interpolação resolvendo sistemas lineares é o custo de resolução do sistema. Dessa forma, precisamos de métodos mais eficientes para resolver o problema. O método de Lagrange é mais eficiente e resolve o mesmo problema.

Sejam os polinômios construídos na forma abaixo:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ P_1(x) &= (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ P_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ \vdots\ & \vdots\ \vdots \\ P_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Fórmula de Lagrange

Assim os polinômios

$$\begin{aligned} P_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ P_1(x) &= (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ P_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ \vdots\ & \vdots\ \vdots \\ P_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Podem ser escritos como:

$$P_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x-x_j), 0 \leq i \leq n$$

O polinômio interpolador de Lagrange é construído pela combinação

Fórmula de Lagrange

Escrevendo a combinação linear:

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + c_3 P_3(x) + \cdots c_n P_n(x)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i(x)$$

Efetuando alguns manipulações e fazendo $L_n(x_i) = y_i = c_i P_i(x_i)$, chegamos a:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Que tem complexidade menor que a resolução de sistemas lineares.

Dispositivo prático para interpolação de Lagrange

Escreva a matriz G conforme abaixo:

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}$$

Assim, se G_d for o produto dos elementos da diagonal principal e se G_i for o produto dos elementos da $(i+1)$-ésima linha, podemos escrever:

$$L_n(x) = G_d \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{G_i}$$

Exemplo

Seja a tabela abaixo:

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

Calcule $L_2(0,2)$:

$$G = \begin{bmatrix} 0,2-0,1 & 0,1-0,6 & 0,1-0,8 \\ 0,6-0,1 & 0,2-0,6 & 0,6-0,8 \\ 0,8-0,1 & 0,8-0,6 & 0,2-0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,5 & -0,7 \\ 0,5 & -0,4 & -0,2 \\ 0,5 & 0,2 & -0,6 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Assim:

$$G = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,5 & -0,7 \\ 0,5 & -0,4 & -0,2 \\ 0,5 & 0,2 & -0,6 \end{bmatrix}$$

E temos:

$$\begin{aligned} G_d &= (0,1)(-0,4)(-0,6) = 0,024 \\ G_0 &= (0,1)(-0,5)(-0,7) = 0,035 \\ G_1 &= (0,5)(-0,4)(-0,2) = 0,040 \\ G_2 &= (0,7)(0,2)(-0,6) = -0,084 \end{aligned}$$

Daí:

$$L_2(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} \right)$$

Exemplo

Se:

$$L_2(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} \right)$$

E:

$$\begin{aligned} G_d &= (0,1)(-0,4)(-0,6) = 0,024 \\ G_0 &= (0,1)(-0,5)(-0,7) = 0,035 \\ G_1 &= (0,5)(-0,4)(-0,2) = 0,040 \\ G_2 &= (0,7)(0,2)(-0,6) = -0,084 \end{aligned}$$

Então:

$$L_2(0,2) = 0,024 \left(\frac{1,221}{0,035} + \frac{3,320}{0,040} + \frac{4,953}{-0,084} \right) \rightsquigarrow L_2(0,2) \approx 1,414$$

Polinômios de Newton

- Até aqui estudamos:
  - Interpolação resolvendo sistemas;
  - Método de Lagrange;
- Mas existem ainda um método a ser estudado:
  - O método de Newton;
  - E uma variação dele: o Gregory-Newton;

Mas para estudarmos o método de Newton, precisamos descobrir o que significa isso: "operador de diferença dividida".

Operador de diferença dividida

Seja $y = f(x)$ uma função que passa por n pontos (x_i, y_i), para $0 \leq i \leq n$. O operador de diferença dividida de ordem i, $\triangle^i$, é definido por[1]:

a) Ordem 0: $\triangle^0 y_i = y_i$

b) Ordem 1: $\triangle y_i = \frac{\triangle^0 y_{i+1} - \triangle^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

c) Ordem 2: $\triangle^2 y_i = \frac{\triangle y_{i+1} - \triangle y_i}{x_{i+2} - x_i}$

d) Ordem n: $\triangle^n y_i = \frac{\triangle^{n-1} y_{i+1} - \triangle^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$

Parece complicado, mas não é tão complicado assim... Veremos a seguir!

[1] No livro texto, o operador de diferença dividida é representado por um Δ cortado.

Operador de diferença dividida

Teorema

Se $y = f(x)$ for um polinômio de grau n, então as diferenças divididas de ordem $n+1$ são identicamente nulas.

Seja o polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos x_i no intervalo $[0; 0,9]$.

i	x_i	y_i	$\triangle y_i$	$\triangle^2 y_i$	$\triangle^3 y_i$	$\triangle^4 y_i$
0	0,0	3,000	-1,20	0,5	5	0
1	0,2	2,760	-1,05	2,5	5	0
2	0,3	2,655	-0,55	5,0	5	
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

Fórmula de Newton

Aplicando a notação de diferenças divididas mostrada anteriormente, podemos escrever a fórmula do polinômio de grau n através da seguinte fórmula:

Fórmula de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \triangle^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Continua parecendo complicado, mas não é!

Exemplos

Faça a expansão da fórmula de Newton para:

- P_2;
- P_4;

Fórmula de Newton - Expandindo

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

Expandindo P_2

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

Expandindo P_4

$$P_4(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$\Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \Delta^4 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Para aumentar o grau do polinômio, basta inserir um termo!

Exemplo

Expansão de P_2:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

Usando a expansão de P_2 acima, vamos calcular $P_2(1,2)$ para os dados abaixo:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,9	3,211	-2,010	0,62
1	1,1	2,809	-1,328	
2	2,0	1,614		

Assim:

$$P_2(1,2) = 3,211 - 2,010(1,2 - 0,9) + 0,62(1,2 - 0,9)(1,2 - 1,1) = 2,627$$

Polinômios de Gregory-Newton

Quando os valores das abscissas x forem igualmente espaçados, podemos simplificar o método de Newton, resultando no método de Gregory-Newton.

Operador de diferença finita ascendente

a) Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i$
b) Ordem 1: $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$
c) Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$
d) Ordem n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

Fórmula de Gregory-Newton

Manipulando a fórmula de Newton para situações onde existem abscissas igualmente espaçados, temos:

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h}$$

Onde h é o espaço entre as abscissas.

Fórmula

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1}(u_x - j)$$

Exemplo

Usando a expansão de P_2, vamos calcular $P_2(115)$ para os dados abaixo:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	-0,003
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114		

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h} = \frac{115 - 110}{10} = 0,5$$

Assim:

$$P_2(115) = 2,041 + (0,038)(0,5) + \frac{-0,003}{2}(0,5)(0,5-1) = 2,060$$

Escolha dos pontos para interpolação

Para efetuar a interpolação de um polinômio de grau n, utilizamos $n+1$ pontos. E se houverem mais de $n+1$ pontos disponíveis?
Utilizaremos os $n+1$ pontos mais próximos do ponto a ser interpolado!

Exemplo

Calcular $P_3(1,4)$. Quais os pontos são usados?

i	x_i	y_i
0	0,7	0,043
1	1,2	1,928
2	1,3	2,497
3	1,5	3,875
4	2,0	9,000
5	2,3	13,467
6	2,6	19,176

Os 4 pontos mais próximos de 1,4!!!

[1] Frederico Ferreira Campos Filho. *Algoritmos Numéricos*. LTC, 2nd edition, 2007. ISBN 978-85-216-1537-8.

[2] Wikipedia. Interpolação, 2008. URL `http://pt.wikipedia.org/wiki/Interpolacao`. Visitado em 07 de maio 2008.