

Cálculo Numérico

Erros

Prof. Jorge Cavalcanti – jorge.cavalcanti@univasf.edu.br

MATERIAL ADAPTADO DOS SLIDES DA DISCIPLINA CÁLCULO
NUMÉRICO DA UFCG - www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/

Erros - Roteiro

- Existência
- Tipos
- Propagação

Erros - Existência

Representação de números em um sistema computacional

Os dados de entrada são enviados ao computador pelo usuário no **sistema decimal**

Toda a informação é convertida para o **sistema binário**

Todas as operações são efetuadas no **sistema binário**

Os resultados finais são convertidos para o **sistema decimal** e transmitidos ao usuário

- Todo esse processo de conversão é uma fonte de erros que pode afetar o resultado final dos cálculos.

Erros - Existência

■ Erro Inerente

Erro sempre presente nas soluções numéricas devido à incerteza sobre o valor real.

Ex. 01: Representação intervalar de dados

(50,3 ± 0,2) cm

(1,57 ± 0,003) ml

(110,276 ± 1,04) Kg

Cada medida é um **intervalo** e não um **número**.

Erros - Existência

■ Método Numérico

Método adotado na resolução de um problema físico, mediante a execução de uma sequência **finita** de operações aritméticas.

□ Consequência

- Obtenção de um resultado **aproximado**, cuja diferença do resultado esperado (exato) denomina-se **erro**.

Erros - Existência

■ Natureza dos Erros I

- Erros inerentes ao processo de aquisição dos dados.
 - Relativos à imprecisão no processo de aquisição/entrada, externos ao processo numérico.**

Erros - Existência

■ Natureza dos Erros II

- Erros inerentes ao *modelo matemático* adotado:
 - Relativos à impossibilidade de representação exata dos fenômenos reais a partir de modelos matemáticos.
 - Necessidade de adotar condições que simplifiquem o problema, a fim de torná-lo numericamente solúvel.

Erros - Existência

■ Natureza dos Erros III

□ Erros de *truncamento*

■ Substituição de um processo infinito de operações por outro finito.

Em muitos casos, o erro de *truncamento* é **precisamente** a diferença entre o modelo matemático e o modelo numérico.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Erros - Existência

■ Erro de Truncamento

Erro proveniente da limitação do número de iterações dos métodos numéricos durante a determinação de um valor de interesse.

▶ Número de iterações

- Teórico \Rightarrow Infinito ou muito grande
- Prático \Rightarrow Limitado por restrições associadas à capacidade de processamento/armazenamento do sistema

Erros - Existência

Erro de arredondamento

- Aproximação do valor de um número real para sua representação com um número finito de dígitos.
- Inerentes à estrutura da máquina e à utilização de uma aritmética de precisão finita.

Erros - Existência

■ Erro de Representação x Erro de truncamento

▶ **Erro de Representação**

- Associada à conversão numérica entre bases (representação humana e de máquina) ou à realização de operações aritméticas.

▶ **Erro de Truncamento**

- Associada à quantidade de informação que a máquina pode conter sob a forma de um número.

Erros - Existência

- Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação).

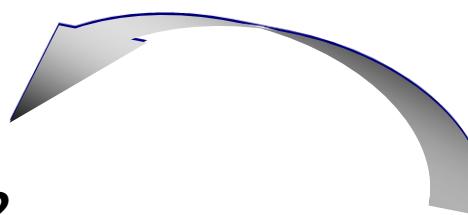
Ex. 02: Cálculo da área de uma circunferência de raio 100 m

Possíveis resultados:

(1) $A = 31400 \text{ m}^2$

(2) $A = 31416 \text{ m}^2$

(3) $A = 31414,92654 \text{ m}^2$



**Erro de
Representação**

π não tem representação finita - $3,14$
 (1) , $3,1416$ (2) e $3,141592654$ (3)

Erros - Existência

- Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação).
 - ▶ Dependência da representação numérica da máquina utilizada.

$$(0,1)_{10} = (0,0\textcolor{blue}{0011001100110011}\dots)_2$$



**Erro de
Representação**

Um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outra

Operações com dados imprecisos ou incertos acarretam a propagação do erro.

Erros - Existência

Ex. 03: Cálculo de

$$S = \sum_{i=1}^{3000} x_i$$

usando uma calculadora e um computador, para $x_i = 0,5$ e $x_i = 0,1$

x_i	Calculadora	Computador
0,5	S= 1500	S= 1500
0,1	S= 300	S=300,00909424 (precisão <i>simples</i>) S=299,999999999999720 (precisão <i>dupla</i>)

Erros - Existência

Ex. 04: Fazer a conversão de 0,1 de base 10 para a base 2

$$(0,1)_{10} = (0,0\textcolor{blue}{0011}\textcolor{red}{0011}00110011\dots)_2$$

$(0,1)_{10}$ não tem representação **exata** na base 2

A representação de um número depende da **base** em uso e do **número máximo de dígitos usados** em sua representação.

Erros - Existência

Ex. 05: Programa simples que soma números reais:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main( )
{
    int i;
    float soma = 0;
    for (i=1;i<=10000;i++)
        soma = soma + .0001;
    printf ("Soma = %10.7f \n", soma );
system ("pause");
return 0;
}
```

- A saída será o número 1,0000535, ao invés do número exato 1. O pequeno erro na representação do número decimal 0,0001 em binário se propagará pela soma, comprometendo o resultado final.

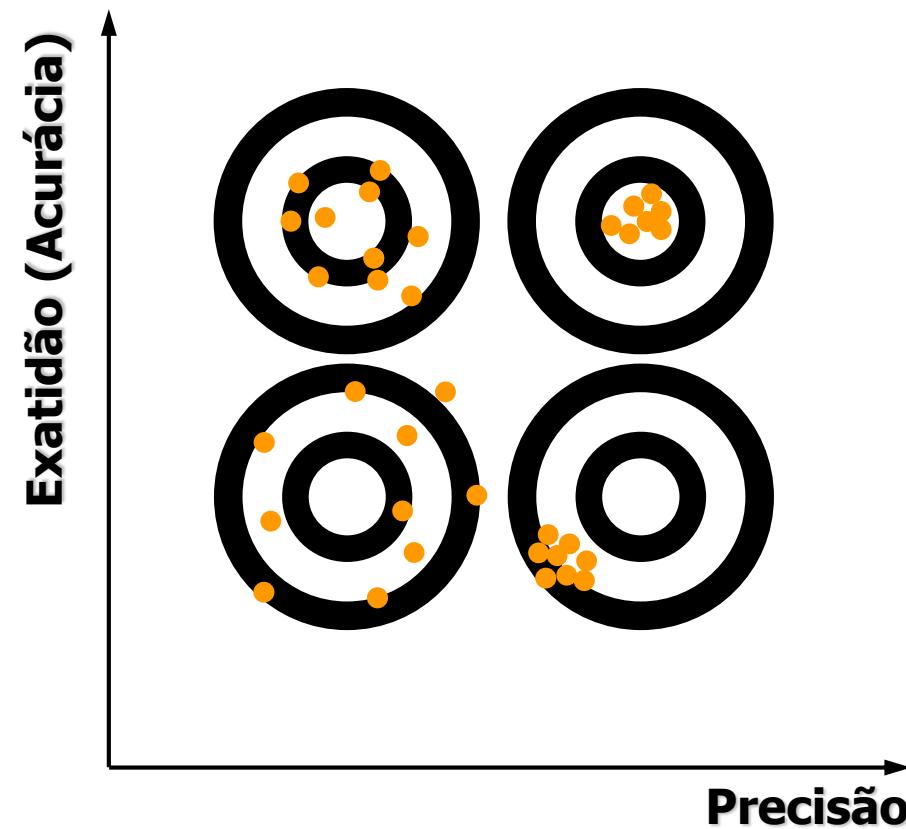
Erros - Existência

■ Exatidão (Acurácia) x Precisão I

- ▶ Uso incorreto como sinônimos na linguagem cotidiana (e mesmo em linguagem técnica).
 - **Exatidão** ⇒ Grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor verdadeiro do mensurando.
 - Exatidão é um conceito *qualitativo*
 - **Precisão** ⇒ Grau de concordância entre resultados de medição obtidos sob as mesmas condições (repetitividade).
 - Precisão é um conceito *quantitativo*

Erros - Existência

■ Exatidão (Acurácia) x Precisão II



Erros - Existência

■ Inacurácia (ou Inexatidão)

- Desvio sistemático do valor real

■ Imprecisão (ou Incerteza)

- Magnitude do espalhamento dos valores

Erros - Tipos

■ **Absoluto**

- ▶ Diferença entre o valor exato de um número e o seu valor aproximado .

$$EA_x = x - \bar{x}$$

Erros - Tipos

■ Relativo

- ▶ Razão entre o erro absoluto e o valor aproximado.

$$ER_x = \frac{(x - \bar{x})}{\bar{x}}$$

$$ER_x = \frac{EA_x}{\bar{x}}$$

$$\text{Erro Percentual}_x = ER_x \times 100\%$$

Erros - Tipos

■ Erro Absoluto - Considerações I

- ▶ EA_x só poderá ser determinado se x for conhecido com exatidão.
- ▶ Na prática, costuma-se trabalhar com um limitante superior para o erro, ao invés do próprio erro ($|E| < \varepsilon$, onde ε é o limitante).

Ex. 05: Para $\pi \in (3,14, 3,15)$

$$|EA_\pi| = |\pi - \bar{\pi}| < 0,01$$

Erros - Tipos

■ Erro Absoluto - Considerações II

Ex. 05: Sejam $a = 3876,373$ e $b = 1,373$

Considerando-se a parte inteira de a (a') o **erro absoluto** será:

$$EA_a = |a - a'| = 0,373$$

e a parte inteira de b , b' , o **erro absoluto** será:

$$EA_b = |b - b'| = 0,373$$

Erros - Tipos

■ Erro Absoluto - Considerações III

- ▶ Obviamente, o resultado do erro absoluto é o mesmo nos dois casos.
- ▶ Entretanto, o peso da aproximação em **b** é maior do que em **a**.

Erros - Tipos

■ **Erro Relativo - Consideração**

O erro relativo, entretanto, pode traduzir perfeitamente este fato, pois:

$$ER_a = \frac{0,373}{3876} \approx 0,000096 \leq 10^{-4}$$

$$ER_b = \frac{0,373}{1} \approx 0,373 \leq 4 \times 10^{-1}$$

Erros - Tipos

Ex. 06: Cálculo do erro relativo considerando-se os números $\bar{a} = \textcolor{blue}{2112,9}$, $\bar{e} = \textcolor{red}{5,3}$ e $|EA| < 0,1$

$$|ER_a| = |a - \bar{a}| / |\bar{a}| = 0,1 / 2112,9 \\ \cong \textcolor{blue}{4,7 \times 10^{-5}}$$

$$|ER_e| = |e - \bar{e}| / |\bar{e}| = 0,1 / 5,3 \cong \textcolor{red}{0,02}$$

Conclusão: a é representado com *maior* precisão do que e .

Erros - Tipos

- Arredondamento
- Truncamento de dígitos

Quanto *menor* for o *erro*, maior será a precisão do resultado da operação.

Erros - Tipos

■ Arredondamento

Ex. 07: Cálculo de $\sqrt{2}$ utilizando uma calculadora digital:

Valor apresentado: 1,4142136

Valor real: 1,41421356...

- ▶ Inexistência de forma de representação de números irracionais com uma quantidade finita de algarismos.
 - Apresentação de uma aproximação do número pela calculadora.
 - Erro de arredondamento

Erros - Tipos VII

■ Truncamento

- ▶ Associação ao método de aproximação empregado para o cálculo de uma função exata, a partir do uso de fórmulas aproximadas.
 - Ex. 08: Cálculo do valor de e^x e partir da série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

- Impossibilidade de determinação do valor **exato** da função.

Relembrando...

Representação em ponto flutuante - *float*

- Representação genérica

- $\pm(.d_1d_2\dots d_t) \times (b)^{\text{exp}}$,

- **t** é o número de dígitos da mantissa;
 - $d_1d_2\dots d_t$ = mantissa, com $0 \leq d_i \leq (b-1)$; $d_1 \neq 0$;
 - **exp** = expoente (inteiro com sinal), no intervalo $[l, u]$
 - **b** = base do sistema

Arredondamento e Truncamento

- Ex. Representação de números em um sistema de três dígitos, $b=10$, $l= -4$ e $u=4$.

x	Arredondamento	Truncamento
1.25	0.125×10	0.125×10
10.053	0.101×10^2	0.100×10^2
2.71828	0.272×10	0.271×10
0.000007	Expoente < -4	idem
718235.82	Expoente > 4	idem

Arredondamento e Truncamento

■ Erros de Truncamento e Arredondamento - Demonstração

► Em um sistema que opera em ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x definido por:

$$\bullet x = f_x \cdot 10^e + g_x \cdot 10^{e-t} \quad (0,1 \leq f_x < 1 \text{ e } 0,1 \leq g_x < 1)$$

□ Para $t = 4$ e $x = 234,57$, então:

$$x = 0,2345 \cdot 10^3 + 0,7 \cdot 10^{-1}$$

$$f_x = 0,2345$$

$$g_x = 0,7$$

Erros - Truncamento

$$x = f_x \cdot 10^e + g_x \cdot 10^{e-t} \quad (0,1 \leq f_x < 1 \text{ e } 0,1 \leq g_x < 1)$$

- No truncamento, $g_x \cdot 10^{e-t}$ é desprezado e

$$\bar{x} = f_x \cdot 10^e$$

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| \cdot 10^{e-t} < 10^{e-t}$$

visto que $|g_x| < 1$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|g_x| \cdot 10^{e-t}}{|f_x| \cdot 10^e} < \frac{10^{e-t}}{0,1 \cdot 10^e} < 10^{-t+1}$$

pois 0,1 é o menor valor possível para f_x

Erros – Arredondamento

- No arredondamento **simétrico** (forma mais utilizada):

$$\bar{x} = \begin{cases} f_x \cdot 10^e \\ f_x \cdot 10^e + 10^{e-t} \end{cases}$$

, se $|g_x| < \frac{1}{2}$ (g_x é desprezado)

, se $|g_x| \geq \frac{1}{2}$ (soma 1 ao último dígito de f_x)

Erros - Arredondamento

Se $|g_x| < \frac{1}{2}$, então:

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| \cdot 10^{e-t} < \frac{1}{2} \cdot 10^{e-t}$$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|g_x| \cdot 10^{e-t}}{|f_x| \cdot 10^e} < \frac{0,5 \cdot 10^{e-t}}{0,1 \cdot 10^e} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-t+1}$$

Erros – Arredondamento

Se $|g_x| \geq \frac{1}{2}$, então:

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |(f_x \cdot 10^e + g_x \cdot 10^{e-t}) - (f_x \cdot 10^e + 10^{e-t})|$$

$$|EA_x| = |g_x \cdot 10^{e-t} - 10^{e-t}| = |(g_x - 1) \cdot 10^{e-t}| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{e-t}$$

e

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} \leq \frac{1/2 \cdot 10^{e-t}}{|f_x \cdot 10^e + 10^{e-t}|} < \frac{1/2 \cdot 10^{e-t}}{|f_x| \cdot 10^e} < \frac{1/2 \cdot 10^{e-t}}{0,1 \cdot 10^e} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-t+1}$$

Arredondamento e Truncamento

■ Erros de Truncamento e Arredondamento

► Sistema operando em ponto flutuante - Base 10, t dígitos.

• Erro de Truncamento

$$|EA_x| < 10^{e-t}$$

$$|ER_x| < 10^{-t+1}$$

• Erro de Arredondamento

$$|EA_x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t}$$

$$|ER_x| < \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

e - nº de dígitos inteiros
t - nº de dígitos do sistema

Arredondamento e Truncamento

■ Sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, precisão dupla

- Ex. 09: Seja $x = 0,937 \cdot 10^4$ e $y = 0,1272 \cdot 10^2$, exatamente representados. Calcular $x+y$.

► Alinhamento dos pontos decimais antes da soma

$$x = 0,937 \cdot 10^4 \text{ e}$$

$$y = 0,001272 \cdot 10^4,$$

$$x+y = 0,938272 \cdot 10^4$$

► Resultado com 4 dígitos

Arredondamento: $\underline{\overline{x+y}} = 0,9383 \cdot 10^4$

Truncamento: $\underline{\overline{x+y}} = 0,9382 \cdot 10^4$

Arredondamento e Truncamento

■ Sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, precisão dupla

- Ex. 10: Seja $x = 0,937 \cdot 10^4$ e $y = 0,1272 \cdot 10^2$, exatamente representados. Calcular $x \cdot y$.

$$x \cdot y = (0,937 \cdot 10^4) \cdot (0,1272 \cdot 10^2)$$

$$x \cdot y = (0,937 \cdot 0,1272) \cdot 10^6 \Rightarrow x \cdot y = 0,1191864 \cdot 10^6$$

► Resultado com 4 dígitos

Arredondamento: $\overline{x \cdot y} = 0,1192 \cdot 10^6$

Truncamento: $\overline{x \cdot y} = 0,1191 \cdot 10^6$

Arredondamento e Truncamento

■ Considerações

- ▶ Ainda que as parcelas ou fatores de uma operação possam ser representados exatamente no sistema, não se pode esperar que o resultado armazenado seja exato.
- ▶ x e y tinham representação **exata**, mas os resultados $x+y$ e $x.y$ tiveram representação **aproximada**.

Erros – Propagação

■ Propagação dos Erros:

- ▶ Durante as operações aritméticas de um método, os erros dos operandos produzem um erro no resultado da operação.
 - Propagação ao longo do processo.
 - Determinação do erro no resultado final obtido.

Erros – Propagação

Ex. 11: Suponha-se que as operações a seguir sejam processadas em uma máquina com 4 dígitos significativos e fazendo-se:

$x_1 = 0,3491 \times 10^4$ e $x_2 = 0,2345 \times 10^0$, tem-se:

$$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= \\&= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\&= 0,3491 \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 = 0,0000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= \\&= 0,2345 \times 10^0 + (0,3491 \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4) \\&= 0,2345 + 0,0000 = 0,2345\end{aligned}$$

Erros – Propagação

- Os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser, pois a adição é uma operação distributiva.

$$(x_2 + x_1) - x_1 = 0,0000 \text{ e}$$

$$x_2 + (x_1 - x_1) = 0,2345$$

- ▶ Causa da diferença \Rightarrow arredondamento feito na adição $(x_2 + x_1)$, cujo resultado tem 8 dígitos.
- ▶ A máquina só armazena 4 dígitos (desprezando os menos significativos).

Erros – Propagação

■ Resolução numérica de um problema

► Importância do conhecimento dos efeitos da propagação de erros:

- Determinação do erro final de uma operação numérica.
- Conhecimento da sensibilidade de um determinado problema ou método numérico.

Erros – Propagação

- **Ex. 12: identificar o erro no valor de $\sqrt{2} - e^3$.**
 - ▶ $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ (erro de arredondamento)
 - ▶ $e^3 = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ (erro de truncamento)
 - ▶ Propagação dos erros nos valores de $\sqrt{2}$ e e^3 para o resultado de $\sqrt{2} - e^3$

Erros – Propagação

- **Ex. 13: Dados $a = 50 \pm 3$ e $b = 21 \pm 1$, calcular $a + b$**
 - ▶ Variação de $a \Rightarrow 47$ a 53
 - ▶ Variação de $b \Rightarrow 20$ a 22
 - ▶ Menor valor da soma $\Rightarrow 47 + 20 = 67$
 - ▶ Maior valor da soma $\Rightarrow 53 + 22 = 75$
 - $a + b = (50 + 21) \pm 4 = 71 \pm 4 \Rightarrow 67$ a 75

Erros – Propagação

■ Análise dos Erros **Absoluto e Relativo:**

- ▶ Fórmulas para os erros nas operações aritméticas.
- ▶ Erros presentes nas parcelas ou fatores e no resultado da operação.
 - Supondo um **erro final arredondado**, sendo **x** e **y**, tais que:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{EA}_x \text{ e } \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{EA}_y$$

Erros – Propagação

■ Adição

► Erro Absoluto

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{EA}_x) + (\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{EA}_y) = (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{EA}_x + \mathbf{EA}_y)$$

$$\mathbf{EA}_{\mathbf{x+y}} = \mathbf{EA}_x + \mathbf{EA}_y$$

► Erro Relativo

$$\mathbf{ER}_{\mathbf{x+y}} = \frac{\mathbf{EA}_{\mathbf{x+y}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}} = \left(\frac{\mathbf{EA}_x}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}} \right) + \left(\frac{\mathbf{EA}_y}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}} \right)$$

$$\mathbf{ER}_{\mathbf{x+y}} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}} \right) + \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{\mathbf{y}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}} \right)$$

Erros – Propagação

■ Subtração

► Erro Absoluto

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{EA}_x) - (\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{EA}_y) = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{EA}_x - \mathbf{EA}_y)$$

$$\mathbf{EA}_{x-y} = \mathbf{EA}_x - \mathbf{EA}_y$$

► Erro Relativo

$$\mathbf{ER}_{x-y} = \frac{\mathbf{EA}_x - \mathbf{EA}_y}{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}} \right) - \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{\mathbf{y}}}{\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}} \right)$$

Erros – Propagação

■ Multiplicação

► Erro Absoluto

$$x \cdot y = (\bar{x} + EA_x) \cdot (\bar{y} + EA_y) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot EA_x + \bar{x} EA_y + (EA_x \cdot EA_y)$$

muito pequeno

$$x \cdot y \approx (\bar{x} + EA_x) \cdot (\bar{y} + EA_y) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot EA_x + \bar{x} EA_y$$

$$EA_{xy} \approx \bar{x} EA_y + \bar{y} EA_x$$

► Erro Relativo

$$ER_{xy} = \frac{\bar{x} EA_y + \bar{y} EA_x}{\bar{x} \bar{y}} = \frac{EA_x}{\bar{x}} + \frac{EA_y}{\bar{y}}$$

$$ER_{x \cdot y} = ER_x + ER_y$$

Erros – Propagação

■ Divisão

► Erro Absoluto

$$\frac{x}{y} = \frac{(\bar{x} + EA_x)}{(\bar{y} + EA_y)} = \frac{(\bar{x} + EA_x)}{\bar{y}} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{EA_y}{\bar{y}}} \right)$$

Simplificação:

$$\frac{1}{1 + \frac{EA_y}{\bar{y}}} = 1 - \frac{EA_y}{\bar{y}} + \left(\frac{EA_y}{\bar{y}} \right)^2 - \left(\frac{EA_y}{\bar{y}} \right)^3 + \dots$$

(desprezam-se os termos de potência >1)

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{y}EA_x - \bar{x}EA_y}{\bar{y}^2}$$

► Erro Relativo

$$ER_{x/y} = \left(\frac{\bar{y}EA_x - \bar{x}EA_y}{\bar{y}^2} \right) \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

$$ER_{x/y} = ER_x - ER_y$$

Erros – Propagação (Resumo)

■ Soma

$$\mathbf{ER}_{x+y} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

■ Subtração

$$\mathbf{ER}_{x-y} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right) - \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

■ Multiplicação

$$\mathbf{ER}_{x \cdot y} = \mathbf{ER}_x + \mathbf{ER}_y$$

■ Divisão

$$\mathbf{ER}_{x/y} = \mathbf{ER}_x - \mathbf{ER}_y$$

Erros – Análise

- Nos erros anteriormente formulados, ainda não foi considerado o erro de arredondamento ou truncamento no resultado final.
- A análise completa da propagação do erro se faz considerando os erros nas parcelas ou fatores e no resultado de cada operação efetuada.

Erros – Análise

Ex. 14: Sejam x e y representados exatamente. Qual o erro relativo na operação x + y?

$$ER_{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{x+y} + RA$$

$$ER_{x+y} = RA$$

$$\begin{aligned} EA_x &= EA_y = 0, \\ \therefore EA_{x+y} &= 0 \end{aligned}$$

$$|ER_{x+y}| = |RA| < \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

Como x e y são representados exatamente, ER_{x+y} se resume ao *Erro Relativo de Arredondamento (RA)* no resultado da soma.

Erros – Análise

- **Sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, precisão dupla.**
 - Ex. 15: Seja $x = 0,937 \times 10^4$, $y = 0,1272 \times 10^2$ e $z = 0,231 \times 10^1$, calcular $x+y+z$ e $ER_{(x+y+z)}$, sabendo que x , y e z estão exatamente representados.
 - Solução:

Alinhando as vírgulas decimais

 $x = 0,937 \times 10^4$ $y = 0,001272 \times 10^4$ e $z = 0,000231 \times 10^4$

Erros – Análise

Ex. 15:

► Solução:

- A soma é feita por partes: $(x+y)+z$

$$x+y = 0,9383 \times 10^4$$

$$x+y+z = 0,9383 \times 10^4 + 0,000231 \times 10^4$$

$$x+y+z = 0,938531 \times 10^4$$

$$x+y+z = 0,9385 \times 10^4$$

(após o arredondamento)

$$\boxed{x+y+z= 0,9385 \times 10^4}$$

Erros – Análise

■ Ex. 15:

► Solução:

$$s = x + y \text{ então } \bar{s} = \overline{x + y} = 0,9383 \times 10^4$$

$$ER_s = ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + ER_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + RA_s \quad EA_x = EA_y = 0, \\ \therefore EA_{x+y} = 0$$

$$ER_s = RA_s$$

$$ER_{x+y+z} = ER_{s+z} + RA$$

$$ER_{x+y+z} = ER_s \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s} + \bar{z}} \right) + ER_z \left(\frac{\bar{z}}{\bar{s} + \bar{z}} \right) + RA$$

Erros – Análise

■ Ex. 15:

$$ER_{x+y+z} = ER_s \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} \right) + ER_z \left(\frac{\overline{z}}{\overline{x+y+z}} \right) + RA$$

$$EA_z = 0, \\ \therefore ER_z = 0$$

$$ER_{x+y+z} = ER_s \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} \right) + RA$$

$$ER_{x+y+z} = RA_s \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} \right) + RA = RA \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} + 1 \right)$$

$$RA \leq \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

$$|ER_{x+y+z}| < \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} + 1 \right) \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

Erros – Análise

■ Ex. 15:

► Solução:

$$|ER_{x+y+z}| < \left(\frac{\overline{x+y}}{\overline{x+y+z}} + 1 \right) \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

$$|ER_{x+y+z}| < \left(\frac{0,9383 \times 10^4}{0,9385 \times 10^4} + 1 \right) \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$|ER_{x+y+z}| < 0,9998 \times 10^{-3}$$

Erros – Análise

Ex. 16: Supondo que x é representado num computador por \bar{x} , que é obtido por arredondamento. Obter os limites superiores para os erros relativos de

a) $u = 2 \times \bar{x}$ e $w = \bar{x} + \bar{x}$

b) $z = 3 \times \bar{x}$ e $y = \bar{x} + \bar{x} + \bar{x}$

Erros – Análise

Ex. 16:

- ▶ Solução a):

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{2}} \times \bar{\mathbf{x}}$$

$$ER_{2.\bar{x}} = ER_2 + ER_{\bar{x}} + RA = RA + RA = 2.RA$$

$$|ER_{2.\bar{x}}| < 2 \cdot \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

$$|ER_u| < 10^{-t+1}$$

Erros – Análise

■ Ex. 16:

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{ER}_w = \mathbf{ER}_{\bar{x}} \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}} \right) + \mathbf{ER}_{\bar{x}} \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}} \right) + \mathbf{RA}$$

$$\mathbf{ER}_w = 2 \cdot \mathbf{RA} \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}} \right) + \mathbf{RA} = 2 \cdot \mathbf{RA}$$

$$|\mathbf{ER}_w| = 2 \cdot |\mathbf{RA}| < 2 \cdot \frac{1}{2} 10^{-t+1} = 10^{-t+1}$$

$$|\mathbf{ER}_w| = |\mathbf{ER}_u| < 10^{-t+1}$$

Erros – Sumário I

- 1. Erro relativo da soma** ⇒ Soma dos erros relativos de cada parcela, ponderados pela participação de cada parcela no total da soma.

$$\mathbf{ER}_{x+y} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

- 2. Erro relativo da subtração** ⇒ Diferença dos erros relativos do minuendo e do subtraendo, ponderados pela participação de cada parcela no resultado da subtração.

$$\mathbf{ER}_{x-y} = \mathbf{ER}_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right) - \mathbf{ER}_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

Erros – Sumário II

1. Erro relativo do produto \Rightarrow Soma dos erros relativos dos fatores.

$$\mathbf{ER}_{x \cdot y} = \mathbf{ER}_x + \mathbf{ER}_y$$

2. Erro relativo da divisão \Rightarrow Diferença dos erros relativos do dividendo e do divisor.

$$\mathbf{ER}_{x/y} = \mathbf{ER}_x - \mathbf{ER}_y$$

Erros – Exercícios

1. Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, base decimal e com acumulador de precisão dupla. Dados os números $x = 0,7237 \times 10^4$, $y = 0,2145 \times 10^{-3}$ e $z = 0,2585 \times 10^1$, efetuar as seguintes operações e obter o erro relativo nos resultados, supondo que x , y , e z estão exatamente representados.

a) $x+y+z$

b) x/y

Erros – Exercícios

2. Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por $b=10$, $t=5$, $l=-6$ e $u=6$. Pede-se

- a) O maior e menor número em módulo, representados nesta máquina;
- b) Como será representado o número 392,856 nesta máquina, se for usado o arredondamento e o truncamento?
- c) Se $a=356555$ e $b=2$, qual o resultado da operação $a+b$, com arredondamento?

Erros – Exercícios

3. Sejam x, y, z e t representados exatamente. Qual o erro relativo total na operação $u=(x+y)*z-t$?

Erros - Bibliografia

- ▶ Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. MAKRON Books, 1996, 2^a ed.
- ▶ Asano, C. H. & Colli, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- ▶ Sanches, I. J. & Furlan, D. C. *Métodos Numéricos*. DI/UFPR, 2006.