CÁLCULO NUMÉRICO

Profa. Dra. Yara de Souza Tadano *yaratadano@utfpr.edu.br*

Aula 16

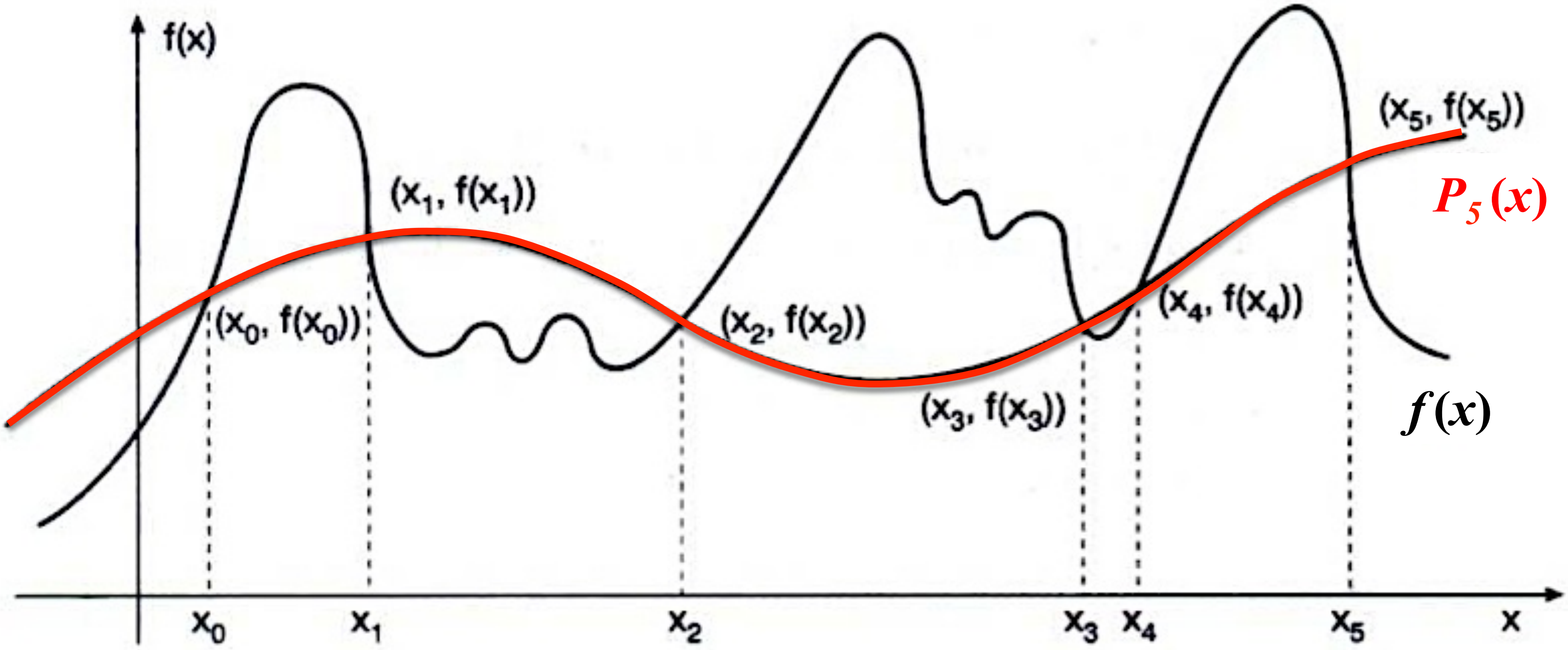
05/2014

Splines

SPLINES

- Se $f(x)$ está tabelada em $(n + 1)$ pontos e a aproximarmos por um polinômio de grau n que a interpola sobre os pontos tabelados, o resultado pode ser desastroso.

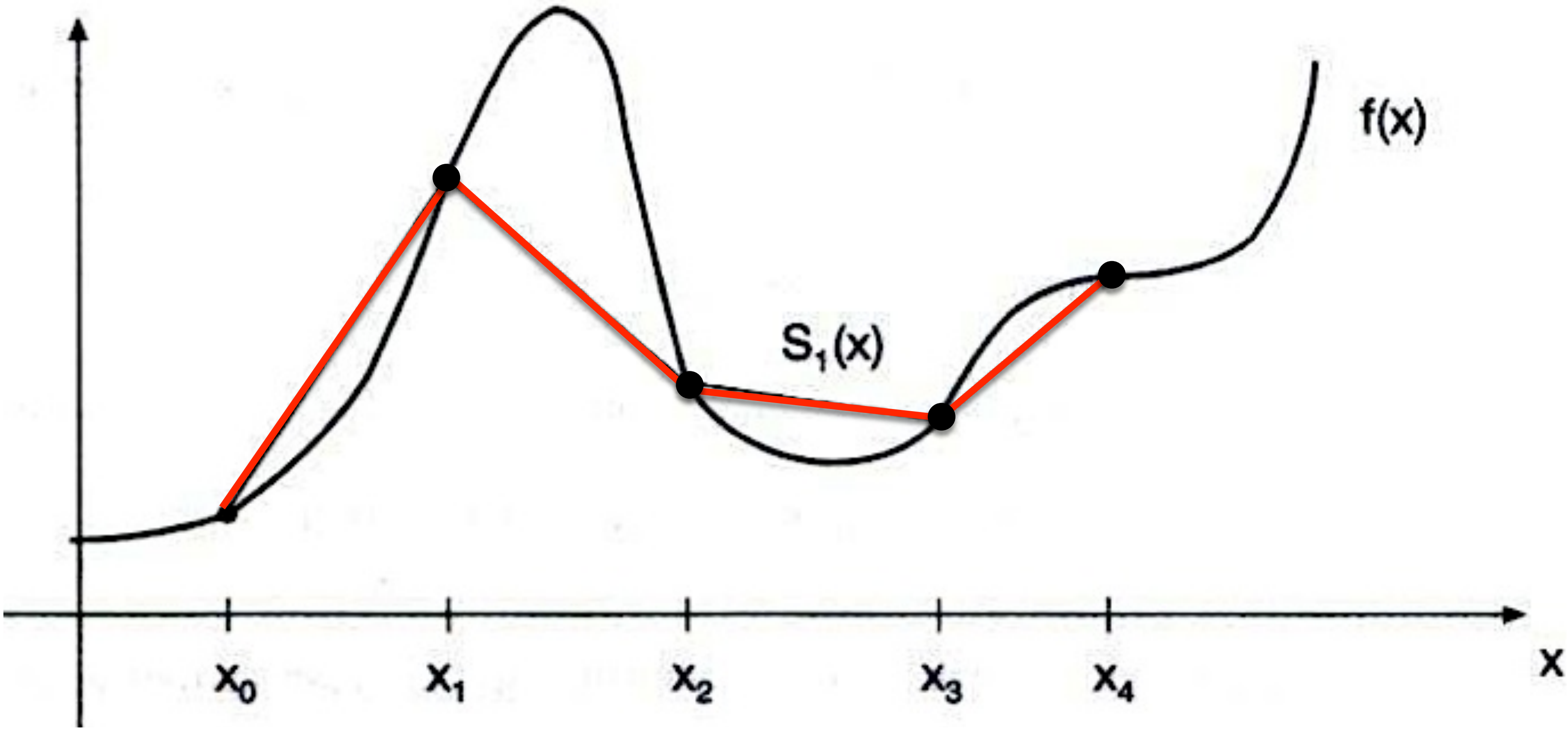
- Veja o exemplo a seguir, onde aproximou-se $f(x)$ por um polinômio de grau 5.


f(x)
(x1, f(x1))
(x5, f(x5))
P5 (x)
(x0, f(x0))
(x2, f(x2))
(x4, f(x4))
(x3, f(x3))
f (x)
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x

- Uma alternativa é interpolar $f\,(x)$ em **grupos de poucos pontos**, obtendo-se polinômios de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem.

Aproximação Linear por Partes

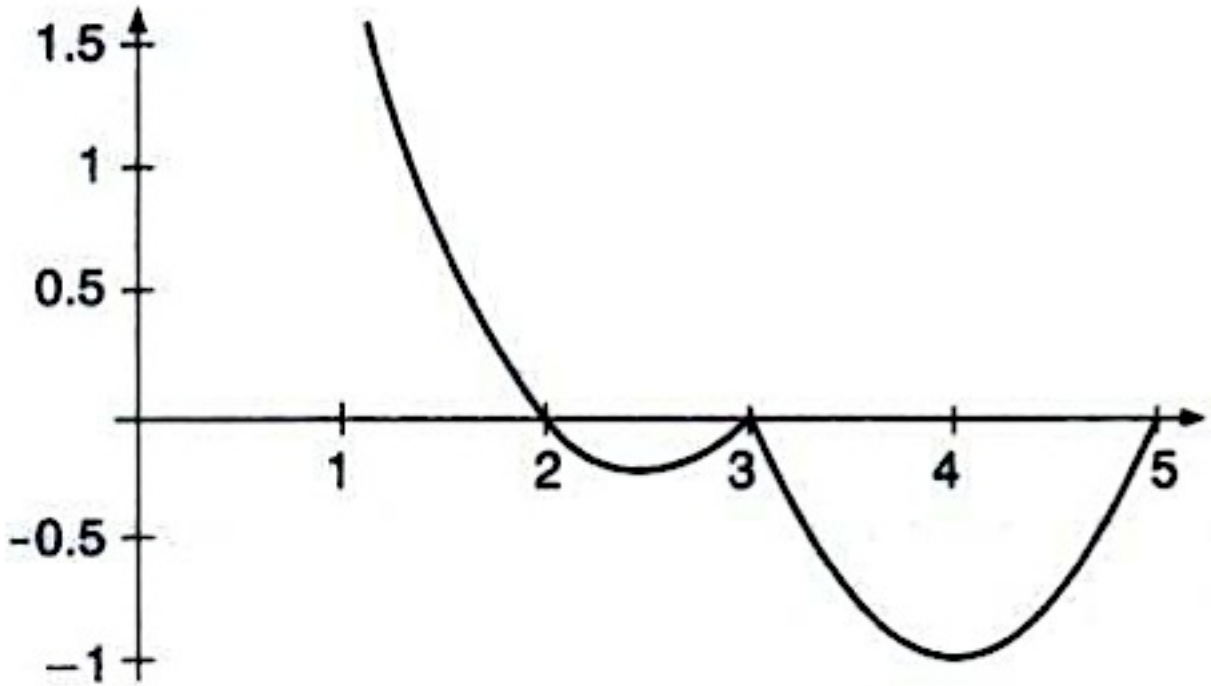
- Vejamos o caso de aproximação por uma **função linear** por partes:



Aproximação linear por partes

- Observe que a função $S_1(x)$ é contínua, mas não é derivável em (x_0, x_4), uma vez que $S_1'(x)$ não existe para $x = x_i$, $1 \leq i \leq 3$.

- Podemos optar também por, a cada três pontos (x_i , x_{i+1} , x_{i+2}) passar um **polinômio de grau 2** e, neste caso, teremos também garantia só de continuidade da função que vai aproximar $f(x)$.



- No caso das funções ***spline***, a opção feita é aproximar a função tabelada, em cada subintervalo $[x_i , x_{i+1}]$, por um polinômio de grau p, com algumas imposições.

Definição

- Considere a função $f\,(x)$, definida em [a, b] e tabela nos pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

- Uma função $S_p\,(x)$ é denominada **spline de grau p** com nós nos pontos x_i , $i = 0, 1, \ldots, n$, se satisfaz as seguintes condições:

Definição

- Em cada subintervalo $[x_i , x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., (n - 1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p: $s_k(x)$;
- $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p - 1)$ em [a, b].
- Se além disso, $S_p(x)$ também satisfaz a condição:
  - $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$,

ENTÃO, SERÁ DENOMINADA **SPLINE INTERPOLANTE.**

Spline Linear Interpolante

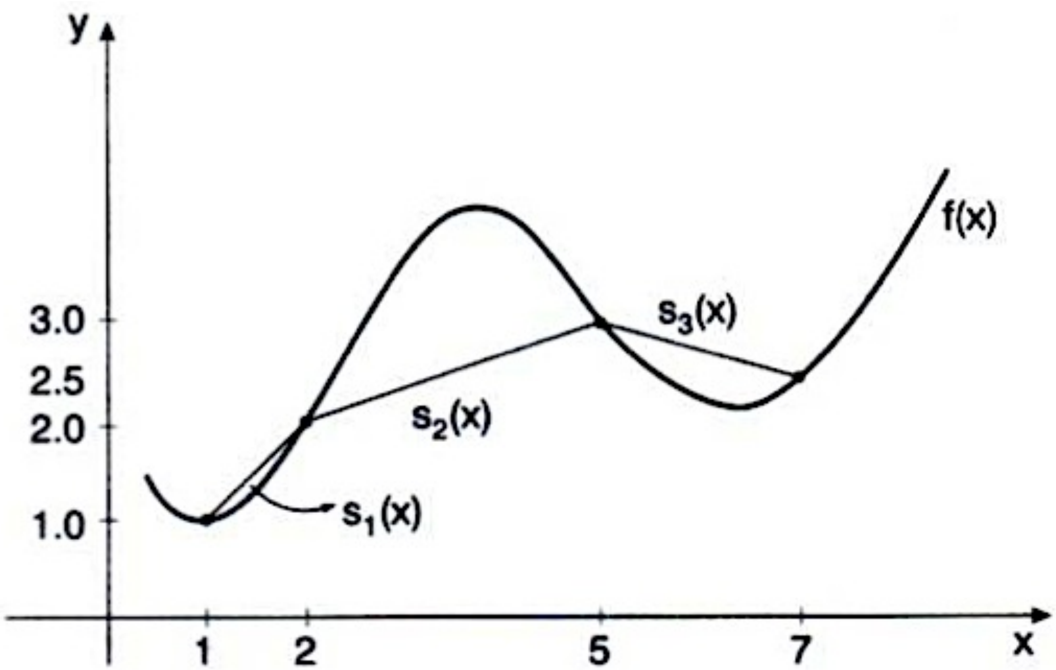
- A função ***spline* linear interpolante** de $f(x)$, $S_1(x)$, nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i]$$

EXEMPLO 1

- Achar a função *spline* linear que interpola a função tabelada:

i	0	1	2	3
x_i	1	2	5	7
$f(x_i)$	1	2	3	2,5



EXEMPLO 1

- Assim:

$$S_1(x) = \begin{cases} x, & se \ \ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{1}{3}(x+4), & se \ \ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{1}{2}(-0,5x+8,5), & se \ \ x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

Spline Cúbica Interpolante

- Uma ***spline* cúbica**, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um **polinômio de grau 3** no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$.

Definição de *Spline* Cúbica

- Supondo que $f(x)$ esteja tabelada nos pontos x_i , $i = 0, 1, 2, ..., n$, a função $S_3(x)$ é chamada ***spline* cúbica interpolante** de $f(x)$ nos nós x_i , se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, $k = 1, 2, ... , n$, tais que:

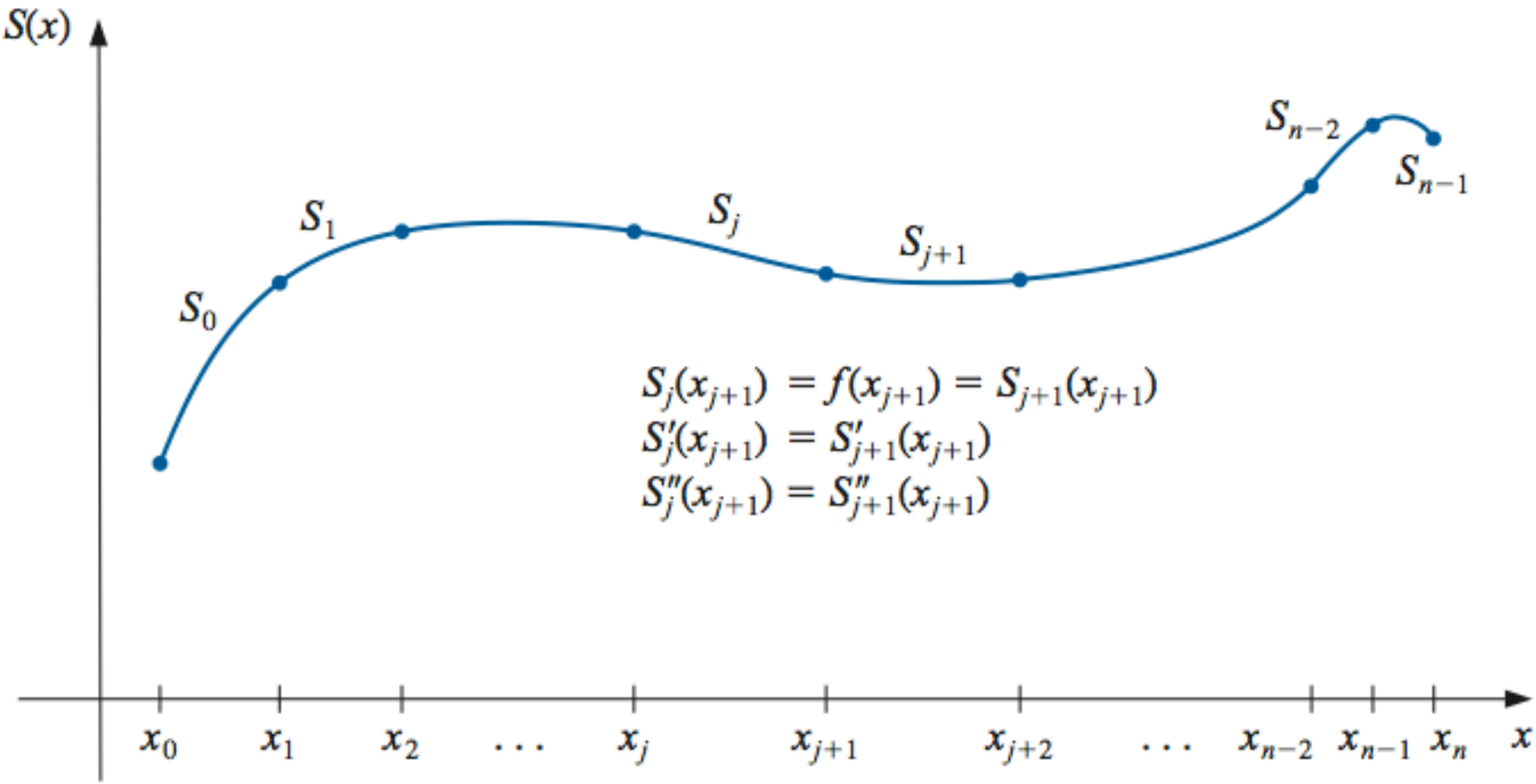
i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$;

ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$;

iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$;

iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$;

v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$.



$S(x)$
S_0
S_1
S_j
S_{j+1}
S_{n-2}
S_{n-1}
$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$
$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$
$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$
x_0 x_1 x_2 . . . x_j x_{j+1} x_{j+2} . . . x_{n-2} x_{n-1} x_n x

- Para simplicidade de notação, escreveremos:

$$\boxed{s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n}$$

- Assim, o cálculo de $S_3\ (x)$ exige a determinação de 4 coeficientes para cada k , num total de **<u>*4n* coeficientes</u>**:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots\ ,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$$

- Impondo as condições para que $S_3\,(x)$ seja *spline* interpolante de f em $x_0, \ldots, x_n$, teremos:

  - $(n + 1)$ condições para que $S_3\,(x)$ interpole $f\,(x)$ nos nós;
  - $(n - 1)$ condições para que $S_3\,(x)$ esteja bem definida nos nós (continuidade de $S_3\,(x)$ em $[x_0\,, x_n]$);
  - $(n - 1)$ condições para que $S_3'(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$; e
  - $(n - 1)$ condições para que $S_3''\,(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$.

- Totalizando: $n + 1 + 3(n - 1) =$ **$4n - 2$ condições**.

- Como precisamos determinar *4n* coeficientes, precisamos de **mais duas condições**, para determinar todos os coeficientes:

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n$$

- Essas condições podem ser impostas de acordo com informações físicas do problema.

- Podemos supor:

  - $S_3''(x_0) = g_0 = 0$ e $S_3''(x_n) = g_n = 0$, que é chamada **spline natural**, que é equivalente a supor que os polinômios cúbicos nos intervalos extremos ou são **lineares ou próximos de funções lineares**;

  - $g_0 = g_1$, $g_n = g_{n-1}$, que é equivalente a supor que as cúbicas são aproximadamente **parábolas**, nos extremos;

  - Impor valores para as inclinações em cada extremo, o que fornecerá duas equações adicionais.

- Para satisfazer as condições de (i) à (v) de uma *spline* interpolante de f em $x_0, \ldots, x_n$.
- Usando as notações $s_k''(x_k) = g_k$ e $f(x_k) = y_k$, teremos:

$$\boxed{a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k},} \qquad \boxed{b_k = \frac{g_k}{2},}$$

$$\boxed{c_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6}\right],} \qquad \boxed{d_k = y_k}$$

- Vemos que os coeficientes estão relacionados com $g_j = s_j''(x_j)$.

- Para obter g_j , ainda da condição (iv) ($s_k{}'(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, (n - 1)$), teremos:

$$\boxed{h_k g_{k-1} + 2\left(h_k + h_{k+1}\right) g_k + h_{k+1} g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)}$$

que é um sistema de equações lineares com $(n - 1)$ equações ($k = 1, \ldots, (n - 1)$) e $(n + 1)$ incógnitas: $\mathbf{g_0}$, g_1, g_{n-1}, $\mathbf{g_n}$.

- Temos, então, um sistema indeterminado, Ax = b, onde $x = (g_0, g_1, \ldots, g_n)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n+1)}$$

$$b = 6\begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

- Para resolvermos este sistema, vimos que são necessárias mais duas condições.
- No caso da **spline natural**, ou seja, $S_3''(x_0) = g_0 = 0$ e $S_3''(x_n) = g_n = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n+1)}$$

$$b = 6\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

EXEMPLO 2

- Vamos encontrar uma aproximação para $f\,(0{,}25)$ por *spline* cúbica natural interpolante da tabela:

x	0	$0{,}5$	$1{,}0$	$1{,}5$	$2{,}0$
$f\,(x)$	3	$1{,}8616$	$-0{,}5571$	$-4{,}1987$	$-9{,}0536$

EXEMPLO 2

- Como queremos a spline cúbica natural, $g_0 = g_4 = 0$, e lembrando que $h = x_i - x_{i-1} = 0,5$, o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{bmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2

- Substituindo os valores para h e y_i , $0 \leq i \leq 4$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,3636 \\ -14,6748 \\ -14,5598 \end{bmatrix}$$

- Resolvendo pelo Método de Eliminação de Gauss:

$$g_3 = -6,252; \quad g_2 = -4,111; \quad g_1 = -6,6541$$

EXEMPLO 2

- Levando estes valores em a_k , b_k , c_k , d_k , encontramos $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$.
- Como queremos uma aproximação para $f(0,25)$,

$f(0,25) \approx s_1(0,25)$

$$\boxed{s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1}$$

onde:

$$\boxed{a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h} = -2,2180}$$

EXEMPLO 2

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = -3,3270$$

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2hg_1 + g_0 h}{6} = -3,3858$$

$$d_1 = y_1 = 1,8616$$

- Assim, por spline cúbica natural interpolante:

$$f(0,25) \approx s_1(0,25) = 2,5348$$