Simulado Cálculo Numérico

Código da turma: *03 5CANU-NT3*

Professor: *Heleno Cardoso* **Data:** *20/11/2018*

____

Nome do aluno

1. Escalone e resolva os seguintes sistemas lineares pelo método de jordan:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$

2. Escalone e resolva os seguintes sistemas lineares pelo método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - 6z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y = 2 \\ 3x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 5x + 8y + 5z = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 4x + 8y + 1z = -7 \\ -2x - 10y + 2z = 0 \end{cases}$

3. Calcule $P_1(0.2)$ e determinar o polinômio interpolador, dados os pontos abaixo retirados da função $f(x) = e^{2x}$.

i	*0*	*1*
x_i	*0,1*	*0,6*
y_i	*1,221*	*3,320*

4. Dados os pontos abaixo retirados da função f(x) = x + 1, determinar o polinômio interpolador:

I	*0*	*1*
x_i	*0,1*	*1,52*
y_i	*1,1*	*2,52*

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1.x$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.(x - x_0)$$

Simulado Cálculo Numérico

5. Calcule $P_1(0.7)$, dados os pontos abaixo retirados da função f(x) = x + 1, calculada na questão 4..

6. Considerando os dados da tabela abaixo, determinar o polinômio interpolador:

I	X	Y
0	-1	1
1	0	1
2	1	0

Calcular P(0.5)

a) **Método de Lagrange**

$$L_2(x) = y_0 . \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} . \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 . \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} . \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 . \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} . \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

b) **Método de Newton**

Atenção: Calcular os operadores da diferença dividida.

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1)$$

c) **Método de Gregory Newton**

Atenção: Calcular os operadores de diferenças finitas, h e ux

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} .(u_x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} .(u_x - 0).(u_x - 1)$$

$$h = x_1 - x_0$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h}$$

7. Considerando os dados da tabela abaixo, calcular P(1.2) pelo método de Newton.

I	X	Y
0	0.9	3.211
1	1.1	2.809
2	2.0	1.614

8. Considerando os dados da tabela abaixo, encontre X estimado, tal que f(x)= 2.

X	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72

$$P_1(x) = f(x_0) * \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) * \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Simulado Cálculo Numérico

9. Considerando os dados da tabela abaixo, calcular P(1.2) pelo método de Newton.

X	0	1	2
f(x)	0	0.5	0.75

10. Calcular a área da integral pela regra do trapézio. Arbitrar um número de subintervalos.

$$I = \int_0^{0.8} \frac{10*\cos(3x)}{(1+x)^{3/2}} dx; \qquad A = \frac{h}{2} * [y_0 + 2*(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n] \qquad h = \frac{x_n - x_0}{N}$$

11. Calcular a área da integral, pela regra do trapézio, com N igual a 10 trapézios ou subintervalos.

$$\int_0^1 e^x dx$$

12. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra dos trapézios com n igual a 08 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

13. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra 1/3 de Simpson, primeira regra de Simpson, com m igual a 06 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$I_2 = \frac{h}{3} * (c_0 * y_0 + c_1 * y_1 + c_2 * y_2 + \ldots + c_n * y_n) \qquad h = \frac{x_n - x_0}{m}$$

14. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra 3/8 de Simpson, segunda regra de Simpson, com m igual a 09 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$I_3 = \frac{3h}{8} * (c_0 * y_0 + c_1 * y_1 + c_2 * y_2 + \ldots + c_n * y_n) \qquad h = \frac{x_n - x_0}{m}$$

15. Dados os pontos (0.1; 1.221), (0.6; 3.320) e (0.8; 4.953), determine o valor de $P_2(0.4)$. Calcule utilizando o método de interpolação quadrática.

16. Resolver pelo método da decomposição LU o seguinte sistema linear:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

17. Seja a tabela abaixo gerada pela função f(x)= $x^3 - 3x^2 + 2$, encontre a função spline linear que interpola os pontos tabelados:

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	4	2	0	4

18. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Seidel, com 4 decimais de arredondamento e erro menor ou igual a 0.02. Admitir solução inicial nula.

a. $\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$

19. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Seidel, com erro menor ou igual a 5 * 10^{-2}. Admitir vetor inicial (0; 0; 0).

a. $\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$

20. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, com 4 decimais de arredondamento e erro menor ou igual a 0.02. Admitir solução inicial nula.

a. $\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$

21. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, com erro menor ou igual a 5 * 10^{-2}. Admitir vetor inicial (0; 0; 0).

a. $\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$

22. Considerando os dados da tabela, determinar o polinômio interpolador, usando: a) Método de Lagrange b) Método de Newton c) Método de Gregory Newton Calcular P(1.5)

I	0	1	2
X	1	2	3
Y	0	-1	-2

Simulado Cálculo Numérico

23. A velocidade do som na água varia com a temperatura. Usando os valores da tabela abaixo, determinar o valor aproximado da velocidade do som na água a 100ºC.

Temperatura (ºC)	Velocidade (m/s)
93,3	1548
98,9	1544
104,4	1538
110,0	1532

24. A que temperatura a água entra em ebulição no Pico da Bandeira (altitude = 2890m), sabendo que o ponto de ebulição da água varia com a altitude, conforme mostra a tabela abaixo (utilize o método que considerar mais adequado).

Altitude (m)	Ponto de Ebulição da Água (ºC)
950	96,84
1050	96,51
1150	96,18
.	.
.	.
.	.
2800	90,67
2900	90,34
3000	90,00

25. Considerando a tabela acima, determinar o ponto de ebulição da água em um local de Belo Horizonte que possui altitude igual a 1000m (utilize o método que considerar mais adequado).

26. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra dos trapézios com n igual a 05 pontos.

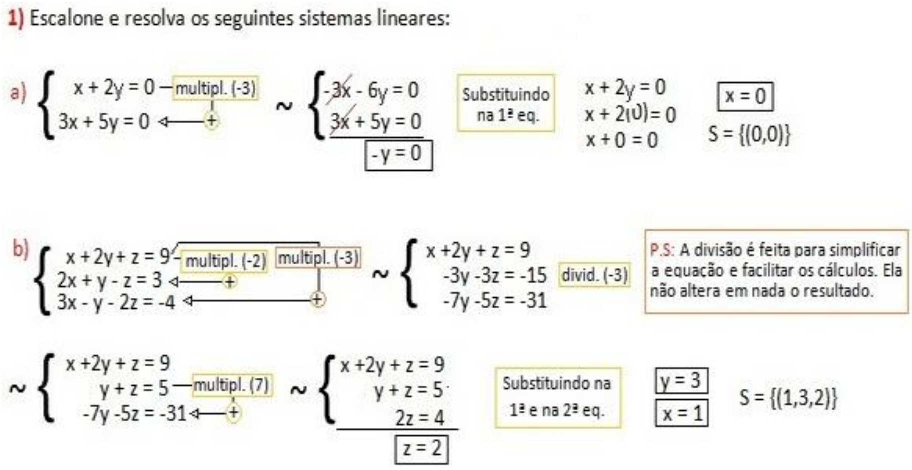
$$\int_0^4 \ln(1+x)\,dx$$

![UniRuy Wyden]

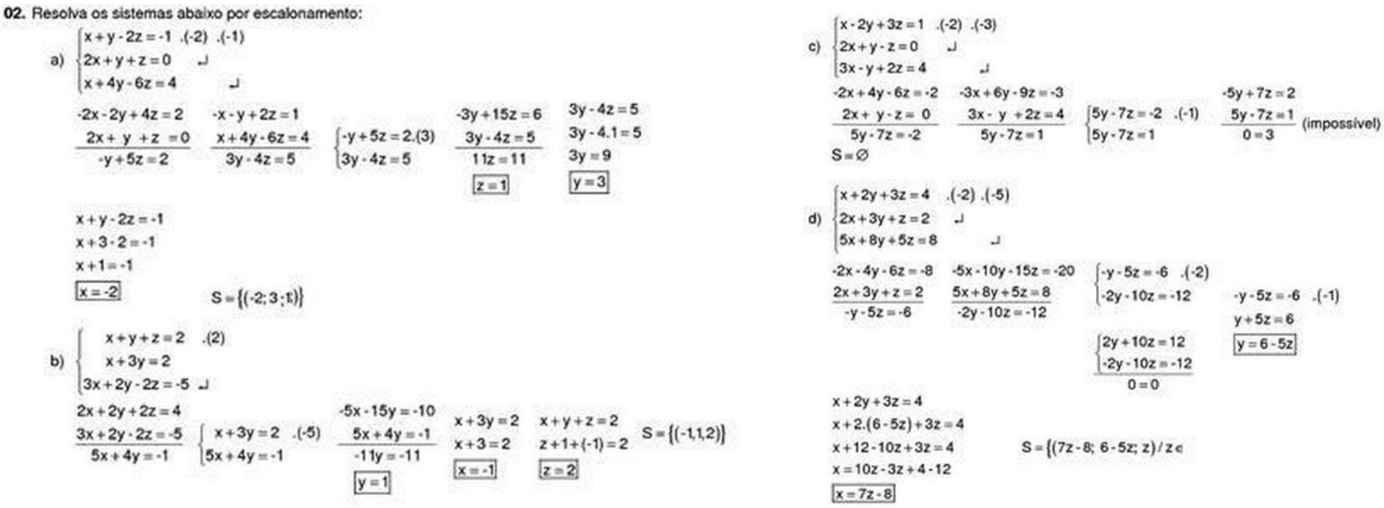
Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

1. Escalonada por Gauss. Se continuar escalonando por Jordan encontrará mesmo resultado... Sistemas Lineares Jordan.



2. Sistemas Lineares - Gauss



a) S= {-2, 3, 1}
b) S= {-1, 1, 2}
c) S= {Ø} Impossível
d) S= {7z – 8, 6 – 5z, z} z ϵ R. **SPI, Sistema possível indeterminado**
e) S= {2, 1, 3}
f) S= {-4, 1, 1}

3. $P_1 = 1.221 + \frac{3.320-1.221}{06-0.1} * (0.2 - 0.1) => 1.641$; $P_1(x)=0.8 + 4.2x$ (Interp.Polinom. Linear)
4. $P_1 = 1.1 + \frac{2.52-1.1}{1.52-0.1} * (X - 0.1)$; $P_1(x)=1 + x$ (Interpolação Polinomial Linear)
5. $P_1 = 1.1 + \frac{2.52-1.1}{1.52-0.1} * (0.7 - 0.1) => Resposta: 1.7$ (Interpolação Polinomial Linear)

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

6. Interpolação Polinomial

a) Lagrange (Quadrática)

$$L_2(x)=1.\frac{x-0}{-1-0}.\frac{x-1}{-1-1}+1.\frac{x-(-1)}{0-(-1)}.\frac{x-1}{0-1}+0.\frac{x-(-1)}{1-(-1)}.\frac{x-0}{1-0}$$

$$L_2(x)=\frac{x}{-1}.\frac{x-1}{-2}+\frac{x+1}{1}.\frac{x-1}{-1}+0$$

$$L_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-x^2+1$$

$$L_2(x)=y_0.\frac{x-x_1}{x_0-x_1}.\frac{x-x_2}{x_0-x_2}+y_1.\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2.\frac{x-x_0}{x_2-x_0}.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$L_2(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1$$

b) Newton

i	x	Y	Δy	Δ^2y
0	-1	1	0	-1/2
1	0	1	-1	
2	1	0		

$$P_2(x)=y_0+\Delta y_0(x-x_0)+\Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}\left[\Delta^i y_0.\prod_{j=0}^{i-1}\left(x-x_j\right)\right]$$

$$P_2(x)=1+0.(x-(-1))+\left(\frac{-1}{2}\right).(x-(-1)).(x-0)$$

$$P_2(x)=1+0-\frac{1}{2}.(x+1).x$$

$$P_2(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1$$

c) Gregory-Newton

$$h=x_1-x_0=0-(-1)=1$$

$$u_x=\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-(-1)}{1}=x+1$$

$$P_2(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}.(u_x-0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}.(u_x-0).(u_x-1)$$

$$P_2(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1$$

$$P_2(0,5)=-\frac{(0,5)^2}{2}-\frac{0,5}{2}+1$$

$$P_2(0,5)=-\frac{0,25}{2}-0,25+1$$

$$P_2(0,5)=-0,125-0,25+1$$

$$P_2(0,5)=0,625$$

$$P_2(x)=1+\frac{0}{1}.(x+1)+\frac{-1}{2}.(x+1).(x+1-1)$$

$$P_2(x)=1+0-\frac{1}{2}.(x+1).(x)$$

$$P_2(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+1$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

7. $P_2(x) = 3.211 - 2.010 * (X - 0.9) + 0.620*(X - 0.9) * (X - 1.1)$ => Interpolação Polinomial Quadrática

   $P_2(1.2) = 2.627$

8. 0.6947 (Interpolação Polinomial)

$$P_1(x) = f(x_0) * \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) * \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

9. $P_2(x) = -0.125X^2+0.625X$ (Interpolação Polinomial Quadrática)
   $P_2(1.2)=-0.125(1.2\text{^}2)+0.625*1.2=???$

10. 1.464; Trapézio com 10 subintervalos arbitrados.

11. 1.719713; Trapézio com 10 subintervalos.

12. ?? ; Trapézio com 08 subintervalos.

13. ?? ; 1/3 Simpson com 06 subintervalos.

14. ?? ; 3/8 Simpson com 09 subintervalos.

15. $P_2(x) = 1.141 + 0.231x + 5.667x^2$; $P_2(0.4)$ = ?? (Interpolação Polinomial Quadrática)

16. Método Direto – Fatoração LU

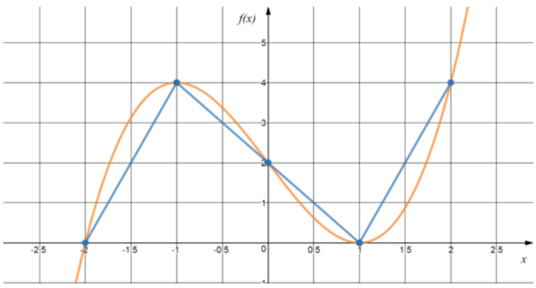
    a) Resposta: Y = {3; -2; -6) e X {2; -1; 3}
    b) Resposta: Y = {1; 5/3; 0) e X {-3; 5; 0}
    c) Resposta: Y = {1; 51; -13/4) e X {-6; 2; -1}

17. Interpolação Polinomial – Função Spline - Ajuste Linear

Então a função spline linear é a seguinte:

$$S_1(x) = \begin{cases} 4x+8, & -2 \le x \le -1 \\ 2-2x, & -1 \le x \le 0 \\ 2-2x, & 0 \le x \le 1 \\ 4x-4, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Vamos ficar com algo assim:



Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

18. Resposta: Vetor [1.0085; -1.9760; 0.8701] => Método Iterativo Gauss-Seidel

19. Resposta: Vetor [1.002; 0.998; -1] => Método Iterativo Gauss-Seidel

20. Resposta: Vetor [1.0085; -1.9760; 0.8701] => Método Iterativo Gauss-Jacobi

21. Resposta: Vetor [1.002; 0.998; -1] => Método Iterativo Gauss-Jacobi

22. Interpolação Polinomial

a) Método de Lagrange Quadrática

Para este método, utilizamos diretamente a fórmula:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i . \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\right]$$

Que quando expandida com os dados do exercício fica:

$$L_2(x) = y_0.\frac{x-x_1}{x_0-x_1}.\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1.\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2.\frac{x-x_0}{x_2-x_0}.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
$$L_2(x) = 0.\frac{x-2}{1-2}.\frac{x-3}{1-3} + (-1).\frac{x-1}{2-1}.\frac{x-3}{2-3} + (-2).\frac{x-1}{3-1}.\frac{x-2}{3-2}$$
$$L_2(x) = 0 - \frac{x-1}{1}.\frac{x-3}{-1} - 2.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{1}$$
$$L_2(x) = x^2 - 4.x + 3 - x^2 + 3.x - 2$$
$$L_2(x) = -x + 1$$

b) Método de Newton

Para este método, primeiro devemos calcular os operadores da diferença dividida:

i	x	y	Δy	Δ^2y
0	1	0	-1	0
1	2	-1	-1	
2	3	-2		

Agora, aplicamos a fórmula: $P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta^i y_0 . \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right]$

Expandindo-a e substituindo os valos do exercício:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x-x_0) + \Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)$$
$$P_2(x) = 0 + (-1).(x-1) + 0.(x-1).(x-2)$$
$$P_2(x) = -x + 1$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

c) Método de Gregory Newton

Já para este método, devemos calcular os operadores de diferenças finitas, h e ux:

i	x	y	Δy	Δ2y
0	1	0	-1	0
1	2	-1	-1	
2	3	-2		

$$h = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-1}{1} = x - 1$$

Agora, utilizamos a fórmula de Gregory-Newton: $P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\Delta^i y_0}{i!} . \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j) \right]$

Expandindo a fórmula e substituindo os valores temos:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}.(u_x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.(u_x - 0).(u_x - 1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{-1}{1}.(x-1) + 0.(x-1).(x-1-1)$$

$$P_2(x) = 0 - x + 1 + 0$$

$$P_2(x) = -x + 1$$

Calcular P(1.5). Para calcular, pegamos qualquer uma das equações encontradas (são iguais!) e substituímos o valor 1,5 no lugar dos x:

23. Newton (Interpolação Polinomial)

Como não foi especificado o método que deve ser utilizado, e como este modelo se comporta de forma determinada (existe uma equação que o rege), utilizarei a interpolação de Newton para encontrar o valor interpolado.

Primeiramente, calcularemos os valores das diferenças divididas.

I	x	y	Δy	Δ2y	Δ3y
0	93,3	1548	-0,71429	-0,03393	0,00214
1	98,9	1544	-1,09091	0,00176	
2	104,4	1538	-1,07143		
3	110,0	1532			

Agora, através da fórmula: $P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta^i y_0 . \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right]$

Expandimos e substituímos os valores do exercício:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \Delta^3 y_0 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$P_3(100) = 1548 + (-0{,}71429).(100 - 93{,}3) +$$
$$+ (-0{,}03393).(100 - 93{,}3)(100 - 98{,}9)$$
$$+ 0{,}00214.(100 - 93{,}3)(100 - 98{,}9)(100 - 104{,}4)$$
$$P_3(100) = 1548 - 0{,}71429.6{,}7 - 0{,}03393.6{,}7.1{,}1$$
$$+ 0{,}00214.6{,}7.1{,}1.(-4{,}4)$$
$$P_3(100) = 1542{,}9011$$

Resolvendo pela Interpolação Linear:

Definindo o Polinômio: $P(x) = A_0 + A_1X$
$P_1(x) = 1651{,}89 - 1.09X$

- Calculando:
$P_1(100) = 1542.89$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

24. Lagrange Quadrática (Interpolação Polinomial)

Fazendo por Lagrange, iremos construir um polinômio a partir dos três últimos valores da tabela (eles incluem o ponto a ser interpolado dentro de seu intervalo).

I	x	Y
0	2800	90,67
1	2900	90,34
2	3000	90,00

A fórmula de Lagrange é: $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i . \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right]$

Expandindo a fórmula e substituindo os valores, teremos:

$$L_2(x) = y_0.\frac{x-x_1}{x_0-x_1}.\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1.\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2.\frac{x-x_0}{x_2-x_0}.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$L_2(2890) = 90{,}67.\frac{2890-2900}{2800-2900}.\frac{2890-3000}{2800-3000} +$$

$$+90{,}34.\frac{2890-2800}{2900-2800}.\frac{2890-3000}{2900-3000} +$$

$$+90.\frac{2890-2800}{3000-2800}.\frac{2890-2900}{3000-2900}$$

$$L_2(2890) = 90{,}67.\frac{-10}{-100}.\frac{-110}{-200} + 90{,}34.\frac{90}{100}.\frac{-110}{-100} + 90.\frac{90}{200}.\frac{-10}{100}$$

$$L_2(2890) = 90{,}67.0{,}1.0{,}55 + 90{,}34.0{,}9.1{,}1 - 90.0{,}45.0{,}1 = 90{,}3734$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

25. Lagrange Quadrática (Interpolação Polinomial)

Considerando a tabela acima, determinar o ponto de ebulição da água em um local de Belo Horizonte que possui altitude igual a 1000m (utilize o método que considerar mais adequado).

Para resolver esta questão, basta recorrer ao mesmo método acima, mas agora com uma nova tabela de dados (são os pontos que incluem o valor de 1000 dentro de sua faixa).

I	x	Y
0	950	96,84
1	1050	96,51
2	1150	96,18

Criando a mesma fórmula utilizada acima, e substituindo os novos valores, teremos:

$$L_2(x) = y_0.\frac{x-x_1}{x_0-x_1}.\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1.\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2.\frac{x-x_0}{x_2-x_0}.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$L_2(1000) = 96{,}84.\frac{1000-1050}{950-1050}.\frac{1000-1150}{950-1150}+$$

$$+96{,}51.\frac{1000-950}{1050-950}.\frac{1000-1150}{1050-1150}+$$

$$+96{,}18.\frac{1000-950}{1150-950}.\frac{1000-1050}{1150-1050}$$

$$L_2(1000) = 96{,}84.\frac{-50}{-100}.\frac{-150}{-200} + 95{,}51.\frac{50}{100}.\frac{-150}{-100} + 96{,}18.\frac{50}{200}.\frac{-50}{100}$$

$$L_2(1000) = 96{,}84.0{,}5.0{,}75 + 96{,}51.0{,}5.1{,}5 - 96{,}18.0{,}25.0{,}5 = 96{,}675$$

26. Resposta 04 subintervalos. Área: ???

$$\int_0^4 \ln(1+x)\,dx$$