# Interpolação Polinomial

Polinômios interpoladores

Polinômios de Gregory-Newton

# Polinômio de Gregory-Newton

- É um caso particular do polinômio interpolador de Newton para pontos igualmente espaçados, isto é, quando os valores das abscissas $x_i$ forem igualmente espaçados.

Exemplo:

| Função Tabelada | | |
|---|---|---|
| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
| 0 | 3,5 | 9,82 |
| 1 | 4,0 | 10,91 |
| 2 | 4,5 | 12,05 |
| 3 | 5,0 | 13,14 |
| 4 | 5,5 | 16,19 |

Observe que $\forall i$, $i = 0,1,..,4$:

$$x_{i+1} - x_i = h = 0,5$$

# Polinômios de Gregory-Newton

- dados *n+1* pontos distintos e igualmente espaçados por h, $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$
- e os valores de $f(x)$ nesses pontos $f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$
- Obter polinômio $P_n(x)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f(x_0) \\
P_n(x_1) &= f(x_1) \\
P_n(x_2) &= f(x_2) \\
&\dots \\
P_n(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

# Diferenças Finitas

- Operador de diferença finita de ordem k ( $\Delta^k$ ):

$$\text{Ordem 1: } \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\text{Ordem 2: } \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

$$\text{Ordem } n\text{: } \Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

# Exemplo 1

- Dados os seguintes pontos

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 |
| 1 | 120 | 2,079 |
| 2 | 130 | 2,114 |

- Tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta^1 y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 | 0,038 | -0,003 |
| 1 | 120 | 2,079 | 0,035 | |
| 2 | 130 | 2,114 | | |

# Teorema

- Seja a função *f(x)* definida pelos pontos $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ tais que $x_{i+1} - x_i = h$
- A relação entre os operadores de Diferença Finita e Dividida é dada por:

$$\boxed{\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}}.$$

# Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ \Delta^n y_0(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Variável auxiliar

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h} \longrightarrow x - x_0 = hu_x$$

# Fórmula de Gregory-Newton

- Verifica-se que:

$$
\begin{gathered}
x - x_0 = hu_x, \\
x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hu_x - h \leadsto x - x_1 = h(u_x - 1), \\
x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hu_x - 2h \leadsto x - x_2 = h(u_x - 2), \\
\vdots \\
x - x_{n-1} = x - (x_0 + (n-1)h) = x - x_0 - (n-1)h \leadsto x - x_{n-1} = h(u_x - n + 1).
\end{gathered}
$$

# Fórmula de Gregory-Newton

- Substituindo na fórmula de Newton e aplicando a relação entre as diferenças Finitas e Divididas:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \Delta^n y_0 (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} h u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} h u_x h(u_x - 1) + \dots +$$
$$\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} h u_x h(u_x - 1) \dots h(u_x - n + 1).$$

$$\boxed{\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}}.$$

# Fórmula de Gregory-Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} u_x(u_x - 1)\ldots(u_x - n + 1)$$

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j)}$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h}$$

# Exemplo 1

- Dados os seguintes pontos

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 |
| 1 | 120 | 2,079 |
| 2 | 130 | 2,114 |

- Tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta^1 y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 | 0,038 | -0,003 |
| 1 | 120 | 2,079 | 0,035 | |
| 2 | 130 | 2,114 | | |

# Exemplo 1

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 |
| 1 | 120 | 2,079 |
| 2 | 130 | 2,114 |

- Calcule $P_2(115)$

Sendo h = 10 o valor de $u_x$ será:

$$u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{115 - 110}{10} = 0,5$$

# Exemplo 1

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x (u_x - 1).$$

$$P_2(115) = 2{,}041 + \frac{0{,}038}{1!}(0{,}5) + \frac{-0{,}003}{2!}((0{,}5)(0{,}5-1)) = 2{,}060$$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta^1 y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 | 0,038 | -0,003 |
| 1 | 120 | 2,079 | 0,035 | |
| 2 | 130 | 2,114 | | |

# Custo Computacional

- Gregory-Newton

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $n^2 + 4n + 2$ |
| multiplicações | $n$ |
| divisões | $n + 1$ |

- Newton

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $2n^2 + 4n$ |
| multiplicações | $n$ |
| divisões | $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ |

# Escolha dos Pontos para Interpolação

- Idealmente deve-se escolher ***n+1*** pontos de uma tabela com ***m*** pontos (***m***>***n+1***) para se obter um polinômio interpolador de grau ***n***

- Evitar polinômios de grau muito elevado e erros de arredondamento

# Escolha dos Pontos para Interpolação

- Escolher ***n+1*** pontos, dentro ***m*** pontos, para se obter um polinômio interpolador de grau ***n***, sendo ***x*** o valor a ser interpolado
  - Evitar extrapolação de ***x***
  - Escolher os ***n+1*** pontos mais próximos de ***x***

# Exemplo 1

- Escolha os melhores pontos para interpolação $P_2(100)$

| **x** | 1 | 101 | 102 | 103 |
|---|---|---|---|---|
| **y** | 0,5 | 55,5 | 56 | 56,5 |

# Exemplo 2

- Escolha os melhores pontos para interpolação $P_3(1,4)$

| x | 0,7 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2,0 | 2,3 | 2,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0,043 | 1,928 | 2,497 | 3,875 | 9,000 | 13,467 | 19,176 |

# Exemplo

Escolha dos pontos:

| x | 0,7 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 2,0 | 2,3 | 2,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0,043 | 1,928 | 2,497 | | 3,875 | 9,000 | 13,467 | 19,176 |

X=1,4 m=7 n=3

- Primeiro ponto: 1,3;
- Segundo ponto: 1,5;
- Terceiro ponto: 1,2 pois 1,4-1,2 < 2,0 – 1,4;
- Quarto ponto: 2,0 pois 2,0-1,4 < 1,4-0,7.

# Exemplo

| x | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1,928 | 2,497 | 3,875 | 9,000 |

# Erro de Truncamento da Interpolação Polinomial

- É o erro cometido ao aproximar a função *f(x)* pelo polinômio interpolador

# Erro de Truncamento da Interpolação Polinomial

- A cota máxima do erro de truncamento é dada por:

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\mathcal{E})}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$x_0 \le \xi \le x_n$$

# Erro de Truncamento da Interpolação Polinomial

- A cota máxima do erro de truncamento ao aproximar *f(x)* pelo polinômio $P_n$ é dada por :

$$\boxed{T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}$$

$$x_0 < \xi < x_n$$

- $\xi$ é tomado como o ponto no intervalo $[x_0, x_n]$ onde $f^{n+1}$ apresenta maior valor em módulo

# Exemplo

- Encontre o erro de truncamento ao obter $\boldsymbol{P_2(0,1)}$ através dos pontos a seguir e sabendo que $\boldsymbol{f(x)=2x^4+3x^2+1}$

| i | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,0000 |
| 1 | 0,2 | 1,1232 |
| 2 | 0,4 | 1,5312 |

# Exemplo

- Por Gregory-Newton

| i | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta^1 y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,0000 | 0,1232 | 0,2848 |
| 1 | 0,2 | 1,1232 | 0,4080 | |
| 2 | 0,4 | 1,5312 | | |

Pelo Polinômio de Gregory-Newton

$P_2(0,1)=1,0260$

# Exemplo

Como:

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\mathcal{E})}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

E a derivada de f(x):

- $f(x)=2x^4+3x^2+1$
- $f'(x)=8x^3+6x$
- $f''(x)=24x^2+6$
- $f'''(x)=48x$ $\longrightarrow$
  - $\mathcal{E}=0,4$

- *f'''(x)* apresenta maior valor em módulo no intervalo ***[0.0, 0.4]*** quando ***x*** é 0.4.

# Exemplo

Como:

$$T_n(x)=\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

O erro é:

$$T_2(0{,}1)=\frac{f'''(\varepsilon)}{(3)!}\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)$$

$$T_2(0{,}1)=\frac{48(0{,}4)}{6}(0{,}1-0{,}0)(0{,}1-0{,}2)(0{,}1-0{,}4)=0{,}0096$$

# Exemplo

- Erro real: $\left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|f(0,1) - P_2(0,1)\right|$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1 \rightarrow f(0,1) = 2(0,1)^4 + 3(0,1)^2 + 1 = 1,0302$$

$$P_2(0,1) = 1,0260$$

$$Erro\ real = 0,0042 \quad < \quad T_2(0,1) = 0,0096$$

- Erro real deve sempre ser menor ou igual, em módulo, que o módulo da cota máxima do erro de truncamento

# Exercício

- Dado os pontos a seguir:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,00 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 |
| $y_i$ | 1,000 | 0,641 | -1,000 | 2,266 | 41,000 | 198,266 | 649,000 | 1710,641 |

- a) calcule $P_4(2{,}8)$ usando Gregory-Newton. Escolha os pontos de maneira a minimizar o erro de truncamento
- b) obtenha a cota máxima do erro de truncamento, sabendo que $f(x)=x^6-3x^3+1$
- c) obtenha o erro real e comente os resultados

# Exercício

Interpolacao via polinomios de Gregory-Newton

Tabela de diferencas finitas

| i | x(i) | y(i) | DifFin1 | DifFin2 | DifFin3 | DifFin4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.50000 | 2.26600 | 38.73400 | 118.53200 | 174.93600 | 142.50300 |
| 1 | 2.00000 | 41.00000 | 157.26600 | 293.46800 | 317.43900 | |
| 2 | 2.50000 | 198.26600 | 450.73400 | 610.90700 | | |
| 3 | 3.00000 | 649.00000 | 1061.64100 | | | |
| 4 | 3.50000 | 1710.64100 | | | | |

- $P_4(2.8) = 416.36621$

# Exercício

- $f(x)=x^6-3x^3+1$ $\qquad$ $f^v(x)=720x$
- *$f^v(x)$* apresenta maior valor em módulo no intervalo ***[1.5, 3.5]*** quando ***x*** é 3.5.

$$T_4(2.8) = \frac{(720 \times 3.5) \times (2.8 - 1.5) \times (2.8 - 2.0) \times (2.8 - 2.5) \times (2.8 - 3.0) \times (2.8 - 3.5)}{5!}$$

$$T_4(2.8) = 0.91728$$

$$f(2.8) = 2.8^6 - 3 \times 2.8^3 + 1 = 417.03430$$

$$\text{Erro Real} = |416.36621 - 417.03430| = 0.66809$$

- O erro real é menor que a cota máxima do erro de truncamento, como esperado.