Curso de Matemática Aplicada
Algebra Linear

Iniciado em 03 de Agosto de 2017

Versão 22 de agosto de 2017

Sumário

Capítulo 1

Sistemas de Equações Lineares

1.1 Equações Lineares

Equações lineares são todas as equações do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b_1 \tag{1.1}$$

Onde a_n são os coeficientes de números reais e x_n são as variáveis.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares como descrito na Equação 1.1. Em outras palavras é um sistema de "m" equações e "n" incógnitas e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

Com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

A solução de um sistema $m \times n$ é uma n-upla ordenada de números$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaz todas as equações.

1.2.1 Exemplo de um Sistema 2 x 2

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Cuja solução é: $(x_1, x_2) = (1, 2)$

1.2.2 Exemplo de um Sistema 2 x 3

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 - x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Cuja solução é: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$. Porém é fácil perceber que qualquer número real para x_2 e x_3 desde que $x_2 = x_3$ também será solução.

Por exemplo, o conjunto de soluções (2,1,1) satisfaz este sistema de equações

$$
\begin{aligned}
1.(2) - 1.(1) + 1.(1) &= 2 \\
2.(2) + 1.(1) - 1.(1) &= 4
\end{aligned}
$$

Neste caso, o sistema tem n soluções possíveis desde que o conjunto de soluções $(x_1, x_2, x_3) = (2, \alpha, \alpha)$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$

1.2.3 Exemplo de um Sistema 3 x 2

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2 \\
x_1 - x_2 &= 1 \\
x_1 &= 4
\end{aligned}
$$

Cujo sistema não tem nenhuma solução.

1.2.4 Representação Gráfica de um Sistema Linear 2 x 2

Vamos analisar graficamente um sistema do tipo 2×2:

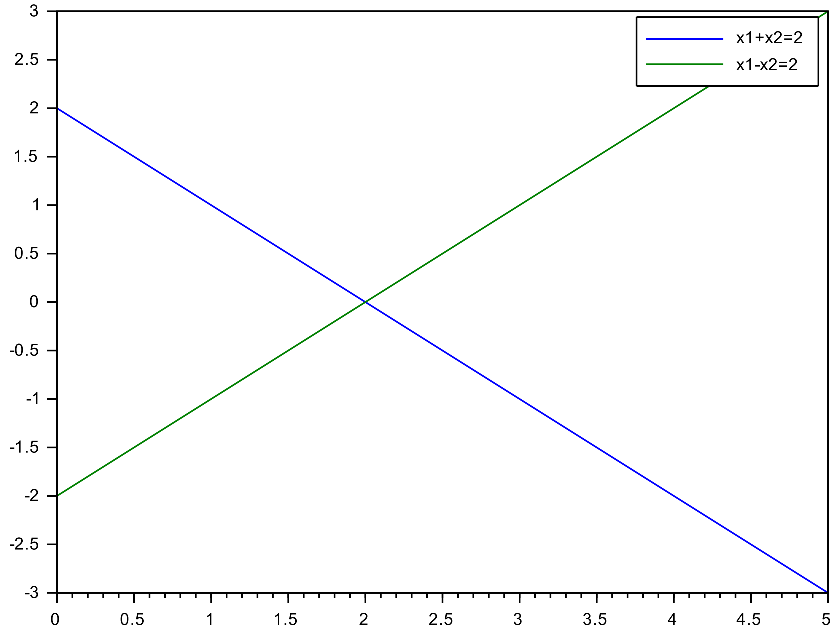
$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2
\end{aligned}
$$

Cuja solução é do um par ordenado (x_1, x_2). Assim, vamos utilizar o sistema cartesiano para este sistema, cujo x_1 é a abscissa e x_2 a ordenada.

Como exemplo, tomamos os seguintes sistemas lineares:

Caso:

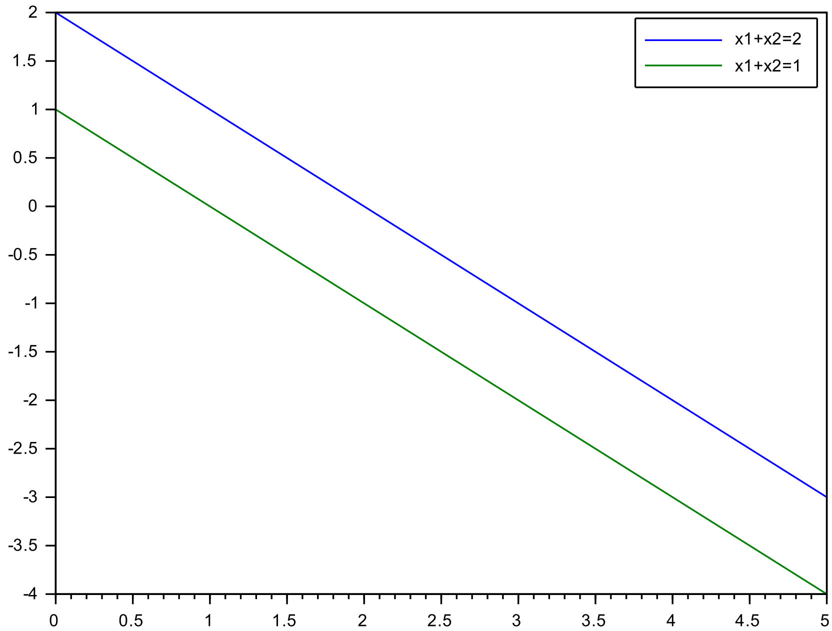
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2 \\
x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$



O sistema possui uma única solução.

Caso:

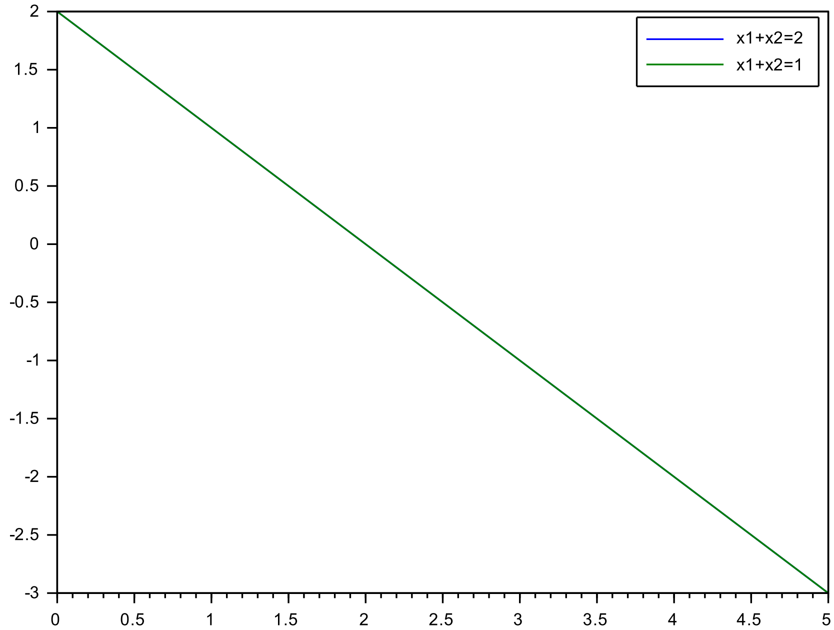
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$



O sistema não possui solução.

Caso:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2 \\
-x_1 - x_2 &= -2
\end{aligned} \tag{1.5}
$$



O sistema possui várias soluções.

1.3 Forma Matricial de um Sistema de Equações Lineares

Podemos escrever um sistema de equações, Equação 1.2, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Ou ainda

$$\left[\ A\ \right]_{m\times n} = \left\{\ \mathbf{x}\ \right\}_{n\times 1} * \left\{\ \mathbf{b}\ \right\}_{m\times 1} \tag{1.7}$$

Onde $[A]$ é a matriz de coeficientes, $\{\mathbf{x}\}$ é o vetor de incógnitas e $\{\mathbf{b}\}$ é o vetor dos termos independentes.

Se o número de equações de um sistema for igual ao número de incógnitas temos um sistema quadrado com a matriz de incógnitas $[A]$ quadrada.

A solução formal de um sistema utilizando matrizes é:

$$\left\{\ x\ \right\} = \left(\ A\ \right)^{-1} \left\{\ b\ \right\}$$

Para grandes sistemas a solução formal é inviável pois (gera muita conta) gera propagação de erro e muito tempo de máquina.

Para que um sistema tenha solução o determinante da matriz de coeficientes deve ser diferente de zero:

$$det \left[\ A\ \right]_{m \times n} \neq 0 \tag{1.8}$$

Quando o determinante for nulo, existem duas possibilidades:

- Infinitas soluções, ou
- não existe solução

1.4 Exemplo práticos

1.4.1 Exemplo 1

Seja o sistema linear:

$$2x_1 + x_2 = 5 \qquad (R1) \tag{1.9}$$
$$x_1 - 3x_2 = 6 \qquad (R2) \tag{1.10}$$

Na sua forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Calculando o determinante da matriz de coeficientes, temos:

$$det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2 * (-3) - 1 * 1 = -7 \neq 0 \tag{1.12}$$

Logo o sistema possui uma única solução.

Calculando os pontos para R1 e R2, respectivamente:

x1	**x2**
0	5
1	3

x1	**x2**
0	-2
6	0

Finalmente calculando o conjunto de solução do sistema, isolando x2 em (1.9):

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_2 &= 5 - 2x_1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

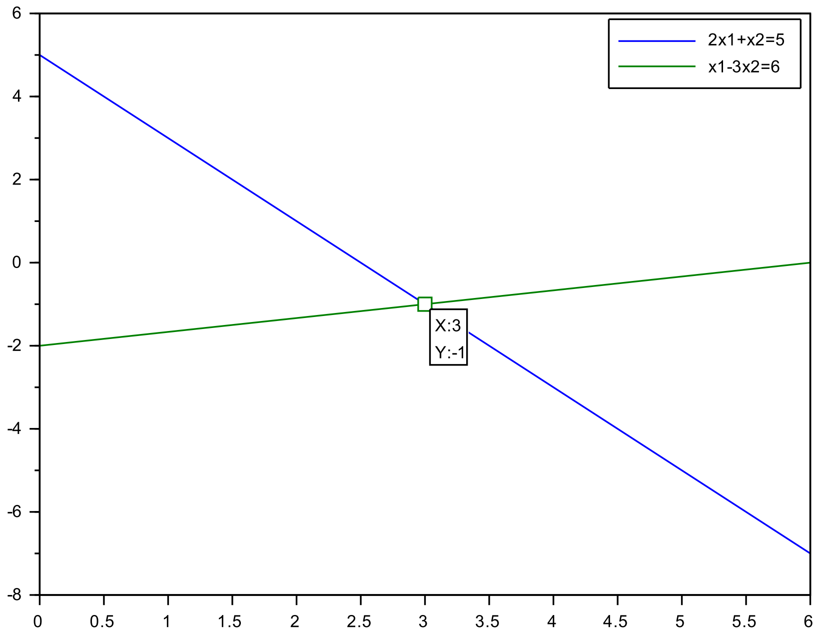
Substituindo em (1.10):

$$\begin{aligned} x_1 - 3 * (5 - 2x_1) &= 6 \\ x_1 - 15 + 6x_1 &= 6 \\ 7x_1 &= 21 \\ x_1 &= 3 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Substituindo x_1 em (1.13) temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 - 2 * 3 \\ x_2 &= -1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Graficamente, temos:



1.4.2 Exemplo 2

Seja o sistema linear:

$$2x_1 + x_2 = 5 \qquad (R1) \tag{1.16}$$
$$6x_1 + 3x_2 = 10 \qquad (R2) \tag{1.17}$$

Na sua forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

Calculando o determinante da matriz de coeficientes, temos:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 2 * 3 - 6 * 1 = 0 \tag{1.19}$$

Logo o sistema não possui solução.

1.5 Métodos de resolução de sistemas lineares

Existem dois métodos para resolução de sistemas lineares:

- Métodos diretos: São métodos que conduzem à solução exata a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina
- Métodos indiretos: São métodos interativos que necessitam de convergência para se obter a solução dentro de um critério de parada, por exemplo:
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
  - Gradiente conjugado

1.5.1 Métodos diretos - Operações elementares sobre matrizes

Para entendermos os métodos diretos, vamos entender as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

Dado o sistema de equações:

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7 \tag{1.20}$$
$$6x_3 = 3 \tag{1.21}$$

É fácil notar que pode-se obter o conjunto solução fácilmente. Tal sistema é denominado sistema de equações triangular e também quadrada de 3x3.

Logo, pela equação (1.21) $x_3 = \frac{1}{2}$, por sua vez substituindo x_3 na equação (1.20) obtemos $x_2 = \frac{-7-1}{8} = \frac{-8}{8} = -1$. Finalmente, obtem-se x_1 substituindo os valores de x_3 e x_2, logo:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5 * (-1) + 2 * \frac{1}{2} &= 8 \\ 3x_1 - 5 + 1 &= 8 \\ 3x_1 &= 8 + 4 \\ x_1 &= \frac{12}{3} \\ x_1 &= 4 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Agora, analisando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Podemos ver que a solução não é trivial como um sistema triangular.

Definição 1 ***Sistemas Equivalentes*** *são sistemas que possuem o mesmo conjunto de soluções*

Trataremos o sistema (1.23) de tal forma a obtermos um sistema equivalente na sua forma triangular de fácil resolução.

Logo, escrevendo o sistema (1.23) em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Agregando o vetor de termos independentes a matriz de coeficientes obtem-se uma nova matriz denominada matriz aumentada que facilita o trabalho.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{1.25}$$

Definição 2 ***Operações Elementares sobre as Linhas***

I. *Trocar duas linhas.*

II. *Multiplicar uma linha por um número real não-nulo*

III. *Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha*

Agora vamos resolver o problema usando as operações elementares sobre as linha da matriz aumentada. Assim, mantendo a primeira linha como linha do pivô e o primeiro elemento da linha como pivô conforme abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{1.26}$$

E aplicando a operação elementar **III**, ou seja subtraindo uma vez a segunda linha da primeira e subtraindo duas vezes a terceira da primeira temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \tag{1.27}$$

Agora queremos eliminar o segundo termos da terceira linha assim a linha de pivô agora é a segunda linha da matriz extendida e o pivô o segundo termo desta matriz conforme abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \tag{1.28}$$

Aplicando novamente a operação **III** subtraindo três vezes a linha 3 da segunda, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \tag{1.29}$$

Assim o sistema equivalente do nosso sistema de equações (1.23) é:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= -3 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Agora bem mais fácil de obter-se o conjunto solução.

Observação O método da eliminação de Gauss nada mais que uma generalização da desta sequência de resolução por operações elementares sobre as linha de uma matriz.

1.5.2 Métodos diretos - Eliminação de Gauss sem troca de linha

Assim, seja $A = A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$ uma matriz invertível e vamos utilizar apenas a operação elementar **III** sobre as linhas.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

Utilizando a_{11} como pivô vamos zerar os elementos da primeira coluna abaixo do pivô, assim o novo coeficiente $a_{21}^{(2)}$ deve ser a subtração do elemento $a_{21}^{(1)}$ por um número qualquer multiplicado pelo coeficiente $a_{11}^{(1)}$, logo:

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - m * a_{11}^{(1)} \tag{1.32}$$

Este novo coeficiente deve necessariamente ser zero, logo:

$$a_{21}^{(1)} - m * a_{11}^{(1)} = 0 \Rightarrow m = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{1.33}$$

Onde $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
Generalizando o número multiplicador para a primeira interação, temos:

$$m_{k1} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{1.34}$$

E a expressão (1.32):

$$a_{kj}^{(2)} = a_{kj}^{(1)} - m_{k1} * a_{1j}^{(1)} \tag{1.35}$$

Para $2 \leq k \leq n$ e $1 \leq j \leq n$. Agora a nova matriz possui os novos coeficientes abaixo:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Agora é só repetir o processo colocando pivô em $a_{22}^{(2)}$
Vamos agora raciocinar em linha. Ou seja, dada a matriz de coeficientes extendida (com os termos intependentes b_i):

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{1.37}$$

Definindo linha como $l_1 = [a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}\ b_1]$, $l_1 = [a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n}\ b_2]$, $\dots$ e $l_n = [a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn}\ b_n]$

Escreveremos o método de Gauss da seguinte forma:

$$l_i^{k+1} = l_i^k - m_{ik} l_k^k \tag{1.38}$$

Com l_i - linha i e k - interação. Lembrando que $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ e $a_{kk} \neq 0$ é o pivô.

1.5.2.1 Exemplo

Agora vamos resolver o sistema de equação (1.23) pelo método de Gauss sem troca de linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]^{(1)} \tag{1.39}$$

$$l_1^1 = [1\ 0\ 1\ 0]$$
$$l_2^1 = [1\ 1\ 0\ 1]$$
$$l_3^1 = [2\ 3\ 1\ 0]$$

Utilizando $a_{11}^{(1)}$ como pivô temos, para k=1 e i=2:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ m_{21} &= \frac{1}{1} \\ m_{21} &= 1 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Para k=1, i=3:

$$\begin{aligned} m_{31} &= \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ m_{31} &= \frac{2}{1} \\ m_{31} &= 2 \end{aligned} \tag{1.41}$$

De acordo com (1.38) para a linha dois, temos:

$$\begin{aligned} l_2^2 &= l_2^1 - m_{21} * l_1^1 \\ &= [1\ 1\ 0\ 1] - 1 * [1\ 0\ 1\ 0] \\ &= [0\ 1\ -1\ 1] \end{aligned}$$

Para a linha 3 temos:

$$\begin{aligned} l_3^2 &= l_3^1 - m_{31} * l_1^1 \\ &= [2\ 3\ 1\ 0] - 2 * [1\ 0\ 1\ 0] \\ &= [0\ 3\ -1\ 0] \end{aligned}$$

A nova matriz então será:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]^{(2)} \tag{1.42}$$

E agora temos:

$$\begin{aligned} l_1^1 &= [1\ 0\ 1\ 0] \\ l_2^2 &= [0\ 1\ -1\ 1] \\ l_3^2 &= [0\ 3\ -1\ 0] \end{aligned}$$

Com o nosso pivô em $a_{22}^{(2)}$, temos para k=2 e i=3 temos:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ m_{32} &= \frac{a_{32}}{a_{22}} \\ m_{32} &= \frac{3}{1} = 3 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Assim a ultima linha fica:

$$\begin{aligned} l_3^3 &= l_3^2 - m_{32} * l_2^2 \\ &= [0\ 3\ -1\ 0] - 3 * [0\ 1\ -1\ 1] \\ &= [0\ 0\ -2\ -3] \end{aligned}$$

Consequentemente teremos:

$$l_1^1 = [1\ 0\ 1\ 0]$$
$$l_2^2 = [0\ 1\ -1\ 1]$$
$$l_3^3 = [0\ 0\ -2\ 3]$$

Logo nossa nova matriz extendida equivalente a nossa matriz inicial é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right]^{(3)} \tag{1.44}$$

E o nosso sistema de equação linear torna-se:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= -3 \end{aligned} \tag{1.45}$$

E podemos facilmente obter o conjunt solução.

1.5.2.2 Exercício

Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelo método de Gauss sem troca de linha.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 &= 35 \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial extendida utilizando a_{11} como pivô, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -1 & 35 \end{array}\right]^{(1)}$$

E nossas linhas são:

$$l_1^1 = \left[\begin{array}{cccc} 3 & -4 & 5 & -1 \end{array}\right]$$
$$l_2^1 = \left[\begin{array}{cccc} -3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$l_3^1 = \left[\begin{array}{cccc} 6 & 8 & -1 & 35 \end{array}\right]$$

Lembrando $l_i^{k+1} = l_i^k - m_{ik} l_k^k$ onde $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

Para k=1, i=2:

$$\begin{aligned}
l_2^2 &= l_2^1 - \frac{a_{21}}{a_{11}} l_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-3}{3}\right) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\
l_2^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para k=1, i=3:

$$\begin{aligned}
l_3^2 &= l_3^1 - \frac{a_{31}}{a_{11}} l_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} - \left(\frac{6}{3}\right) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -8 & 10 & -2 \end{bmatrix} \\
l_3^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 16 & -11 & 37 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A nova matriz então torna-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 16 & -11 & 37 \end{array}\right]^{(2)}$$

Agora com o pivô em a_{22}. Assim, para k=2,i=3:

$$\begin{aligned}
l_3^3 &= l_3^2 - \frac{a_{32}}{a_{22}} l_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 16 & -11 & 37 \end{bmatrix} - \left(\frac{16}{-2}\right) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 16 & -11 & 37 \end{bmatrix} + (8) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 16 & -11 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -16 & 48 & 0 \end{bmatrix} \\
l_3^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 37 & 37 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A nova matriz então torna-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 37 \end{array}\right]^{(3)}$$

E nosso sistema de equações lineares equivalente é:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 37x_3 &= 37 \end{aligned}$$

1.5.3 Métodos diretos - Eliminação de Gauss com troca de linha

O princípio básico desta metodologia é utilizar duas operações elementares, a troca de linha **I** e a operação elementar **III** que já utilizamos para descrever o método de Gauss sem troca de linha.

Utilizaremos como exemplo o mesmo sistema de equações do exercício 1.5.2.2,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 &= 35 \end{aligned}$$

A troca de linha denominada pivoteamento parcial consiste em selecionar o maior valor absoluto da coluna que será eliminada, lembrando sempre que o pivô segue na diagonal principal, assim de acordo com nossa matriz extendida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -1 & 35 \end{array}\right]^{(1)}$$

O maior valor absoluto da primeira coluna é 6 assim, reordenando temos:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 - x_3 &= 35 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} l_1^1 &= \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} \\ l_2^1 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ l_3^1 &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lembrando $l_i^{k+1} = l_i^k - m_{ik} l_k^k$ onde $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
Para k=1, i=2:

$$
\begin{aligned}
l_2^2 &= l_2^1 - \frac{a_{21}}{a_{11}} l_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-3}{6}\right) \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{2} & \frac{35}{2} \end{bmatrix} \\
l_2^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Para k=1, i=3:

$$
\begin{aligned}
l_3^2 &= l_3^1 - \frac{a_{31}}{a_{11}} l_1^1 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{3}{6}\right) \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 & 35 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{2} & \frac{35}{2} \end{bmatrix} \\
l_3^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -8 & \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Nossa nova matriz então:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -1 & 35 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} \end{array}\right]^{(2)}
$$

Aplicando o critério de seleção de linha pivô agora nas linhas 2 e 3 vemos que a linha 3 tem o maior valor absoluto logo:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -1 & 35 \\ 0 & -8 & \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \end{array}\right]^{(2)}
$$

Para k=2 e i=3 temos:

$$
\begin{aligned}
l_3^3 &= l_3^2 - \frac{a_{32}}{a_{22}} l_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} - \left(\frac{6}{-8}\right) \begin{bmatrix} 0 & -8 & \frac{11}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{3}{4}\right) \begin{bmatrix} 0 & -8 & \frac{11}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -6 & \frac{33}{8} & -\frac{111}{8} \end{bmatrix} \\
l_3^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{37}{8} & \frac{37}{8} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

E nossa matriz final torna-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & -1 & 35 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \\ 0 & 0 & \frac{37}{8} & \frac{37}{8} \end{array}\right]^{(3)}$$

1.5.4 Métodos diretos - Fatoração ou decomposição LU

Considere um sistema linear $m \times n$ com n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Onde $[A] = [a_{jk}]_{n\times n}$, $x^T = [x_1, x_2, ..., x_n]$ e $b^T = [b_1, b_2, ..., b_n]$
Podemos definir a matriz $[A]$ como um produto de duas matrizes:

$$[A] = [L]\,.\,[U]$$

Com:

- $[L]$ - matriz triangular inferior

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- $[U]$ - matriz triangular superior

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

1.5.4.1 Exemplo 3

Encontre as matrizes L e U da matriz seguinte matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$.

Definindo as matrizes LU e multiplicando $L \times U$ temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} l_{11}.u_{11} + 0.0 & l_{11}.u_{12} + 0.u_{22} \\ l_{21}.u_{11} + l_{22}.0 & l_{21}.u_{12} + l_{22}.u_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} l_{11}.u_{11} & l_{11}.u_{12} \\ l_{21}.u_{11} & l_{21}.u_{12} + l_{22}.u_{22} \end{bmatrix}$$

Igualando os termos temos:

$$\begin{aligned} l_{11}.u_{11} &= 2 \\ l_{11}.u_{12} &= 3 \\ l_{21}.u_{11} &= 8 \\ l_{21}.u_{12} + l_{22}.u_{22} &= 5 \end{aligned}$$

Que é um sistema de 4 equações e 5 variáveis, e para resolver isto se a matriz $[A]$ é não simétrica, ou seja $[A] \neq [A]^T$, temos:

1. **Decomposição de Doolittle**

$$[A] = [L] . [U]$$

Com

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{ij} = 0; i < j \\ l_{ij} = 1; i = j \end{aligned}$$

e

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad u_{ij} = 0; i > j$$

2. **Decomposição de Crout**

$$[A] = [L] . [U]$$

Com

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad l_{ij} = 0; i < j$$

e

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} u_{ij} = 0; i > j \\ u_{ij} = 1; i = j \end{matrix}$$

Caso $[A]$ seja simétrica, ou seja $[A] = [A]^T$ temos:

1. **Decomposição de Cholesky**

$$\begin{aligned} [A] &= [L][L]^T \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. **Decomposição de Gauss**

$$[A] = [U]^T[D][U]$$

Onde

$$\begin{aligned} [U] &= (u_{ij})_n \ \ tal \ \ que \ \ u_{ij} = 1; i = j \\ [L] &= (l_{ij})_n \ \ tal \ \ que \ \ l_{ij} = 1; i = j \\ [D] &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad Matriz \ \ Diagonal \end{aligned}$$

Agora, voltando ao nosso problema inicial $[A]\{x\} = \{b\}$ aplicando a decomposição $[A] = [L][U]$ temos:

$$[L][U]\{x\} = \{b\}$$

Fazendo: $[U]\{x\} = \{y\}$ – Sistema Triangular Superior
Logo: $[L]\{y\} = \{b\}$ – Sistema Triangular Inferior

1.5.4.2 Exercício - Decomposição de Doolittle

Vamos resolver a matriz proposta no exemplo por decomposição de Doolittle

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.u_{11} + 0.0 & 1.u_{12} + 0.u_{22} \\ l_{21}.u_{11} + 1.0 & l_{21}.u_{12} + 1.u_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}.u_{11} & l_{21}.u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Igualando os termos temos:

$$\begin{aligned}
u_{11} &= 2 \\
u_{12} &= 3 \\
l_{21}.u_{11} &= 8 \Rightarrow l_{21} = \frac{8}{2} = 4 \\
l_{21}.u_{12} + u_{22} &= 5 \Rightarrow 4.3 + u_{22} = 5 \Rightarrow u_{22} = -7
\end{aligned}$$

E nossa matriz $[A]$ pode ser escrita como o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

1.5.4.3 Exercício - Decomposição de Doolittle

Resolva o sistema de equações lineares abaixo pelo método da decomposição de Doolittle

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\
8x_2 + 2x_3 &= -7 \\
6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26
\end{aligned}$$

Primeiramente vamos obter as matrizes L e U pela decomposição de Doolittle, assim:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{12}.u_{11} & l_{21}.u_{12} + u_{22} & l_{21}.u_{13} + u_{23} \\ l_{31}.u_{11} & l_{31}.u_{12} + l_{32}.u_{22} & l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Assim, igualando os termos temos:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 3 \\ u_{12} &= 5 \\ u_{13} &= 2 \\ l_{21}u_{11} &= 0 \Rightarrow l_{21} = 0 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} &= 8 \Rightarrow 0 + u_{22} = 8 \Rightarrow u_{22} = 8 \\ l_{21}.u_{13} + u_{23} &= 2 \Rightarrow 0 + u_{23} = 2 \Rightarrow u_{23} = 2 \\ l_{31}.u_{11} &= 6 \Rightarrow l_{31}.3 = 6 \Rightarrow l_{31} = \frac{6}{3} = 2 \\ l_{31}.u_{12} + l_{32}.u_{22} &= 2 \Rightarrow 2.5 + l_{32}.8 = 2 \Rightarrow 8l_{32} = 2 - 10 \Rightarrow l_{32} = -\frac{8}{8} = -1 \\ l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + u_{33} &= 8 \Rightarrow 2.2 + (-1).2 + u_{33} = 8 \Rightarrow 4 - 2 + u_{33} = 8 \Rightarrow u_{33} = 8 + 2 - 4 = 6 \end{aligned}$$

Assim nossa matriz $[A]$ pode ser decomposta em:

$$[A] = [L][U] \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 8 \\ y_2 = -7 \\ 2.8 - (-7) + y_3 = 26 \rightarrow y_3 = 3 \end{matrix}$$

Resolvendo o sistema triangular superior $Ux = y$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ 8x_2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -7 \Rightarrow x_2 = \frac{-7-1}{8} = -1 \\ 3x_1 + 5(-1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{12}{3} = 4 \end{matrix}$$

1.5.4.4 Exercício - Decomposição de Crout

Resolva o sistema de equações lineares abaixo pelo método da decomposição de Crout

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

Vamos encontrar as matrizes $[L]$ e $[U]$

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_13 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualando os termos temos:

$$\begin{aligned} l_{11} &= 3 \\ l_{21} &= 0 \\ l_{31} &= 6 \\ u_{12} &= \frac{5}{l_{11}} = \frac{5}{3} \\ u_{13} &= \frac{2}{l_{11}} = \frac{2}{3} \\ l_{22} &= 8 - l_{21}U_{12} = 8 - 0.\frac{5}{3} = 8 \\ u_{23} &= \frac{2 - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{2 - 0\frac{2}{3}}{8} = \frac{1}{4} \\ l_{32} &= 2 - l_{31}u_{12} = 2 - 6\frac{5}{3} = -8 \\ l_{33} &= 8 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 8 - 6\frac{2}{3} - (-8)\frac{1}{4} = 6 \end{aligned}$$

Logo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} y_1 = 8/3 \\ y_2 = -7/8 \\ 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8\left(\frac{-7}{8}\right) + 6y_3 = 26 \rightarrow y_3 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Resolvendo o sistema triangular superior $Ux = y$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ -7/8 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{8} \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 - \frac{5}{3}(-1) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{3} = 4 \end{array}$$

1.5.4.5 Exercício - Decomposição de Cholesky

Decomponha a matriz 3x3 abaixo pelo método de Cholesky

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix}$$

A condição inicial para o método de Cholesky é que a matriz seja simétrica, ou seja $A = A^T$, e podemos facilmente verificar esta condição.

Agora vamos aplicar a decomposição de Cholesky para uma matriz 3x3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Igualando ambos os termos temos:

$$\begin{aligned} l_{11}^2 = 4 &\Rightarrow l_{11} = \sqrt{4} = 2 \\ l_{11}l_{21} = 2 &\Rightarrow l_{21} = \frac{2}{2} = 1 \\ l_{11}l_{31} = 14 &\Rightarrow l_{31} = \frac{14}{2} = 7 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 17 &\Rightarrow l_{22} = \sqrt{17 - 1^2} = 4 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = -5 &\Rightarrow l_{32} = \frac{(-5 - 1 \times 7)}{4} = -3 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 83 &\Rightarrow l_{33} = \sqrt{83 - (-3)^2 - (7)^2} = 5 \end{aligned}$$

Logo nossa matriz L é:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a matriz está correta basta fazer a operação $[L][L]^T = [A]$.

1.5.4.6 Generalização - Sistemas triangulares inferiores

Descreveremos a resolução de sistemas triangulares inferiores

Dado o sistema $[L]\{x\} = \{b\}$ de ordem n, vamos realizar a multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\begin{aligned} l_{11}x_1 = b_1 \Rightarrow x_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 &= \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} \\ l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3 \Rightarrow x_3 &= \frac{b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}} \end{aligned}$$

Seguindo o raciocínio temos:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{b_4 - l_{41}x_1 - l_{42}x_2 - l_{43}x_3}{l_{44}} \\ x_5 &= \frac{b_5 - l_{51}x_1 - l_{52}x_2 - l_{53}x_3 - l_{54}x_4}{l_{55}} \\ x_n &= \frac{b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - l_{n3}x_3 - l_{n4}x_4 - \dots - l_{n(n-1)}x_{(n-1)}}{l_{nn}} \end{aligned}$$

Logo, fazendo $i = n$ e $n - 1 = m$ podemos escrever o conjunto de soluções da seguinte maneira:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{m=1}^{i-1} l_{im}x_m\right)}{l_{ii}} \quad para \quad i = 2, \ldots, n$$

Com $l_{ii} \neq 0$; $l_{ij} = 0$ para $i < j$; $1 \leq i, j \leq n$.

1.5.4.7 Generalização - Sistemas triangulares superiores

Descreveremos a resolução de sistemas triangulares superiores

Dado o sistema $[U]\{x\} = \{b\}$ de ordem n:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1(n-2)} & u_{1(n-1)} & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & u_{(n-2)(n-2)} & u_{(n-2)(n-1)} & u_{(n-2)n} \\ 0 & \ldots & 0 & u_{(n-1)(n-1)} & u_{(n-1)n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{(n-2)} \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{(n-2)} \\ b_{(n-1)} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Vamos realizar a multiplicação matricial e igualando os termos temos:

$$u_{nn}x_x = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$u_{(n-1)(n-1)}x_{(n-1)} + u_{(n-1)n}x_n = b_{(n-1)} \Rightarrow x_{(n-1)} = \frac{(b_{(n-1)} - u_{(n-1)n}x_n)}{u_{(n-1)(n-1)}}$$

$$u_{(n-2)(n-2)}x_{(n-2)} + u_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)} + u_{(n-2)n}x_n = b_{(n-2)}$$
$$\Rightarrow x_{(n-2)} = \frac{(b_{(n-2)} - u_{(n-2)n}x_n - u_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)})}{u_{(n-2)(n-2)}}$$

Assim:
Dado $[U]\{x\} = \{b\}$ com $u_{ii} \neq 0$; $u_{ij} = 0, i > j$ e $1 \leq i, j \leq n$
Temos:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)}{u_{ii}} \quad para \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

1.5.4.8 Generalização - Decomposição de Doolittle

A decomposição de Doolittle possui a forma $[A] = [L][U]$ com $l_{ii} = 1$. Escrevendo para n termos temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ 1^a linha de $[A]$: a_{1j} (manter a primeira linha de $[L]$ e variar a coluna de $[U]$)

$$\begin{aligned} a_{11} &= u_{11} \\ a_{12} &= u_{12} \\ a_{13} &= u_{13} \\ a_{14} &= u_{14} \\ \vdots & \quad \vdots \\ a_{1n} &= u_{1n} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_{1n} &= a_{1n} \\ u_{1j} &= a_{1j} \end{aligned} \quad para \;\; j = 1, \dots, n$$

$\rightarrow$ 1^a coluna de $[A]$: a_{i1}, para $i = 2, \dots, n$ (manter a primeira coluna de $[U]$ e variar a partir da segunda linha de $[L]$)

$$\begin{aligned} a_{21} &= l_{21}u_{11} \\ a_{31} &= l_{31}u_{11} \\ a_{41} &= l_{41}u_{11} \\ \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1} &= l_{n1}u_{11} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} l_{n1} &= \frac{a_{n1}}{u_{11}} \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{u_{11}} \end{aligned} \quad para \;\; i = 2, \dots, n$$

$\rightarrow$ 2^a linha de $[A]$: a_{2j} para $j = 2, \dots, n$ (manter a segunda linha de $[L]$ e variar a partir da segunda coluna de $[U]$)

$$\begin{aligned} a_{22} &= l_{21}u_{12} + u_{22} \\ a_{23} &= l_{21}u_{13} + u_{23} \\ a_{24} &= l_{21}u_{14} + u_{24} \\ \vdots & \quad \vdots \\ a_{2n} &= l_{21}u_{1n} + u_{2n} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_{2n} &= a_{2n} - l_{21}u_{1n} \\ u_{2j} &= a_{2j} - l_{21}u_{1j} \end{aligned} \quad para \;\; j = 2, \dots, n$$

$\rightarrow$ 2^a coluna de $[A]$: a_{i2}, para $i = 3, \dots, n$ (manter a segunda coluna de $[U]$ e variar a partir da terceira linha de $[L]$)

$$\begin{array}{lcl} a_{32} & = & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \\ a_{42} & = & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & = & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcl} l_{n2} & = & \frac{a_{n2}-l_{n1}u_{12}}{u_{22}} \\ & & \\ l_{i2} & = & \frac{a_{i2}-l_{i1}u_{12}}{u_{22}} \end{array} \quad para \quad i = 3, \ldots, n$$

→ 3^a linha de $[A]$: a_{3j} para $j = 3, \ldots, n$ (manter a terceira linha de $[L]$ e variar a partir da terceira coluna de $[U]$)

$$\begin{array}{lcl} a_{33} & = & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \\ a_{34} & = & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3n} & = & l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n} + u_{3n} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} u_{3n} & = a_{3n} - l_{31}u_{1n} - l_{32}u_{2n} \\ u_{3j} & = a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j} \end{array} \quad para \quad j = 3, \ldots, n$$

→ 3^a coluna de $[A]$: a_{i3}, para $i = 4, \ldots, n$ (manter a terceira coluna de $[U]$ e variar a partir da quarta linha de $[L]$)

$$\begin{array}{lcl} a_{43} & = & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & = & l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23} + l_{n3}u_{33} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lcl} l_{n3} & = & \frac{a_{n3}-l_{n1}u_{13}-l_{n2}u_{23}}{u_{33}} \\ & & \\ l_{i3} & = & \frac{a_{i3}-l_{i1}u_{13}-l_{j2}u_{23}}{u_{33}} \end{array} \quad para \quad i = 4, \ldots, n$$

Assim temos:

$$1^a \quad linha: \qquad u_{1j} = a_{1j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$1^a \quad coluna: \qquad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad i = 2, \ldots, n$$

$$k - esima \quad linha: \quad linha: \quad u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj} \qquad \begin{array}{c} k = 2, \ldots, n \\ j = k, k+1, \ldots, n \end{array}$$

$$k - esima \quad coluna: \qquad l_{ik} = \frac{\left(a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}\right)}{u_{kk}} \qquad \begin{array}{c} k = 2, \ldots, n \\ i = k+1, k+2, \ldots, n \end{array}$$

1.5.4.9 Generalização - Decomposição de Crout

A decomposição de Crout possui a forma $[A] = [L][U]$, $u_{ii} = 1$

$$1^a \;\; linha: \qquad u_{1j} = \tfrac{a_{1j}}{l_{11}} \qquad j = 2, \ldots, n$$

$$1^a \;\; coluna: \qquad l_{i1} = a_{i1} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$k - esima \;\; coluna: \qquad l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \qquad \begin{array}{c} k = 2, \ldots, n \\ i = k, k+1, \ldots, n \end{array}$$

$$k - esima \;\; linha: \;\; linha: \quad u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}}{l_{kk}} \qquad \begin{array}{c} k = 2, \ldots, n \\ j = k+1, \ldots, n \end{array}$$

Apêndice A

Algebra Matricial

Como matriz é uma das ferramentas mais poderosas da matemática, vamos relembrar algumas de suas propriedades algébricas.

Todos os elementos de uma matriz, aqui definidos por letras minúsculas são denominados escalares e normalmente são números $\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$. Quando referimos a matriz com todos os seus elementos escrevemos em letras maiúsculas. Podemos simplificar a notação também da seguinte forma: $A = (a_{ij})$.

A.1 Igualdade

Duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ são ditas iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para todos i e j.

A.2 Multiplicação por um escalar

αA é obtido multiplicando cada elemento de A por α.

A.3 Soma de matrizes

Sejam A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) matrizes $m \times n$ então $A + B = a_{ij} + b_{ij}$ para cada par ordenado (i,j).

A.4 Subtração de matrizes

Podemos definir a subtração $A-B$ como $A+(-1)B$, e teremos duas operações, multiplicação por um escalar e soma normal.

Apêndice B

Programas utilizados neste documento em Scilab

B.1 Representação gráfica do sistema de equações

```
clear; //limpa navegador de variáveis
clc;
x1=[0:0.1:5]; //Cria um vetor de 1 a 6 de um em um
x2=2-x1;
x3=x1-2;
scf(1) //Cria uma janela gráfica
plot(x1,x2,x1,x3);
legend('x1+x2=2','x1-x2=2');

x2=2-x1;
x3=1-x1;
scf(2) //Cria uma janela gráfica
plot(x1,x2,x1,x3);
legend('x1+x2=2','x1+x2=1');

x2=2-x1;
x3=2-x1;
scf(3) //Cria uma janela gráfica
plot(x1,x2,x1,x3);
legend('x1+x2=2','-x1-x2=-2');
```

B.2 Exemplo 1

```
clear; //limpa navegador de variáveis
clc;
x1=[0:1:6]; //Cria um vetor de 1 a 6 de um em um
```

```
x2=5-2*x1;
x3=(1/3)*x1-2;
scf(1) //Cria uma janela gráfica
plot(x1,x2,x1,x3);
legend('2x1+x2=5','x1-3x2=6');
```

B.3 Verificação da matriz L 3x3 do método de Cholesky

```
clear; //limpa navegador de variáveis
clc;
A=[4 2 14; 2 17 -5 ; 14 -5 83]; // Matriz A
L=[2 0 0;1 4 0;7 -3 5]; // Matriz L
C=L*L';
if C==A then mprintf('OK \n');
end
```