

Simulado Cálculo Numérico

Código da turma: 03 SCANU-NT3

Professor: Heleno Cardoso

Data: 20/11/2018

Nome do aluno

1. Escalone e resolva os seguintes sistemas lineares pelo método de jordan:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

2. Escalone e resolva os seguintes sistemas lineares pelo método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - 6z = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y = 2 \\ 3x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 5x + 8y + 5z = 8 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 4x + 8y + 1z = -7 \\ -2x - 10y + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Calcule $P_1(0.2)$, dados os pontos abaixo retirados da função $f(x) = e^{2x}$ e determinar o polinômio interpolador:
4. Dados os pontos abaixo retirados da função $f(x) = x + 1$, determinar o polinômio interpolador:

I	0	1
x_i	$0,1$	$1,52$
y_i	$1,1$	$2,52$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

5. Calcule $P_1(0.7)$, dados os pontos abaixo retirados da função $f(x) = x + 1$, calculada na questão 4..
6. Considerando os dados da tabela abaixo, determinar o polinômio interpolador:

I	X	Y
0	-1	1
1	0	1
2	1	0

Calcular $P(0.5)$

Simulado Cálculo Numérico

a) **Método de Lagrange**

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

b) **Método de Newton**

Atenção: Calcular os operadores da diferença dividida.

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

c) **Método de Gregory Newton**

Atenção: Calcular os operadores de diferenças finitas, h e u_x

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} \cdot (u_x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (u_x - 0) \cdot (u_x - 1) \quad \begin{matrix} h = x_1 - x_0 \\ u_x = \frac{x - x_0}{h} \end{matrix}$$

7. Considerando os dados da tabela abaixo, calcular P(1.2) pelo método de Newton.

I	X	Y
0	0.9	3.211
1	1.1	2.809
2	2.0	1.614

8. Considerando os dados da tabela abaixo, encontre X estimado, tal que f(x) = 2.

X	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72

$$P_1(x) = f(x_0) * \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) * \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

9. Considerando os dados da tabela abaixo, calcular P(1.2) pelo método de Newton.

X	0	1	2
f(x)	0	0.5	0.75

10. Calcular a área da integral pela regra do trapézio. Arbitrar um número de subintervalos.

$$I = \int_0^{0.8} \frac{10 \cdot \cos(3x)}{(1+x)^{3/2}} dx; \quad A = \frac{h}{2} * [y_0 + 2 * (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n] \quad h = \frac{x_n - x_0}{N}$$

Simulado Cálculo Numérico

11. Calcular a área da integral, pela regra do trapézio, com N igual a 10 trapézios ou subintervalos.

$$\int_0^1 e^x dx$$

12. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra dos trapézios com n igual a 08 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

13. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra 1/3 de Simpson, primeira regra de Simpson, com m igual a 06 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$I_2 = \frac{h}{3} * (c_0 * y_0 + c_1 * y_1 + c_2 * y_2 + ... + c_n * y_n) \quad h = \frac{x_n - x_0}{m}$$

14. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra 3/8 de Simpson, segunda regra de Simpson, com m igual a 09 subintervalos.

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx$$

$$I_3 = \frac{3h}{8} * (c_0 * y_0 + c_1 * y_1 + c_2 * y_2 + ... + c_n * y_n) \quad h = \frac{x_n - x_0}{m}$$

15. Dados os pontos (0.1; 1.221), (0.6; 3.320) e (0.8; 4.953), determine o valor de $P_2(0.4)$. Calcule utilizando o método de interpolação quadrática.

16. Resolver pelo método da decomposição LU o seguinte sistema linear:

a)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Simulado Cálculo Numérico

17. Seja a tabela abaixo gerada pela função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, encontre a função spline linear que interpola os pontos tabelados:

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	4	2	0	4

18. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Seidel, com 4 decimais de arredondamento e erro menor ou igual a 0.02. Admitir solução inicial nula.

a.
$$\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$$

19. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Seidel, com erro menor ou igual a $5 \cdot 10^{-2}$. Admitir vetor inicial (0; 0; 0).

a.
$$\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

20. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, com 4 decimais de arredondamento e erro menor ou igual a 0.02. Admitir solução inicial nula.

a.
$$\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$$

21. Obter a solução do sistema abaixo, pelo método iterativo de Gauss-Jacobi, com erro menor ou igual a $5 \cdot 10^{-2}$. Admitir vetor inicial (0; 0; 0).

a.
$$\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

22. Considerando os dados da tabela, determinar o polinômio interpolador, usando:
a) Método de Lagrange b) Método de Newton c) Método de Gregory
Newton Calcular P(1.5)

I	0	1	2
X	1	2	3
Y	0	-1	-2

Simulado Cálculo Numérico

23. A velocidade do som na água varia com a temperatura. Usando os valores da tabela abaixo, determinar o valor aproximado da velocidade do som na água a 100°C.

Temperatura (°C)	Velocidade (m/s)
93,3	1548
98,9	1544
104,4	1538
110,0	1532

24. A que temperatura a água entra em ebulição no Pico da Bandeira (altitude = 2890m), sabendo que o ponto de ebulição da água varia com a altitude, conforme mostra a tabela abaixo (utilize o método que considerar mais adequado).

Altitude (m)	Ponto de Ebulição da Água (°C)
950	96,84
1050	96,51
1150	96,18
.	.
.	.
.	.
2800	90,67
2900	90,34
3000	90,00

25. Considerando a tabela acima, determinar o ponto de ebulição da água em um local de Belo Horizonte que possui altitude igual a 1000m (utilize o método que considerar mais adequado).

26. Calcular a integral definida abaixo, utilizando a regra dos trapézios com n igual a 05 pontos.

$$\int_0^4 \ln(1+x) dx$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

6. Interpolação Polinomial

a) Lagrange (Quadrática)

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} + 1 \cdot \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-1}{0-1} + 0 \cdot \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0}$$

$$L_2(x) = \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-1}{-2} + \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x-1}{-1} + 0$$

$$L_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - x^2 + 1$$

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \cdot \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$L_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

b) Newton

i	x	Y	Δy	$\Delta^2 y$
0	-1	1	0	-1/2
1	0	1	-1	
2	1	0		

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x-x_0) + \Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\Delta^i y_0 \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j) \right]$$

$$P_2(x) = 1 + 0 \cdot (x-(-1)) + \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot (x-(-1)) \cdot (x-0)$$

$$P_2(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot x$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

c) Gregory-Newton

$$h = x_1 - x_0 = 0 - (-1) = 1$$

$$u_x = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-(-1)}{1} = x+1$$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} \cdot (u_x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (u_x - 0) \cdot (u_x - 1)$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

$$P_2(0,5) = -\frac{(0,5)^2}{2} - \frac{0,5}{2} + 1$$

$$P_2(0,5) = -\frac{0,25}{2} - 0,25 + 1$$

$$P_2(0,5) = -0,125 - 0,25 + 1$$

$$P_2(0,5) = 0,625$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{0}{1} \cdot (x+1) + \frac{-1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x+1-1)$$

$$P_2(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x)$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

7. $P_2(x) = 3.211 - 2.010 * (X - 0.9) + 0.620 * (X - 0.9) * (X - 1.1) \Rightarrow$ Interpolação Polinomial Quadrática

$$P_2(1.2) = 2.627$$

8. 0.6947 (Interpolação Polinomial)

$$P_1(x) = f(x_0) * \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) * \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

9. $P_2(x) = -0.125X^2 + 0.625X$ (Interpolação Polinomial Quadrática)
 $P_2(1.2) = -0.125(1.2^2) + 0.625 * 1.2 = ???$

10. 1.464; Trapézio com 10 subintervalos arbitrados.

11. 1.719713; Trapézio com 10 subintervalos.

12. ?? ; Trapézio com 08 subintervalos.

13. ?? ; 1/3 Simpson com 06 subintervalos.

14. ?? ; 3/8 Simpson com 09 subintervalos.

15. $P_2(x) = 1.141 + 0.231x + 5.667x^2$; $P_2(0.4) = ??$ (Interpolação Polinomial Quadrática)

16. Método Direto – Fatoração LU

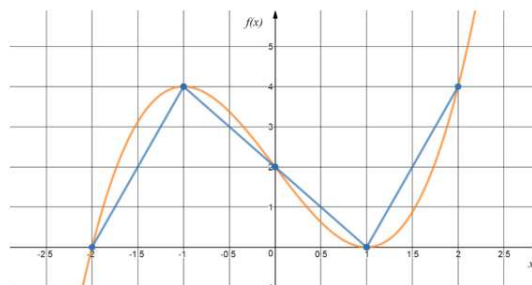
- a) Resposta: $Y = \{3; -2; -6\}$ e $X \{2; -1; 3\}$
- b) Resposta: $Y = \{1; 5/3; 0\}$ e $X \{-3; 5; 0\}$
- c) Resposta: $Y = \{1; 51; -13/4\}$ e $X \{-6; 2; -1\}$

17. Interpolação Polinomial – Função Spline - Ajuste Linear

Então a função spline linear é a seguinte:

$$S_1(x) = \begin{cases} 4x + 8, & -2 \leq x \leq -1 \\ 2 - 2x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 - 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x - 4, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Vamos ficar com algo assim:



Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

18. Resposta: Vetor [1.0085; -1.9760; 0.8701] => Método Iterativo Gauss-Seidel

19. Resposta: Vetor [1.002; 0.998; -1] => Método Iterativo Gauss-Seidel

20. Resposta: Vetor [1.0085; -1.9760; 0.8701] => Método Iterativo Gauss-Jacobi

21. Resposta: Vetor [1.002; 0.998; -1] => Método Iterativo Gauss-Jacobi

22. Interpolação Polinomial

a) Método de Lagrange Quadrática

Para este método, utilizamos diretamente a fórmula:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right]$$

Que quando expandida com os dados do exercício fica:

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$L_2(x) = 0 \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} + (-1) \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} + (-2) \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$L_2(x) = 0 - \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-3}{-1} - 2 \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{1}$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 3 - x^2 + 3x - 2$$

$$L_2(x) = -x + 1$$

b) Método de Newton

Para este método, primeiro devemos calcular os operadores da diferença dividida:

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	1	0	-1	0
1	2	-1	-1	
2	3	-2		

Agora, aplicamos a fórmula:
$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\Delta^i y_0 \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right]$$

Expandindo-a e substituindo os valores do exercício:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 0 + (-1) \cdot (x - 1) + 0 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$$

$$P_2(x) = -x + 1$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

c) Método de Gregory Newton

Já para este método, devemos calcular os operadores de diferenças finitas, h e u_x :

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	1	0	-1	0
1	2	-1	-1	
2	3	-2		

$$h = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1}{1} = x - 1$$

Agora, utilizamos a fórmula de Gregory-Newton:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j) \right]$$

Expandindo a fórmula e substituindo os valores temos:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} \cdot (u_x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (u_x - 0) \cdot (u_x - 1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{-1}{1} \cdot (x - 1) + 0 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1 - 1)$$

$$P_2(x) = 0 - x + 1 + 0$$

$$P_2(x) = -x + 1$$

Calcular $P(1.5)$. Para calcular, pegamos qualquer uma das equações encontradas (são iguais!) e substituímos o valor 1,5 no lugar dos x:

23. Newton (Interpolação Polinomial)

Como não foi especificado o método que deve ser utilizado, e como este modelo se comporta de forma determinada (existe uma equação que o rege), utilizarei a interpolação de Newton para encontrar o valor interpolado.

Primeiramente, calcularemos os valores das diferenças divididas.

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	93,3	1548	-0,71429	-0,03393	0,00214
1	98,9	1544	-1,09091	0,00176	
2	104,4	1538	-1,07143		
3	110,0	1532			

Agora, através da fórmula:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\Delta^i y_0 \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right]$$

Expandimos e substituímos os valores do exercício:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(100) = 1548 + (-0,71429) \cdot (100 - 93,3) +$$

$$+ (-0,03393) \cdot (100 - 93,3)(100 - 98,9)$$

$$+ 0,00214 \cdot (100 - 93,3)(100 - 98,9)(100 - 104,4)$$

$$P_3(100) = 1548 - 0,71429 \cdot 6,7 - 0,03393 \cdot 6,7 \cdot 1,1$$

$$+ 0,00214 \cdot 6,7 \cdot 1,1 \cdot (-4,4)$$

$$P_3(100) = 1542,9011$$

Resolvendo pela Interpolação Linear:

Definindo o Polinômio: $P(x) = A_0 + A_1 X$

$$P_1(x) = 1651,89 - 1,09X$$

- Calculando:

$$P_1(100) = 1542,89$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

24. Lagrange Quadrática (Interpolação Polinomial)

Fazendo por Lagrange, iremos construir um polinômio a partir dos três últimos valores da tabela (eles incluem o ponto a ser interpolado dentro de seu intervalo).

I	x	Y
0	2800	90,67
1	2900	90,34
2	3000	90,00

A fórmula de Lagrange é:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right]$$

Expandindo a fórmula e substituindo os valores, teremos:

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} L_2(2890) &= 90,67 \cdot \frac{2890 - 2900}{2800 - 2900} \cdot \frac{2890 - 3000}{2800 - 3000} + \\ &+ 90,34 \cdot \frac{2890 - 2800}{2900 - 2800} \cdot \frac{2890 - 3000}{2900 - 3000} + \\ &+ 90 \cdot \frac{2890 - 2800}{3000 - 2800} \cdot \frac{2890 - 2900}{3000 - 2900} \end{aligned}$$

$$L_2(2890) = 90,67 \cdot \frac{-10}{-100} \cdot \frac{-110}{-200} + 90,34 \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{-110}{-100} + 90 \cdot \frac{90}{200} \cdot \frac{-10}{100}$$

$$L_2(2890) = 90,67 \cdot 0,1 \cdot 0,55 + 90,34 \cdot 0,9 \cdot 1,1 - 90 \cdot 0,45 \cdot 0,1 = 90,3734$$

Simulado Cálculo Numérico

RESPOSTAS

25. Lagrange Quadrática (Interpolação Polinomial)

Considerando a tabela acima, determinar o ponto de ebulição da água em um local de Belo Horizonte que possui altitude igual a 1000m (utilize o método que considerar mais adequado).

Para resolver esta questão, basta recorrer ao mesmo método acima, mas agora com uma nova tabela de dados (são os pontos que incluem o valor de 1000 dentro de sua faixa).

I	x	Y
0	950	96,84
1	1050	96,51
2	1150	96,18

Criando a mesma fórmula utilizada acima, e substituindo os novos valores, teremos:

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} L_2(1000) &= 96,84 \cdot \frac{1000 - 1050}{950 - 1050} \cdot \frac{1000 - 1150}{950 - 1150} + \\ &\quad + 96,51 \cdot \frac{1000 - 950}{1050 - 950} \cdot \frac{1000 - 1150}{1050 - 1150} + \\ &\quad + 96,18 \cdot \frac{1000 - 950}{1150 - 950} \cdot \frac{1000 - 1050}{1150 - 1050} \end{aligned}$$

$$L_2(1000) = 96,84 \cdot \frac{-50}{-100} \cdot \frac{-150}{-200} + 96,51 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{-150}{-100} + 96,18 \cdot \frac{50}{200} \cdot \frac{-50}{100}$$

$$L_2(1000) = 96,84 \cdot 0,5 \cdot 0,75 + 96,51 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 96,18 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 96,675$$

26. Resposta 04 subintervalos. Área: ???

$$\int_0^4 \ln(1+x) dx$$