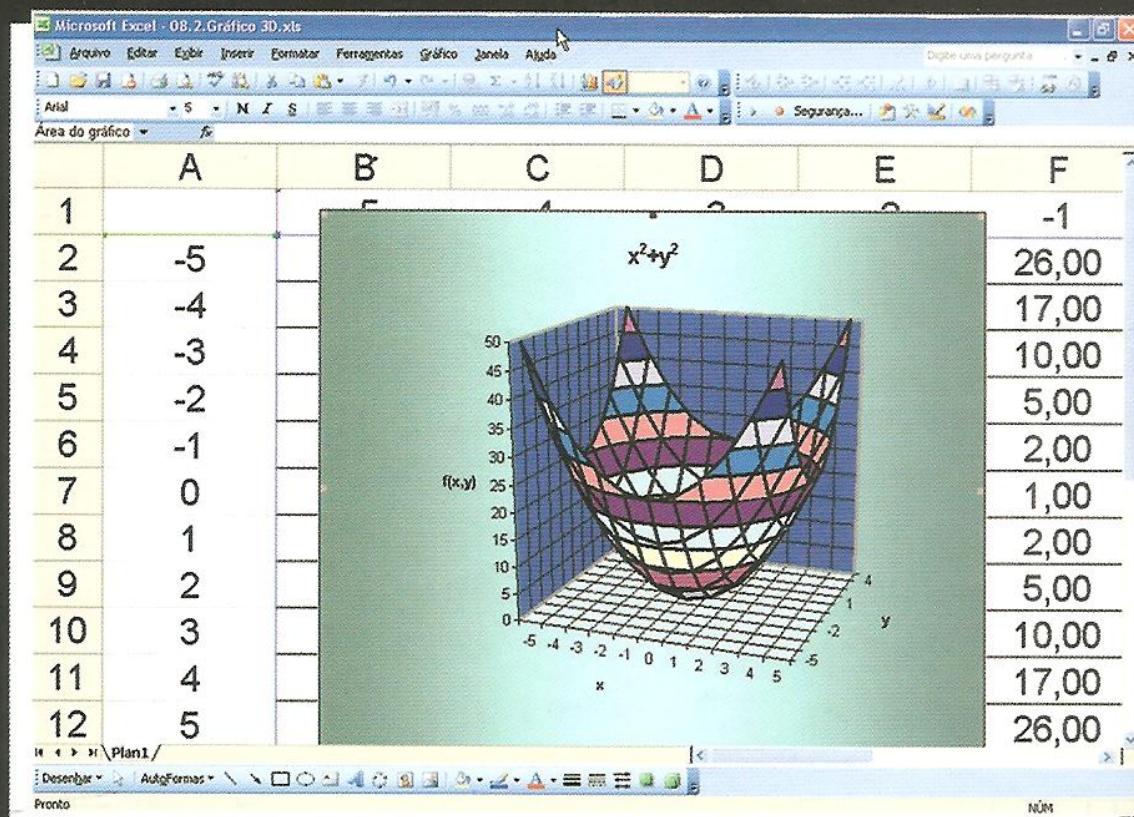


Luiz Fernando de Moura

# Excel para Engenharia

**Formas simples para resolver  
problemas complexos**

**Volume 1**



# **Excel**

para engenharia

# Sumário

Prefácio .....	9
----------------	---

## Capítulo 1

Introdução .....	11
Engenheiros e programação.....	11
Por que usar o Excel?.....	12

## Capítulo 2

Componentes do Excel .....	15
Definições importantes .....	15
Aplicativos, pastas, planilhas e células .....	15
A planilha.....	16
As células.....	16
O cursor.....	17
A alça de replicação.....	17
Percorrendo a planilha .....	18
Selecionando células.....	19

## Capítulo 3

Usando a planilha.....	21
Conteúdo das células: tipos de formatos.....	21
Planilhas-gabarito ( <i>templates</i> ): modelos xlt .....	22

## Capítulo 4

Fórmulas e operadores .....	23
Operadores .....	23
Operadores algébricos.....	23
Hierarquia dos operadores algébricos.....	24
Operadores de comparação (lógicos).....	25
Operadores especiais.....	25
O uso da alça de replicação com fórmulas .....	26
Operador cifrão.....	26

## **Capítulo 5**

As funções da biblioteca do Excel .....	29
Funções matemáticas e trigonométricas .....	29
Funções matriciais .....	30
Funções estatísticas.....	31
Funções lógicas.....	31

## **Capítulo 6**

Nomeando células .....	33
Aplicação – Variáveis nomeadas.....	34
Vetores e matrizes .....	34
Aplicação – Utilização de vetores em planilhas.....	35
Aplicação – Operações com matrizes.....	35

## **Capítulo 7**

Formatando células .....	39
Formatação direta .....	39
Aplicação – Aparência da célula.....	40
Formatação condicional .....	40

## **Capítulo 8**

Gráficos .....	43
Gráficos 2D .....	43
Gráficos 3D .....	48

## **Capítulo 9**

Auditória na planilha.....	51
----------------------------	----

## **Capítulo 10**

Funções de uma variável .....	55
Usando Atingir Meta.....	55
Melhorando o algoritmo Atingir Meta.....	56
A questão da estimativa inicial .....	57
Aplicação – Raízes de função de uma variável .....	57
Máximos e mínimos.....	58
Aplicação – Mínimo de função de uma variável .....	59
Sistemas de equações de uma variável .....	60
Aplicação – Interseções entre duas funções .....	60

## **Capítulo 11**

O Solver .....	63
Funções de uma variável.....	64
Aplicação – Função de Colebrook.....	64
Problemas com as estimativas iniciais .....	65
Aplicação – Dificuldade de convergência.....	66
Pesquisando valores de raízes.....	67
Aplicação – Raiz positiva de função do 2º grau .....	67
Funções de mais de uma variável .....	69
Aplicação – Equação de onda.....	70
Forçando valores positivos para as variáveis .....	70
Adicionando restrições .....	71

## **Capítulo 12**

Estimativa de parâmetros – Mínimos Quadrados .....	75
Método dos Mínimos Quadrados.....	75
Aplicação – Ajuste linear de pontos experimentais .....	75
Aplicação – Ajuste de função não-linear .....	77

## **Capítulo 13**

Sistemas de equações lineares .....	79
Aplicação – Solução de sistema com três equações e três incógnitas ..	80
Aplicação – Balanço de massa (tanque de formulação) .....	85

## **Capítulo 14**

Problemas de otimização .....	91
Aplicação – Otimizando custo de aquisição de matérias-primas .....	91
Aplicação – Otimizando custo de produção .....	93
Aplicação – Análise gráfica da otimização.....	95

## **Capítulo 15**

Sistemas de equações não-lineares (Solver) .....	97
Aplicação – Sistema de três equações e três incógnitas .....	97

## **Capítulo 16**

Sistemas de equações não-lineares (Macros).....	99
Aplicação – Malha de tubulação.....	99
Gravando macros .....	103

## **Capítulo 17**

Integração numérica .....	105
Integrais simples .....	105
Aplicação – Integral de função logarítmica .....	105
Simplificando a entrada de dados com o VBA .....	107
Integrais duplas .....	108
Aplicação – Medição de terreno irregular .....	109

## **Capítulo 18**

Equações diferenciais lineares ordinárias .....	113
Aplicação – Equação diferencial linear ordinária de 1 <sup>a</sup> ordem.....	114
Aplicação – Reator descontínuo com cinética de 1 <sup>a</sup> ordem.....	115
Aplicação – Circuito RLC .....	121

## **Capítulo 19**

Equações diferenciais parciais .....	125
Aplicação – Aquecimento de uma placa plana .....	128

## **Capítulo 20**

Estudos de caso .....	133
Estatística (análise de regressão) .....	133
Aplicação – Previsão do custo de matéria-prima.....	134
Funções de Bessel.....	139
Aplicação – Resfriamento em regime transitório (solução exata).....	139
Uso de ferramentas de controle .....	143
Noções de Programação Orientada ao Objeto (OOP) .....	145
Aplicação – Ponto de operação de uma bomba centrífuga.....	147

Fontes consultadas .....	151
--------------------------	-----

## Prefácio

Neste início de século XXI, o pós-modernismo em que vivemos demanda produtos de maior qualidade e com novas funcionalidades, além de processos mais seguros e sustentáveis. Para incorporar essas demandas, a Engenharia amplia seus métodos: apóia-se mais intensamente em princípios científicos para o projeto de equipamentos e de métodos de produção; desenvolve produtos considerando múltiplas escalas, desde a molécula até a escala de aplicação; adota uma abordagem integrada de sistemas.

Nesse contexto de metas mais ousadas quanto à qualidade de produtos e mais restritivas quanto a aspectos ambientais e de segurança, o engenheiro necessita realizar cálculos cada vez mais diversificados e complexos. Como resultado, grandes desenvolvimentos têm sido registrados em áreas como modelagem molecular, fluidodinâmica computacional, simulação estrutural, CAD-CAE, simuladores de processo etc. Apesar da inegável utilidade dessas ferramentas, elas requerem vultosos investimentos na aquisição de licenças e em treinamento, além de os desenvolvimentos serem relativamente lentos.

Há, portanto, campo importante para o emprego de ferramentas matemáticas que sejam de simples utilização, flexíveis quanto à diversidade dos problemas a serem tratados e capazes de lidar com problemas complexos. As linguagens de programação como Fortran atendem aos requisitos de diversidade e complexidade, mas exigem grande esforço de treinamento, além do desenvolvimento de aplicações específicas. Por isso, aplicativos amigáveis ao usuário foram desenvolvidos, mas freqüentemente são limitados quanto à complexidade dos problemas a serem tratados. Outros cedem quanto à facilidade de uso para ganhar em capacidade de processamento. No entanto, todos requerem aprendizado relativamente longo e têm custo elevado. Neste livro, o autor propõe uma alternativa brilhantemente simples e de baixo custo: o emprego da planilha de cálculo Excel.

É amplamente conhecido que o aplicativo Excel possui recursos para organização e tratamento estatístico de dados, bem como apresentação de resultados em forma de tabelas e gráficos. A realização de cálculos simples é familiar para a comunidade tecnológica. Uma contribuição significativa nesta obra é mostrar que cálculos mais avançados também podem ser resolvidos de forma extremamente simples, freqüentemente de forma mais fácil do que com os aplicativos citados anteriormente. Há ainda um aspecto adicional: o Excel é bem conhecido, mesmo por pessoas sem formação superior. Assim, o aprendizado para aplicações de Engenharia requer pequeno esforço, sendo

por isso muito conveniente para o ensino em cursos de graduação.

Este livro conduz o leitor, tanto o estudante como o engenheiro praticante, a uma breve e agradável jornada, ao fim da qual ele desenvolverá habilidades que estarão sempre o acompanhando por toda a sua vida profissional, tornando-o mais apto a enfrentar os novos desafios do século XXI. Bom proveito!

Marcelo Seckler

Diretor-presidente da ABEQ

(Associação Brasileira de Engenharia Química)

Fevereiro de 2007

## Capítulo 1

# Introdução

## Engenheiros e programação

Muitos profissionais de Engenharia, apesar da familiaridade com os cálculos, tornam-se avessos à programação, como verdadeiros “programófobos”, por terem vivenciado uma experiência traumática ao longo da graduação. Mas qual será o motivo de tal aversão, considerando que esses profissionais que lidam com lógica todos os dias têm habilidades desenvolvidas para a função de programar, reunindo qualidades para desempenhá-la bem? A seguir, são listados alguns “palpites”:

- Em geral, o aprendizado de algoritmos acontece no primeiro ano da graduação, sendo ensinado por professores do departamento de Ciências da Computação.
- O uso das ferramentas de programação (linguagens) ocorre de forma esparsa ao longo das disciplinas profissionalizantes, já que parte significativa dos docentes engenheiros prefere usar “pacotes” computacionais específicos a escrever linhas de código.
- Há duas décadas, quando boa parte dos professores de Engenharia se formou, as GUI (*Graphical User Interfaces*), hoje tão comuns nos sistemas operacionais, praticamente não existiam. Ensinar dezenas de estudantes a escrever código e organizar resultados, freqüentemente malformatados, era uma tarefa heróica.

É razoável, portanto, esperar que boa parte dos engenheiros se recuse a programar uma calculadora ou que apenas ensaie alguns passos em planilhas eletrônicas. Muitos acabam se tornando especialistas em um ou outro *software* específico, usado freqüentemente em poucas empresas, tendo em vista seu alto custo.

Como desde então o mundo mudou muito, com o desenvolvimento de novas tecnologias, a informática se tornou um elemento imprescindível em diversas áreas do trabalho. Diante disso, formar hordas de engenheiros “programófobos” não se justifica mais, mesmo porque atualmente existem ferramentas mais amigáveis para lidar com linguagens como o BASIC e o FORTRAN. Como se isso não bastasse, a programação moderna caminha para a “orientação a objetos”, a qual, se por um lado é um tema complexo, por outro, agiliza a programação moderna, conferindo-lhe poder.

Quando se está vários anos na docência de Engenharia, sabe-se que a chave do sucesso para essa empreitada consiste em usar ferramentas de programação ao longo de todo o curso de graduação, pela maioria dos professores do curso, se não por todos.

É nesse ponto que as planilhas eletrônicas – particularmente o Excel, se for usado o ambiente Windows – tornam-se uma ferramenta de ensino de programação bastante interessante. Tal ferramenta pode ser o "fio condutor" do uso da programação ao longo da graduação, sem forçar os docentes que programam a abandonar suas linguagens preferidas e sem forçar docentes que não desenvolveram aptidão para programar que o façam de forma compulsória.

## Por que usar o Excel?

As principais vantagens do uso do Excel são:

- Disponibilidade – A suíte Office pode ser encontrada praticamente em qualquer lugar, seja em casa, seja no trabalho.
- Facilidade de uso – Cálculos sofisticados, como sistemas de equações não-lineares, inversão de matrizes etc., podem ser realizados sem praticamente nenhum conhecimento de métodos numéricos.
- Variáveis nomeadas – Oferecem a possibilidade de o usuário trabalhar com variáveis nomeadas (“energia”, “custo”, “x”, “y” etc.).
- Biblioteca de funções – O Excel possui internamente uma extensa gama de funções de Engenharia (Bessel, função erro, números complexos etc.), acessíveis ao engenheiro, sem a necessidade de uma linha de código sequer.
- Portabilidade – As planilhas Excel podem ser executadas em *desktops*, *laptops* e *handhelds*, sem maiores dificuldades.
- Integração – O Excel se comunica com facilidade com outros programas da suíte Office e do Windows, podendo executá-los ou ser executado a partir deles. Além disso, a poderosa linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*) pode se comunicar com programas escritos em outras linguagens, como FORTRAN, C, *Visual Basic*, por meio da compilação de DLLs (*Dynamic Linked Libraries*).
- Expansibilidade – Por meio da programação de macros em VBA, o uso do Excel não tem limites, estendendo-se a redes locais e à Internet.
- Abrangência – A quantidade de programas escritos em Excel é muito grande. Tente, leitor, acessar o Google (<www.google.com>) com o seguinte critério: **Eigenvalues filetype:xls**. Veja quantas planilhas surgirão envolvendo autovalores. Tente substituir o termo

- eigenvalues* por algo mais próximo de seu trabalho e divirta-se.
- Simplicidade – A inversão de matrizes pode ser considerada um algoritmo clássico no ensino de programação. A Tabela 1.1 mostra a incomparável vantagem da programação no Excel em detrimento de uma linguagem clássica, na inversão de uma matriz  $n \times n$ :

**Tabela 1.1** Comparação entre as linguagens.

BASIC	EXCEL
<p style="text-align: center; margin-left: 100px;">                    Linhas para introdução da matriz MAT(R,R).                  </p> <pre> 100 FOR J = 1 TO R 110 I=J-1 120 I=I+1 130 IF I&gt;R THEN 300 140 IF MAT(I,J) &lt;&gt; 0 THEN 320 290 GOTO 120 300 PRINT "MATRIZ SINGULAR" 310 GOTO 630 320 FOR K = 1 TO R 330 S=MAT(J,K) 340 MAT(J,K)=MAT(I,K) 350 MAT(I,K)=S 360 S=MINV(J,K) 370 MINV(J,K)=MINV(I,K) 380 MINV(I,K)=S 390 NEXT K 400 T=1/MAT(I,J) 410 FOR K=1 TO R 420 MAT(J,K)=T*MAT(J,K) 430 MINV(J,K)=T*MINV(J,K) 440 NEXT K 450 FOR L=1 TO R 460 IF L=J THEN 520 470 T=-MAT(L,J) 480 FOR K=1 TO R 490 MAT(L,K)=MAT(L,K)+T*MAT(J,K) 500 MINV(L,K)=MINV(L,K)+T*MINV(J,K) 510 NEXT K 520 NEXT L 530 NEXT J               Rotinas de saída dos resultados.             </pre> <p style="text-align: center; margin-left: 100px;">                   630 END       </p>	<p style="text-align: center; margin-left: 100px;">                    A matriz está na planilha e chama-se          "Matriz".          A região da planilha que receberá o          resultado          chama-se "Inversa".                  </p> <pre> Sub Inversão_de_Matriz() [Inversa].FormulaArray = "=MINVERSE(Matriz)" End Sub       </pre>

O exemplo não deixa margem para qualquer dúvida: a simplicidade da programação no Excel deixa ao engenheiro tempo suficiente para refletir sobre sensibilidade paramétrica do modelo, variáveis de projeto etc. Afinal, é isso o que se espera dele. Obviamente, para aquele que queira entrar nos meandros do sistema operacional ou desenvolver objetos complexos, existem linguagens mais indicadas, como C++, por exemplo, mas os fundamentos podem ser aprendidos no Excel.

## Capítulo 2

# Componentes do Excel

## Definições importantes

Neste texto, podem ocorrer algumas diferenças de terminologia daquelas usadas pela Microsoft, em seus manuais e arquivos de ajuda, mas ocorrerão em pequena quantidade e não inviabilizarão o entendimento do material distribuído pela Microsoft ou da literatura geral sobre o tema. O objetivo deste capítulo, além de buscar sistematizar o assunto, é introduzir termos em inglês que serão úteis para o leitor que eventualmente se aventurar no VBA (*Visual Basic for Applications*), o qual será abordado aqui apenas de forma superficial.

## Aplicativos, pastas, planilhas e células

Aplicativo (*Application*) – O termo aplicativo refere-se ao Excel como um todo. O termo planilha refere-se apenas a um dos objetos<sup>1</sup> que compõem o Excel. De fato o aplicativo é composto pela barra de menus, pelas barras de ferramentas, pela barra de *status*, pela caixa de nomes, pelo(s) arquivo(s) (pasta(s) de trabalho) e suas folhas de gráficos e planilhas; estas, por sua vez, são compostas pela caixa de fórmulas e pelas células.

Pastas de trabalho (*Workbooks*) – São os arquivos (abertos ou não) com extensão *xls*<sup>2</sup> que contêm as planilhas, as folhas de gráfico e os códigos de programação.

Planilhas (*Worksheets*) – São o segundo tipo de objeto mais importante do Excel. Consiste em um conjunto de células (exatamente 16.777.216), em que o usuário coloca suas fórmulas, os valores e, na maioria das vezes, também os resultados.

Folhas de gráficos (*Charts*) – São as folhas sem células que podem conter gráficos de diversos formatos. *Charts* e *Worksheets* também são chamadas de *Sheets* (folhas).

Células (*Cells*) – São os objetos mais importantes do Excel. É nelas que o usuário introduz suas fórmulas, os dados e os resultados. Elas podem ter função individual (*Cell*), coletiva (*Range*) e dispersa (*Areas*).

<sup>1</sup> O termo objeto é muito importante em programação moderna e será explicado mais adiante.

<sup>2</sup> As letras x e l, pronunciadas juntas, em inglês, têm som semelhante a Excel. Daí a terminação *xls*, que significa Excel Spreadsheet.

## A planilha

Ao abrir o Excel, surgirá uma nova pasta de trabalho chamada Pasta1. Ela conterá três planilhas (Plan1, Plan2 e Plan3). Cada uma delas apresentará 16.777.216 células distribuídas em 256 colunas nomeadas de A a IV e 256<sup>2</sup> linhas numeradas de 1 a 65536. Cada célula é referenciada pela letra da coluna, seguida pelo número da linha: por exemplo, a célula no canto esquerdo superior é A1, e a célula no canto direito inferior é IV65536. Para percorrer uma planilha vazia basta apertar as flechas de direção ( $\leftarrow$ ,  $\uparrow$ ,  $\rightarrow$  e  $\downarrow$ ) com a tecla **Ctrl** pressionada.

## As células

Cada célula é composta essencialmente por três partes: borda, interior e conteúdo. Quando a célula estiver selecionada, sua borda assumirá um contorno mais grosso na cor preta, tendo um minúsculo ponto escuro no canto inferior direito, a alça de replicação.

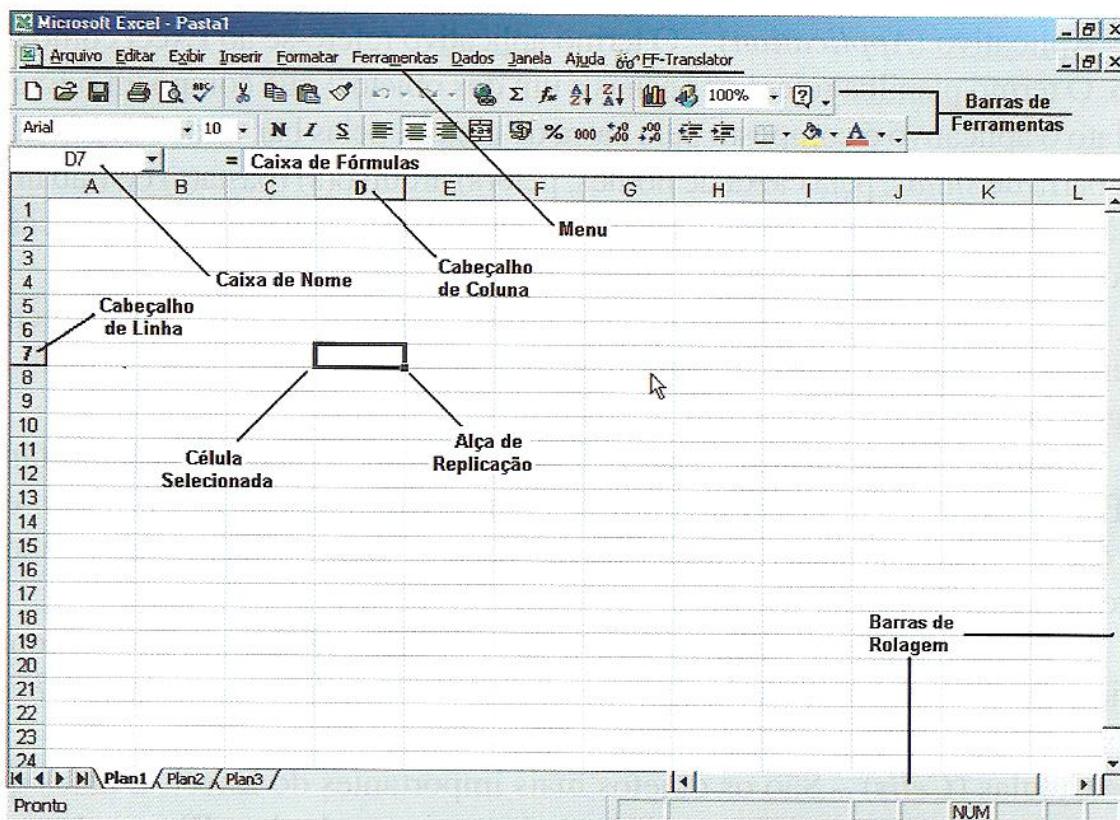
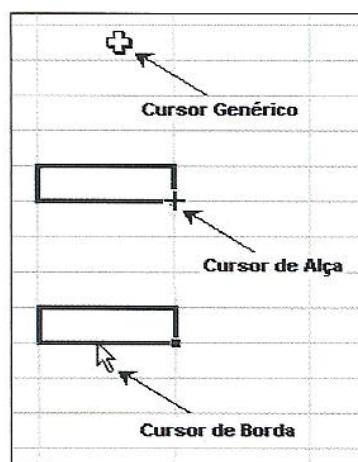


Figura 2.1 Detalhes de uma planilha.

## O cursor

O cursor do *mouse* assume três formas diferentes. A genérica é uma cruz branca e indica que a célula está pronta para receber uma informação digitada pelo usuário ou colada a partir da Área de Transferência. O cursor de borda tem a forma clássica do ponteiro do *mouse* e, no Excel, tem a função de movimentar o conteúdo da célula. O cursor de alça é responsável pela replicação do conteúdo da célula, junto com a alça de replicação. Na Figura 2.2 estão destacados os três tipos de cursor existentes no Excel.



**Figura 2.2** Formatos do cursor.

## A alça de replicação

O pequeno quadrado escuro no canto direito inferior de uma célula selecionada será aqui denominado alça de replicação. Na ajuda do Excel ele é denominado alça de preenchimento, a qual é particularmente muito útil. Vejamos:

### Atividade 1

1. Digitar **1** na célula **A1**.
2. Selecionar a célula e “puxá-la” pela alça até a linha **5**.

*Resultado: o valor 1 foi replicado em A1, A2, A3, A4 e A5.*

### Atividade 2

3. Repetir “puxando” a célula para a direita até a coluna **F**.

*Resultado: o valor 1 foi replicado por 25 células.*

### Atividade 3

4. Digitar **1** na célula **A1** e **2** na célula **A2**.
5. Selecionar **A1** e **A2**.
6. “Puxar” a seleção até a linha **5**.

*Resultado: os valores foram incrementados de 1 em 1 até 5.*

Fica fácil entender o uso dessa alça, mas seu verdadeiro potencial será visto com o uso das fórmulas, mais adiante.

## Percorrendo a planilha

A parte visível da planilha depende do *zoom* selecionado. A sugestão é que o leitor selecione as células visíveis e, em seguida, clique na caixa de zoom, selecionando o menor valor. Ficará evidente o tamanho da planilha, e, mesmo assim, apenas uma parte estará visível. Como já dito, cada planilha tem  $256^3$  células. Como percorrer essa enormidade? Simples: o Excel apresenta uma série de teclas de atalho, que estão disponíveis ao leitor na ajuda do Excel. Aqui vamos nos limitar a algumas, com o objetivo de percorrer a planilha de forma conveniente. Eis o roteiro:

1. Pressionar **CTRL + HOME**. Essa combinação de teclas permite voltar à célula A1 de qualquer ponto da planilha.
2. Pressionar **CTRL + ↓**. Essa combinação de teclas leva à última linha da planilha ( $65536 = 256^2$ ).
3. Pressionar **CTRL + →**. Essa combinação de teclas leva à última coluna da planilha (IV, que equivale a **256**).
4. Em seguida, pressionar **CTRL + ↑**. Essa combinação de teclas leva de volta à primeira linha (**1**).
5. Se forem pressionadas agora as teclas **CTRL + ←**, o ponto inicial (**A1**) será novamente alcançado.

Essas são formas ágeis de percorrer a planilha vazia, mas existem variações. Usando a alça de replicação, preencha com o número **1** as 20 primeiras linhas e as dez primeiras colunas, até a coluna **J**. Pressionando **CTRL + HOME**, a célula inicial será novamente alcançada e, repetindo a seqüência anterior, o percurso será repetido, porém *apenas nas células preenchidas*. Esse recurso é muito útil para percorrer rapidamente células contendo dados.

O menu **Editar > Ir para** (ou simplesmente a tecla **F5**) permite percorrer a tabela agilmente. Nunca é demais lembrar que cada planilha tem  $256^3$  células e que projetos com dez planilhas não são incomuns. Experimente pressionar **F5** e digitar **Z1063**. É uma forma rápida de atingir pontos específicos da planilha.

## Selecionando células

Se o leitor repetir o procedimento anterior, mas com a tecla **SHIFT** pressionada no lugar de **CTRL**, perceberá que as células vão sendo selecionadas ou deixando de ser, linha por linha, coluna por coluna, dependendo da seta utilizada. Quando se desejar selecionar várias células ao mesmo tempo, a combinação **CTRL + SHIFT + SETA** deve ser usada.

## Capítulo 3

# Usando a planilha

## Conteúdo das células: tipos de formatos

O Excel permite que o conteúdo de suas células assuma diferentes formatos. Melhor do que explicar cada um é o leitor experimentá-los. Abra o Excel e surgirá uma nova pasta chamada Pasta1. Preencha a coluna B, como mostra a Figura 3.1:

	A	B	C
1		Geral	
2		Número	
3		Moeda	
4		Data	
5		Hora	
6		Porcentagem	
7		Fração	
8		Científico	
9		Texto	
10		Especial	
11		Personalizado	
12		Apóstrofo	

**Figura 3.1** Preparação da planilha.

Após a seleção de cada célula da coluna A, o menu **Formatar > Células** é ativado, ativando, por sua vez, a guia **Número** e escolhendo a categoria correspondente (coluna B):

1. Selecionar A2.
2. Selecionar o menu **Formatar > Células**.
3. Ativar a categoria **Número** e clicar no botão **OK**.
4. Repetir para A3, ativando a categoria **Moeda**.
5. Repetir para A4, ativando a categoria **Data**.
6. Repetir para A5, ativando a categoria **Hora**.
7. Repetir para A6, ativando a categoria **Porcentagem**.
8. Repetir para A7, ativando a categoria **Fração**.
9. Repetir para A8, ativando a categoria **Científico**.
10. Repetir para A9, ativando a categoria **Texto**.
11. Repetir para A10, ativando a categoria **Especial**.
12. Repetir para A11, ativando a categoria **Personalizado**. Na caixa **Tipo**, digitar **[Vermelho]#?/?**.
13. Digitar **1/4** de A1 até A11 e ‘**1/4** em A12.

O resultado será algo como o representado na Figura 3.2:

	A	B	C
1	1/abr	Geral	
2	0,25	Número	
3	R\$ 0,25	Moeda	
4	1/4	Data	
5	0:00	Hora	
6	0,25%	Porcentagem	
7	1/4	Fração	
8	1/4	Científico	
9	1/4	Texto	
10	00000	Especial	
11	1/4	Personalizado	
12	1/4	Apóstrofo	

**Figura 3.2** Formatação de células.

Observe que a formatação padrão é **Geral**, que estipula prioridades: se o usuário digitar  $\frac{1}{4}$ , a prioridade será data, e o Excel entenderá como 1º de abril. Se o usuário quiser digitar o “texto”  $\frac{1}{4}$ , ou ele formata a célula como texto ou digita um apóstrofo antes. As demais formatações são auto-explicativas.

## Planilhas-gabarito (*templates*): modelos xlt

O Excel apresenta um alinhamento padrão: à esquerda para texto e à direita para o resto. Mas como centralizar tudo e, se houver alguma necessidade específica, mudar o alinhamento apenas das células das quais eu precisar? O Excel permite o uso de gabaritos (*templates*) chamados Modelos, que atendem às peculiaridades de cada trabalho. Se o leitor preferir a centralização permanente, pode driad seu modelo:

1. Digite **CTRL + O** e entre no menu **Ferramentas > Opções**. Na guia **Geral**, verifique o caminho na caixa **Local alternativo do arquivo**. Anote-o.
2. No menu **Formatar > Estilo**, desative a caixa **Alinhamento** e, depois de clicar no botão **Modificar...**, mude os alinhamentos horizontal e vertical para **Centro**.
3. Salve como modelo **Pasta.xlt** na pasta anotada.<sup>3</sup>
4. Feche o Excel. Ao abri-lo, o alinhamento padrão será centralizado. Nos demais, tudo continuará como antes.

<sup>3</sup> Observe que não basta escrever “Pasta.xlt”, o tipo deve ser Modelo.

## Capítulo 4

# Fórmulas e operadores

## Operadores

Embora a principal função do Excel seja “fazer contas”, muitos acham (erradamente) que ele se limita a isso. Seria um reducionismo dizer que as linguagens de programação servem apenas para “fazer contas”. Existem linguagens mais especializadas “em fazer contas”, como o **FORTRAN**, o **ALGOL** e o **COBOL**, bem como existem linguagens especializadas em adentrar nas profundezas do sistema operacional, como o **C**, por exemplo. Isso não significa, em absoluto, que não se possa utilizar a linguagem C para a produção de um algoritmo numérico. O Excel, da mesma forma, pode até ser utilizado para coisas inusitadas, como enviar mensagens de correio eletrônico (*e-mails*). Porém, se não for absolutamente necessário (e às vezes é), use para isso um gerenciador clássico, como o Outlook Express.

De qualquer forma, é preciso aprender a fazer contas no Excel, por ser esta a sua maior virtude. E para fazer contas são necessários operadores, como, aliás, em qualquer linguagem de programação. Operações algébricas ou de qualquer outro tipo devem ser introduzidas nas células por meio do operador “**=**”. As operações podem ocorrer entre células (duas ou mais), entre células e constantes e entre essas duas e as funções da biblioteca, as quais serão apresentadas mais adiante.

## Operadores algébricos

Embora a ajuda do Excel chame esses operadores de “aritméticos”, é preferível denominá-los algébricos, uma vez que a exponenciação, a rigor, não é uma operação aritmética.

Se o leitor digitar na célula **C3** a operação “**=A3+B3**”, e as células **A3** e **B3** carregarem os valores **2** e **3**, o resultado será **5**. Uma das principais habilidades das planilhas eletrônicas é o cálculo automático: no exemplo anterior, basta o usuário mudar os valores contidos em **A3** ou **B3**, e o resultado será imediatamente atualizado. Preencha agora as células **A1** até **A5** com o valor **2**, e as células de **B1** até **B5** com o valor **3**. Nas células correspondentes da **coluna C**, introduza as fórmulas contendo os operadores algébricos, conforme mostra a Figura 4.1:

	A	B	C	D
1	2	3	5	=A1+B1
2	2	3	-1	=A2-B2
3	2	3	6	=A3*B3
4	2	3	0,666667	=A4/B4
5	2	3	8	=A5^B5

**Figura 4.1** Operações algébricas.

Os operadores “+”, “-”, “\*” e “/” são os operadores aritméticos, e sua função é óbvia. O operador “^” é o responsável pelas exponenciações.

## Hierarquia dos operadores algébricos

Em todas as linguagens, os operadores aritméticos têm uma ordem de precedência. Por exemplo, “=2+3^2” resulta 11, pois a exponenciação tem precedência sobre a soma. Para mudar a precedência, deve-se usar parênteses. Se o usuário desejava obter 25, a operação seria “=(2+3)^2”. Os operadores **soma** e **subtração** têm o mesmo nível, mas são hierarquicamente inferiores aos operadores **multiplicação** e **divisão**, que possuem o mesmo nível. A Figura 4.2 traz um resumo da precedência:

----- Hierarquia maior ----->			
“+” e “-”	“*” e “/”	“^”	0

**Figura 4.2** Ordem de precedência dos operadores algébricos.

Desconsiderar a hierarquia pode ser grave: imagine que se deseje calcular a raiz oitava do valor da célula A1. A expressão “=A1^1/8” não terá como resultado nenhum erro aparente, mas o resultado representará o valor de A1 dividido por oito, e não o que se pretendia.

Outro erro comum é o uso desnecessário dos parênteses: “=(A1+B1)-3”. Tal procedimento é **totalmente desnecessário e apenas consome memória**, que pode fazer falta em máquinas menos eficientes, quando operam grandes planilhas.

O leitor está convidado a experimentar as fórmulas da Figura 4.3.

	A	B	C	D	E	F
8			=3*A9+B9	=3*(A9+B9)	=A9+B9^(1/2)	=3*A9+B9^1/2
9	2	3	9	15	3,732051	7,5
10	Significados:	3.x+y	3.(x+y)	x+y <sup>1/2</sup>	x+y <sup>1/2</sup>	

**Figura 4.3** Efeito da hierarquia dos operadores algébricos.

## Operadores de comparação (lógicos)

Nem todos os operadores servem para “fazer contas”; os operadores de comparação são lógicos, isto é, retornam apenas os valores **FALSO** ou **VERDADEIRO**. Todas as linguagens de programação possuem operadores desse tipo, que, como o próprio nome diz, comparam os valores de células. Preencha, agora, as células A6 até A11 com o número 2 e as células B6 até B11 com o número 3. Aplique nas células C6 até C12 as fórmulas de comparação, conforme a Figura 4.4.

	A	B	C	D
1	2	3	VERDADEIRO	=A6<B6
2	2	3	FALSO	=A7>B7
3	2	3	VERDADEIRO	=A8<=B8
4	2	3	FALSO	=A9>=B9
5	2	3	VERDADEIRO	=A10<>B10
6	2	3	FALSO	=A11=B11

**Figura 4.4** Operações de comparação.

Os operadores mostrados na Figura 4.4 são, respectivamente:

- < (menor);
- > (maior) <= (menor ou igual);
- >= (maior ou igual);
- <> (diferente);
- = (igual).

Os operadores de comparação também são conhecidos como operadores booleanos. Seu uso ficará bastante evidente quando forem apresentadas as funções condicionais, usadas na tomada de decisões durante os cálculos.

## Operadores especiais

Existem quatro outros operadores com funções especiais:

- Operador de intervalo “:”, tem a função de definir um intervalo contínuo: H1:H9 pode ser lido como “H1 até H9” (substituído, comumente, pela palavra “até”).
- Operador de união “;”, faz exatamente o que seu nome diz: une dois grupos de células.
- Operador de interseção “ ” (espaço), que também faz o que o nome diz: considera as células que fazem parte de dois grupos ao mesmo tempo.

- Operador de concatenação “&”, une o conteúdo de duas células.

A Figura 4.5 mostra uma planilha com aplicação desses operadores em dois conjuntos de células que se cruzam:

	A	B	C	D	E
1			1		
2			2		
3	1	2	3	4	5
4			4		
5			5		
6					
7	15	=SOMA(C1:C5)		até	
8	30	=SOMA(C1:C5;A3:E3)		união	
9	3	=C1:C5 A3:E3		interseção	
10	12	=C1&C2		concatenação	

**Figura 4.5** Operadores especiais.

A função **SOMA**, bastante óbvia, faz parte da biblioteca de funções do Excel, a qual será comentada no próximo capítulo. Na célula **A7**, executou-se a soma de **C1** “até” **C5**. Em **A8**, executou-se essa soma “e” a soma de **A3** até **E3**. Na célula **A9**, identificou-se a interseção dos dois conjuntos, o número **3**, e, finalmente, em **A10** concatenaram-se os conteúdos de **C1** e **C2**, resultando o número **12**.

## O uso da alça de replicação com fórmulas

No capítulo anterior, foram discutidos os efeitos das alças de replicação em valores constantes. Vejamos agora o que acontece quando ela é utilizada com fórmulas:

1. Digitar **3** em **A1** e **5** em **A2**.
2. Digitar “= 2\*A1” em **B1**, seguido de **ENTER**.
3. “Puxar” a célula **B1** até **B2**.

O que aconteceu foi que a fórmula “=2\*A1” foi puxada e atualizada para “=2\*A2”. Se o mesmo for feito com **B1**, mas “puxando” para a direita, a fórmula será replicada para “= 2\*B1”, “=2\*C1”, e assim por diante.

### **Operador cifrão**

E se esse efeito não for o desejado? Surge um novo operador, \$ (cifrão):

1. Digitar 3 em A1 e 5 em A2.
2. Digitar “=2\*A\$1” em B1.
3. “Puxar” B1 para baixo.

O que aconteceu foi que a linha ficou fixa. Se o leitor “puxar” B2 para a direita, o caso anterior se repete. Fixemos então a coluna:

1. Digitar 3 em A1.
2. Digitar “=2\*\$A1” em B3.
3. “Puxar” B1 para a direita.

Dessa vez, a coluna permaneceu fixa. O leitor deve ter percebido que, se tivéssemos usado “=2\*\$A\$1” em B1, para qualquer lado que puxássemos a célula, o resultado seria o mesmo. Isso pode ser extremamente conveniente para trabalhar com planilhas mais extensas.

## Capítulo 5

# As funções da biblioteca do Excel

Boa parte da funcionalidade do Excel reside em sua enorme biblioteca de funções, a qual pode ser aumentada indefinidamente com funções do usuário. A inserção de funções nas células pode ocorrer de três maneiras: digitando-as, clicando no botão na barra de ferramentas ou pelo menu **INSERIR > FUNÇÃO**. A biblioteca-padrão disponível ao usuário é dividida em dez grupos de funções:

1. financeiras;
2. de data e hora;
3. matemática e trigonométrica;
4. estatística;
5. de procura e referência;
6. de banco de dados;
7. de texto;
8. de lógica;
9. de informações;
10. definidas pelo usuário (este grupo requer conhecimento da linguagem VBA).

É recomendado que o leitor acrescente um grupo muito importante: **Engenharia**. Basta entrar no menu **Ferramentas > Suplementos** e ativar a caixa **Ferramentas de Análise**.

## Funções matemáticas e trigonométricas

	A	B	C	D
1	2	0,693147	=LN(A1)	
2	2	0,333333	=LOG(A2;8)	
3	2	0,30103	=LOG(A3)	
4	2	1,414214	=RAIZ(A4)	
5	2	7,389056	=EXP(A5)	
6	2	0,909297	=SEN(A6)	
7	2	3,62686	=SENH(A7)	
8	2	0,523599	=ASEN(A8/4)	
9	2	1,443635	=ASENH(A9)	
10	2	114,5916	=GRAUS(A10)	

**Figura 5.1** Exemplos de funções da biblioteca do Excel.

Nas linhas 1, 2 e 3 da Figura 5.1, são calculados os logaritmos natural, na base 8, e decimal; nas linhas 5 e 6, a raiz quadrada e a exponenciação; nas linhas 6 a 9, o seno, o seno hiperbólico, o arco seno e o arco seno hiperbólico; na linha 10, a conversão de radianos para graus.

## Funções matriciais

Entre as funções matemáticas e trigonométricas existem as funções matriciais, as quais serão destacadas aqui por sua importância. Uma diferença é que elas devem ser concluídas com **CTRL + SHIFT + ENTER** em vez de se utilizar apenas **ENTER**. Elas são **MATRIZ.DETERM**, **MATRIZ.INVERSO** e **MATRIZ.MULT**. A seguir, eis a aplicação da inversão de matriz: suponha que se queira inverter uma matriz  $3 \times 3$  do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

**Figura 5.2** Matriz quadrada.

Basta seguir o procedimento:

1. Digitar os valores, digamos, nas células A1:C3.
2. Selecionar uma área idêntica, digamos, D1:F3.
3. Clicar no botão de funções .
4. Selecionar a função **MATRIZ.INVERSO**.
5. Com o cursor pulsando na caixa Matriz, passar o *mouse* por A1:C3.
6. Pressionar, ao mesmo tempo, as teclas **CTRL + SHIFT + ENTER**.

O resultado será algo como o que mostra a Figura 5.3:

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	-0,77778	0,111111	0,222222
2	4	0	5	-0,04444	-0,22222	0,155556
3	6	7	8	0,622222	0,111111	-0,17778

**Figura 5.3** Inversão de matrizes.

Se o leitor aprecia programação, sabe quantas linhas de código são necessárias para esse tipo de operação. Isso já foi mostrado na Tabela 1.1.

Lá, no entanto, a chamada da função ocorria no nível do VBA (*Visual Basic for Applications*), enquanto aqui a chamada ocorre no nível da planilha.

## Funções estatísticas

Embora a biblioteca estatística do Excel tenha funções com graus muito maiores de complexidade, para exemplificar esse grupo será utilizado um dos conceitos mais básicos da Estatística: regressão linear. Suponha os seguintes conjuntos de números dispostos nas células, conforme mostra a Figura 5.4:

	A	B
1	0	2,1
2	1	3
3	2	3,8
4	3	5,1
5	4	5,9

**Figura 5.4** Regressão linear.

Se for colocada a função “=INTERCEPÇÃO(B1:B5;A1:A5)” em uma célula vazia, o resultado será **2,04**, que vem a ser o coeficiente linear da regressão. Se for aplicada “=INCLINAÇÃO(B1:B5;A1:A5)”, o resultado será o coeficiente angular **0,97**. Se o que se quer é o valor do coeficiente de correlação, basta digitar “=CORREL(B1:B5;A1:A5)”, e o valor será **0,996879**. A ajuda do Excel é bastante completa, e todas as fórmulas utilizadas nos cálculos são descritas. Funções complexas, como os testes de Fisher e t de *Student* ou as distribuições normal, lognormal etc., compõem o pacote padrão.

## Funções lógicas

Não existe programação sem o uso de funções lógicas ou condicionais. Sua função é testar condições e desviar ou não o “fluxo” da programação. A principal função lógica é a função **SE**, e sua sintaxe é:

=SE(condição testada; conteúdo se verdadeira; conteúdo se falsa).

Eis um exemplo clássico de Mecânica dos Fluidos: o número de Reynolds (**Re**). Quando um fluido escoa por uma tubulação, este número indica o tipo de escoamento. Se **Re <= 2.100**, o escoamento é **laminar**; se **Re >= 4.000**, o escoamento é **turbulento**. Supondo que o valor do número de Reynolds esteja contido na célula **A1** e que se queira indicar o tipo de escoamento em outra célula, esta deve conter:

=SE(A1<=2100;"LAMINAR";"TURBULENTO").

Essa formulação está correta, porém incompleta. Suponha que o valor do número de Reynolds seja **3000**. Tal valor indica que o escoamento caiu na região de **transição**, mas, como a condição é falsa, resultará o conteúdo **TURBULENTO**, o que não é verdade. Para esses casos, há outra função lógica: E. Ela retorna um valor **VERDADEIRO** se as duas condições forem verdadeiras, e sua sintaxe é:

=E(condição 1; condição 2)

O exemplo anterior ficaria então:

=SE(E(A1>2100;A1<4000); "TRANSIÇÃO";"LAMINAR ou TURBULENTO")

Uma função similar à função E é a função OU. Ela retorna um valor **VERDADEIRO** se uma das duas condições for verdadeira, e sua sintaxe é:

=OU(condição 1; condição 2)

Nesse caso, a fórmula mais adequada para verificar o tipo de escoamento seria:

=SE(OU(A1<=2100;A1>=4000); "LAMINAR ou TURBULENTO"; "TRANSIÇÃO")

Em ambos os casos, apesar de as expressões estarem corretas e completas, elas deixam a desejar. Uma resposta do tipo "LAMINAR OU TURBULENTO" é, no mínimo, ambígua. A função SE apresenta um recurso interessante, embora deva ser usado com parcimônia: as funções aninhadas. Tal recurso consiste em colocar várias funções SE umas dentro das outras. Retornando ao exemplo:

=SE(A1<=2100; "LAMINAR";SE(A1>=4000;"TURBULENTO"; "TRANSIÇÃO")).

Inúmeras outras funções podem ser acessadas da biblioteca padrão, e existe uma biblioteca voltada especificamente para funções de Engenharia. Nunca é demais lembrar que muitas funções são aplicáveis entre si: expressões como "**=LOG(SEN(2))**" ou "**=ASEN(RADIANOS(B15))**" são perfeitamente possíveis.

## Capítulo 6

# Nomeando células

Até aqui a nomeação de células ocorreu por referência absoluta, isto é, pela concatenação da letra da coluna com o número da linha; A1, por exemplo. Existem outras formas de se referir a uma célula, como, por exemplo, a referência relativa R1C1. Esse sistema pode ser ativado pelo menu **Ferramentas > Opções**. A caixa Estilo de Referência L1C1 na guia geral deve ser ativada. Sinceramente, não há vantagem no uso do formato R1C1. Seu nome deriva do inglês *Row* (linha) e *Column* (coluna). Seu princípio é o seguinte: se o desejo é que a célula B2 contenha o mesmo valor da célula A1, deveria ser usada uma fórmula do tipo “=L[-1]C[-1]”, o que é muito complicado.

Existem casos em Engenharia em que mesmo a referência absoluta pode ser muito complexa ou, no mínimo, pouco explicativa. Eis a equação:

$$f = \frac{0,25}{\left\{ \log \left[ \frac{\varepsilon}{(3,7 \cdot D)} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right] \right\}^2}$$

Tal equação, conhecida como Swamee-Jain, relaciona o fator de atrito  $f$  de um fluido escoando dentro de um tubo cilíndrico com sua rugosidade  $\varepsilon$ , seu diâmetro  $D$  e o número de Reynolds  $Re$ , adimensional, bastante utilizado nos estudos de Mecânica dos Fluidos. Suponha que o valor da rugosidade esteja na célula A1, o do diâmetro, na célula B1, e o do número de Reynolds, na célula C1. O cálculo do fator de atrito ficaria algo como:

$$=(0,25/(\text{LOG}(A1/(3,7*B1)+5,74/C1^0,9)))^2$$

Considerando que a equação é complicada, até que não é tão difícil. No entanto, quando houver uma planilha com dezena de células contendo dezenas de fórmulas, será bastante difícil associar o conteúdo da célula com a equação de Swamee-Jain. Talvez fosse melhor usar algo mais associável, como, por exemplo:

$$=(0,25/(\text{LOG}(\text{rug}/(3,7*D)+5,74/\text{Re}^0,9)))^2$$

Isso é denominado variáveis nomeadas. Mas como? Simples. Basta selecionar a(s) célula(s) que se quer nomear e, na Caixa de Nomes, escrever seu nome (sem espaços):

The screenshot shows a software interface with a menu bar at the top. In the center, there is a formula bar with 'Arial' font, size '10', and a dropdown menu. Below it, a status bar shows 'Matriz' and '= 1'. A 'Caixa de nome' (Name Box) is visible. The main area contains a 4x4 grid of cells labeled A through D and 1 through 4. The first row (A1 to A4) is highlighted in blue. Cell A1 is labeled 'Matriz' and cell A2 is labeled 'Caixa de nome'. Cells B1, C1, and D1 are empty. Cells B2, C2, and D2 contain the values 4, 0, and 5 respectively. Cells B3, C3, and D3 contain the values 6, 7, and 8 respectively. Cell B4 is empty.

**Figura 6.1** Nomeando células com a Caixa de Nomes.

### Aplicação – Variáveis nomeadas

Use a fórmula  $y = 2.x^2 + 3$  para calcular o valor de  $y$  em função de  $x$ .

#### Resolução

1. Selecionar a célula A1.
2. Escrever x na Caixa de Nomes.
3. Selecionar a célula B1.
4. Escrever y na Caixa de Nomes (de fato, esta etapa é desnecessária).
5. Digitar a fórmula “=2\*x^2+3” na célula y.

Mudando o valor contido na célula x, o valor da célula y mudará.

The screenshot shows a software interface with a menu bar at the top. In the center, there is a formula bar with 'Arial' font, size '10', and a dropdown menu. Below it, a status bar shows 'y' and '= =2\*x^2+3'. A 'Caixa de nome' (Name Box) is visible. The main area contains a 2x4 grid of cells labeled A through D and 1 through 2. Cell A1 is empty. Cell B1 is highlighted and contains the value '3'. Cells C1 and D1 are empty. Cell A2 is empty. Cell B2 is empty.

**Figura 6.2** Usando variáveis nomeadas.

### Vetores e matrizes

A nomeação de células pode se estender na vertical, na horizontal ou em ambas, permitindo que se trabalhe com um conjunto de células, como se fossem **vetores** ou **matrizes**. Eis uma aplicação para cada caso.

### Aplicação – Utilização de vetores em planilhas

Dado um polinômio do segundo grau do tipo  $y = a.x^2 + b$ , escreva um conjunto de pares  $(x,y)$  para valores de  $x$  variando de uma unidade entre

0 e 5. Os parâmetros são  $a = 2$  e  $b = 3$ , e a planilha deve se recalcular automaticamente, caso esses valores sejam alterados.

### Resolução

1. Selecionar as células A1:A6.
2. Escrever x na Caixa de Nomes.
3. Escrever a na célula C1 e b na célula D1.
4. Selecionar as células C1:D1.
5. Pressionar **CTRL + SHIFT + F3** (o botão F3, e não a célula F3).
6. Clicar **OK**.
7. Digitar 2 em C2 e 3 em D2 (valores de a e b).
8. Digitar 0 em A1 e 1 em A2.
9. Selecionar A1 e A2.
10. Puxar os valores até a linha 6 (alça de replicação).
11. Digitar a fórmula “=a\*x^2+b” em B1.
12. Puxar a fórmula até a linha 6.

	x	=	0	
	A	B	C	D
1	0	3	a	b
2	1	5	2	3
3	2	11		
4	3	21		
5	4	35		
6	5	53		

**Figura 6.3** Trabalhando com vetores.

Nesse exemplo foi utilizado o vetor x, correspondente às células A1:A6. A novidade aqui foi o uso do atalho **CTRL + SHIFT + F3** para nomear as células.

### Aplicação – Operações com matrizes

Nomeie a matriz da Figura 6.4 como *Matriz* e calcule a inversa, denominada *Inversa*.

### Resolução

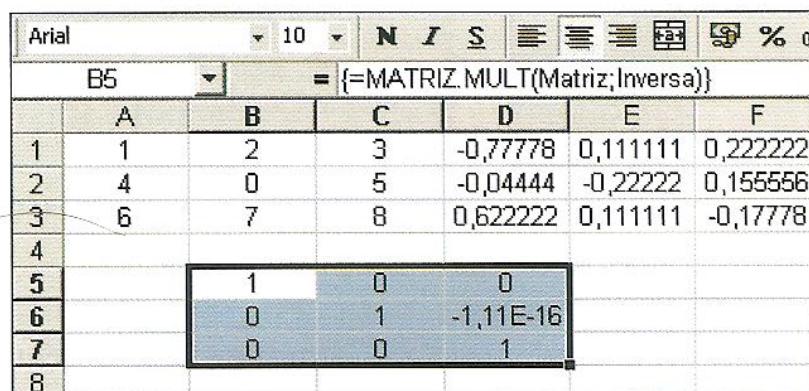
1. Preencher as células A1:C3, como mostra a Figura 6.4, a seguir:

	A	B	C
1	1	2	3
2	4	0	5
3	6	7	8

**Figura 6.4** Preparando a matriz.

2. Selecionar as células A1:C3.
3. Escrever Matriz na Caixa de Nomes.
4. Selecionar as células D1:F3.
5. Escrever Inversa na Caixa de Nomes.
6. Com Inversa ainda selecionada, clicar no botão 
7. Selecionar Categoria da Função: Matemática e Trigonométrica.
8. Selecionar Nome da Função: MATRIZ.INVERSO.
9. Clicar em OK.
10. Na caixa Matriz, digitar “Matriz” (sem aspas).
11. Pressionar CTRL + SHIFT + ENTER (e não apenas ENTER).

O resultado é idêntico ao mostrado na Figura 5.3. A diferença, neste ponto, foi o uso da variável denominada **Matriz**. Recomenda-se que o leitor tente calcular o produto dessas duas matrizes, usando a função **MATRIZ.MULT** e os nomes **Matriz** e **Inversa**. É importante lembrar que o resultado deve ser a matriz identidade.



The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following details:

- Formula Bar:** Shows the formula `={=MATRIZ.MULT(Matriz;Inversa)}` entered into cell B5.
- Cells:**
  - Row 1: A1=1, B1=2, C1=3, D1=-0,77778, E1=0,111111, F1=0,222222
  - Row 2: A2=4, B2=0, C2=5, D2=-0,04444, E2=-0,22222, F2=0,155556
  - Row 3: A3=6, B3=7, C3=8, D3=0,622222, E3=0,111111, F3=-0,17778
  - Row 4: Blank row.
  - Row 5: A5=1, B5=0, C5=0 (highlighted with a blue border).
  - Row 6: A6=0, B6=1, C6=-1,11E-16 (highlighted with a blue border).
  - Row 7: A7=0, B7=0, C7=1 (highlighted with a blue border).
  - Row 8: Blank row.
- Font:** Arial, Size 10.
- Style:** Normal.

**Figura 6.5** Produto matricial.

É relevante ressaltar que alguns nomes são proibidos, por serem de uso interno do Excel ou por se referirem a células. Nomes como **c**, **x1** ou **a1** não são permitidos. Quanto aos sinais, permitem-se apenas o ponto “.” e o traço baixo “\_”. Essas limitações fazem os nomes particulares de células serem definidos, terminando com um ponto: **a.**, **c.**, **x1.**, **a1**. Isso traz a facilidade de nomear as variáveis com nomes mais próximos daqueles utilizados na literatura. Além disso, na programação em VBA, fica mais evidente quem é a célula nomeada x1., quem é a variável x1 e quem é a célula X1 (referência absoluta). Complicado? Sim, mas logo nos acostumamos.

O leitor, contudo, não é obrigado a usar esta notação, no entanto, ela será adotada no restante deste livro para proporcionar maior clareza sobre aquilo a que se estará referindo.

## Formatando células

### Formatação direta

A primeira regra para uma boa programação é **documentar muito bem os programas**. Programadores bissextos freqüentemente ignoram essa regra; então, quando precisam rever a listagem de um programa antigo, torna-se mais difícil entendê-lo. Com a planilha, isso se torna um agravante, tendo em vista que é a interface entre o usuário e o programa. Se o leitor pretende, ainda que remotamente, comercializar suas planilhas, é importante começar a pensar na estética. Isso vale para qualquer linguagem visual: *Visual Basic*, *Visual C*, Delphi etc. Mesmo que este não seja o caso, o leitor deve pensar em voltar a utilizar alguma de suas planilhas depois de alguns meses (ou anos); dessa forma, a necessidade do uso da regra ficará clara, da melhor ou da pior maneira.

A formatação direta tem essa utilidade: notações como  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\zeta^3 + \zeta^2$  são essenciais para esclarecer fórmulas; cores, negritos e itálicos são uma forma de destaque. A seguir, é apresentado um exemplo de planilha para resolver um sistema de três equações com três incógnitas:

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\f_2(x, y, z) &= 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\f_3(x, y, z) &= 3x^2 - 4y + z^2 = 0\end{aligned}$$

x	y	z
f <sub>1</sub>	f <sub>2</sub>	f <sub>3</sub>

**Figura 7.1** Sistema de três equações com três incógnitas.

O primeiro aspecto a ser destacado, o qual está se transformando em padrão internacional, é deixar as células onde o usuário deve introduzir dados com o fundo amarelo-claro. Isso pode ser feito com um clique no botão  , na Barra de Ferramentas, selecionando amarelo-claro.

Novamente, com relação à Figura 7.1, à primeira vista nem parece se tratar de uma planilha do Excel. A formatação é responsável por tudo:

1. As linhas de grade foram desativadas (**Ferramentas > Opções > Exibir**).
2. As células foram contornadas com bordas grossas.
3. Introduziram-se bordas finas no interior.
4. Alguns caracteres foram formatados como sobreescritos ou subscritos. Para isso, cada caracter é selecionado na caixa de fórmulas; em seguida, a caixa Sobreescrito ou Subscrito é selecionada no menu **Formatar > Células > Fonte**.

### **Aplicação – Aparência da célula**

*Formatar uma célula com o conteúdo  $f = a.x_1^2 + b.x_2^2$  com a e b em negrito e na cor vermelha.*

#### **Resolução**

1. Digitar em A1 o texto ‘**f=a.x12+b.x22**’ (com apóstrofo).
2. Na Barra de Fórmulas, selecionar com o *mouse* o número 1.
3. Selecionar o menu **Formatar > Células**.
4. Ativar a caixa **Subscrito** e pressionar **OK**.
5. Repetir com o primeiro 2, ativando a caixa **Sobreescrito**.
6. Fazer o mesmo procedimento com os outros 2.
7. Selecionar a letra **a** e, depois, **Formatar > Células**. Ativar Estilo da Fonte como negrito e Cor como vermelho.
8. Repetir com a letra **b**.

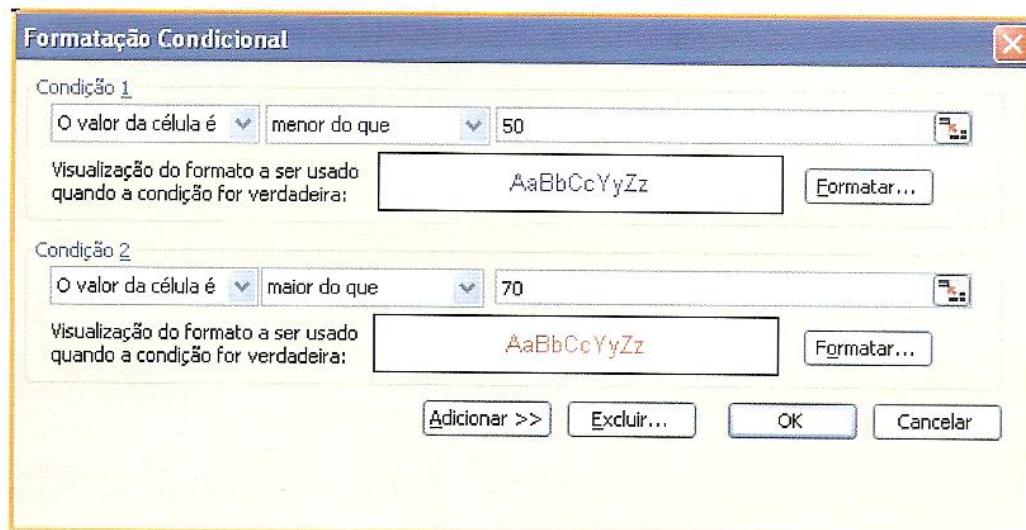
### **Formatação condicional**

É freqüente em Engenharia a necessidade de ressaltar algum aspecto que tenha ocorrido ao longo dos cálculos. Nas planilhas, isso pode ser feito por meio da formatação condicional. A seguir, um exemplo prosaico: digitar notas de disciplinas em planilhas. A formatação condicional é utilizada para atribuir a cor vermelha para as médias inferiores a um determinado valor e a cor azul, para as notas superiores. As demais permanecem na cor preta. Uma aplicação para isso? Suponha que se está acompanhando a pressão do vapor saturado em uma tubulação. Se a temperatura ficar acima de determinado valor, a tubulação corre o risco de se romper, se ficar abaixo de outro, o vapor pode condensar, possibilitando a ocorrência do chamado “golpe de aríete”. Pode-se alertar o usuário com as cores vermelha e azul, por exemplo. Existem dois métodos de formatação condicional.

### Método 1 – Formatação ativada por evento na própria célula

Esse método altera a formatação da própria célula onde o evento ocorre. Imagine que se queira gerar uma lista de valores aleatórios entre 0 e 100 e que se deseje alertar o usuário toda vez que os números ficarem abaixo de 50 ou acima de 70 (um alarme de temperatura, por exemplo). Eis o procedimento:

1. Digitar na célula A1 “=ALEATÓRIO()\*100”.
2. Selecionar a célula A1.
3. Selecionar o menu **Formatar > Formatação Condicional**.
4. Ativar a opção **menor que**, digitar 50.
5. Clicar no botão **Adicionar**.
6. Ativar **maior que**, digitar 70. Resulta em algo como a Figura 7.2:



**Figura 7.2** Formatação condicional (método 1).

7. Clicar no botão **Formatar...** superior e escolher a cor azul para a fonte.
8. Repetir para o botão inferior e escolher a cor vermelha para a fonte.
9. Clicar em **OK**.

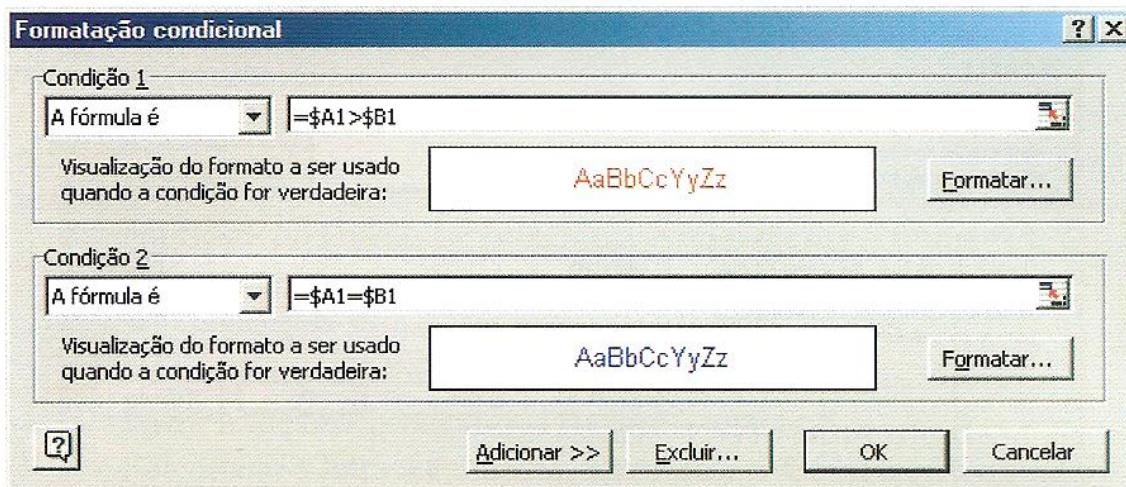
Se agora, pela alça de replicação, a célula A1 for puxada para baixo, a cor da fonte variará de acordo com a condição atendida: valores entre **50** e **70** permanecerão **pretos**; os que estiverem abaixo de **50** ficarão **azuis**; e, os que estiverem acima de **70**, **vermelhos**.

### Método 2 – Formatação ativada por evento em outra célula

Imagine outro tipo de alarme, em que o *set point* seja variável. Pode-se gerar dois conjuntos de números aleatórios nas colunas A e B e deseja-se que: 1) esses números fiquem **vermelhos** toda vez que o valor da coluna A for

maior que o correspondente da coluna B; 2) fiquem **azuis** toda vez que forem iguais; e 3) fiquem **pretos**, nos casos restantes. A diferença desse segundo método é que altera a formatação de uma célula assim que um evento em outra ou com outra ocorra.

1. Introduzir a fórmula “=INT(ALEATÓRIO ()\*10)” em A1 e em B1.
2. Selecionar as células A1:B1 e puxá-las até a linha 10.
3. Selecionar A1:B10.
4. Selecionar o menu **Formatar > Formatação condicional**.
5. Alterar a Condição 1 para “a fórmula é”.
6. Clicar no botão **Adicionar** e fazer o mesmo para a Condição 2.
7. Preencher conforme a Figura 7.3.



**Figura 7.3** Formatação condicional (método 2).

A seguir, um breve comentário sobre o operador cifrão. Aqui ele é usado da seguinte forma: se a fórmula fosse **\$A\$1>\$B\$1**, seriam verificadas apenas as células A1 e B1, mas o que se deseja é comparar as colunas A e B, e não apenas essas células. Isso é expresso ao Excel omitindo o segundo cifrão.

8. Clicar no botão **Formatar...** superior, selecionar a cor vermelha para a fonte.
9. Clicar no botão **Formatar...** inferior, escolher a cor azul para a fonte.
10. Clicar no botão **OK**.

Quando os valores da coluna A forem maiores que os da coluna B, ambos ficarão vermelhos; se forem iguais, ficarão azuis; caso sejam menores, ficarão pretos.

## Capítulo 8

# Gráficos

Atualmente é quase inconcebível pensar em um sistema operacional sem interface gráfica. Uma orientação comum aos alunos é que engenheiros são pagos para resolver problemas, e, para resolvê-los, eles precisam analisar alternativas. Ora, convenhamos, é muito mais fácil analisar opções em um gráfico colorido do que em uma tabela.

O Excel tem uma capacidade gráfica bastante ampla, mas o que particularmente atrai é sua sensibilidade ao contexto: os gráficos vão se alterando automaticamente à medida que as células vão mudando seus valores. Isso permite até uma sensação de movimento, que é muito importante em problemas dinâmicos.

## Gráficos 2D

O Excel apresenta como padrão 14 tipos de gráficos em duas dimensões:

1. Colunas.
2. Barras.
3. Linha.
4. Pizza.
5. Dispersão (XY).
6. Área.
7. Rosca.
8. Radar.
9. Superfície.
10. Bolhas.
11. Ações
12. Cilindro.
13. Cone.
14. Pirâmide.

Cada um desses tipos tem suas vantagens e pode ser usado conforme as características dos dados ou da análise pretendida. Aqui, o foco será um dos tipos mais comuns em problemas de Engenharia: dispersão (XY). Suponha que se queira saber o efeito da pressão no volume de um gás ideal, variando isotermicamente. Se o gás é ideal, vale a relação:

$$V = \frac{R.T}{P}, \text{ em que } R = 0,082057 \text{ atm.L.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

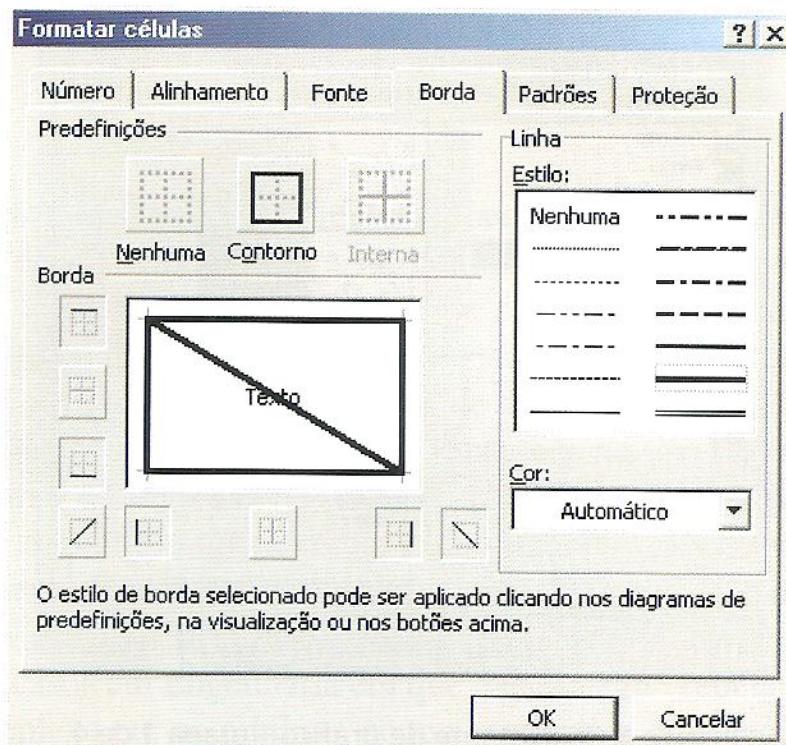
1. Construir a planilha da Figura 8.1:

	A	B	C	D	E	F	G
1	R						
2	0,082057		P T	300 K	400 K	500 K	
3			0,5				
4			1				
5			1,5				
6			2				
7			2,5				
8			3				
9			3,5				
10			4				
11			4,5				
12			5				
13							

**Figura 8.1** Variação do volume com a pressão e a temperatura.

Como foi feita a célula C2? Siga o procedimento.

- Digitar a letra P, dar cinco espaços e digitar a letra T.
- Selecionar a letra P e, em seguida, o menu **Formatar > Células**.
- Na guia **Fonte**, ativar a caixa **Subscrito**.
- Repetir para a letra T, ativando **Sobrescrito**.
- Pressionar **ENTER** e selecionar novamente C2.
- Selecionar o menu **Formatar > Células**.
- Na guia **Borda**, preencher como a Figura 8.2:



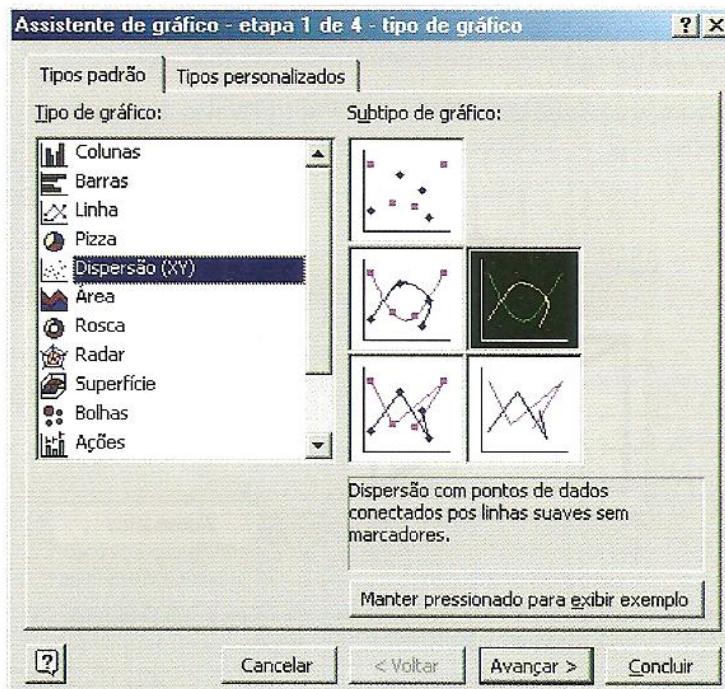
**Figura 8.2** Configurando a borda diagonal.

2. Nomear A2 como R.; a faixa D2:F2, como T.; e C3:C12, como P. (com o ponto).
3. Introduzir a fórmula “=R.\*ESQUERDA(T,;2)/P.” em D3.

A novidade aqui é a função **ESQUERDA(Cel,n)**. Ela pega os n primeiros caracteres do conteúdo da célula Cel. Foi preciso usá-la porque necessitava-se da letra “K” para compor a legenda de cada série, mas não era possível utilizá-la na operação algébrica. É uma função da categoria Texto. Recomenda-se que o leitor investigue sobre as demais.

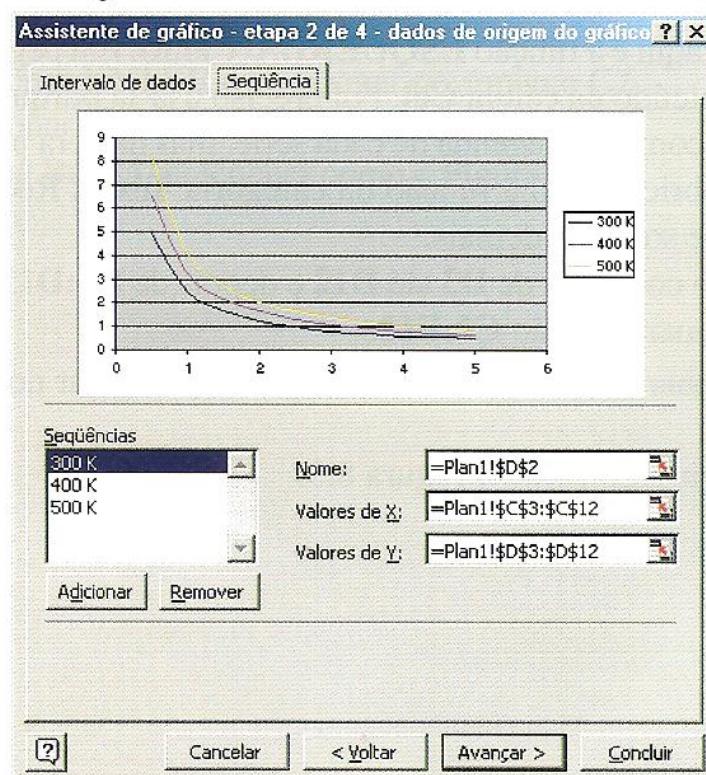
4. Puxar o conteúdo de D3 até D12 e depois de D3:D12 até a coluna F.
5. Selecionar a região C2:F12.
6. Selecionar o menu Inserir > Gráficos (ou clicar no botão ).

Deverá surgir algo como a Figura 8.3:



**Figura 8.3** Assistente de gráfico – etapa 1 de 4.

7. Selecionar a opção **Dispersão (XY)** e as linhas suaves sem marcadores. Nesse momento, o leitor deve clicar no botão “Manter pressionado para exibir exemplo”. Isso dará uma noção de como ficará o gráfico.
8. Clicar em **Avançar**, selecionando a guia **Seqüência**, conforme mostra a Figura 8.4.

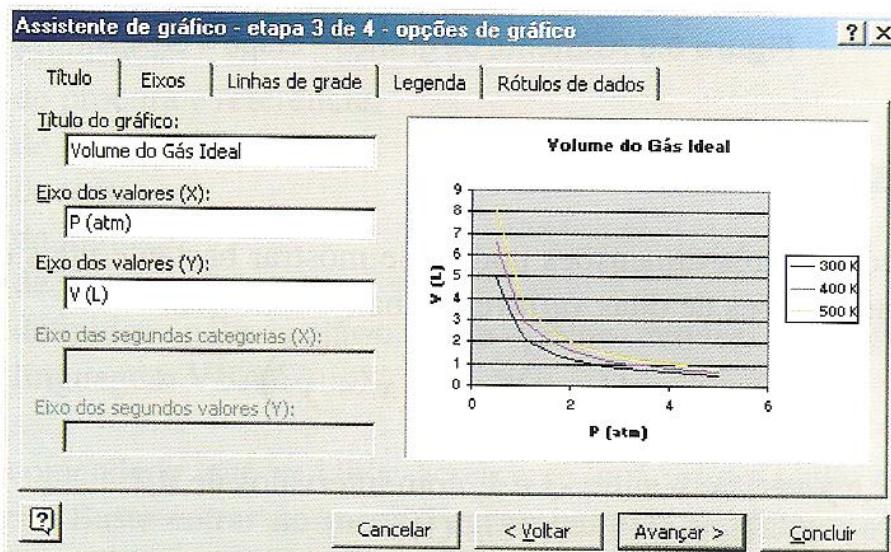


**Figura 8.4** Assistente de gráfico – etapa 2 de 4.

Observe que as células C2:E2 foram tomadas como nomes das seqüências. Denomina-se tal fato como sensibilidade ao contexto: o Excel percebe que os conteúdos dessas células não são números e os interpreta como texto. Caso o leitor queira dar outro nome às seqüências, basta selecioná-las e digitar o texto na caixa **Nome**.

#### 9. Clicar novamente em Avançar.

Surgirá uma caixa de diálogo contendo cinco guias: **Título**, **Eixos**, **Linhas de Grade**, **Legenda** e **Rótulos de dados**. Recomenda-se que o leitor explore todas as possibilidades oferecidas pelo Excel para a configuração do gráfico. Na guia **Título**, preencha as caixas como mostra a Figura 8.5. É importante nunca se esquecer das unidades; é comum programadores “afoltos” dividirem  $m^3$  por  $cm^2$ . Esse é o tipo de erro quase impossível de ser depurado depois.



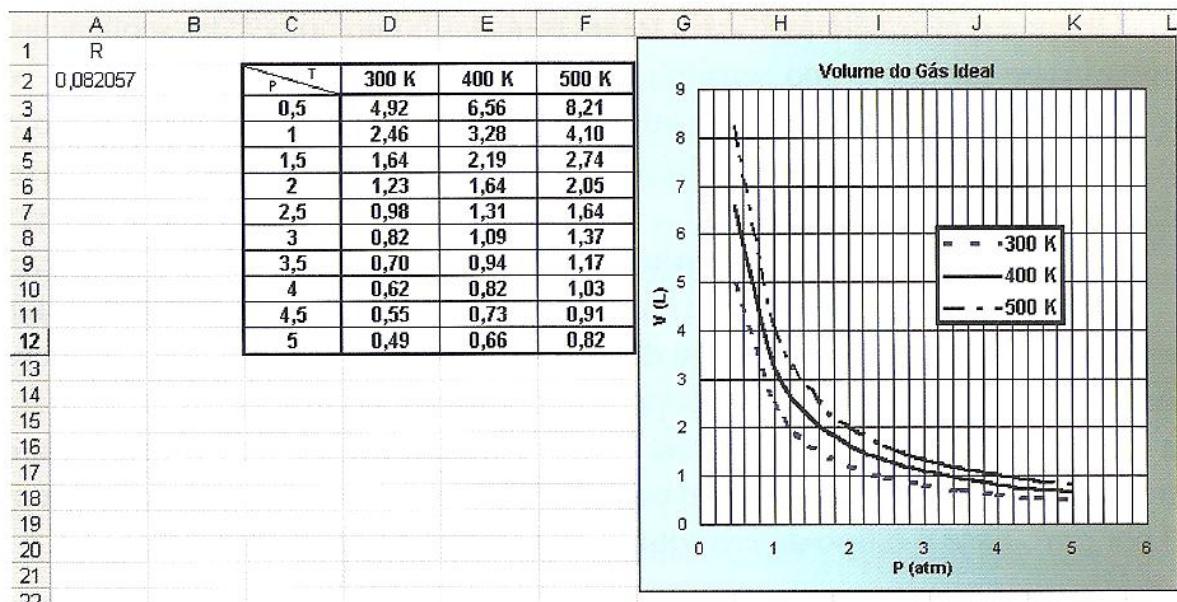
**Figura 8.5** Assistente de gráfico – etapa 3 de 4.

#### 10. Clicar novamente em Avançar.

Surgirá a opção do local em que o usuário pretende colocar o gráfico, na mesma planilha ou em uma planilha isolada.

A Figura 8.6 mostra um tratamento dado ao gráfico, quando houver opção de colocá-lo na mesma folha. É recomendado que o leitor tente algo parecido: o botão direito do mouse, ao clicar sobre o gráfico, pode ser de grande ajuda.

A análise que poderia ser feita é a de que o volume do gás diminui com sua compressão e seu resfriamento. Isso é bastante óbvio, mas é importante que o leitor atente para como fica mais fácil analisar a Figura 8.6 em comparação com a Figura 8.1. Outro aspecto importante é como o gráfico responde automaticamente às mudanças nas células: tente mudar o valor de 500 para 1.000.



**Figura 8.6** Assistente de gráfico – etapa 4 de 4.

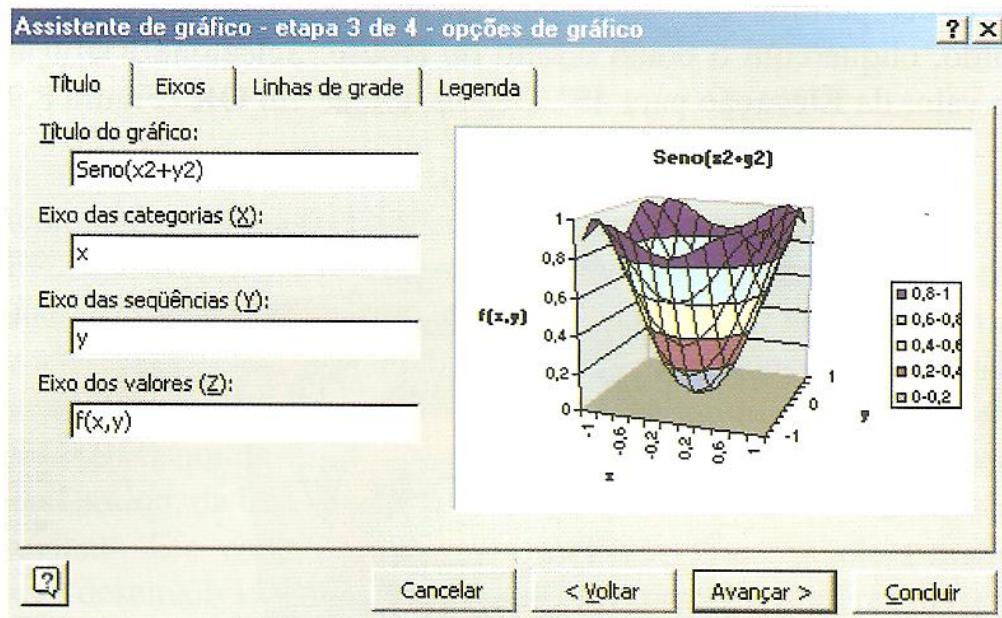
## Gráficos 3D

Gráficos em três dimensões podem se mostrar bastante úteis quando se trabalha com funções de duas variáveis. Analise a função:

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

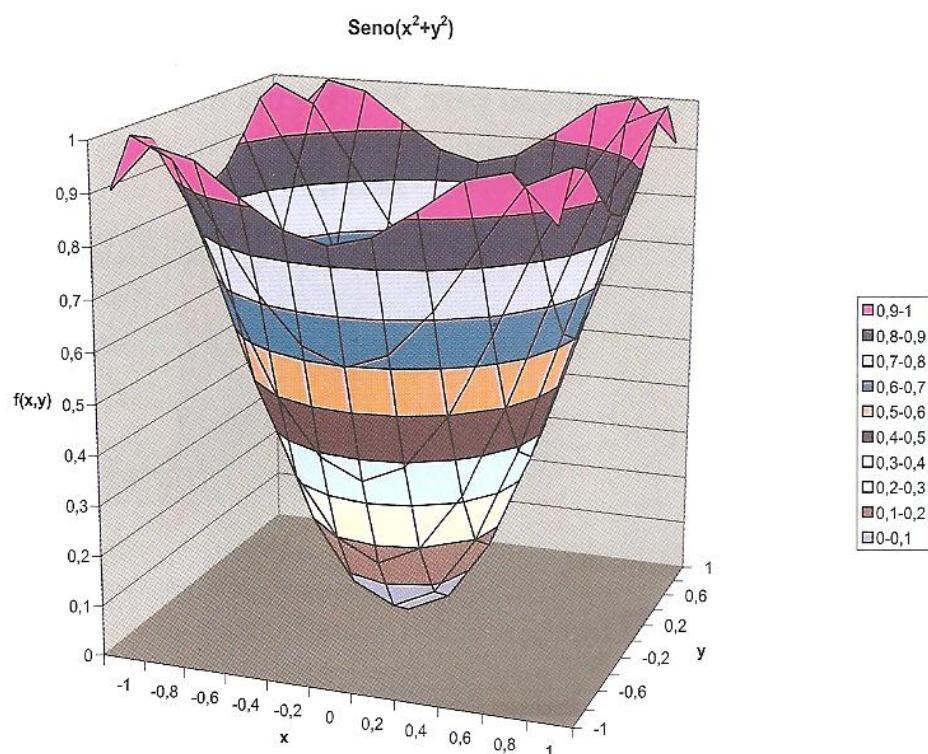
Faça  $x$  e  $y$  variarem entre -1 e 1, com intervalos de 0,2:

1. Digitar -1 em B1 e -0,8 em C1.
2. Selecionar B1:C1 e puxar até o valor 1.
3. Digitar -1 em A2 e -0,8 em A3.
4. Selecionar A2:A3 e puxar até o valor 1.
5. Nomear B1:L1 como x. (com ponto). Tente usar **CTRL + SHIFT + →**.
6. Nomear A2:A12 como y. (com ponto). Tente usar **CTRL + SHIFT + ↓**.
7. Introduzir a fórmula " $=\text{SEN}(x.^2+y.^2)$ " em B2.
8. Puxar a célula B2 até B12 e, em seguida, B2:B12 até a coluna L. Usar a alça de replicação.
9. Pressionar **CTRL + HOME**.
10. Pressionar **CTRL + SHIFT + END**. Selecionou-se todo o conjunto de dados, incluindo os valores dos eixos x e y.
11. Clicar em ou no menu **Inserir > Gráficos**.
12. Selecionar o tipo **Superfície** e clicar em **Avançar** duas vezes.
13. Na etapa 3 de 4, preencher conforme demonstra a Figura 8.7.



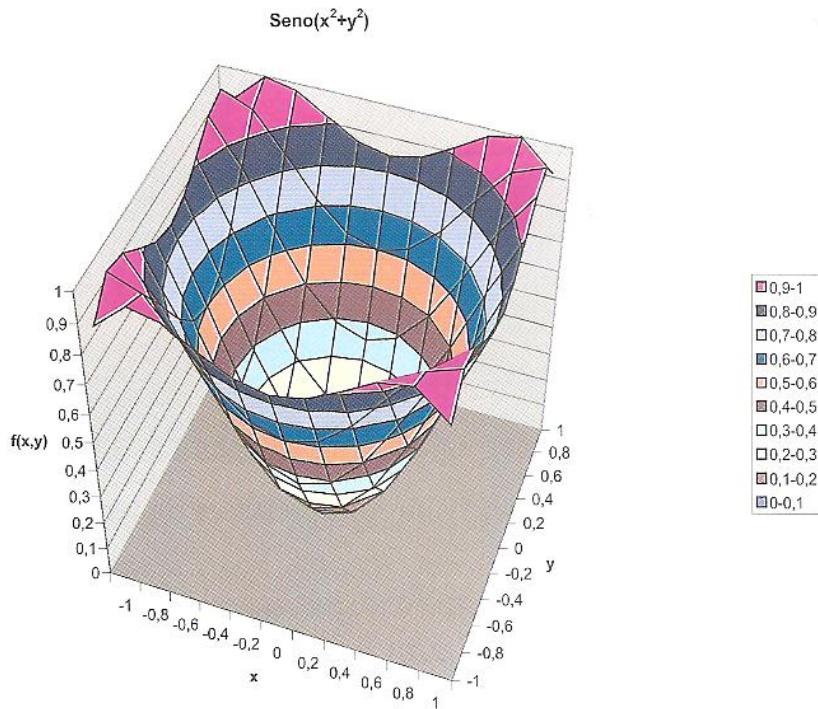
**Figura 8.7** Preenchimento do título e da legenda do gráfico.

Se o usuário clicar em Avançar mais duas vezes, deverá resultar um gráfico semelhante ao da Figura 8.8. Observe que os expoentes do título da figura “Seno( $x^2+y^2$ )” estão sobreescritos. A sugestão é que o leitor tente fazer por conta própria.



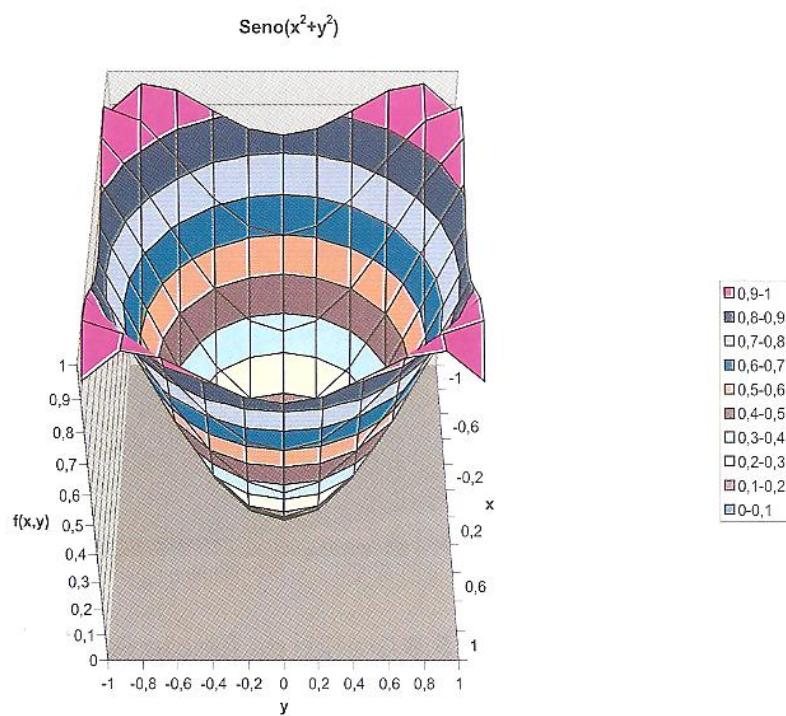
**Figura 8.8** Gráfico da função Seno( $x^2+y^2$ ).

O Excel permite que se inspecione gráficos 3D: no gráfico recém-construído, clique com o botão direito do *mouse*. Selecione **Exibição 3D** e mude o valor da **Elevação** para  $45^\circ$ . Depois, clique em **OK** (Figura 8.9).



**Figura 8.9** Elevação de  $45^\circ$ .

Em seguida, novamente com o botão direito sobre a figura e selecionando **Exibição 3D**, mude a **Rotação** para  $90^\circ$  (Figura 8.10).



**Figura 8.10** Rotação de  $90^\circ$ .

## Capítulo 9

# Auditoria na planilha

A auditoria é um procedimento que ajuda muito a entender como opera uma planilha. Muitas vezes, sem o auxílio dela fica impossível entender uma seqüência de cálculos. A Figura 9.1 mostra uma planilha onde se calcula o fator de atrito  $f$  do escoamento de água em uma tubulação de aço.

I5	=	=SE(E(G5>2100;G5<4000);"";SE(G5>=4000;0,25/(LOG(I2/3,7/A5+5,74/G5^0,9))^2;64/G5))									
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2	T (°C)		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)					$\varepsilon$ (m)		
3	25		996,44	0,000893					4,50E-05		
4	D (m)		S (m <sup>2</sup> )	v (m/s)		Re			f		
5	0,05		0,001963	0,424413		2,37E+04			0,027009		
6											
7	Q (m <sup>3</sup> /h)										
8	3										
9											

Figura 9.1 Cálculo do fator de atrito.

Suponha que se quisesse descobrir como a temperatura está relacionada com o cálculo do fator de atrito. Por inspeção direta na célula I5, seria encontrada a fórmula, bem pouco esclarecedora:

=SE(E(G5>2100;G5<4000);"";SE(G5>=4000;0,25/(LOG(I2/3,7/A5+5,74/G5^0,9))^2;64/G5))

A saída mais eficiente para esses casos é a auditoria na planilha. Para iniciá-la, deve-se selecionar A2 e, em seguida, o menu **Ferramentas > Auditoria > Rastrear dependentes**, resultando a Figura 9.2.

	A	B	C	D
1	T (°C)		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)
2	25		996,44	0,000893
3				

Figura 9.2 Células dependentes da temperatura.

Na célula C2, seria encontrada a fórmula:

“=-0,00002\*A2^3-0,0059\*A2^2+0,0188\*A2+999,97”

que corresponde à densidade, em função da temperatura:

$$\rho = -2 \times 10^{-5} \cdot TC^3 - 5,9 \times 10^{-3} \cdot TC^2 + 0,0188 \cdot TC + 999,97$$

Na célula D2 seria encontrada a fórmula:

“=EXP(-10,4349+507,881/(A2+123,76))”

que corresponde à viscosidade, em função da temperatura:

$$\mu = \exp \left[ -10,4349 + \frac{507,881}{(TC + 123,76)} \right]$$

Para continuar a pesquisa, seria necessário selecionar (uma de cada vez) as células C1 e D1 e, novamente, o menu **Ferramentas > Auditoria > Rastrear dependentes**. A Figura 9.3 mostra o resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	T (°C)		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)			
2	25		996,44	0,001893			
3							
4	D (m)		S (m <sup>2</sup> )		v (m/s)		Re
5	0,05		0,001963		0,424413		2,37E+04
6							

**Figura 9.3** Células dependentes da densidade e da viscosidade.

A célula G5 conteria a fórmula:

$$=C2*E5*A5/D2$$

ainda difícil de entender, porém, antes de continuar a auditoria, é preciso apagar as setas com a opção **Remover todas as setas**, no menu **Formatar > Auditoria**. Selezionando a célula G5 e, dessa vez, utilizando a opção **Rastrear precedentes**, resultaria:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	T (°C)		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)				
2	25		996,44	0,001893				
3								
4	D (m)		S (m <sup>2</sup> )		v (m/s)		Re	
5	0,05		0,001963		0,424413		2,37E+04	
6								

**Figura 9.4** Rastreando precedentes

O leitor deve observar que os pontos escuros caem sobre as células E5 e A5, que correspondem à velocidade  $v$  e ao diâmetro  $D$ . Portanto, a célula G5 representa o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot D \cdot v}{\mu}$$

É importante ressaltar nesse ponto o entendimento de como funcionam os cálculos. Imagine que o autor não tivesse tomado o cuidado de identificar as células com indicações do tipo “ $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>)”. A primeira dificuldade evidente seria saber a unidade do valor a ser introduzido. E se houvessem sido utilizadas variáveis nomeadas? Dessa forma, a fórmula do fator de atrito ficaria:

```
=SE(Re.>2100;Re.<4000);"";SE(Re.>=4000;0,25/(LOG(rug./3,7/D.+5,74/Re.^0,9))^2;64/Re.))
```

É um pouco mais fácil de entender. Freqüentemente, o leitor vai se defrontar com planilhas desse tipo. É nesse momento que surge a utilidade da **Auditoria**: ela permite a verificação gráfica do fluxo dos cálculos.

Todas as células utilizadas diretamente no cálculo do fator de atrito serão apontadas por uma bolinha •. Isso, além de permitir a revisão dos cálculos, é de grande ajuda para evitar erros: suponha que o autor houvesse introduzido erradamente a densidade no cálculo de  $f$ ; a auditoria detectaria o erro, como mostra a Figura 9.5, ilustrando o resultado da auditoria:

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K
1	T (°C)		$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)						
2	25		996,44	0,000893						
3										
4	D (m)		S (m <sup>2</sup> )		v (m/s)		Re	$f$		
5	0,05		0,001963		0,424410		2,97E+04	0,002703		
6										

**Figura 9.5** Detecção de erro por meio de auditoria.

Observe que o erro “SE(densi.>=4000...” não foi percebido pelos cálculos, mas está latente, uma vez que a densidade nunca será maior que 4.000. Por motivos como esse é recomendável que se utilize sempre a auditoria em cálculos complexos.

## Capítulo 10

# Funções de uma variável

## Usando Atingir Meta

Em capítulos anteriores foi utilizada a fórmula de Swamee-Jain para o cálculo do fator de atrito  $f$ . Esta é uma fórmula explícita em  $f$ :

$$f = \frac{0,25}{\left\{ \log \left[ \frac{\varepsilon}{(3,7.D)} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right] \right\}^2}$$

Uma equação mais rigorosa que essa é a de Colebrook:

$$f = \left[ -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7.D} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \right]^{-2}$$

A equação de Colebrook apresenta o inconveniente de ser implícita em  $f$ . Com o Excel, tal limitação é perfeitamente contornável, bastando utilizar a função **Atingir Meta** (*GoalSeek*). Eis a fórmula de outra maneira:

$$f - \left[ -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7.D} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} = 0$$

Nomear a célula A2 como **f.**; a célula B2 como **rug.**; a célula C2 como **D.**; e a célula D2 como **Re.** (todas com o ponto). Agora, a fórmula de Colebrook assume o formato anterior em E2. Pode-se chamar essa forma de escrever a equação de função objetivo. No Excel:

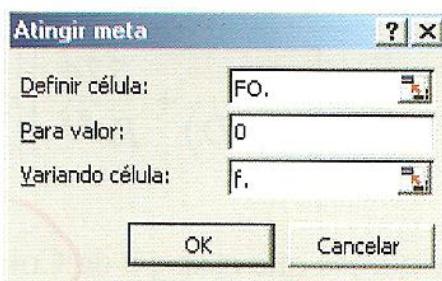
=f.-(-2\*LOG(rug./3,7/D.+2,51/Re.^0,9\*RAIZ(f.)))^-2

Um erro do tipo #DIV/0! (divisão por zero) deve aparecer enquanto as células estiverem vazias. O preenchimento foi feito com os valores da Figura 10.1:

	A	B	C	D	E	F	G
1	$f$	$s \text{ (m)}$	$D \text{ (m)}$	$Re$	FO.		
2	0,1	4,50E-05	0,05	20000	0,079067		
3							

**Figura 10.1** Valores iniciais para a função de Colebrook.

O valor correto de  $f$  é aquele que zera a função objetivo. Para isso, basta clicar no menu **Ferramentas > Atingir Meta** e preencher o quadro, como mostra a Figura 10.2.



**Figura 10.2** Preenchendo parâmetros de Atingir Meta.

Ao clicar em **OK**, deve-se obter um resultado  $f = 0,020045$ ; então, a função objetivo assumirá valor igual a  $5,01E-5$ .

## Melhorando o algoritmo Atingir Meta

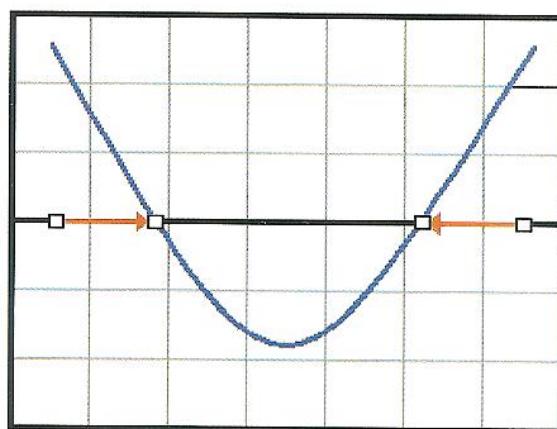
Como algoritmo, **Atingir Meta** tem suas limitações; por outro lado, é bastante ágil para funções de uma variável, existindo maneiras de otimizá-lo. Se o leitor está começando a estudar métodos numéricos, é bom ter em mente que alguns algoritmos são “melhores” que outros, dependendo das circunstâncias. No entanto, nenhum é absolutamente perfeito, nem mesmo aqueles dos *softwares* mais caros de Engenharia. Neste estudo, pode-se “melhorar” o resultado “amplificando” a função objetivo, multiplicando-a por **1.000**, por exemplo. Uma vez que o objetivo é igualá-la a **0**, igualá-la a **1000\*0** significa o mesmo, mas o algoritmo que se “contentaria” com um resíduo de **0,1** não se “contenta” com um resíduo de **100**. O caso ficaria:

$$=1000*(f.-(-2*LOG(rug./3,7/D.+2,51/Re.^0,9*RAIZ(f.)))^-2)$$

Essa “amplificação” resultará  $f = 0,019994$ , e a função objetivo assumirá valor igual a **-2,1E-6**. Nesse caso, a “amplificação” resultou um desvio insignificante de **0,25%**.

## A questão da estimativa inicial

Quando o problema tiver mais de uma solução, os métodos numéricos encontram uma delas de cada vez. Além disso, a solução encontrada depende muito da estimativa inicial do valor da variável. A seguir, é apresentado o exemplo da Figura 10.3, que representa uma função parabólica.



**Figura 10.3** Efeito da estimativa inicial.

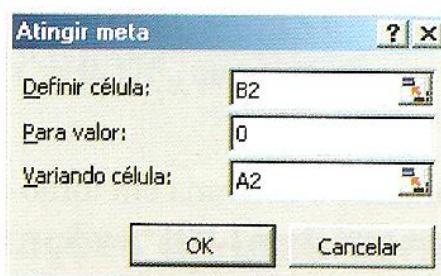
No caso da Figura 10.3, fica evidente que, se a estimativa inicial for menor que a menor raiz, o método converge para esta, e vice-versa.

### Aplicação – Raízes de função de uma variável

Achar as raízes da função  $f(x) = 4x^2 + 3x - 18$ .

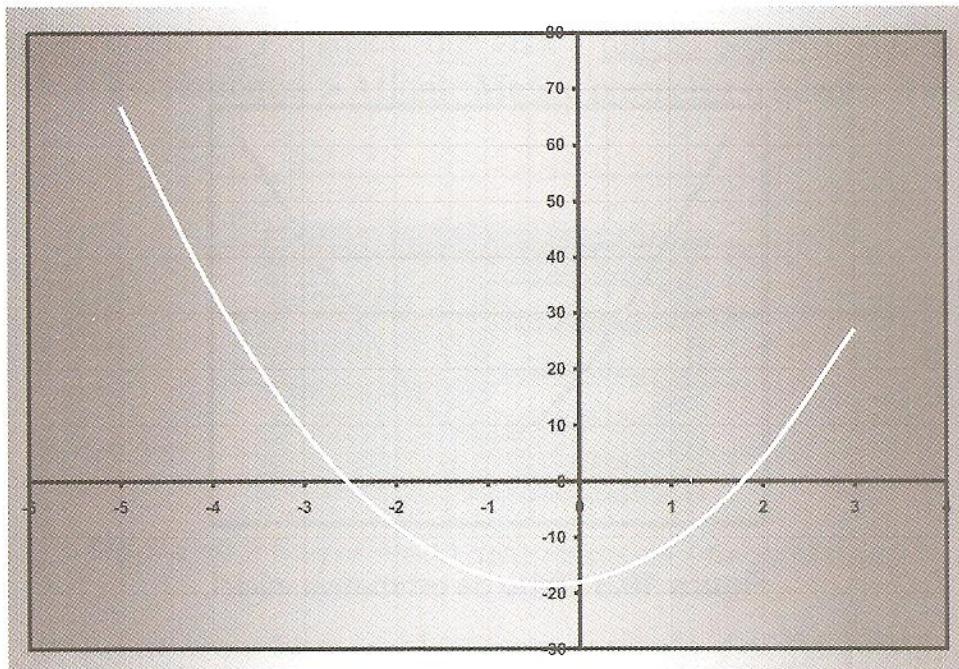
#### Resolução

1. Nomear A2 como x..
2. Digitar “=4\*x.^2+3\*x.-18” em B2 e deixar A2 vazia.
3. Ferramentas > Atingir Meta:



**Figura 10.4** Parâmetros do Atingir Meta.

Esse procedimento resultará  $x = 1,77921$ . No entanto, se a célula A2 contiver o valor **-10**, antes de “rodar” o **Atingir Meta**, o valor resultante será  $x = -2,5922$ . A sugestão é que antes de buscar as raízes o leitor construa um gráfico, como o da Figura 10.5. Afinal, se o Excel oferece essa facilidade, por que não usá-la?



**Figura 10.5** Inspeção gráfica das possíveis raízes da função.

## Máximos e mínimos

**Atingir Meta** é uma ferramenta bastante útil para funções de uma variável. Com algum esforço, pode-se aumentar sua faixa de aplicações. Sabe-se que a existência de pontos de máximo ou de mínimo locais em funções de uma variável está associada à anulação de sua derivada primeira. Se essa derivada for aproximada por diferenças finitas, haverá:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

Pode-se calcular, portanto, a derivada em torno de um ponto  $x$ , por meio de duas novas variáveis, ou seja,  $x_2 = 1,001*x$  e  $x_1 = 0,999*x$ .

**Aplicação – Mínimo de função de uma variável**

Achar o mínimo da função  $f(x) = 4.x^2 + 3.x - 18$ .

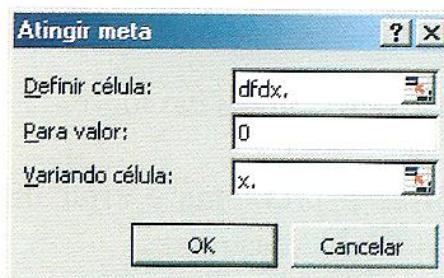
**Resolução**

1. Construir uma planilha como a da Figura 10.6:

	A	B	C	D	E	F
1	x1.		f1.			
2	x.		f.		dfdx.	
3	x2.		f2.			

**Figura 10.6** Cálculo da derivada primeira.

2. Selecionar A1:B3, pressionar **CTRL + SHIFT + F3** e clicar em **OK**.
3. Repetir para C1:D3.
4. Repetir para E2:F2.
5. Em B1, introduzir a fórmula “=0,999\*x.”.
6. Em B2, digitar 1.
7. Em B3, introduzir a fórmula “=1,001\*x.”.
8. Em D1, introduzir a fórmula “=4\*x1.^2+3\*x1.-18”.
9. Em D2, introduzir a fórmula “=4\*x.^2+3\*x.-18”.
10. Em D3, introduzir a fórmula “=4\*x2.^2+3\*x2.-18”.
11. Em F2, introduzir a fórmula “=(f2.-f1.)/(x2.-x1.)”.
12. Ferramentas > Atingir Meta:



**Figura 10.7** Parâmetros do Atingir Meta.

Resultará o valor  $x = 0,375$ , que está de acordo com o esperado pela Figura 10.5.

**Sistemas de equações de uma variável**

Sistemas de equações de uma variável relativamente complexos também podem ser resolvidos com o Atingir Meta. A seguir, um exemplo onde o apoio gráfico é fundamental.

### Aplicação – Interseções entre duas funções

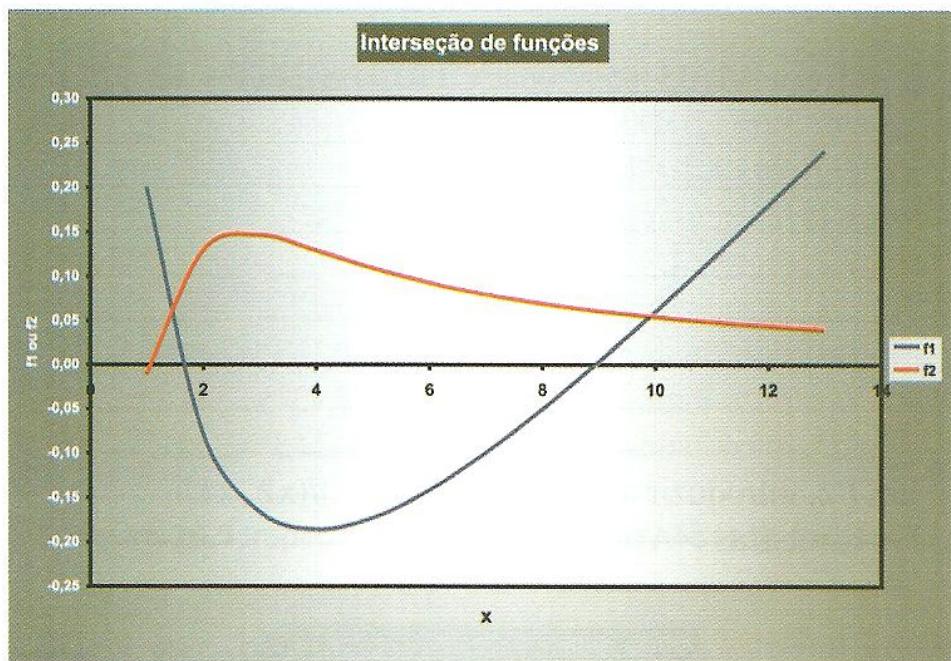
Encontrar os valores de  $x$  nas interseções das funções:

$$f_1 = \sqrt{x} - \ln(x) - 0,8$$

$$f_2 = 0,03 \cdot x^{5/x} - 0,04$$

#### Resolução

Se for construído um gráfico como o da Figura 10.8, pode-se perceber que uma das interseções ocorre entre 1 e 2, enquanto a outra ocorre próxima a 10.



**Figura 10.8** Gráficos das funções  $f_1$  e  $f_2$ .

Uma forma de resolver o problema é criar uma função  $f_3 = f_2 - f_1$  e encontrar os valores de  $x$  que são suas raízes:

1. Construir uma planilha como a da Figura 10.9:

	A	B	C	D
1	x	$f_1$	$f_2$	$f_3$
2	1			
3	10			

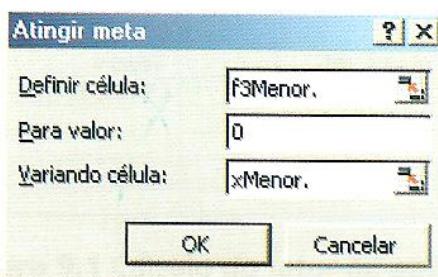
**Figura 10.9** Estimativa das interseções entre duas funções.

2. Nomear A2 como xMenor. e A3 como xMaior. (ambas com ponto).
3. Nomear B2 como f1Menor. e B3 como f1Maior. (ambas com ponto).
4. Nomear C2 como f2Menor. e C3 como f2Maior. (ambas com o ponto).
5. Nomear D2 como f3Menor. e D3 como f3Maior. (ambas com o ponto).

6. Introduzir a fórmula “=RAIZ(xMenor.)-LN(xMenor.)-0,8” em B2.
7. Introduzir a fórmula “=RAIZ(xMaior.)-LN(xMaior.)-0,8” em B3.
8. Introduzir a fórmula “=0,03\*xMenor.^5/xMenor.)-0,04” em C2.
9. Introduzir a fórmula “=0,03\*xMaior.^5/xMaior.)-0,04” em C3.
10. Introduzir a fórmula “=f2Menor.-f1Menor.” em B2.
11. Introduzir a fórmula “=f2Maior.-f1Maior.” em B2.

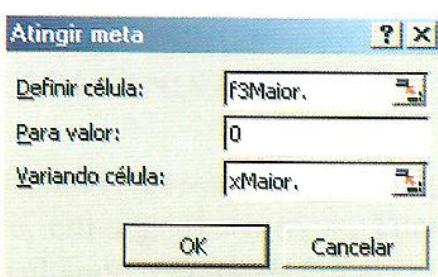
Observe que em A2 foi escolhido um valor entre 1 e 2 e, em A3, um valor próximo a 10. Essas escolhas fundamentaram-se no gráfico da Figura 10.8.

**12. Ferramentas > Atingir Meta:**



**Figura 10.10** Parâmetros do Atingir Meta.

**13. Ferramentas > Atingir Meta:**



**Figura 10.11** Parâmetros do Atingir Meta.

Resultarão os valores  $x = 1,37$  e  $x = 9,92$ .

## Capítulo 11

# O Solver

Acompanha o Microsoft Excel uma ferramenta extremamente poderosa: o SOLVER. Esse excelente suplemento permite estimar raízes, máximos e mínimos de virtualmente qualquer função, com qualquer número de variáveis. Em resumo, é talvez a ferramenta mais importante para uso em cálculos de Engenharia.

Para a solução de problemas não-lineares de otimização, o Solver utiliza um algoritmo denominado Gradiente Reduzido Generalizado, desenvolvido por Leon Lasdon, da Universidade do Texas, e Allan Warren, da Universidade de Cleveland. Em contrapartida, para sistemas lineares, ele UTILIZA outro algoritmo desenvolvido pela Frontline Systems Inc. Maiores informações podem ser obtidas no *site* da Microsoft ([www.microsoft.com](http://www.microsoft.com)) ou no da Frontline ([www.solver.com](http://www.solver.com)).

A instalação padrão do Excel, incompreensivelmente, não inclui o Solver: a instalação adotada é “instalação no primeiro uso”. Mas isso não chega a ser um problema, basta o leitor entrar no menu **Ferramentas** e verificar se aparece o Solver. Caso a resposta seja negativa, selecione **Ferramentas > Suplementos** e ative a caixa de seleção **Solver**. Se o leitor não encontrar essa caixa, terá de recorrer ao CD de instalação. A seguir, são apresentadas instruções sobre como utilizar tal ferramenta.

Quando o Solver é ativado surge uma caixa de diálogo, como a da Figura 11.1:

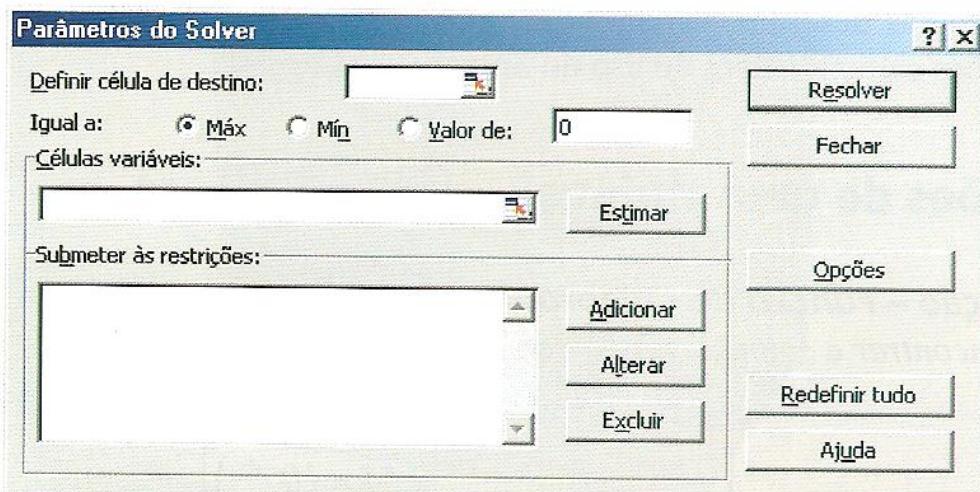
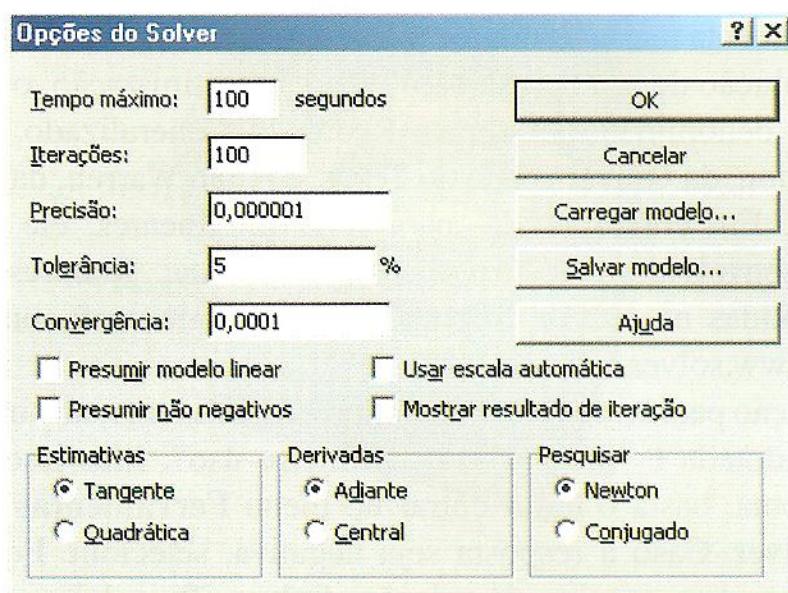


Figura 11.1 Diálogo inicial do Solver.

Na caixa **Definir célula de destino**, pode-se digitar o nome da célula que contém a função a ser otimizada ou pode-se apenas selecioná-la, desde que o cursor do *mouse* esteja piscando em seu interior; pode-se, ainda, clicar no mecanismo de busca (aquele figurinha que fica ao lado da caixa de texto). De maneira análoga, na caixa **Células variáveis**, deve(m)-se introduzir a(s) variável(is) independente(s). O botão de comando Opções faz surgir o diálogo da Figura 11.2.



**Figura 11.2** Opções do Solver.

Algumas funcionalidades das opções serão descritas mais adiante, conforme a aplicação que estiver sendo usada. Contudo, o leitor já familiarizado com cálculo numérico identificará, por si só, muitas das funções e metodologias descritas na Figura 11.2. A seguir, são apresentadas algumas aplicações características do uso do Solver.

## Funções de uma variável

### Aplicação – Função de Colebrook

*Encontrar a solução para a equação de Colebrook:*

$$f = \left[ -2 \cdot \log \left( 2,703 + \frac{2,51 \times 10^{-4}}{f} \right) \right]^{-2}$$

### Resolução

- Criar uma planilha como a da Figura 11.3:

	A	B	C	D	E	F
1	f.	FO.				
2	0,01	2,81E-02				
3						

Figura 11.3 Equação de Colebrook.

- Nomear a célula A2 como f. e a célula B2 como FO. (função objetivo).
- Digitar em A2 o valor 0,01.
- Digitar em B2 a fórmula “=(-2\*LOG(0,00024+0,0000251/f.))^-2-f.”.
- Configurar o Solver como:

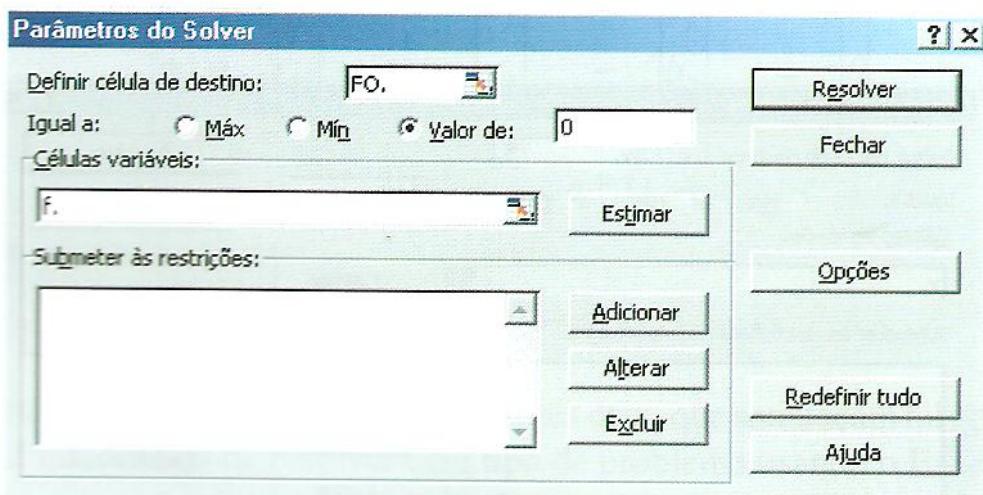


Figura 11.4 Diálogo inicial do Solver.

- Clicar no botão Resolver.

O resultado será  $f = 0,0287$ .

## Problemas com as estimativas iniciais

Existem casos, entretanto, em que a convergência para uma única raiz pode ser difícil. A seguir, é apresentado um exemplo simples:

### **Aplicação – Dificuldade de convergência**

*Encontrar a raiz de  $y = \ln(x+2)$ .*

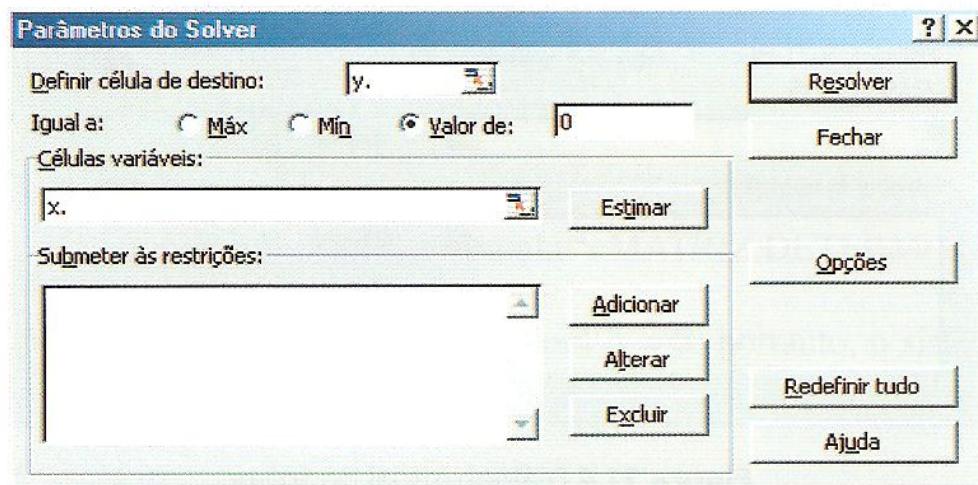
#### **Resolução**

1. Criar uma planilha como a da Figura 11.5:

	A	B	C	D
1	x.	y.		
2	2,5	1,504077		
3				

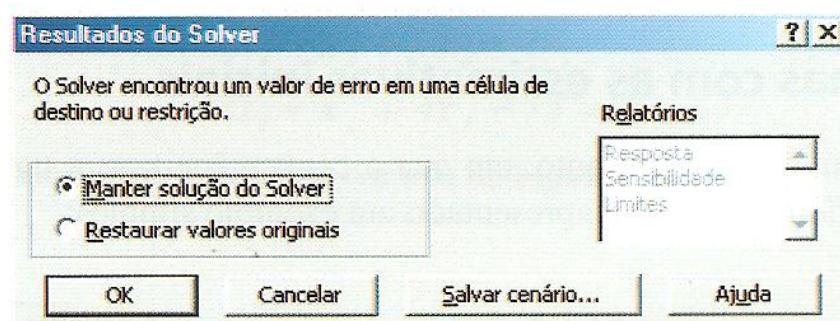
**Figura 11.5** Efeito da estimativa inicial.

2. Nomear A2 como x. e B2 como y. (com o ponto).
3. Em B2, digitar “=LN(x.+2)”; em A2, colocar o valor 2,5.
4. Selecionar o menu Ferramentas > Solver.
5. Preencher o diálogo do Solver:



**Figura 11.6** Diálogo inicial do Solver.

Ao clicar no botão Resolver surgirá a seguinte mensagem de erro:



**Figura 11.7** Mensagem de erro do Solver.

Esse diálogo é típico de situações em que acontece uma operação indevida, como, por exemplo, divisão por zero, logaritmo ou raiz de número negativo etc. Se o procedimento for iniciado com o valor inicial  $x = 2$ , por exemplo, resultará o valor esperado  $x = -1$ .

A convergência do Solver para a solução adequada, como, aliás, acontece com qualquer outro método numérico, também não foge à regra em relação ao valor inicial da variável estimada. Nada substitui o conhecimento do engenheiro sobre o modelo; tempos, pressões e volumes negativos podem ser obtidos numericamente, mas não têm sentido físico real. O apoio gráfico, como foi usado com **Atingir Meta**, é sempre útil, mas nem sempre possível. A seguir são apresentados alguns exemplos de formas para contornar a questão dos valores iniciais.

### **Pesquisando valores de raízes**

#### **Aplicação – Raiz positiva de função do 2º grau**

*Encontrar a raiz positiva de  $y = x^2 - 3x - 18$ .*

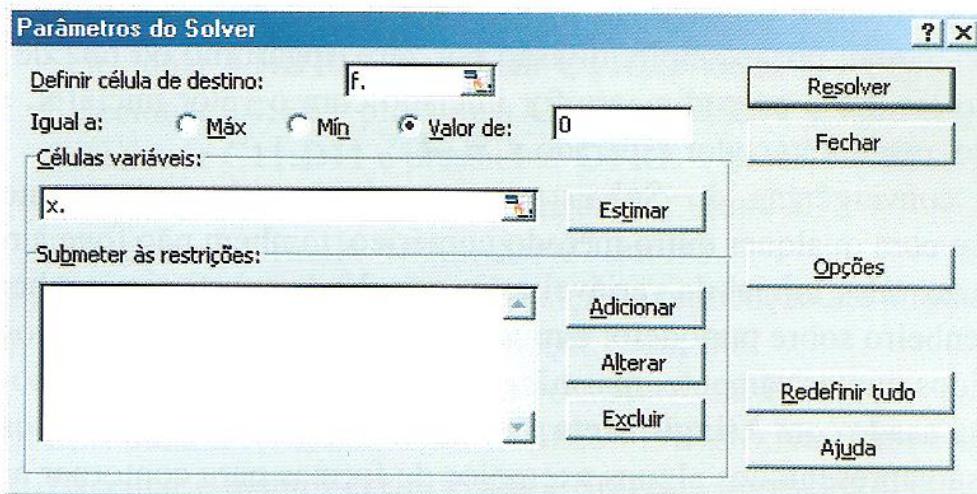
#### **Resolução**

Por se tratar de uma função parabólica, ela poderá ter até duas raízes. Se o procedimento anterior for aplicado com valor inicial  $x = 0$ , a solução convergirá para a raiz negativa  $x = -3$ . Pode-se investigar o entorno de  $x = 0$  usando dois métodos diferentes:

#### **Método 1 – Pesquisa em malha**

Esse método consiste em variar de forma sistemática o valor de  $x$ , até que alguma mudança de sinal seja encontrada.

6. Nomear **A2** como  $x$ . e **B2** como  $f$ . (função objetivo).
7. Introduzir **0** em **A2** e a fórmula “ $=x.^2-3*x.-18$ ” em **B2**, que resultará **-18**.
8. Introduzir **1** em **A2** e a fórmula “ $=x.^2-3*x.-18$ ” em **B2**, que resultará **-20**.
9. Repetir esse procedimento até que o valor de  $f$ . fique positivo ( $x = 7$ ).
10. Com esse valor, selecionar o menu **Ferramentas > Solver**, como ilustrado na Figura 11.8:

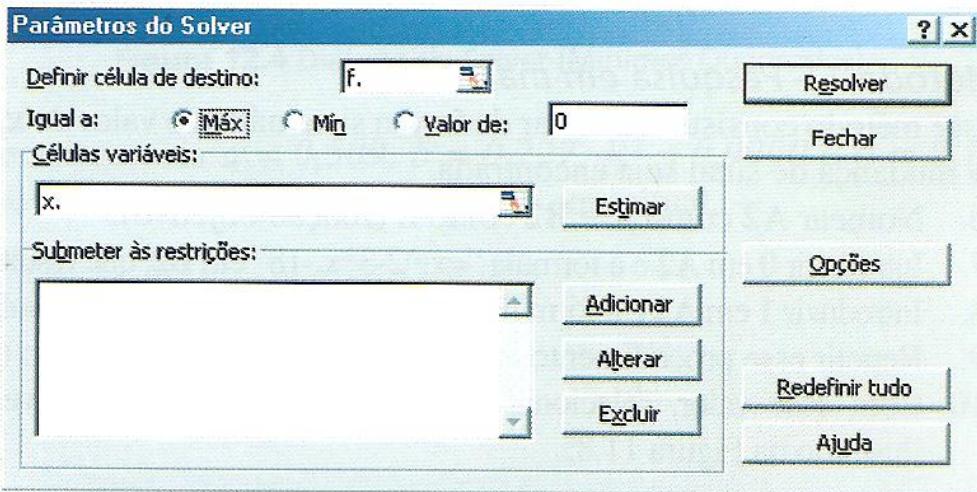


**Figura 11.8** Diálogo do Solver (achar raiz da função).

O resultado será, aproximadamente,  $x = 6$ . Esse método é seguro, porém muito trabalhoso. Existe outro método, o qual usa o próprio Solver.

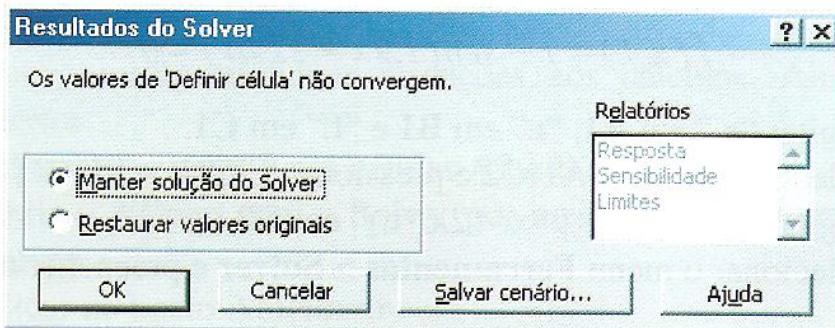
### Método 2 – Máximos e mínimos locais

1. Nomear A2 como x. e B2 como f. (função objetivo).
2. Introduzir 0 em A2 e a fórmula “=x.^2-3\*x.-18” em B2, que resultará -18.
3. Com esse valor, selecionar o menu Ferramentas > Solver como na Figura 11.9:



**Figura 11.9** Diálogo do Solver (achar o máximo da função).

4. O resultado será como o da Figura 11.10:



**Figura 11.10** Diálogo de conclusão do Solver.

5. Clique no botão **Cancelar** e repita o passo 3; porém, dessa vez, selecionando a opção  **Mín.**
6. Resultará  $x = 1,5$  e  $f = -20,25$ , aproximadamente.
7. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver**, escolhendo agora  **Valor de 0**.

O resultado será  $x = 6$ , aproximadamente. Esse método fundamentou-se na premissa de que funções parabólicas apresentam pontos de máximo ou de mínimo locais, daí a importância dos cursos de cálculo integral e diferencial.

## Funções de mais de uma variável

Nem sempre é possível reduzir os problemas de Engenharia a situações de uma única variável. A seguir, um exemplo da equação de onda:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Nela, há duas variáveis independentes: a posição  $x$  e o tempo  $t$ . O parâmetro  $A$  representa a amplitude máxima, e  $k$  e  $\omega$ , respectivamente, o número de onda e a frequência angular. Para ilustrar, um exemplo:

### Aplicação – Equação de onda

*Uma onda se propaga unidimensionalmente segundo a expressão:*

$$y = 0,08 \cdot \operatorname{sen}(1,9 \cdot x - 12,6 \cdot t)$$

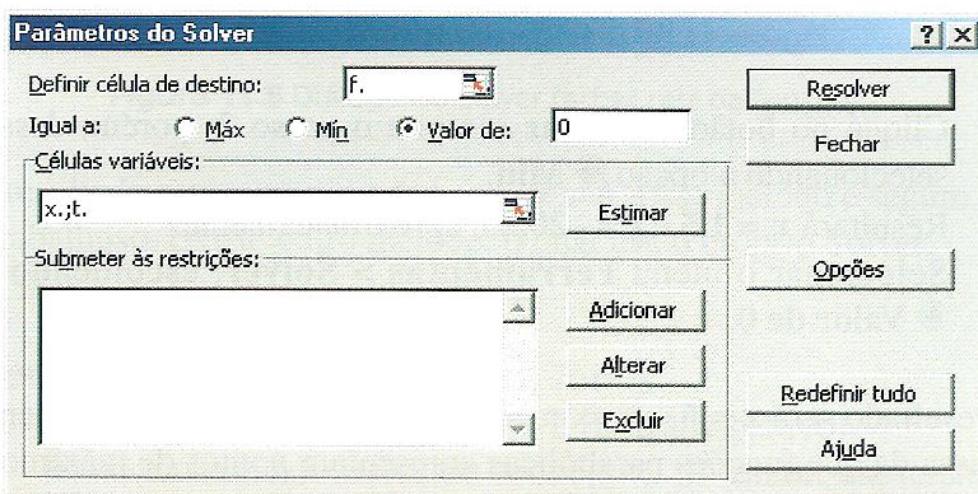
*Pede-se o tempo e a distância da origem em que a onda atingirá a amplitude máxima.*

### Resolução

A solução do problema reduz-se ao sistema:

$$f(x,t) = 1 - \operatorname{sen}(1,9x - 12,6t) = 0$$

1. Digitar “x.” em A1, “t.” em B1 e “f.” em C1.
2. Selecionar a faixa A1:C2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Digitar “=1-SEN(1,9\*x.-12,6\*t.)” em C2.
4. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver** e preencher o diálogo:



**Figura 11.11** Diálogo do Solver (função de duas variáveis).

Ao clicar em **Resolver**, resultarão os valores  $x = 0,018381$  e  $t = -0,12189$ , este obviamente sem nenhum sentido físico. Seria possível fazer uma especulação sobre valores iniciais, como visto nos problemas de uma única variável, mas, além de trabalhoso, seria pouco eficiente, tendo em vista que se trata de um sistema bivariante. Existe, entretanto, uma opção extra no Solver que pode ser útil.

### Forçando valores positivos para as variáveis

Ainda remetendo ao problema anterior, é apresentado o seguinte procedimento:

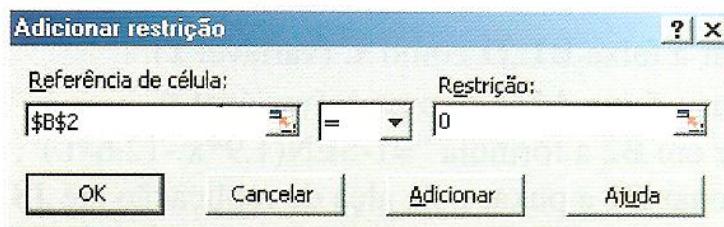
1. Introduzir o valor **0** nas células **A2** e **B2**.
2. Abrir o diálogo com o Solver por meio do menu **Ferramentas > Solver**.
3. Clicar no botão **Opções**.
4. Na nova caixa de diálogo, selecionar a opção **X Presumir não negativos**.
5. Clicar em **OK** e, em seguida, em **Resolver**.

O resultado será  $x = 0,844897$  e  $t = 0,002739$ . Essa solução parece bastante razoável, mas ainda há outra possibilidade.

## Adicionando restrições

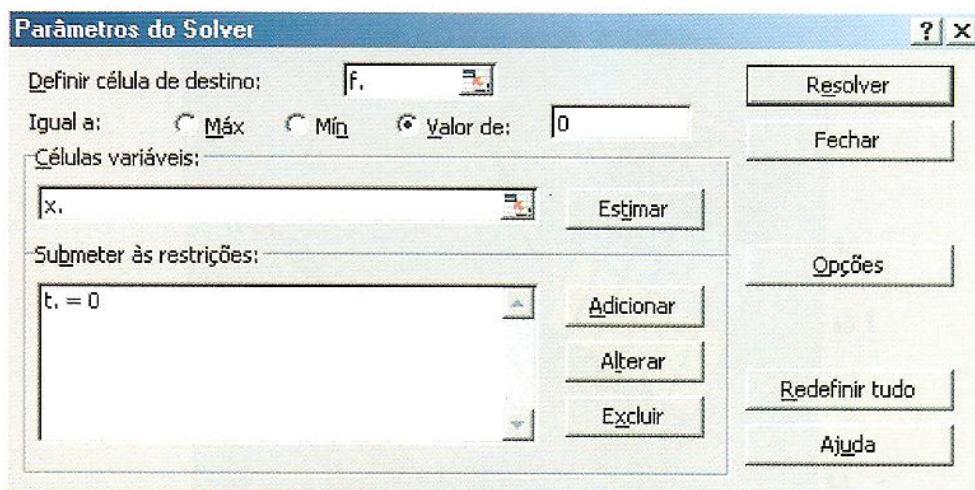
O Solver permite adicionar restrições aos cálculos. Ainda sobre o exemplo anterior:

1. Introduzir o valor **0** nas células **A2** e **B2**.
2. Abrir o diálogo com o Solver por meio do menu **Ferramentas > Solver**.
3. Clicar no botão **Adicionar**.
4. Na nova caixa de diálogo, preencher, como na Figura 11.12:



**Figura 11.12** Diálogo do Solver (adicionando restrições).

5. Clicar em **OK**; o resultado será algo como o que se apresenta na Figura 11.13, a seguir:



**Figura 11.13** Diálogo do Solver com restrições.

Ao clicar em **Resolver**, o resultado será  $x = 0,826735$  e  $t = 0$ . Essa solução está tão certa quanto a anterior, e não há nada de errado com o método

numérico. Para entender o que acontece, é importante a proposição de uma análise gráfica do problema, construindo um gráfico 3D da função  $f(x,t)$ :

1. Construir uma planilha como a seguinte:

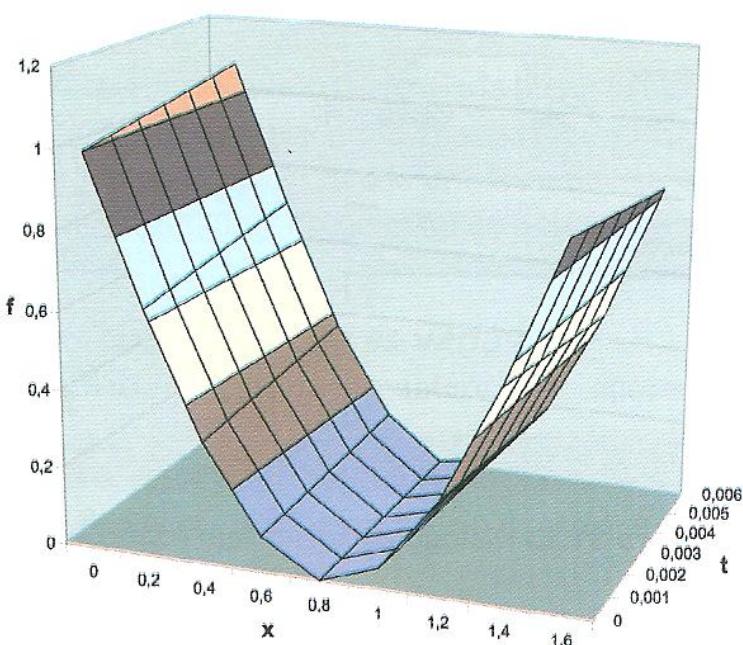
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
2	0									
3	0,001									
4	0,002									
5	0,003									
6	0,004									
7	0,005									
8	0,006									

**Figura 11.14** Planilha para a construção de gráfico 3D.

2. Nomear a faixa **B1:J1** como  $x$ . (variável  $x$ ).
3. Nomear a faixa **A2:A8** como  $t$ . (variável  $t$ ).
4. Digitar em **B2** a fórmula “=1-SEN(1,9\*x.-12,6\*t.)”.
5. Selecionar **B2** e puxar pela alça de replicação até **J8**.
6. Selecionar **B2:B8** e puxar pela alça de replicação até a coluna **J**.
7. Selecionar a faixa **A1:J8** e o menu **Inserir > Gráfico**.
8. Escolher a opção **Superfície**.

Deverá ter como resultado um gráfico semelhante ao da Figura 11.15:

Análise gráfica



**Figura 11.15** Gráfico da função  $f(x,t) = 1 - \sin(1,9x - 12,6t)$ .

Pela Figura 11.15, percebe-se que existem infinitas soluções em torno de  $x = 0,8$ . Isso explica os “diferentes” resultados obtidos. Nunca é demais

repetir: *cabe ao engenheiro interpretar os resultados de seus cálculos e discernir entre o que é ou não válido.* O Excel pode ser uma excelente ajuda, mas nunca substituirá o engenheiro.

## Capítulo 12

# Estimativa de parâmetros – Mínimos Quadrados

Freqüentemente, o engenheiro se depara com um conjunto de pontos experimentais que devem ser ajustados por um modelo matemático. A situação mais corriqueira é o ajuste linear, em que os parâmetros  $a$  e  $b$  da função  $y = a \cdot x + b$  são estimados. O Excel já traz embutidas algumas habilidades para estimativas paramétricas em seus gráficos, conforme mostrado no Capítulo 8: as linhas de tendência. Essas habilidades, no entanto, são restritas a alguns tipos clássicos de funções de uma única variável independente.

Neste capítulo será apresentada uma forma universal de ajustar parâmetros: o Método da Minimização da Soma dos Quadrados dos Resíduos. Esse nome pomposo é freqüentemente reduzido a “Método dos Mínimos Quadrados”, que, além do anglicismo desnecessário, esconde o verdadeiro significado do nome. A seguir, em detalhes, são apresentados os significados intrínsecos dos termos usados.

## Método dos Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados é um nome simples (e incorreto) para o Método da Minimização da Soma dos Quadrados dos Resíduos (MMSQR). De qualquer forma, essa “nomenclatura” é bastante popular e, por isso, será mantida aqui. No entanto, os termos serão melhor descritos, pois isso facilita bastante o entendimento do método. Resíduos são as diferenças entre o valor de uma estimativa e do ponto experimental correspondente. Soma dos Quadrados dos Resíduos é a soma de todos os resíduos elevados ao quadrado. Se os parâmetros do modelo têm seus valores variados, o valor dessa soma também variará. O ajuste ótimo são os valores dos parâmetros que minimizam essa soma. Algo bastante simples.

### *Aplicação – Ajuste linear de pontos experimentais*

*Um determinado experimento resultou no seguinte conjunto de dados:*

$x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2
$y$	10	14	20	25	28	30	37	41	46

*Estime os parâmetros para o ajuste de um modelo linear por meio do MMSQR.*

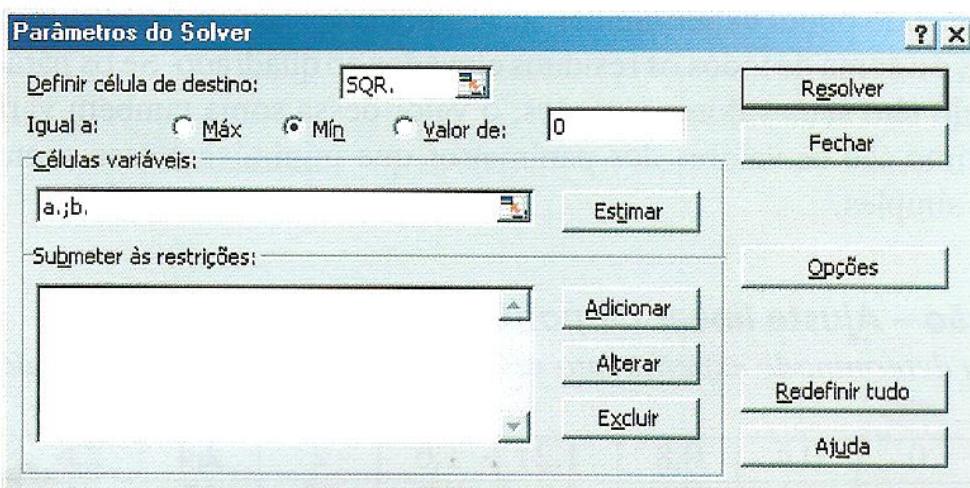
### Resolução

1. Construir a seguinte planilha:

	A	B	C	D
1	a.	b.		
2	1	1		
3				
4	x.	y.	ya.	QR.
5	0	10		
6	0,4	14		
7	0,8	20		
8	1,2	25		
9	1,6	28		
10	2	30		
11	2,4	37		
12	2,8	41		
13	3,2	46		
14			SQR.	

**Figura 12.1** Planilha para ajuste de modelo linear.

2. Selecionar a faixa A1:B2 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
3. Selecionar a faixa A4:D13 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
4. Selecionar a faixa C14:D14 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
5. Introduzir a fórmula “=a.\*x.+b.” em C5.
6. Introduzir a fórmula “=(y.-ya.)^2” em D5.
7. Selecionar C5:D5 e puxar pela alça de replicação até a linha 13.
8. Introduzir a fórmula “=SOMA(QR.)” em D14.
9. Selecionar o menu Ferramentas > Solver e preencher o diálogo:



**Figura 12.2** Diálogo do Solver (Mínimos Quadrados).

Ao clicar no botão **Resolver**, o resultado será  $a = 11$  e  $b = 10,29$ . Pode-se

incrementar o programa introduzindo outras informações:

Coeficiente de Determinação ( $R^2$ )

- Em F11, introduza a fórmula “=RQUAD(ya.;y.)”.

Desvio padrão ( $\sigma^2$ )

- Em F12, introduza a fórmula “=DESVPAD(ya.;y.)”.

De fato é uma perda de tempo usar o MMSQR para regressão linear. Isso foi feito apenas como ilustração. Bastaria o leitor introduzir duas fórmulas: “=INCLINAÇÃO(y.;x.)” e “=INTERCEPÇÃO(y.;x.)”, para que os resultados saíssem imediatamente. É apresentada, no entanto, uma formulação não tão óbvia.

### ***Aplicação – Ajuste de função não-linear***

*Testes de conversão de uma substância em um reator químico resultaram nos valores da tabela a seguir:*

$t\ (s)$	0	1	3	4	5	6	7	8	9
$X$	0	0,11	0,3	0,37	0,42	0,44	0,46	0,48	0,5

*Estime os parâmetros  $a$  e  $b$  que otimizam o ajuste de uma função do tipo  $X = a \tanh(b \cdot t)$ . Calcule o coeficiente de determinação e o desvio padrão do ajuste.*

#### ***Resolução***

1. Construir a planilha:

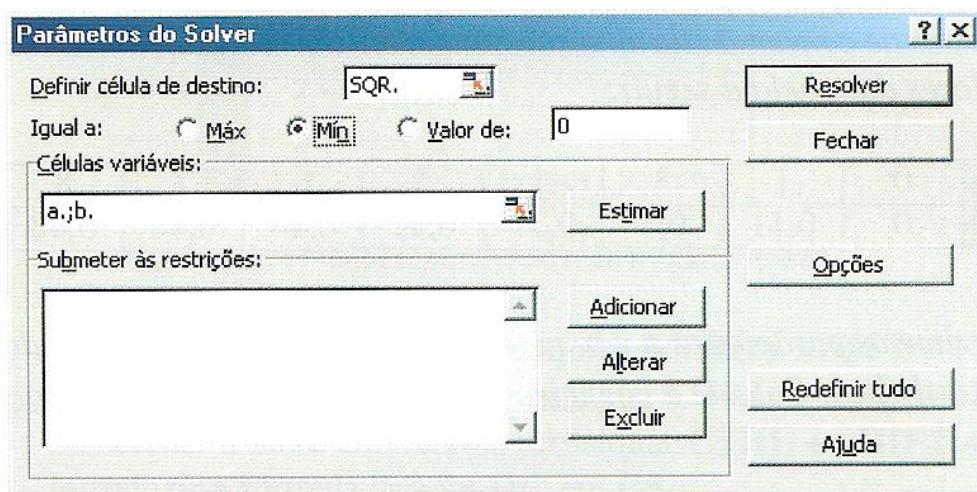
	A	B	C	D	E	F
1	t.	X.	Xa.	QR.		
2	0	0				
3	1	0,11				
4	3	0,3			a.	b.
5	4	0,37				
6	5	0,42				
7	6	0,44				
8	7	0,46				
9	8	0,48			$R^2 =$	
10	9	0,5				$\sigma =$
11			SQR.			

**Figura 12.3** Planilha para aplicação de mínimos quadrados.

As estimativas iniciais de  $a$  e  $b$  fundamentaram-se no fato de a função tangente hiperbólica ter como característica um patamar com valor  $a$  e uma

inclinação ( $a \cdot b \cosh(bX)$ ) com valor  $a \cdot b$  no ponto  $t = 0$ .

2. Selecionar A1:D10 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
3. Selecionar E4:F5 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
4. Selecionar C11:D11 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.
5. Introduzir a fórmula “=a.\*TANH(b.\*X.)” em C2.
6. Introduzir a fórmula “=(Xa.-X.)^2” em D2.
7. Selecionar C2:D2 e puxar pela alça de replicação até a linha 10.
8. Introduzir a fórmula “=SOMA(QR.)” em D11.
9. Introduzir a fórmula “=RQUAD(X.;Xa.)” em F9.
10. Introduzir a fórmula “=SOMA(DESVPAD(X.;Xa.))” em F10.
11. Executar o menu **Ferramentas > Solver** e preencher o diálogo:



**Figura 12.4** Diálogo do Solver (Mínimos Quadrados).

Deverá resultar  $a = 0,509$ ,  $b = 0,227$ ,  $R^2 = 0,9990$  e  $\sigma = 0,1702$ . O processo é bastante simples, porém muito conceitual.

## Capítulo 13

# Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares é expresso por um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Ou, de forma matricial:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ou, simbolicamente:

$$A_{lk} \times x_k = b_l$$

Trata-se, portanto, de encontrar valores de  $x_k$  que satisfaçam tal igualdade. Existem três formas de resolver esse tipo de problema usando o Excel: 1) por meio da aplicação direta do Solver; 2) por cálculo matricial com apoio do Solver; e 3) por aplicação direta do cálculo matricial sem uso do Solver. Neste último caso, usa-se a relação:

$$x_k = A_{lk}^{-1} \times b_l$$

em que  $A_{lk}^{-1}$  representa a inversa da matriz de coeficientes.

Nenhuma das três formas apresenta vantagem particular sobre as demais; no entanto, a aplicação direta do Solver é a mais concisa e, por isso, mais simples. A apresentação das formas matriciais, neste texto, terá apenas o objetivo de mostrar ao leitor como são utilizadas as poderosas funções matriciais do Excel.

## **Aplicação – Solução de sistema com três equações e três incógnitas**

*Encontrar a solução para o sistema de equações:*

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 &= 5 \\-2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 15\end{aligned}$$

### **Resolução**

*Etapa 1 (para os três casos): verificar se o sistema tem solução.*

Considerando que o sistema não é homogêneo, existirá uma solução não trivial apenas se o determinante da matriz de coeficientes  $A_{lk}$  for diferente de zero. Isso será verificado apenas uma vez para os três casos.

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.1:

	A	B	C	D	E
5	3	-1	0		
6	-2	1	1		$\Delta =$
7	2	-1	4		

**Figura 13.1** Cálculo do determinante.

2. Selecionar a faixa A5:C7 e nomeá-la como **Matriz**. (com ponto).
3. Na célula F6, introduzir a fórmula “=MATRIZ.DETERM(Matriz.)”.

Após clicar no botão<sup>4</sup> **OK**, o valor será  $\Delta = 5$ ; portanto, o sistema tem solução.

*Etapa 2 (Alternativa 1): resolução do problema com aplicação direta do Solver*

O sistema de equações pode ser rearranjado como a seguir:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 - 5 &= 0 \\-2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\2x_1 - x_2 + 4x_3 - 15 &= 0\end{aligned}$$

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.2:

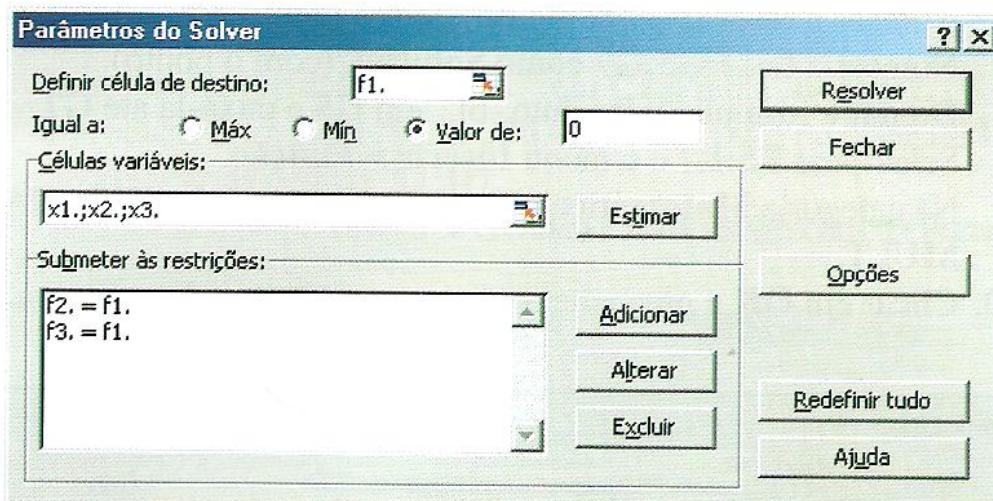
---

<sup>4</sup> A MATRIZ.DETERM() é a única função matricial do Excel que não precisa ser introduzida com **CTRL + SHIFT + ENTER**.

	A	B	C	D	E	F
1	$x_1.$	$x_2.$	$x_3.$	$f_1.$	$f_2.$	$f_3.$
2	1	1	1			

**Figura 13.2** Solução com aplicação direta do Solver.

2. Selecionar a faixa A1:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Digitar a fórmula “=3\*x1.-x2.-5” em D2.
4. Digitar a fórmula “=-2\*x1.+x2.+x3.” em E2.
5. Digitar a fórmula “=2\*x1.-x2.+4\*x3.-15” em F2.
6. Preencher o diálogo do Solver como mostra a Figura 13.3:

**Figura 13.3** Diálogo do Solver (sistema de equações lineares).

O leitor deve perceber o artifício usado aqui. Como o Solver permite apenas uma célula de destino, a condição foi substituída:

$$f1. = 0; f2. = 0; f3. = 0 \quad \text{por} \quad f1. = 0; f2. = f1.; f3. = f1.$$

Clicando no botão **Resolver**, o resultado é  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ ; e  $x_3 = 3$ .

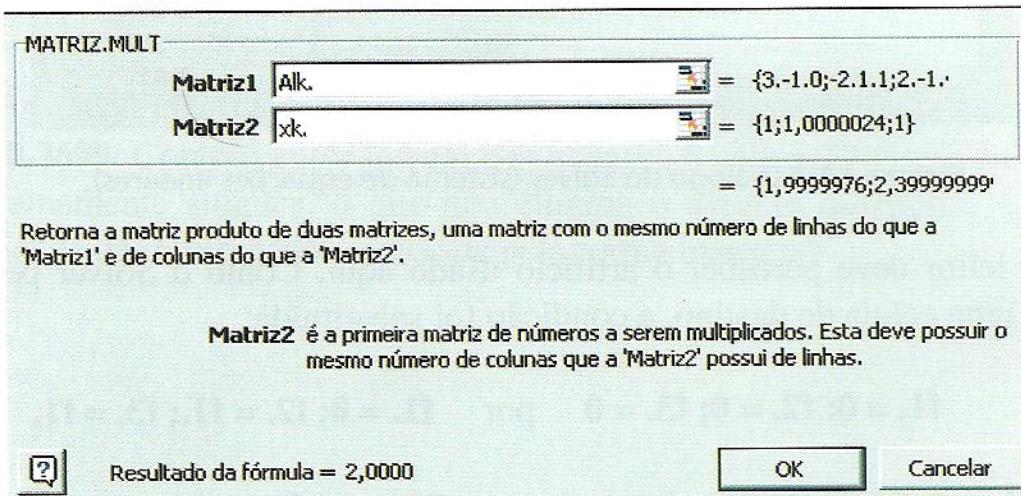
*Etapa 2 (Alternativa 2): resolução do problema com a forma matricial usando o Solver*

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.4:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					1,0				
2					1,0				
3					1,0				
4									
5	3	-1	0						5
6	-2	1	1						0
7	2	-1	4						15

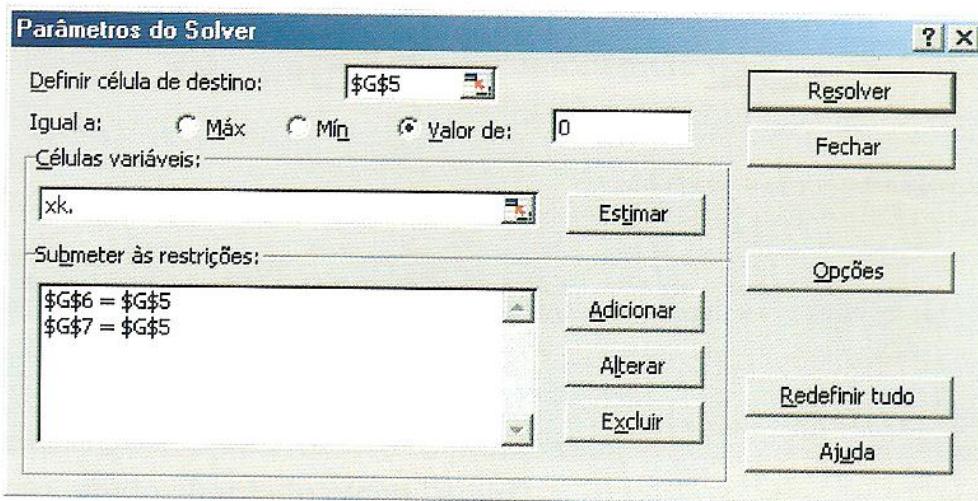
**Figura 13.4** Planilha para a solução de sistema linear (forma matricial).

2. Nomear a faixa A5:C7 como **Alk.** (com o ponto).
3. Nomear a faixa E1:E3 como **xk.** (com o ponto).
4. Nomear a faixa E5:E7 como **Produto.** (com o ponto).
5. Nomear a faixa I5:I7 como **bl.** (com o ponto).
6. Nomear a faixa G5:G7 como **Solução.** (com o ponto).
7. Digitar a fórmula “=Produto.-bl.” em G5 e puxá-la até G7.
8. Selecionar E5:E7 e o menu **Inserir > Função.**
9. Na categoria **Matemática e Trigonométrica**, selecionar **MATRIZ. MULT.**
10. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.5:



**Figura 13.5** Diálogo para multiplicação de matrizes.

11. **NÃO CLICAR NO BOTÃO OK ⇒ PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.**
12. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver.**
13. Preencher o diálogo do Solver como ilustra a Figura 13.6:



**Figura 13.6** Diálogo do Solver (sistema de equações lineares).

Clicando no botão **Resolver**, o resultado será  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ ; e  $x_3 = 3$ .

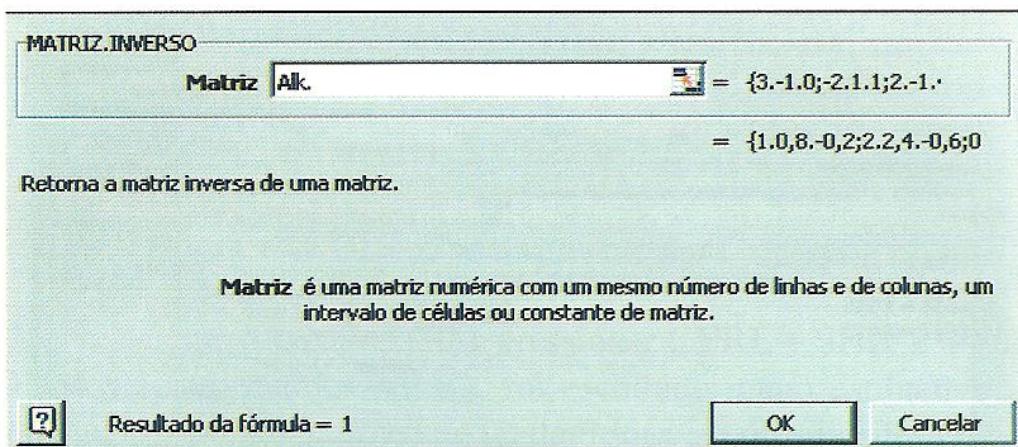
*Etapa 2 (Alternativa 3): resolução do problema com a forma matricial sem uso do Solver*

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.7:

	A	B	C	D	E
1	3	-1	0		5
2	-2	1	1		0
3	2	-1	4		15
4					
5					
6					
7					

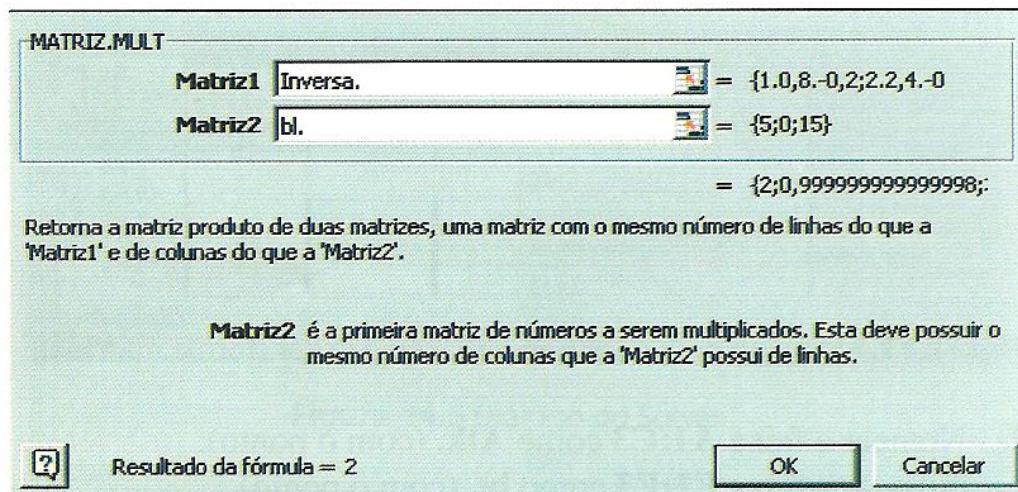
**Figura 13.7** Planilha para a solução de sistema linear (forma matricial).

2. Nomear a faixa A1:C3 como **Alk.** (com o ponto).
3. Nomear a faixa E1:E3 como **bl.** (com o ponto).
4. Nomear a faixa A5:C7 como **Inversa.** (com o ponto).
5. Nomear a faixa E5:E7 como **Solução.** (com o ponto).
6. Selecionar A5:C7 e o menu **Inserir > Função.**
7. Na categoria **Matemática e Trigonométrica**, selecionar **MATRIZ. INVERSO.**
8. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.8:



**Figura 13.8** Diálogo para inversão de matriz.

9. NÃO CLICAR NO BOTÃO OK  $\Rightarrow$  PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.
10. Selecionar E5:E7 e o menu Inserir > Função.
11. Na categoria Matemática e Trigonométrica, selecionar MATRIZ. MULT.
12. Clicar em OK e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.9:



**Figura 13.9** Diálogo para produto matricial.

13. NÃO CLICAR NO BOTÃO OK  $\Rightarrow$  PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.

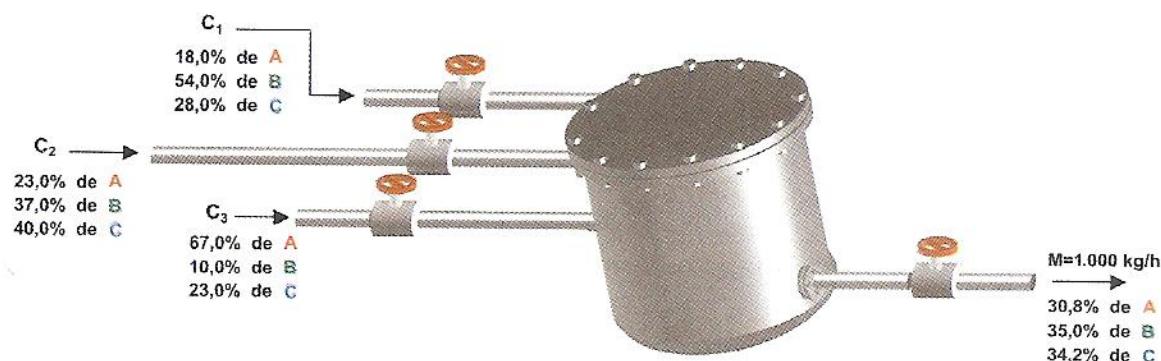
Clicando no botão **Resolver**, o resultado será novamente  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ ; e  $x_3 = 3$ . O leitor deve perceber que foi utilizada, simplesmente, a relação  $x_k = A_{ik}^{-1} \times b_i$  de forma direta; bastante simples comparativamente com os métodos convencionais de programação. Essa forma é bastante didática, podendo ser

usada como ilustração em aulas de Cálculo Numérico. Ela contém uma das maiores vantagens do Excel: o cálculo automático. Basta alterar algum valor da matriz de coeficientes  $A_{lk}$  ou do vetor  $b_l$ , e a planilha oferece o resultado imediatamente. Imagine o leitor, agora, hipoteticamente, que as condições do problema mudem bruscamente durante um processo produtivo, fazendo o valor de  $b_1$  ser alterado de 5 para 8. A simples digitação desse valor na planilha forneceria imediatamente o novo resultado:  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = 7$ ; e  $x_3 = 3$ .

A seguir, apresenta-se uma aplicação de Engenharia envolvendo balanço de massa. O leitor é convidado, agora, a experimentar as três planilhas elaboradas neste capítulo para resolver o problema. De qualquer forma, o problema continuará sendo abordado como “novo”.

### **Aplicação – Balanço de massa (tanque de formulação)**

*Um tanque de formulação é alimentado por três correntes, produzindo 1.000 kg/h de uma mistura com 30,8% da substância A, 35% da substância B e 34,2% da substância C. As correntes C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> e C<sub>3</sub> têm composições mostradas na Figura 13.10. Quais as vazões totais em massa das correntes entrantes?*



**Figura 13.10** Tanque de formulação.<sup>5</sup>

### **Resolução (Forma direta)**

Supondo estado estacionário (regime permanente), o problema pode ser modelado pelo sistema de equações (entrada = saída):

$$0,18.F_1 + 0,23.F_2 + 0,67.F_3 = 308$$

$$0,54.F_1 + 0,37.F_2 + 0,10.F_3 = 350$$

$$0,28.F_1 + 0,40.F_2 + 0,23.F_3 = 342$$

<sup>5</sup> Figura confeccionada no Excel, gentilmente cedida pelo engenheiro Marcelo Zachele.

*Etapa 1: verificar se o sistema tem solução*

O sistema terá solução se o determinante da matriz de coeficientes  $A_{lk}$  não for nulo.

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.11:

	A	B	C	D	E	F
5	0,18	0,23	0,67			
6	0,54	0,37	0,1			$\Delta =$
7	0,28	0,4	0,23			

**Figura 13.11** Estrutura matricial para a solução do problema.

2. Selecionar a faixa A5:C7 e nomeá-la como **Matriz**. (com ponto).
3. Na célula F6, introduzir a fórmula “=MATRIZ.DETERM(Matriz.)”.

Após clicar no botão<sup>6</sup> **OK**, o resultado será  $\Delta = 0,06$ ; portanto, o sistema tem solução não-trivial.

*Etapa 2: resolução do problema*

O sistema de equações pode ser rearranjado como:

$$0,18.F_1 + 0,23.F_2 + 0,67.F_3 - 308 = 0$$

$$0,54.F_1 + 0,37.F_2 + 0,10.F_3 - 350 = 0$$

$$0,28.F_1 + 0,40.F_2 + 0,23.F_3 - 342 = 0$$

4. Construir uma planilha como a da Figura 13.12:

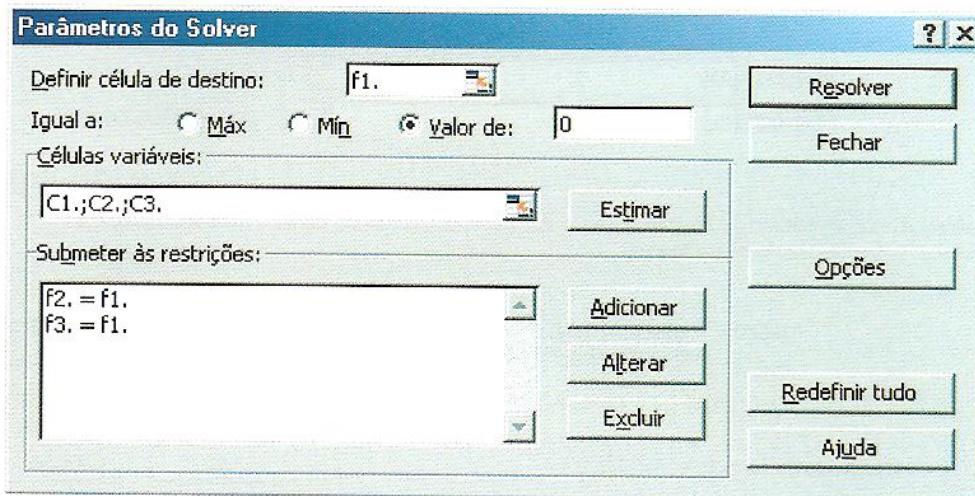
	A	B	C	D	E	F
1	$C_1.$	$C_2.$	$C_3.$	$f_1.$	$f_2.$	$f_3.$
2	200	600	200			

**Figura 13.12** Estrutura matricial para a solução do problema.

5. Selecionar a faixa A1:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
6. Digitar a fórmula “=0,18\*C1.+0,23\*C2.+0,67\*C3.-308” em D2.
7. Digitar a fórmula “=0,54\*C1.+0,37\*C2.+0,1\*C3.-350” em E2.
8. Digitar a fórmula “=0,28\*C1.+0,4\*C2.+0,23\*C3.-342” em F2.

<sup>6</sup> A MATRIZ.DETERM() é a única função matricial do Excel que não precisa ser introduzida com **CTRL + SHIFT + ENTER**.

9. Preencher o diálogo do Solver como na Figura 13.13:



**Figura 13.13** Diálogo do Solver (três equações, três incógnitas).

Clicando em **Resolver**, o resultado será  $C_1 = 200 \text{ kg/h}$ ;  $C_2 = 600 \text{ kg/h}$ ; e  $C_3 = 200 \text{ kg/h}$ .

#### *Resolução (Forma matricial com apoio do Solver)*

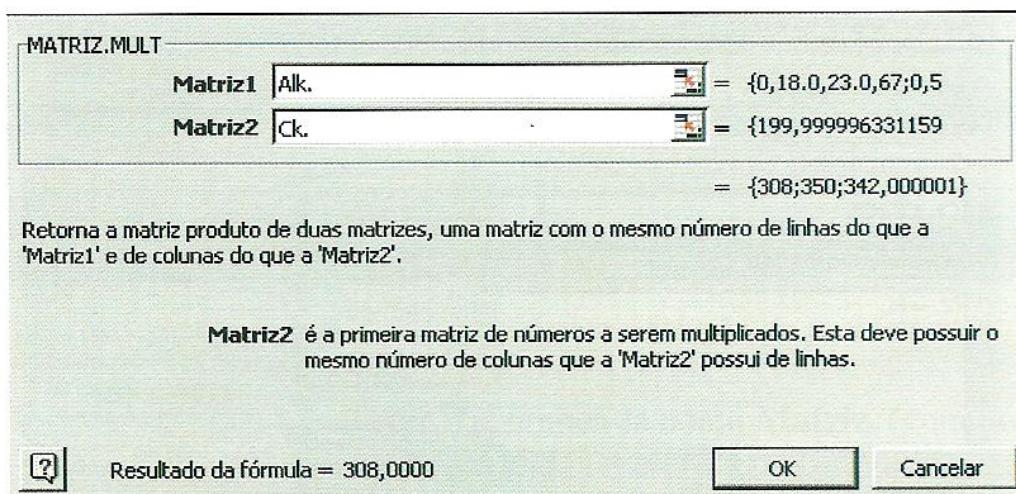
1. Construir uma planilha como a da Figura 13.14:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					300,0				
2					300,0				
3					300,0				
4									
5	0,18	0,23	0,67						308
6	0,54	0,37	0,1						350
7	0,28	0,4	0,23						342

**Figura 13.14** Estrutura matricial para a solução do problema.

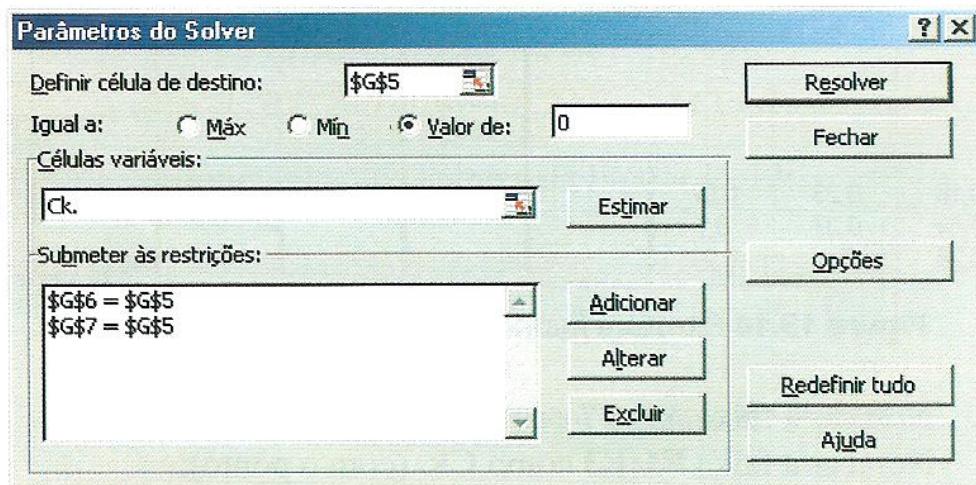
2. Nomear a faixa A5:C7 como **Alk.** (com o ponto).
3. Nomear a faixa E1:E3 como **Ck.** (com o ponto).
4. Nomear a faixa E5:E7 como **Produto.** (com o ponto).
5. Nomear a faixa I5:I7 como **bl.** (com o ponto).
6. Nomear a faixa G5:G7 como **Solução.** (com o ponto).
7. Digitar a fórmula “=Produto.-bl.” em G5 e puxá-la até G7.
8. Selecionar E5:E7 e o menu **Inserir > Função.**
9. Na categoria **Matemática e Trigonométrica**, selecionar **MATRIZ. MULT.**

10. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.15:



**Figura 13.15** Diálogo do produto matricial.

11. **NÃO CLICAR NO BOTÃO OK  $\Rightarrow$  PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.**  
 12. Selecionar o menu Ferramentas > Solver.  
 13. Preencher o diálogo do Solver como na Figura 13.16:



**Figura 13.16** Diálogo do Solver.

Clicando no botão **Resolver**, o resultado será  $C_1 = 200 \text{ kg/h}$ ;  $x_2 = 600 \text{ kg/h}$ ; e  $x_3 = 200 \text{ kg/h}$ .

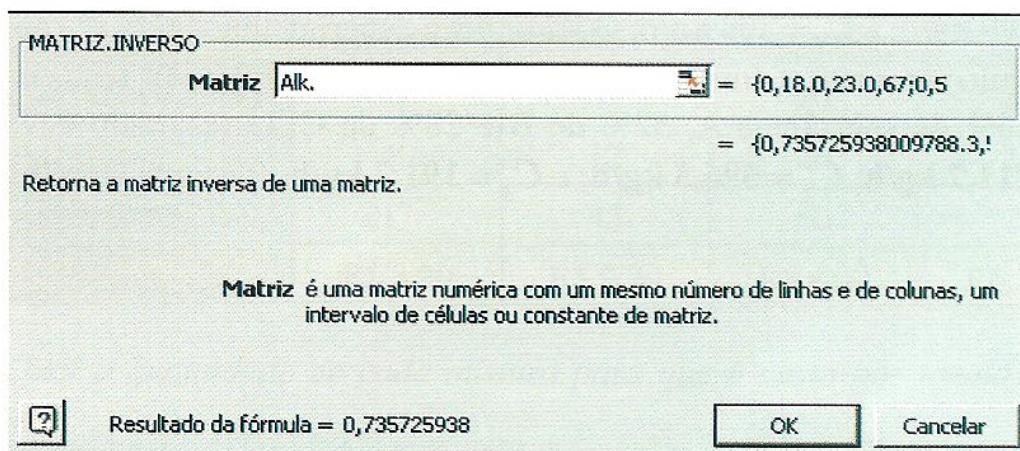
*Resolução (Forma matricial sem apoio do Solver)*

1. Construir uma planilha como a da Figura 13.17:

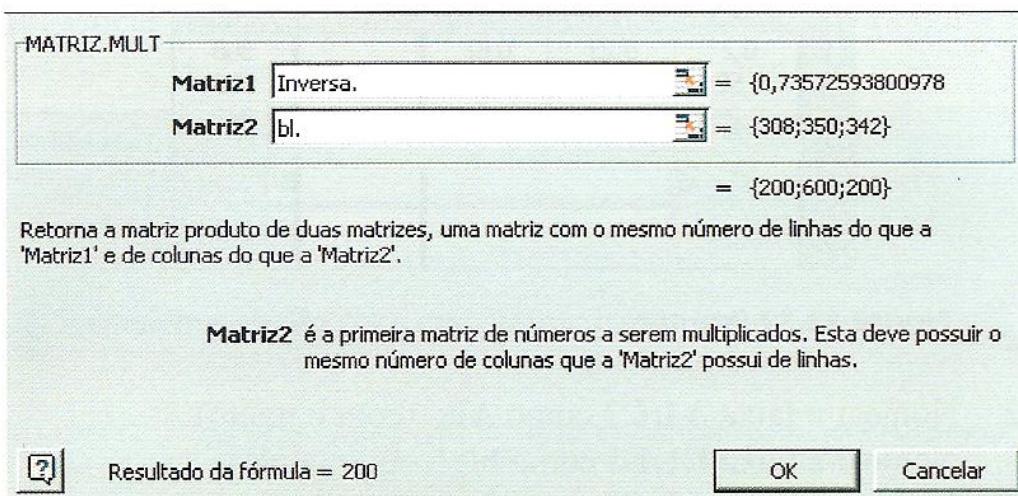
	A	B	C	D	E
1	0,2	0,23	0,67		308
2	0,52	0,37	0,1		350
3	0,28	0,4	0,23		342
4					
5					
6					
7					

**Figura 13.17** Estrutura matricial para a solução do problema.

2. Nomear a faixa A1:C3 como **Alk**. (com o ponto).
3. Nomear a faixa E1:E3 como **bl**. (com o ponto).
4. Nomear a faixa A5:C7 como **Inversa**. (com o ponto).
5. Nomear a faixa E5:E7 como **Solução**. (com o ponto).
6. Selecionar A5:C7 e o menu Inserir > Função.
7. Na categoria Matemática e Trigonométrica, selecionar **MATRIZ. INVERSO**.
8. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.18:

**Figura 13.18** Diálogo para inversão de matriz.

9. **NÃO CLICAR NO BOTÃO OK  $\Rightarrow$  PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.**
10. Selecionar E5:E7 e o menu Inserir > Função.
11. Na categoria Matemática e Trigonométrica, selecionar **MATRIZ. MULT.**
12. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 13.19:



**Figura 13.19** Diálogo para produto matricial.

**13. NÃO CLICAR NO BOTÃO OK  $\Rightarrow$  PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.**

Clicando no botão **Resolver**, o resultado será novamente  $C_1 = 200 \text{ kg/h}$ ;  $C_2 = 600 \text{ kg/h}$ ; e  $C_3 = 200 \text{ kg/h}$ . O leitor deve experimentar agora as vantagens do cálculo automático. Imagine que a composição da corrente  $C$ , tenha mudado para 20% da substância A, 52% de B e 28% de C. O resultado deverá ser  $C_1 = 211,7 \text{ kg/h}$ ;  $C_2 = 596,5 \text{ kg/h}$ ; e  $C_3 = 191,7 \text{ kg/h}$ . Bastante simples, não?

## Capítulo 14

# Problemas de otimização

A adição de restrições, vista no Capítulo 10, é de muita utilidade, principalmente nos problemas de otimização. Neste capítulo, serão apresentadas duas aplicações simples de programação linear, mas que mostram como usar as restrições do Solver para resolver problemas.

### **Aplicação – Otimizando custo de aquisição de matérias-primas**

Uma empresa deseja produzir uma mistura de três substâncias: A, B e C, com composição 50% de A, 20% de B e 30% de C. As matérias-primas disponíveis no mercado, seus preços e suas composições em porcentagem estão mostrados no Quadro 14.1, a seguir:

**Quadro 14.1** Composições das matérias-primas.

	Mistura 1	Mistura 2	Mistura 3	Mistura 4
Concentração de A (%)	43	45	20	80
Concentração de B (%)	40	12	20	15
Concentração de C (%)	17	43	60	5
Preço/t	R\$ 3,20	R\$ 9,20	R\$ 4,00	R\$ 2,00

*Qual a quantidade de cada mistura para que o custo por tonelada seja mínimo?*

### **Resolução**

O problema pode ser modelado pelo sistema de equações:

$$\begin{aligned}q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 1.000 \\0,43q_1 + 0,45q_2 + 0,20q_3 + 0,80q_4 &= 500 \\0,40q_1 + 0,12q_2 + 0,20q_3 + 0,15q_4 &= 200 \\0,17q_1 + 0,43q_2 + 0,60q_3 + 0,05q_4 &= 300 \\3,20q_1 + 9,20q_2 + 4,00q_3 + 2,00q_4 &= P \quad (\text{mínimo}) \\q_1 >= 0; q_2 >= 0; q_3 >= 0; q_4 >= 0\end{aligned}$$

- Construir uma planilha como a da Figura 14.1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	q1.	q2.	q3.	q4.	f1.	f2.	f3.	f4.	C.
2	250,00	250,00	250,00	250,00					

Figura 14.1 Planilha para a resolução do problema.

- Selecionar a faixa A1:I2 e pressionar CTRL + SHIFT + F3.

O valor 250, introduzido nas células A2:D2, fundamenta-se na hipótese de que as matérias-primas serão adquiridas em quantidades iguais.

- Digitar a fórmula “=q1.+q2.+q3.+q4.” em E2.
- Digitar a fórmula “=0,43\*q1.+0,45\*q2.+0,2\*q3.+0,8\*q4.” em F2.
- Digitar a fórmula “=0,4\*q1.+0,12\*q2.+0,2\*q3.+0,15\*q4.” em G2.
- Digitar a fórmula “=0,17\*q1.+0,43\*q2.+0,6\*q3.+0,05\*q4.” em H2.
- Digitar a fórmula “=3,2\*q1.+9,2\*q2.+4\*q3.+2\*q4.” em I2.
- Preencher o diálogo do Solver como ilustra a Figura 14.2:

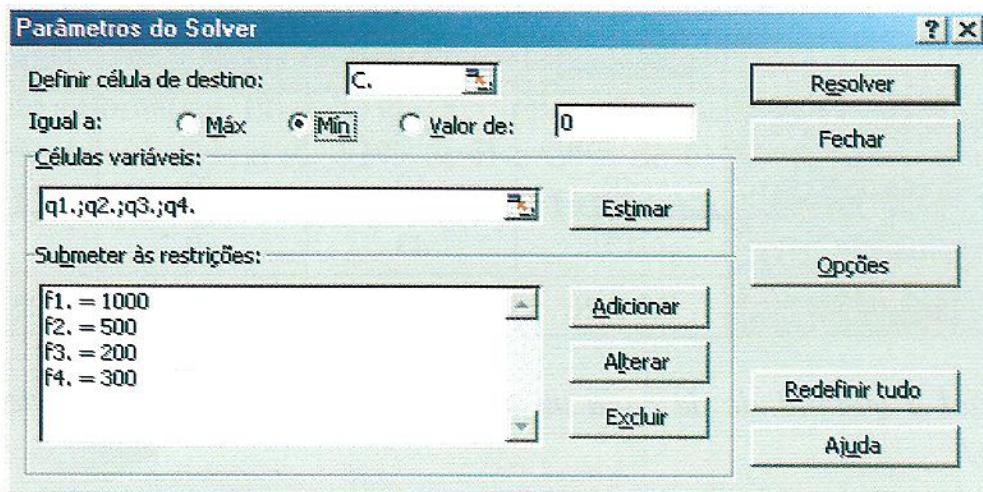
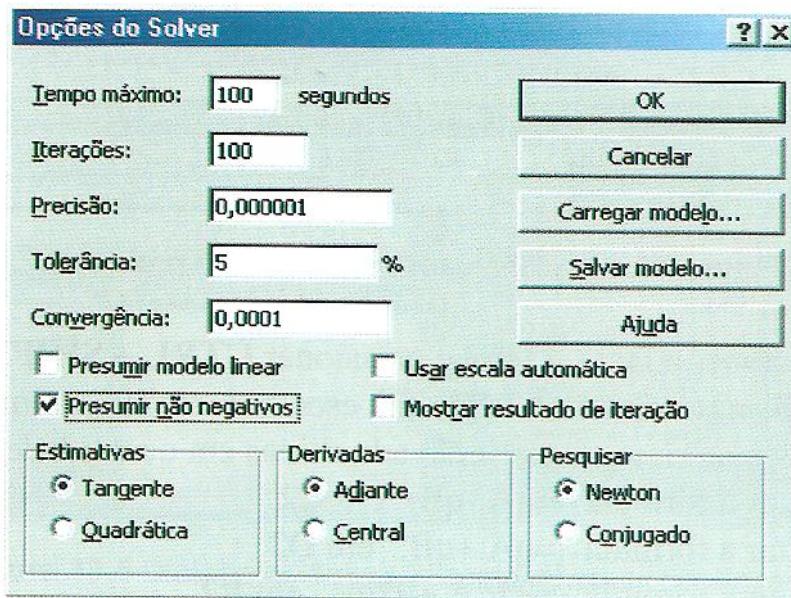


Figura 14.2 Diálogo do Solver.

- Antes de clicar em Resolver, clicar no botão Opções e selecionar a caixa X Presumir não negativos, o que é óbvio, quando se trata de massas.



**Figura 14.3** Opções do Solver.

Ao clicar em **OK** e **Resolver**, o resultado será a necessidade de serem comprados **179,41 kg** de A, **242,03 kg** de B, **248,18 kg** de C e **330,38 kg** de D, com um custo total de R\$ **4.454,28**. A seguir, é apresentado um problema similar, porém com maior complexidade nas restrições.

### **Aplicação – Otimizando custo de produção**

Uma empresa deseja colocar no mercado dois produtos: A e B, a um custo unitário, respectivamente, de R\$ 3,00 e R\$ 5,00. O processo produtivo impõe as seguintes restrições:

- a. A quantidade de A só pode superar a de B em no máximo 3 unidades.
- b. A capacidade máxima de produção total é de 10 unidades.
- c. O consumo energético impõe que  $3q_A + 9q_B \leq 75$ .

*Qual a quantidade de cada produto para que o faturamento seja máximo?*

#### **Resolução**

O problema pode ser modelado pelo sistema de equações:

$$q_A - q_B \leq 3$$

$$q_A + q_B \leq 10$$

$$3q_A + 9q_B \leq 75$$

$$3q_A + 5q_B = F \quad (\text{máximo})$$

$$q_A \geq 0; q_B \geq 0$$

- Construir uma planilha como a apresentada a seguir:

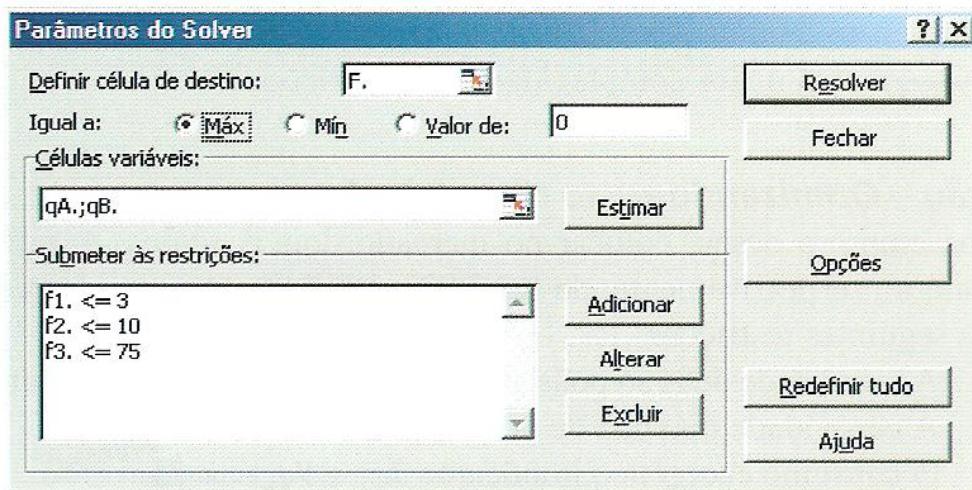
	A	B	C	D	E	F
1	$q_A$	$q_B$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	
2	5	5				

**Figura 14.4** Planilha para a resolução do problema.

- Selecionar a faixa A1:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.

O valor 5, nas células A2:B2, foi escolhido como estimativa inicial, supondo que as matérias-primas serão adquiridas em quantidades iguais.

3. Digitar a fórmula “=qA.-qB.” em C2.
4. Digitar a fórmula “=qA.+qB.” em D2.
5. Digitar a fórmula “=3\*qA.+9\*qB” em E2.
6. Digitar a fórmula “=3\*qA.+5\*qB.” em F2.
7. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver**.
8. Preencher o diálogo do Solver como ilustra a Figura 14.5, a seguir:



**Figura 14.5** Diálogo do Solver.

9. Antes de clicar em **Resolver**, clicar no botão **Opções** e selecionar a caixa X **Presumir não negativos**.

Ao clicar em **OK** e **Resolver**, o resultado será a produção de 2,5 unidades de A e 7,5 unidades de B, com um faturamento de R\$ 45,00.

### **Aplicação – Análise gráfica da otimização**

*Fazer uma análise gráfica da aplicação anterior.*

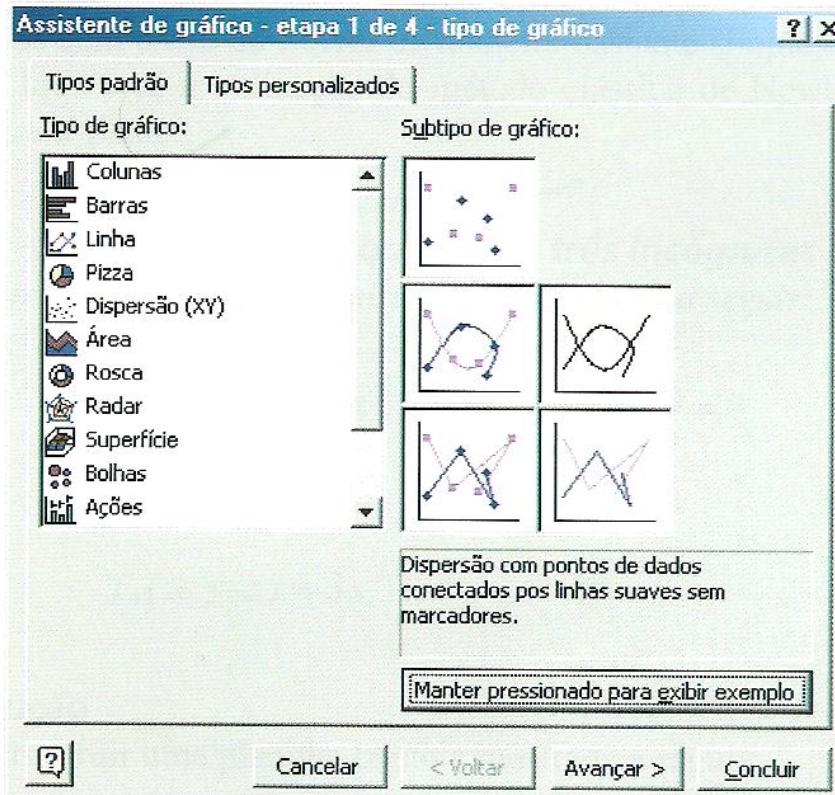
**Resolução**

1. Construir uma planilha como a apresentada a seguir:

	A	B	C	D
1	$q_A$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
2	0			
3	2			
4	4			
5	6			
6	8			
7	10			

**Figura 14.6** Planilha para análise gráfica da otimização.

2. Selecionar a faixa A1:D7 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Introduzir a fórmula “=qA.-3” em B2 e puxá-la até B7.
4. Introduzir a fórmula “=10-qA.” em C2 e puxá-la até C7.
5. Introduzir a fórmula “=(75-3\*qA.)/9” em D2 e puxá-la até D7.
6. Selecionar as células A1:D7.
7. Selecionar o menu **Inserir > Gráfico** e fazer as seleções da Figura 14.7:

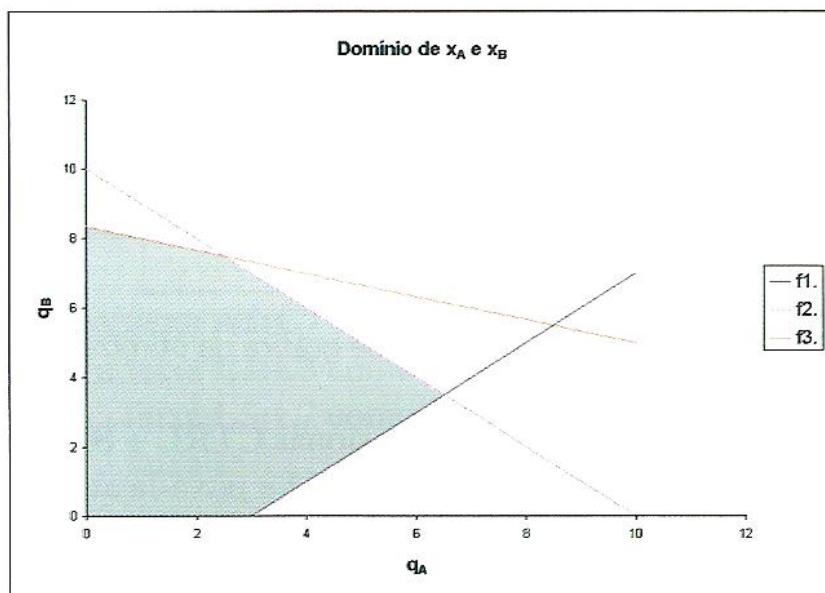


**Figura 14.7** Seleção do tipo de gráfico.

O resultado será um gráfico como o da Figura 14.8, em que a área sombreada<sup>7</sup> é o domínio. Sugere-se, como treino, que o leitor experimente

<sup>7</sup> A área sombreada resultou de tratamento gráfico em outro programa (*Paint*).

formatar o gráfico resultante.



**Figura 14.8** Domínio da aplicação.

## Capítulo 15

# Sistemas de equações não-lineares (Solver)

Um sistema de equações não-lineares tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

A solução do sistema é o vetor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que satisfaz as equações de tal forma que o vetor  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  se anule.

Neste capítulo o enfoque será avaliar como sistemas não-lineares podem ser resolvidos com o uso do Solver de maneira bastante simples. No capítulo seguinte, o foco será a utilização do método clássico de Newton-Raphson, usando o *Visual Basic*.

### Aplicação – Sistema de três equações e três incógnitas

Encontrar a solução para o sistema de equações a seguir:

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$f_3(x, y, z) = 3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

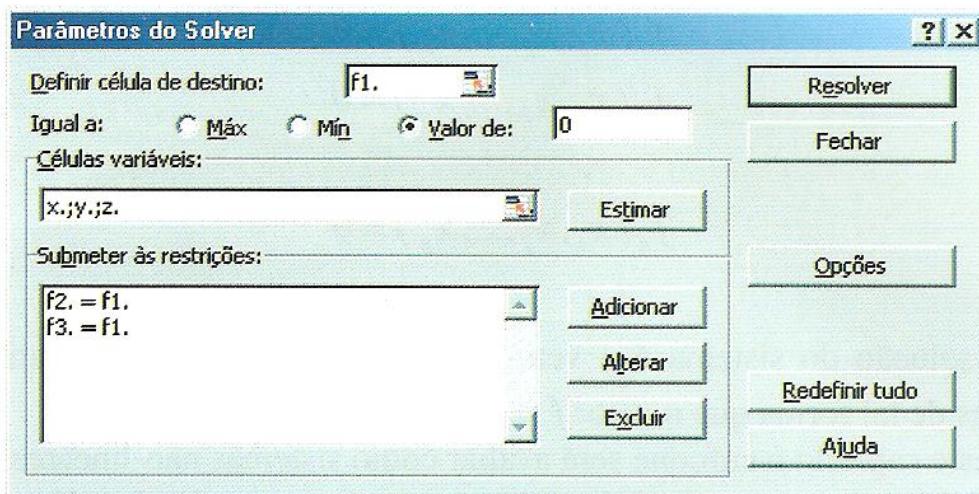
### Resolução

1. Construir uma planilha como a mostrada a seguir:

	A	B	C	D	E	F
1	x.	y.	z.	f <sub>1</sub> .	f <sub>2</sub> .	f <sub>3</sub> .
2	1	1	1			

**Figura 15.1** Planilha para a resolução do problema.

2. Selecionar a faixa A1:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Introduzir a fórmula “=x.^2+y.^2+z.^2-1” em D2.
4. Introduzir a fórmula “=2\*x.^2+y.^2-4\*z.” em E2.
5. Introduzir a fórmula “=3\*x.^2-4\*y.+z.^2” em F2.
6. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver**.
7. Preencher o diálogo do Solver como na Figura 15.2:



**Figura 15.2** Diálogo do Solver.

Ao clicar em **OK** e **Resolver**, o resultado será  $x = 0,7852$ ,  $y = 0,4966$  e  $z = 0,3699$ . Como o leitor já vem percebendo, a aplicação direta do Solver é extremamente simples, o que não elimina o aspecto didático e a maior quantidade de informações oferecida pela forma matricial.

## Sistemas de equações não-lineares (Macros)

Neste capítulo, a intenção será despertar um pouco o interesse do leitor pela programação. Um sistema de equações não-lineares será resolvido com apoio do VBA (*Visual Basic for Applications*), sem digitar nenhuma linha de código.

O método de Newton é um meio clássico de resolver sistemas não-lineares; é um processo interativo em que a “*iésima*” *primeira* estimativa do vetor  $x^{i+1}$  se relaciona com a anterior,  $x^i$ , de acordo com a relação exposta a seguir:

$$x^{i+1} = x^i - J^{-1}(x^i) \cdot f(x^i)$$

em que  $J^{-1}(x^i)$  é a matriz inversa do Jacobiano de  $f(x^i)$ :

$$J^{-1}(x^i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}^{-1}$$

O processo iterativo termina assim que as diferenças entre as estimativas dos valores de  $x$  sejam menores que um valor arbitrário  $\varepsilon$ :

$$|x^{i+1} - x^i| < \varepsilon$$

### **Aplicação – Malha de tubulação**

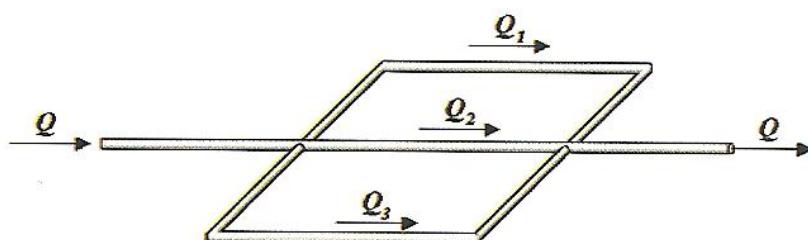
Por uma tubulação escoa um líquido com uma vazão  $Q$  igual a  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Em determinado ponto, essa tubulação se divide em três, resultando vazões  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , respectivamente, conforme mostra a Figura 16.1. As perdas de energia nos três ramos podem ser estimadas pelas seguintes relações:

$$lw_1 = 0,0857.Q_1^2$$

$$lw_2 = 0,00134.Q_2^2$$

$$lw_3 = 2,74.Q_3^2$$

Para tal situação, estimar os valores das vazões  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  em  $m^3/h$ , nos respectivos trechos.



**Figura 16.1** Rede de tubulação.

### Resolução

Como as perdas de energia devem ser iguais, tem-se que  $lw_1 = lw_2 = lw_3$  e, portanto, a resolução do problema resulta o sistema de três equações e três incógnitas:

$$f_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - 60 = 0$$

$$f_2 = 0,0857Q_1^2 - 0,00133Q_2^2 = 0$$

$$f_3 = 0,00133Q_1^2 - 2,74Q_3^2 = 0$$

1. Construir a planilha:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		20							
2	$Q_i :$	20	+	$\Delta Q_{i..} :$		=	$Q_M :$		
3		20							
4									
5									
6	$f_i :$			$J_i :$					
7									
8									
9									
10	$J_i^{-1} :$								
11									
12									

**Figura 16.2** Planilha para a resolução do problema.

As estimativas iniciais **20** fundamentam-se na hipótese de que as vazões são distribuídas igualmente.

2. Nomear **B1** como **Q1.**, **B2** como **Q2.** e **B3** como **Q3.** (com ponto).
3. Nomear **B1:B3** como **Qvelho.** (com o ponto).
4. Nomear **E1:E3** como **DeltaQ.** (com o ponto).
5. Nomear **H1:H3** como **Qnovo.** (com o ponto).
6. Nomear **B5:B7** como **f.** (com o ponto).
7. Nomear **E5:G7** como **Jacobi.** (com o ponto).
8. Nomear **B9:D11** como **Inversa.** (com o ponto).
9. Inserir em **B5** a fórmula “=Q1.+Q2.+Q3.-60”.
10. Inserir em **B6** a fórmula “=0,0857\*Q1.^2-0,00134\*Q2.^2”.
11. Inserir em **B7** a fórmula “=0,00134\*Q2.^2-2,74\*Q3.^2”.

Agora, deve-se calcular o Jacobiano:

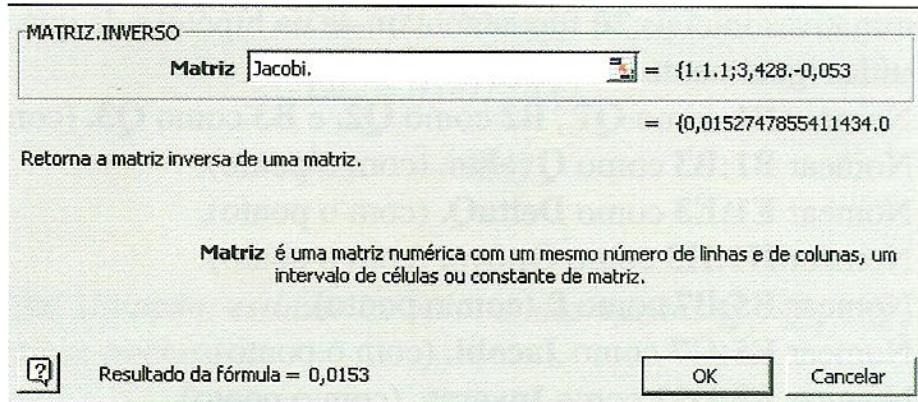
$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,1714Q_1 & -0,00268Q_2 & 0 \\ 0 & 0,00268Q_2 & -5,48Q_3 \end{vmatrix}^{-1}$$

12. Preencher a faixa **E5:G7** com as fórmulas:

	D	E	F	G	H
5		1	1	1	
6	$J_I :$	=0,1714*Q1.	=-0,00268*Q2.	0	
7		0	=0,00268*Q2.	=-5,48*Q3.	
8					

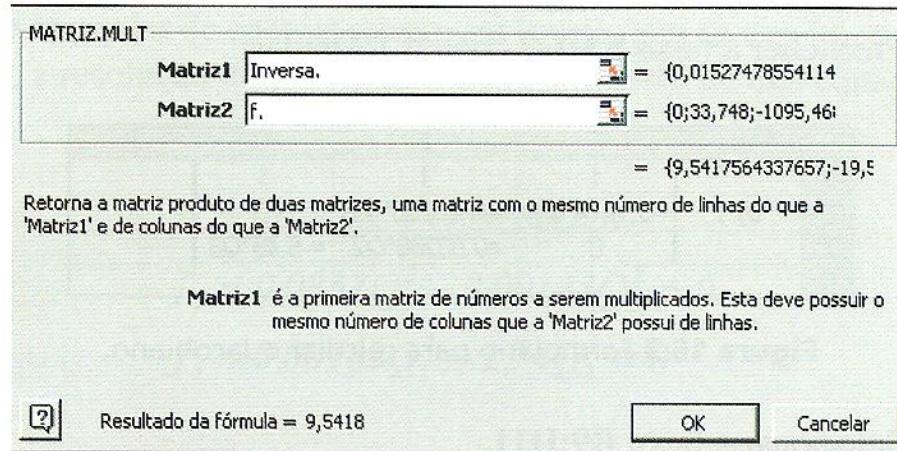
**Figura 16.3** Formulário para calcular o Jacobiano.

13. Selecionar a faixa **B9:D11**.
14. Selecionar o menu **Inserir > Função > Categoria: Matemática e Trigonométrica.**
15. Selecionar **MATRIZ.INVERSO.**
16. Clicar em **OK** e preencher o diálogo, como mostra a Figura 16.4:



**Figura 16.4** Diálogo para inversão do Jacobiano.

17. NÃO CLICAR NO BOTÃO OK ⇒ PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.
18. Selecionar E1:E3 e o menu Inserir > Função.
19. Selecionar o menu Inserir > Função > Categoria: Matemática e Trigonométrica.
20. Selecionar MATRIZ.MULT.
21. Clicar em OK e preencher o diálogo, como mostra a Figura 16.5:



**Figura 16.5** Produto matricial entre o vetor solução e o inverso do Jacobiano.

22. NÃO CLICAR NO BOTÃO OK ⇒ PRESSIONAR CTRL + SHIFT + ENTER.
23. Em H1:H3, introduzir a fórmula “=Qvelho.-DeltaQ.”.

Nesse momento, faz-se necessária uma pausa. É importante que o leitor perceba que a relação acabou de ser montada:

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}(x_i) \cdot f(x_i)$$

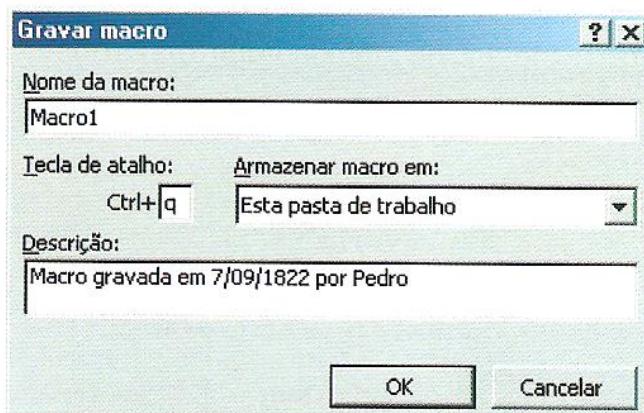
em que  $J^{-1}(x_i)$  é a matriz inversa do Jacobiano de  $f(x_i)$ .

### Gravando macros

Nas células **B1:B3**, tem-se a primeira versão ( $i = 1$ ) dos valores do vetor  $x$  (as vazões  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ ) e, nas células **H1:H3**, a segunda versão. Esta é, aqui, a primeira iteração. Bastaria “transferir” os valores de  $x_{i+1}$  para  $x_i$  (na prática, da faixa **H1:H3** para **B1:B3**) e repetir o procedimento até a aproximação ser considerada razoável. Existe, no entanto, uma forma mais simples de realizar tal processo iterativo: uma programação simples no VBA (*Visual Basic for Applications*).

Agora o leitor poderá estar se perguntando sobre como fazer isso. Talvez não conheça a linguagem *Visual Basic* ou, eventualmente, não goste de programar. Não há problemas, pois o Excel possui um gravador de macros que faz todo o serviço. O termo *macros* surgiu com a característica, introduzida na versão 7 do Excel, de “gravar” uma determinada seqüência de operações com o teclado e com o *mouse*, embora atualmente ela vá muito além disso. Pode-se dizer que o procedimento seguinte deve ser executado rigorosamente como descrito, a fim de evitar dissabores, como perder tudo ou “travar” o micro:

24. Selecionar o menu **Ferramentas > Macros > Gravar nova macro**.
25. Na caixa de diálogo, colocar a letra **q** na caixa da **Tecla de Atalho**:



**Figura 16.6** Diálogo para gravação de macro.

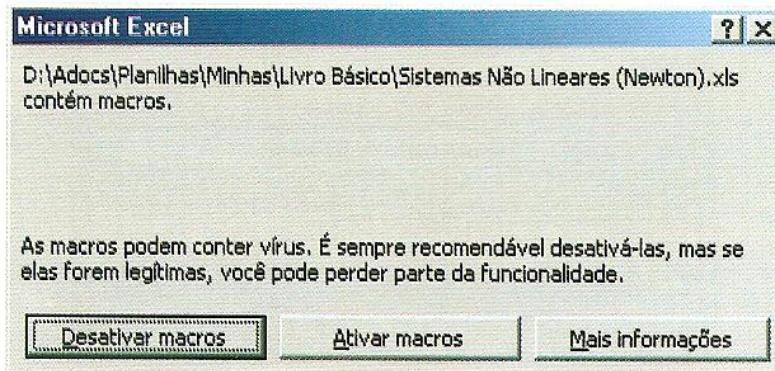
26. Clicar em **OK**.
27. Selecionar **H1:H3**.
28. Selecionar o menu **Editar > Copiar**.
29. Selecionar **B1:B3**.
30. Selecionar o menu **Editar > Colar Especial** (não tecle **CTRL + V**).
31. Selecionar a opção **Valores** e clicar no botão **OK**.
32. Teclar **Esc**.
33. Selecionar o menu **Ferramentas > Macros > Parar gravação**.

A “programação” acabou. Se o leitor teclar ALT + F11 e “xeretar” um pouco, descobrirá um código como este:

```
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro gravada em 7/09/1822 por Pedro
'
' Atalho do teclado: Ctrl+q
'

    Range("H1:H3").Select
    Selection.Copy
    Range("B1:B3").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:=_
        False, Transpose:=False
    Application.CutCopyMode = False
End Sub
```

Essa é a primeira macro. Como usá-la? Basta voltar para a planilha e, mantendo a tecla **CTRL** pressionada, ir teclando **q**. Será possível ver o vetor **f**, ir convergindo para **0**. Recomenda-se que o leitor preencha novamente as células **B1:B3** com o valor **20**, salve a planilha e feche-a. Basta abri-la novamente e teclar **CTRL + q**.<sup>8</sup> Ao fazê-lo, o leitor verificará o surgimento de um diálogo de segurança:



**Figura 16.7** Diálogo de segurança.

Essa é uma segurança para evitar vírus de macro. No caso aqui tratado, o leitor pode clicar no botão **Ativar macros** sem maiores preocupações. Para o proposto, foram pressionadas sete vezes as teclas **CTRL + q**, e a planilha convergiu para  $Q_1 = 6,54 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_2 = 52,3 \text{ m}^3/\text{h}$  e  $Q_3 = 1,16 \text{ m}^3/\text{h}$ .

<sup>8</sup> A letra **q** foi escolhida porque não existe nada importante associado a essa combinação. Existem, no entanto, diversas outras formas para executar macros.

# Integração numérica

## *Integrais simples*

Se houver uma função  $f(x)$  integrável em um domínio  $[a,b]$ , a integral  $\int_a^b f(x)dx$  pode ser calculada numericamente. O método de Simpson é um dos mais comuns. Na verdade, possui duas versões, mas aqui será abordada apenas aquela em que o polinômio interpolador é de 2º grau.<sup>9</sup>

Se a função  $f(x)$  for apresentada como uma tabela de pontos  $(x,y)$  contendo  $n$  pontos, em que os diversos  $x_i$  são igualmente espaçados ( $x_{i+1} - x_i = h$ ), a regra de Simpson fornece a seguinte relação:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left( f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-2/2} f^{ímpar}(x_i) + 2 \sum_{i=0}^{n-2/2} f^{par}(x_i) \right)$$

Fica evidente o fato de que quanto menor o valor de  $h$  mais precisa é a aproximação ao resultado exato, aumentando, no entanto, o esforço computacional em termos de uso de memória e aumento no tempo de processamento.

## *Aplicação – Integral de função logarítmica*

Calcular  $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)}$

### *Resolução*

Sabe-se que a integral tem solução analítica  $I = \ln(2) = 0,69315$ . No entanto, a idéia aqui é utilizar o método de Simpson. Será adotado  $h = 0,1$  e será possível verificar se essa aproximação é suficiente. Na prática usual, em que não se conhece a solução exata, a alternativa é tentar diversos valores de  $h$ . Quando dois valores consecutivos tiverem resultados com valores próximos, pode-se considerar que o método atingiu boa precisão.

---

<sup>9</sup> Também conhecida como “regra 1/3”.

De qualquer forma, não existe um método absoluto. Métodos que convergem mais rapidamente podem ser bem mais difíceis de serem implementados. De qualquer forma, o método de Simpson permite larga gama de aplicações. A sugestão é que o leitor tente implementar os métodos de Romberg e da Quadratura de Gauss.

1. Construir a planilha:

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>h</b>	0,1					
2							
3	<b>i</b>	<b>x</b>	<b>y<sub>0</sub></b>	<b>y<sub>2i-1</sub></b>	<b>y<sub>2i</sub></b>		
4	0	0					
5	1	0,1					
6	2	0,2					
7	3	0,3					
8	4	0,4					
9	5	0,5					<b>I =</b>
10	6	0,6					
11	7	0,7					
12	8	0,8					
13	9	0,9	<b>y<sub>n</sub></b>				
14	10	1					
15			<b>Σ =</b>				
16							

**Figura 17.1** Planilha para cálculo da integral simples.

2. Nomear **B1** como **h**.
3. Nomear **B4:B14** como **x**.
4. Nomear **C4** como **y0**.
5. Nomear **C14** como **yn**.
6. Nomear **D4:D14** como **yímpar**.
7. Nomear **D4:D14** como **ypar**.
8. Nomear **D15** como **sigma1**.
9. Nomear **D14** como **sigma2**.
10. Introduzir a fórmula “=1/(1+x.)” nas células claras da faixa **C4:E14**.
11. Introduzir a fórmula “=SOMA(yímpar)” em **D15**.
12. Introduzir a fórmula “=SOMA(D4:D14)” em **E15**.
13. Introduzir a fórmula “=h./3\*(y0.+yn.+4\*sigma1.+2\*sigma2.)” em **G9**.

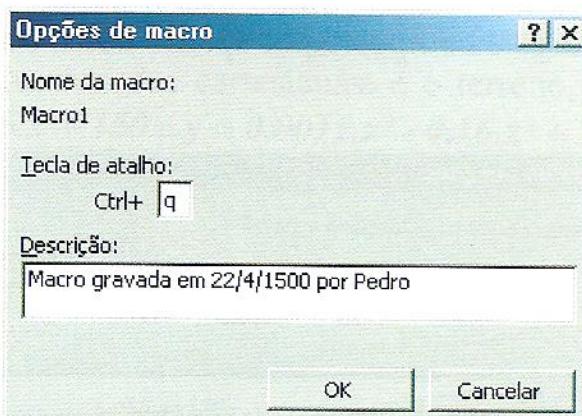
É bastante simples, não? Até aqui, a intenção é que o leitor tenha percebido a relativa simplicidade do uso do Excel para cálculos complexos. A seguir, será mostrado o quanto essa “simplicidade” pode ser ampliada com o uso do VBA.

### Simplificando a entrada de dados com o VBA

A entrada de dados pode ficar bastante “aborrecida” se a fórmula tiver de ser introduzida em dezenas ou centenas de células. Basta adotar  $h = 0,01$  e haverá bastante trabalho. Imagine ainda que, em vez de uma, a intenção fosse calcular várias funções: seria preciso apagar a primeira para depois digitar a segunda, o que daria muito trabalho. É nesse momento que o VBA entra em ação. Cria-se, então, uma rotina para escolher a fórmula da função a ser integrada, a qual será posta em todas as células de uma única vez.

Com o conhecimento adquirido neste livro, o leitor não estará capacitado a programar em VBA, mas entenderá muito bem o que a listagem do programa faz. Antes, porém, de iniciar, é preciso aprender a selecionar e nomear células não-contíguas. Com a tecla **CTRL** pressionada, o leitor clicará em cada uma das células claras da faixa **C4:D14**. Ao final, na Caixa de Nomes, deverá aparecer **E2**. Escreve-se, então, **Função**. (com o ponto). A seguir, o programa:

1. Selecionar o menu **Ferramentas > Macro > Gravar nova macro**.
2. Preencher o diálogo, como mostra a Figura 17.2:



**Figura 17.2** Diálogo do gravador de macros.

3. Clicar em **OK** e selecionar **Ferramentas > Macro > Parar gravação**.
4. Pressionar **ALT + F11**. Bem-vindo ao editor do VBA.
5. Digitar o seguinte código:

```

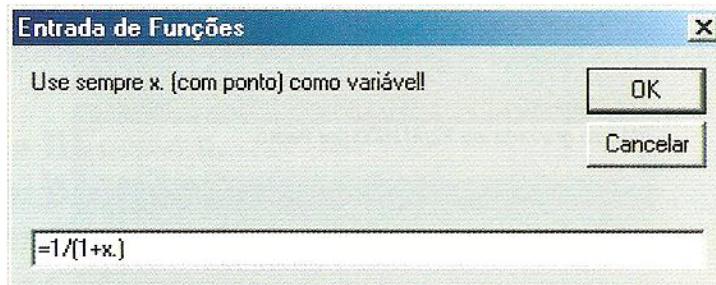
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Macro gravada em 22/4/1500 por Pedro
'
' Atalho do teclado: Ctrl+q
'

A$ = "Use sempre x. (com ponto) como variável!"
B$ = "Entrada de Funções"
Range("Função.").FormulaLocal = InputBox(A$, B$, "=1/(1+x.)")
End Sub

```

### 6. Pressionar Alt + q.

Logo, será mostrado como funciona o programa. Pressione **CTRL + q**, e surgirá um diálogo como o da Figura 17.3. É o objeto **InputBox** da listagem. Se o leitor clicar no botão **OK**, a função  $f(x) = (1 + x)^{-1}$  será introduzida em todas as células, e a integral será calculada. Se for a intenção, podem ser escritas outras funções, tais como  $=x.*ln(x. + 1)$ ,  $=sen(x.)$  etc.<sup>10</sup> Bastante simples, não? E o código é composto por apenas cinco linhas.



**Figura 17.3** Caixa de introdução de funções.

### Integrais duplas

Integrais duplas podem ser interpretadas pela seguinte relação:

$$I = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

A técnica para utilizar o método de Simpson no cálculo de integrais múltiplas consiste nas seguintes etapas:

<sup>10</sup> A fórmula deve ser introduzida sempre com o sinal de igual e com a variável x. (com o ponto).

- Discretização do espaço  $x$ : escolher um valor  $h_x = (b - a)/N$ , tal que  $x_{i+1} - x_i = h_x$ .
- Para cada  $x_i$ , discretizar o espaço  $y$ : escolher um valor  $h_y = [g_2(x) - g_1(x)]/M$ , tal que  $y_{j+1} - y_j = h_y$ .
- Aplicar o método de Simpson ao espaço  $y$ :

$$F(x_i) = \frac{h_y}{3} \left( f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m) + 4 \sum_{j=0}^{m-2/2} f^{\text{ímpar}}(x_i, y_j) + 2 \sum_{j=0}^{m-2/2} f^{\text{par}}(x_i, y_j) \right)$$

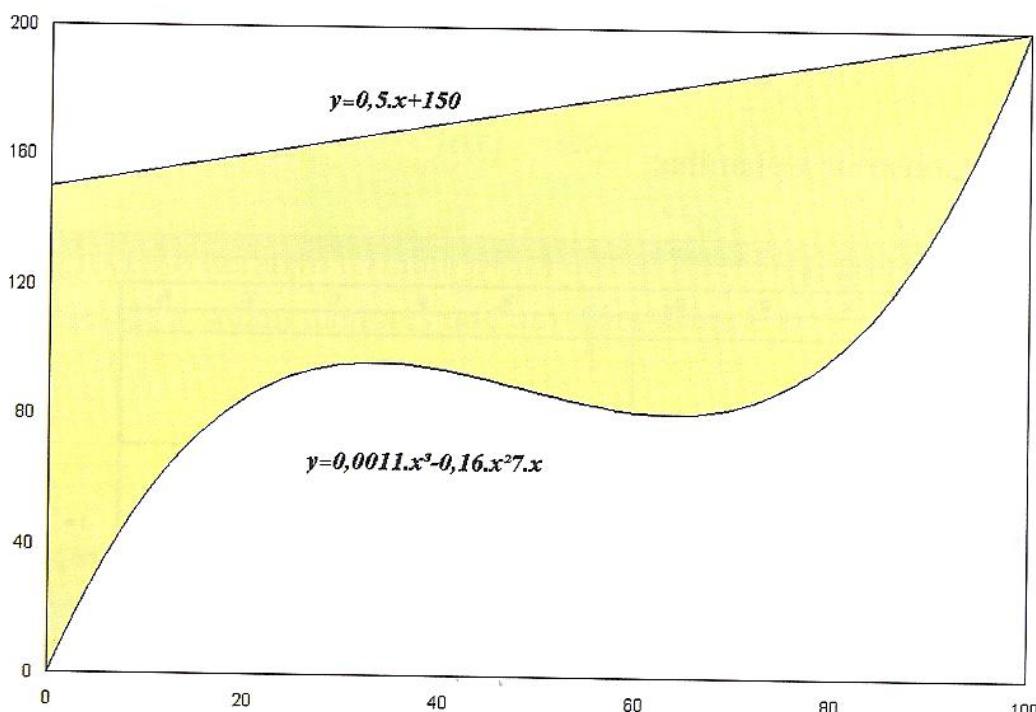
- Aplicar o método de Simpson ao espaço  $x$ :

$$I \cong \frac{h_x}{3} \left( F(x_0) + F(x_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-2/2} F^{\text{ímpar}}(x_i) + 2 \sum_{i=0}^{n-2/2} F^{\text{par}}(x_i) \right)$$

### Aplicação – Medição de terreno irregular

Uma empresa pretende adquirir, para suas futuras instalações, um lote com formato irregular, como mostra a Figura 17.4 (escala em m). A planta está dimensionada em coordenadas cartesianas, e o terreno pode ser delimitado pelas funções  $y = 0,5x + 150$  e  $y = 0,0011x^3 - 0,16x^2 + 7x$ .

*Sabendo que o preço da terra na região é R\$ 15,00/m<sup>2</sup>, fazer uma avaliação do lote.*



**Figura 17.4** Planta de terreno em coordenadas cartesianas.

### Resolução

A área do terreno pode ser representada pela seguinte integral dupla:

$$\int_0^{100} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

em que:

$$g_1(x) = 0,0011x^3 - 0,16x^2 + 7x$$

$$g_2(x) = 0,5x + 150$$

$$f(x, y) = 1$$

Agora, é apresentado o procedimento para utilizar a regra de Simpson (parabólica). Defini-se o espaçamento de  $x$  como  $h_x = (100 - 0)/4$ . Isso divide o espaço dessa variável em **quatro** intervalos, resultando em **cinco**  $x_i$ . Para cada  $x_i$  serão calculados **cinco**  $y_j$ , separados por **quatro** intervalos  $h_{yj} = (g_2(x_i) - g_1(x_i))/4$ . Obviamente, o valor 4 é arbitrário: quanto maior esse valor, maior será a precisão do cálculo e maior será, também, o esforço computacional.

$$f_i = \frac{h_y}{3} \left\{ f(x_i, y_0) + f(x_i, y_4) + 4[f(x_i, y_1) + f(x_i, y_3)] + 2.f(x_i, y_2) \right\}$$

e a integral,

$$I = \frac{h_x}{3} [f_1 + f_4 + 4.(f_1 + f_3) + 2.f_2]$$

1. Construir a planilha:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$h_x$	25								
2	$i$	$x$	$g_1$	$g_2$	$j$	$h_y$	$y$	$f$	$\Sigma$	$f_i$
3	0				0					
4	1				0					
5	1				1					
6	1				2					
7	1				3					
8	1				4					
9	2				0					
10	2				1					
11	2				2					
12	2				3					
13	2				4					
14	3				0					
15	3				1					
16	3				2					
17	3				3					
18	3				4					
19	4				4					

Figura 17.5 Esquema da planilha.

2. Selecionar A1:B1 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Selecionar A2:H19 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
4. Selecionar I3 e nomear como **S0..**
5. Selecionar I4:I8 e nomear como **S1..**
6. Selecionar I9:I13 e nomear como **S2..**
7. Selecionar I14:I18 e nomear como **S3..**
8. Selecionar I19 e nomear como **S4..**
9. Selecionar J3 e nomear como **f0..**
10. Selecionar J8 e nomear como **f1..**
11. Selecionar J13 e nomear como **f2..**
12. Selecionar J18 e nomear como **f3..**
13. Selecionar J19 e nomear como **f4..**
14. Introduzir a fórmula “=i.\*hx.” em **B3:B19**.
15. Introduzir a fórmula “=0,0011\*x.^3-0,16\*x.^2+7\*x.” em **C3:C19**.
16. Introduzir a fórmula “=0,5\*x.+150” em **D3:D19**.
17. Introduzir a fórmula “=(g2.-g1.)/4” em **F3:F19**.
18. Introduzir a fórmula “=g1.+j.\*hy.” em **G3:G19**.
19. Introduzir o valor 1 na faixa **H3:H19**. Como se trata de um cálculo de área, a função integrando é igual à unidade.
20. Introduzir a fórmula “=f.” em **I4, I9 e I14**.
21. Introduzir a fórmula “=4\*f.” em **I5, I7, I10, I12, I15 e E17**.
22. Introduzir a fórmula “=2\*f.” em **I6, I11, I16**.
23. Introduzir a fórmula “=hx./3\*(f0.+f4.+4\*(f1.+f3.)+2\*f2.)” em **L12**.

O lote tem **8.333,3 m<sup>2</sup>** e foi avaliado em **R\$ 124.999,50**.

O leitor deve ter percebido que não foram utilizados os valores de  $y$ . Isso ocorreu porque nesse caso particular  $f(x,y) = I$ . Se a intenção fosse, por exemplo, calcular  $\int_0^{100} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y dy dx$ , as células da coluna **H** teriam a fórmula “=y.”. É importante que o leitor faça sozinho essa aplicação. O resultado deve ser **I = 943603,5**. Porém, cuidado, esse resultado apresenta um desvio de **11,4%** em relação à solução exata **I = 1065476**. Quanto menores os espaçamentos de  $x$  e  $y$ , melhores os resultados. Com  $h_x = 10$ , o resultado será **I = 1027105**, ou seja, um desvio de **3,6%**.

## Capítulo 18

# Equações diferenciais lineares ordinárias

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  pode ser representada pela seguinte relação:

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0,$$

em que  $x$  é a variável independente<sup>11</sup> e  $y$ , a variável dependente. Essas equações podem ser apresentadas, na forma explícita, como:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)$$

A solução dessas equações é uma relação entre  $y$  e  $x$  que satisfaz as igualdades e as chamadas condições iniciais ou de contorno. Se a relação é expressa na forma de equação, diz-se que é uma solução analítica; caso contrário, é uma solução numérica.

### EDOs de 1<sup>a</sup> ordem

Como não é o objetivo do livro promover um curso aprofundado de métodos numéricos, ele se restringirá às equações diferenciais lineares ordinárias de primeira e segunda ordem, que abrangem boa parte dos problemas de Engenharia. Para iniciar, serão abordadas as EDOs de primeira ordem, que são equações do tipo:

$$y' = f(x, y)$$

<sup>11</sup> A principal característica das equações diferenciais ordinárias (EDOs) é a existência de uma única variável independente. Se houver mais de uma, chamam-se equações diferenciais parciais (EDPs).

O método de Runge-Kutta é um dos métodos numéricos mais eficientes para resolver EDOs para equações de 4<sup>a</sup> ordem. Ele consiste em estimar o “iésimo” primeiro valor das variáveis  $x$  e  $y$ , a partir do “iésimo” valor, de acordo com a fórmula a seguir:

$$y_{i+1} = y_i + (f_{1,i} + 2f_{2,i} + 2f_{3,i} + f_{4,i})/6$$

em que  $h = x_{i+1} - x_i$ , e as demais constantes são:

$$\begin{aligned}f_1^i &= h \cdot f(x_i, y_i) \\f_2^i &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + f_1^i/2) \\f_3^i &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + f_2^i/2) \\f_4^i &= h \cdot f(x_i + h, y_i + f_3^i)\end{aligned}$$

### **Aplicação – Equação diferencial linear ordinária de 1<sup>a</sup> ordem**

Estimar o valor de  $y(0,5)$ , obedecendo à relação  $y' = x - y^2$ , com  $y(0) = 2$ .

#### **Resolução**

1. Construir a planilha:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	h.	0,05								
2	x <sub>0</sub> .	0								
3	y <sub>0</sub> .	2								
4										
5	x <sub>i</sub> .									
6	y <sub>i</sub> .									
7	y <sub>i</sub> <sup>2</sup> .									
8	f <sub>1</sub> .									
9	f <sub>2</sub> .									
10	f <sub>3</sub> .									
11	f <sub>4</sub> .									
12	x <sub>j</sub> .									
13	y <sub>j</sub> .									
14										

**Figura 18.1** Planilha para a resolução do problema.

2. Selecionar A1:B3 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Selecionar A5:K13 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
4. Introduzir as fórmulas “=x0.” em B5 e “=y0.” em B6.
5. Introduzir a fórmula “=xi.-yi.^2” em B7.

6. Introduzir a fórmula “=h.\*(xi.-yi.^2)” em **B8**.
7. Introduzir a fórmula “=h.\*(xi.+h./2-(yi.+f1./2)^2)” em **B9**.
8. Introduzir a fórmula “=h.\*(xi.+h./2-(yi.+f2./2)^2)” em **B10**.
9. Introduzir a fórmula “=h.\*(xi.+h.-(yi.+f3.)^2)” em **B11**.
10. Introduzir a fórmula “=xi.+h.” em **B12**.
11. Introduzir a fórmula “=yi.+(f1.+2\*f2.+2\*f3.+f4.)/6” em **B13**.
12. Introduzir as fórmulas “=B12” em **C5** e “=B13” em **C6**.
13. Selecionar **C5:C6** e puxar pela alça de replicação até a coluna **K**.
14. Selecionar **B7:B13** e puxar pela alça de replicação até a coluna **K**.

O resultado encontrado deverá ser  $y(0,5) = 1,0878$ .

Agora, será apresentada uma situação em que a solução pode ser encontrada compondo Runge-Kutta com o *Visual Basic*.

### **Aplicação – Reator descontínuo com cinética de 1<sup>a</sup> ordem**

Em um tanque existe uma mistura contendo um componente A com concentração inicial de 2 mol/L. Nesse tanque, ocorre uma reação de degradação de primeira ordem com constante cinética  $k = 0,05 \text{ s}^{-1}$ .

*Qual o tempo necessário para que a concentração seja reduzida pela metade?*

#### **Resolução**

O primeiro aspecto do problema é que ele se reduz à simples equação do tipo  $y' = -k.y$ :

$$r = \frac{dC_A}{dt} = -k.C_A, \text{ com } C_A = C_{A0}, \text{ para } t = 0$$

A simplicidade tem objetivo didático, e será utilizada a solução analítica  $t = \ln(C_{A0}/C_A)/k$  para verificar a precisão do método numérico. Para usar o método de Runge-Kutta, será preciso admitir o “passo”  $h = 1\text{s}$  na variável tempo. A seguir, o procedimento é apresentado:

1. Construir a planilha:

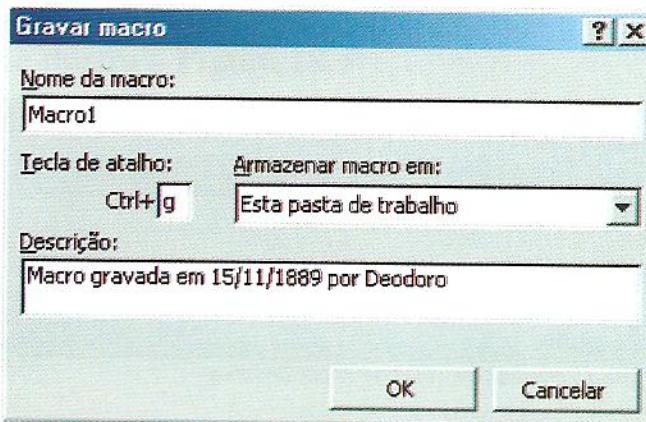
	A	B	C	D	E
1	$t_0.$	0	$t_i.$		$t_j.$
2	$C_{A0}.$	2	$C_{Aj}.$		$C_{Aj}.$
3	$k.$	0,05	$r.$		
4	$h.$	0,01	$r_1.$		
5	$C_{Af}.$	1	$r_2.$		
6			$r_3.$		
7			$r_4.$		
8					
9	<b>solução analítica:</b>				
10					
11	Teclar <b>CTRL+g</b> para iniciar				
12					
13	Teclar <b>CTRL+q</b> para executar				
14					

**Figura 18.2** Planilha para a resolução do problema.

2. Selecionar A1:B5 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Selecionar C1:D7 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
4. Selecionar E1:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
5. Introduzir a fórmula “=-k.\*CA.” em D3.
6. Introduzir a fórmula “=h.\*r.” em D4.
7. Introduzir a fórmula “=h.\*(-k.\*(CA.+r1./2))” em D5.
8. Introduzir a fórmula “=h.\*(-k.\*(CA.+r2./2))” em D6.
9. Introduzir a fórmula “=h.\*(-k.\*(CA.+r3.))” em D7.
10. Introduzir a fórmula “=ti.+h.” em F1.
11. Introduzir a fórmula “=CA.+(r1.+2\*r2.+2\*r3.+r4.)/6” em F2.

A essa altura, o leitor já deve ter notado a “estratégia” a ser seguida: calcula-se o “iésimo” *primeiro* passo (células com índice j na planilha), copia-se o conteúdo dessas células e colam-se apenas seus valores nas células i correspondentes ao *iésimo* passo. Como? Novamente utilizando o gravador de macros. Antes, porém, deve-se atribuir valores iniciais ao procedimento. Ele será ativado pela combinação de teclas **CTRL + g**:

12. Selecionar o menu **Ferramentas > Macros > Gravar nova macro**:



**Figura 18.3** Diálogo do gravador de macros.

13. Selecionar B1:B2 e, em seguida, o menu **Editar > Copiar**.
14. Selecionar D1 e, em seguida, o menu **Editar > Colar especial**.
15. Selecionar a opção **Valores** e pressionar **OK**.
16. Pressionar a tecla **ESC**.
17. Selecionar o menu **Ferramentas > Macros > Parar gravação**.

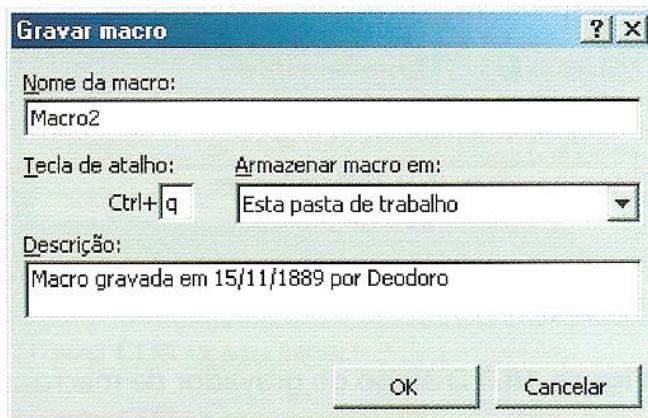
Isso deve ter resultado em uma listagem como esta:

```
Sub Macro1()
    ' Macro1 Macro
    ' Macro gravada em 15/11/1889 por Deodoro
    ' Atalho do teclado: Ctrl+g

    Range("B1:B2").Select
    Selection.Copy
    Range("D1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:=_
        False, Transpose:=False
    Application.CutCopyMode = False
End Sub
```

A Macro1 é responsável por “zerar” o programa. É preciso, agora, uma macro que faça o “copiar–colar especial”. Ela é ativada com o atalho **CTRL + q**. A seguir, apresenta-se o procedimento:

18. Selecionar o menu Ferramentas > Macros > Gravar nova macro:



**Figura 18.4** Diálogo do gravador de macros.

19. Selecionar **F1:F2** e, em seguida, o menu **Editar > Copiar**.
20. Selecionar **D1** e, em seguida, o menu **Editar > Colar especial**.
21. Selecionar a opção **Valores** e pressionar **OK**.
22. Pressionar a tecla **ESC**.
23. Selecionar o menu **Ferramentas > Macros > Parar gravação**.

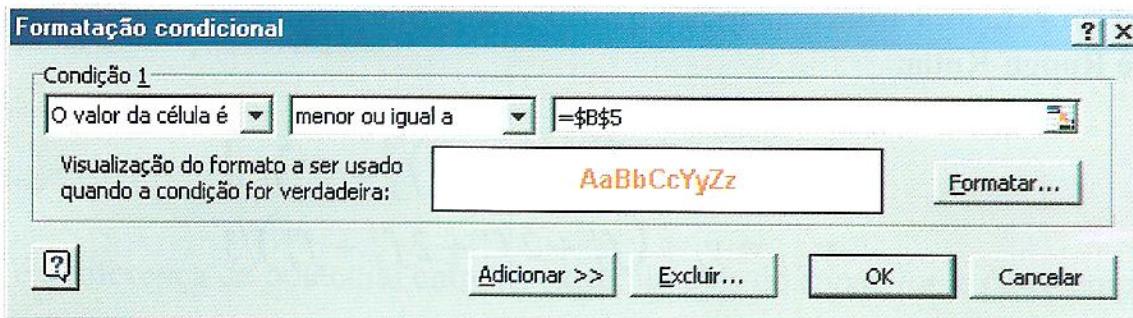
Pressionando **ALT + F11**, o resultado deve ser uma listagem como esta:

```
Sub Macro2()
'
' Macro2 Macro
' Macro gravada em 15/11/1889 por Deodoro
'
' Atalho do teclado: Ctrl+q
'
| Range("F1:F2").Select
| Selection.Copy
| Range("D1").Select
| Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:=_
|   False, Transpose:=False
| Application.CutCopyMode = False
End Sub
```

O leitor pode, agora, experimentar o “programa”. Basta pressionar **CTRL + g** (uma vez) e, na seqüência, **CTRL + q**, tantas vezes quantas forem necessárias. Este procedimento tem o inconveniente de poder “passar” o resultado desejado. É apresentado, então, um artifício bastante interessante que serve como alerta. Se, assim que o resultado desejado ( $C_{Aj} = 1$ , para este caso) for atingido, ou ultrapassado, as fontes da célula mudarem de cor, o usuário será alertado do resultado final. Para isso, o Excel fornece a ferramenta formatação condicional, apresentada no Capítulo 7:

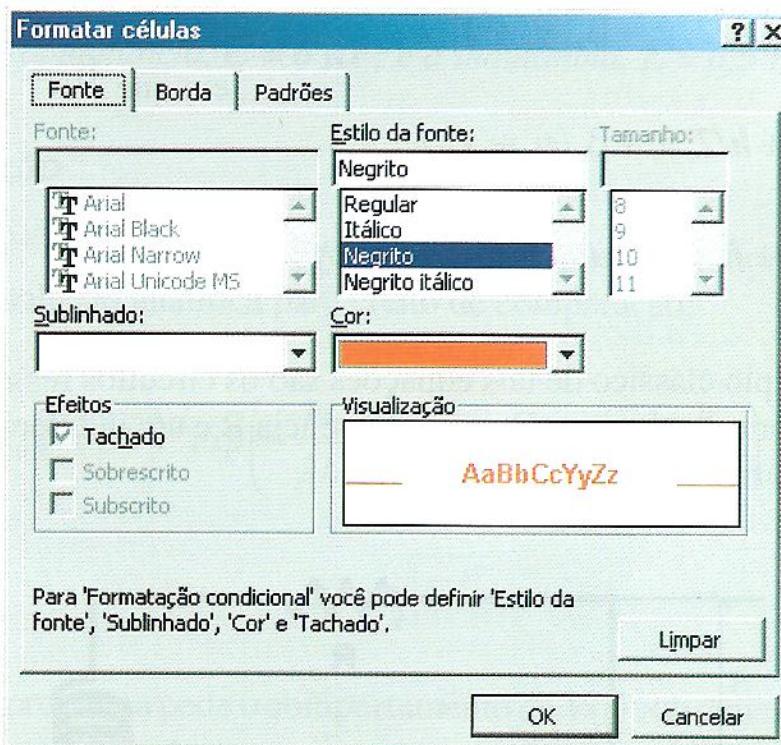
24. Selecionar **F2**.

25. Selecionar o menu **Formatar > Formatação condicional** e preencher conforme ilustra a Figura 18.5:



**Figura 18.5** Diálogo da formatação condicional.

26. Clicar no botão **Formatar...** e preencher conforme a Figura 18.6:



**Figura 18.6** Formatação condicional.

27. Clicar **OK** duas vezes.

Se o programa for colocado para “rodar”, a fonte mudará para negrito vermelho, por exemplo. Com  $h = 0,1$ , resultou  $t = 13,9$  s e, com  $h = 0,01$ ,  $t = 13,87$  s.

### Equações de 2<sup>a</sup> ordem

Para equações de 2<sup>a</sup> ordem, um dos métodos mais empregados é o de Runge-Kutta-Nyström, também de ordem quatro; isto é, a série de Taylor, da qual foi gerado, é truncada após o quarto termo. Sua formulação é semelhante à de Runge-Kutta:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ y'_i + (f_1^i + f_2^i + f_3^i)/3 \right]$$

$$y'_{i+1} = y'_i + (f_1^i + 2f_2^i + 2f_3^i + f_4^i)/3$$

em que  $h = x_{i+1} - x_i$  e as demais constantes são:

$$f_1^i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i, y'_i)$$

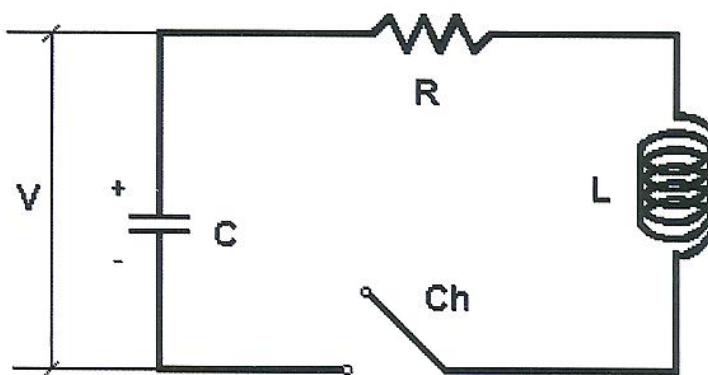
$$f_2^i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i + h/2, y_i + \beta_i, y'_i + f_1^i)$$

$$f_3^i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i + h/2, y_i + \beta_i, y'_i + f_2^i)$$

$$f_4^i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i + h, y_i + h \cdot (y'_i + f_3^i), y'_i + 2 \cdot f_3^i)$$

, em que  $\beta_i = \frac{h}{2} \left( y'_i + \frac{f_1^i}{2} \right)$

Um exemplo clássico de tais equações são os circuitos ressonantes RLC, constituídos por um capacitor **C**, uma resistência **R** e um indutor **L**, associados em série, conforme mostra a Figura 18.7:



**Figura 18.7** Circuito RLC.

Inicialmente, o capacitor **C** está carregado com um potencial  $V_0$ , e a chave **Ch** está aberta. Quando ela é fechada, o capacitor começa a descarregar, conforme a relação:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = 0$$

com as condições iniciais:

$$V(0) = 0 \text{ e } \frac{dV}{dt}(0) = 0$$

$V$  é a diferença de potencial entre as extremidades do capacitor, e  $t$  é o tempo.

### Aplicação – Circuito RLC

Mostrar o comportamento da diferença de potencial  $V(t)$  em função do tempo para um circuito RLC como o da Figura 18.1, em que a diferença de potencial no instante em que a chave Ch é fechada é  $V_0 = 10\text{ V}$ ; a resistência,  $R = 60\text{ }\Omega$ ; a capacidade,  $C = 6\text{ }\mu\text{F}$ ; e a indutância,  $L = 0,5\text{ H}$ .

### Resolução

Como  $\bar{\alpha}^2 = [(LC)^{-1} - 0,25(R/L)^2] > 0$ , o sistema é amortecido, e pode-se calcular a solução analítica para efeito de comparação:

$$V(t) = V_0 (\alpha \sqrt{CL})^{-1} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \cos\left[\left(\alpha t - \arctan\left(\frac{R}{2\alpha L}\right)\right)\right], \text{ em que}$$

$$\alpha = \sqrt{|\bar{\alpha}^2|}$$

Como o problema pede o comportamento de  $V(t) \times t$ , o melhor é construir um gráfico. A seguir, eis o procedimento:

1. Construir a planilha:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	R.	60	$V_0.$	10							
2	L.	0,5	$Vl_0.$	0	$\alpha.$						
3	C.	6E-06	h.	0,001							
4											
5	$t_i.$	$V_i.$	$Vli.$	$f_1.$	$f_2.$	$f_3.$	$f_4.$	$t_j.$	$V_j.$	$Vlj.$	$V_{teórico}$
6	0,00000		0								

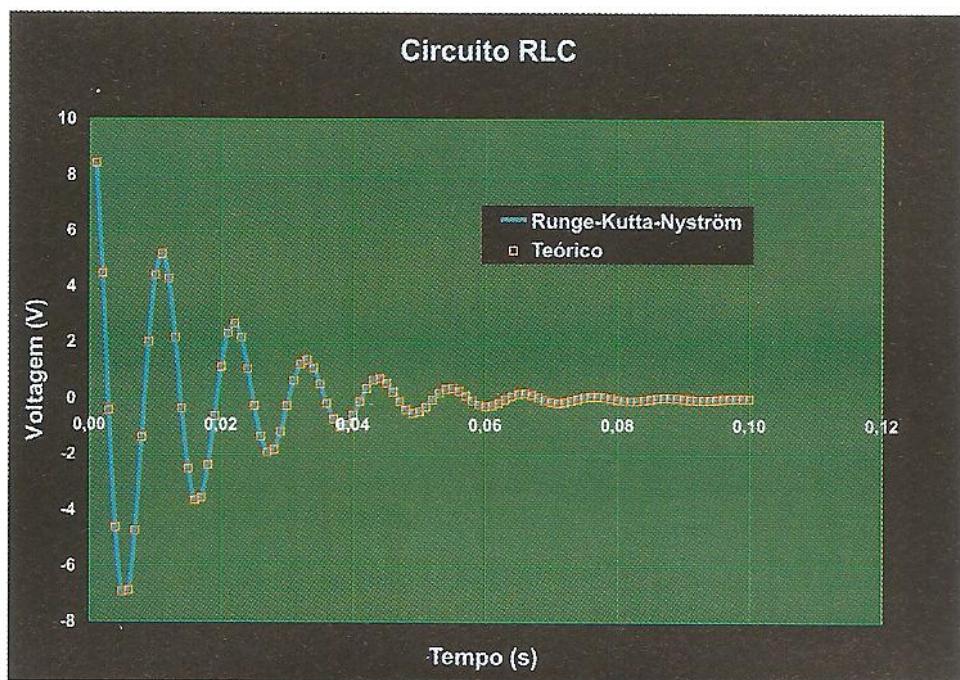
Figura 18.8 Planilha para a resolução do problema.

2. Selecionar A1:B3 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
3. Selecionar C1:D3 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
4. Selecionar E2:F2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
5. Selecionar A5:K106 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**. Aqui, é bom o leitor usar as associações de teclas **CTRL**, **SHIFT** e as flechas  $\uparrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\downarrow$  e  $\leftarrow$ .
6. Introduzir a fórmula " $=RAIZ(ABS(1/L./C.-R.^2/4/L.^2))$ " em F2.
7. Introduzir a fórmula " $=V0.$ " em B6.
8. Introduzir a fórmula " $=-h./2*(R./L.*Vli.+Vi./L./C.)$ " em D6.
9. Introduzir a fórmula " $=-h./2*(R./L.* (Vli.+f1.)+(Vi.+h./2*(Vli.+f1./2))/L./C.)$ " em E6.
10. Introduzir a fórmula " $=-h./2*(R./L.* (Vli.+f2.)+(Vi.+h./2*(Vli.+f1./2))/L./C.)$ " em F6.
11. Introduzir a fórmula " $=-h./2*(R./L.* (Vli.+2*f3.)+(Vi.+h.* (Vli.+f3.))/L./C.)$ " em G6.
12. Introduzir a fórmula " $=ti.+h.$ " em H6.
13. Introduzir a fórmula " $=Vi.+h.* (Vli.+ (f1.+f2.+f3.)/3)$ " em I6.
14. Introduzir a fórmula " $=Vli.+ (f1.+2*f2.+2*f3.+f4.)/3$ " em J6.
15. Introduzir a fórmula " $=V0.*EXP(-R.*ti./2/L.)*$   
 $*COS(a.*ti.-ATAN(R./2/L./a.))/a./RAIZ(C.*L.)$ " em K6.
16. Introduzir a fórmula " $=H6$ " em A7.
17. Introduzir a fórmula " $=I6$ " em B7.
18. Introduzir a fórmula " $=J6$ " em C7.
19. Selecionar as células A7:C7 e puxar pela alça de replicação até a linha 107.
20. Selecionar as células D6:K6 e puxar pela alça de replicação até a linha 106.

Os cálculos terminaram. Resta construir o gráfico:

21. Selecionar A6:B107.
22. Selecionar o menu Inserir > Gráfico.

Deverá resultar algo similar à Figura 18.9. Percebe-se claramente o amortecimento das oscilações. Cabe dizer, aqui, que a metodologia adotada de “puxar” as células pode ser substituída por algumas linhas de *Visual Basic*, de forma similar àquela usada em itens anteriores.



**Figura 18.9** Comportamento do potencial em função do tempo.

## Equações diferenciais parciais

Equações diferenciais parciais (EDPs) são relações do tipo:

$$\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial y}{\partial x_i} + C_i y + D_i = 0$$

em que  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  são constantes;  $y$  é a variável dependente; e  $x_i$  são as variáveis independentes. Existem três formatos importantes de EDPs:

1. Se todos os  $A_i$  são diferentes de zero e têm o mesmo sinal, a EDP é denominada elíptica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

2. Se todos os  $A_i$  são diferentes de zero e têm sinais diferentes, a EDP é denominada hiperbólica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

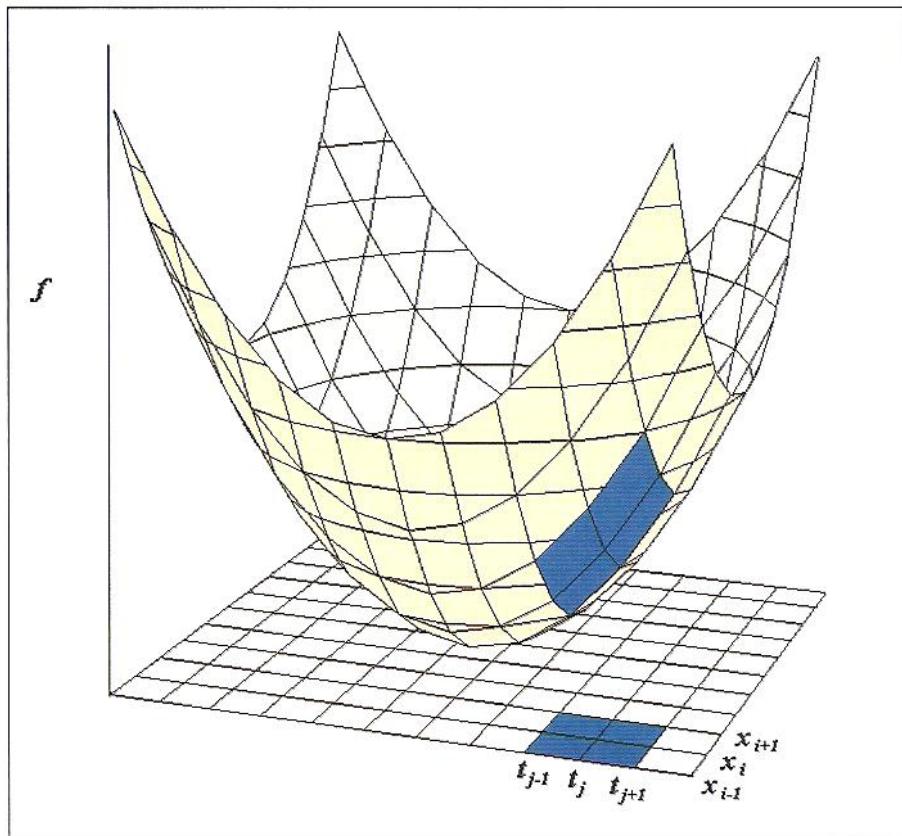
3. Se apenas um  $A_i$  é nulo, os demais têm o mesmo sinal, e o coeficiente  $B_i$  correspondente não é nulo, então a EDP é denominada parabólica:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Este livro abordará as EDPs parabólicas, sem perda de generalidade. Para a resolução numérica de equações diferenciais parciais, um dos métodos mais empregados é o de diferenças finitas, que consiste em expandir as derivadas parciais em séries de Taylor truncadas. O leitor deve procurar um bom livro de métodos numéricos para ver o detalhamento dessa expansão. Aqui, será abordada apenas a aplicação do método.

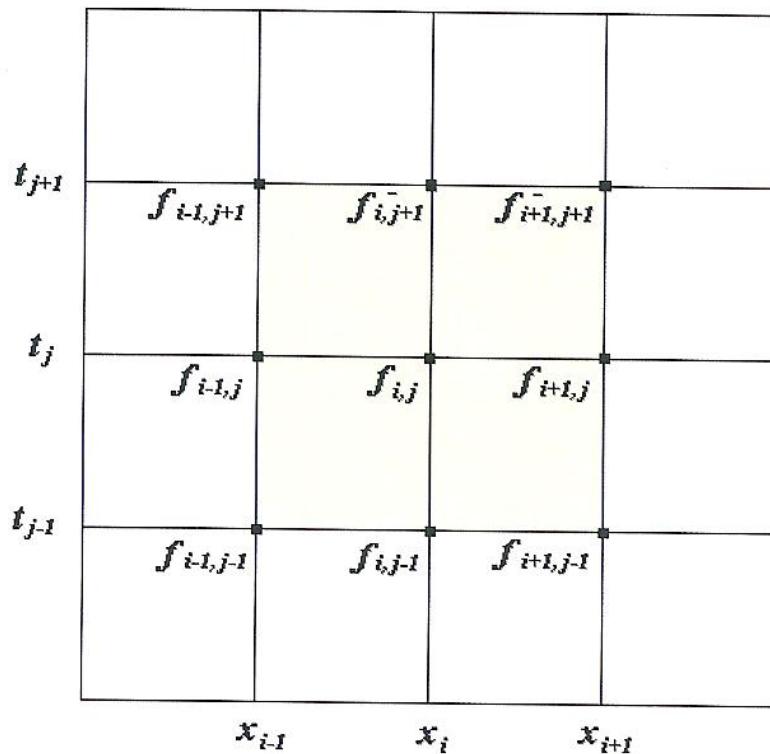
O resultado da expansão é a discretização das variáveis. Considerase, aqui, como exemplo genérico, uma função  $f(x,t)$ , similar à mostrada na Figura 19.1. Se forem considerados três pontos, igualmente espaçados no eixo

$t$ , e outros três no eixo  $x$ , isso resultará em uma região do espaço  $f - x - t$ , mostrada em cor escura na superfície da função. Essa região se projeta no plano  $x - t$  também em cor escura, ou seja, cada par  $(x_p, t_j)$  corresponde a um valor  $f_{i,j}$  da função. Da mesma forma, cada par  $(x_{i+1}, t_j)$  corresponde a um valor  $f_{i+1,j}$ ; cada par  $(x_p, t_{j-1})$  corresponde a um valor  $f_{i,j-1}$  na função etc.



**Figura 19.1** Discretização da função no espaço e no plano.

De forma geral, a discretização pode ser representada em duas dimensões, como mostra a Figura 19.2:



**Figura 19.2** Discretização mostrada no plano  $x - t$ .

Para entender o método das diferenças finitas, suponha que a função  $f(x,t)$  obedeça à relação:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Por diferenças finitas, as derivadas primeiras podem ser estimadas de três maneiras diferentes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t}, \text{ derivada adiante;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t}, \text{ derivada para trás;}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta t}, \text{ derivada central.}$$

Por sua vez, a derivada segunda é aproximada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Os “passos”  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  e  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  são escolhidos arbitrariamente, suficientemente pequenos para que as aproximações das diferenças finitas sejam adequadas: quanto menores os passos, mais precisas serão as aproximações e maior esforço computacional será demandado. Existem vários algoritmos de aplicação do método das diferenças finitas (explícito, implícito, Crank-Nicholson etc.). A seguir, um exemplo.

### **Aplicação – Aquecimento de uma placa plana**

Uma placa de borracha especial de **12,5 mm** de espessura, inicialmente a **70°C**, deve ser curada por imersão em um fluido a **292°C**, por **50** minutos, com o calor sendo aplicado simultaneamente em ambas as superfícies.

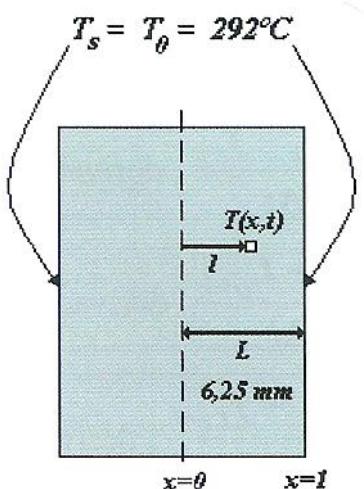
*Calcule o tempo necessário para que o centro da borracha atinja 290°C e mostre um gráfico com os perfis de temperatura em função do tempo. Admita que as temperaturas da superfície atinjam 292°C imediatamente. A difusividade térmica da borracha é  $7,0 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  (BENNETT & MYERS, 1978, p. 277).*

### **Resolução**

O sistema obedecerá à seguinte relação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial l^2}$$

em que  $\alpha$  é a difusividade térmica;  $T$ , a temperatura;  $t$ , o tempo; e  $l$ , a distância do ponto ao centro da placa.



**Figura 19.3** Tratamento térmico de placa de borracha.

Se a equação for multiplicada e dividida por  $L^2$ , em que  $L$  é a semi-espessura da placa, e for criada uma variável ( $x = l/L$ ), a equação torna-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Como a temperatura da placa de borracha, antes de iniciar o processo, é 70°C, tem-se a condição inicial:

$$T(x,0) = 70$$

E, como a temperatura da superfície assume 292°C imediatamente, tem-se a condição de contorno:

$$T(1,t) = 292$$

A equação aproximada por diferenças finitas torna-se:

Definindo,

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{L^2} \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Tem-se:

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{(L \cdot \Delta x)^2}$$

$$T_{i,j+1} = \lambda T_{i-1,j} + (1 - 2\lambda) T_{i,j} + \lambda T_{i+1,j}$$

Analizando essa relação, sabe-se que o procedimento de cálculo iterativo ocorre em duas dimensões: no tempo ( $j$ ) e no espaço ( $i$ ), em que os valores das variáveis nos tempos  $j$  são conhecidos. Então, o tempo  $j + 1$  é calculado por essa relação. Em uma planilha, o espaço poderia ser representado em colunas, e o tempo, em linhas. À medida que o tempo avança, uma nova linha de cálculos é introduzida.

O método explícito, utilizado aqui, só converge<sup>12</sup> se o valor de  $\lambda$  for positivo e menor ou igual a 0,5. Se for adotado  $\Delta x = 0,1$ , para atender o critério de  $\lambda \leq 0,5$ ,  $\Delta t \leq 2,79$  s. A seguir, o procedimento de cálculo:

---

<sup>12</sup> O porquê dessa condição foge ao escopo deste livro.

1. Construir a planilha:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	$\alpha$	7,00E-08	$m^2/s$									
3	$L$	0,00625	$m$									
4	$T_s$	292	$^{\circ}C$									
5	$T_0$	70	$^{\circ}C$									
6	$T_f$	290	$^{\circ}C$									
7												
8		0.0										
9		0,0										
10												
11												

**Figura 19.4** Planilha para a resolução do problema.

A idéia do formato da planilha é desenvolver os valores de  $x$  nas células B8:L8, correspondentes a  $i = 1, i = 2$  etc., até  $i = 10$ , que corresponde ao valor  $x = 1$ . O tempo evoluirá na coluna A, a partir da célula A9.

2. Selecionar a célula B2 e escrever **alfa**. na Caixa de Nomes.
3. Selecionar a célula F3 e escrever **lambda**. na Caixa de Nomes.
4. Selecionar as células A3:B6 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
5. Selecionar as células E4:F5 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.
6. Introduzir a fórmula “=alfa.\*Dt./(L.\*Dx.)^2” em F3.
7. Introduzir a fórmula “=B8+Dx.” em C8.
8. Puxar a célula C8 pela alça de replicação até a coluna L.
9. Introduzir a fórmula “=A9+Dt.” em A10.
10. Introduzir a fórmula “=T0.” em B9.
11. Puxar a célula B9 pela alça de replicação até a coluna K.

Por que até a coluna K? Porque a célula L9 deve atender tanto à condição inicial quanto à condição de contorno. Como na célula só cabe uma fórmula, optou-se pela condição de contorno. A diferença será imperceptível, e, no mundo real, essa dicotomia nem faz sentido.

12. Introduzir na célula L9 a fórmula “=Ts.”.
13. Puxar pela alça de replicação a célula L9 até L10.

Agora, aplicar a relação  $T_{i,j+1} = \lambda T_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)T_{i,j} + \lambda T_{i+1,j}$  nas células da linha 10.

14. Introduzir a fórmula “=lambda.\*J9+(1-2\*lambda.)\*K9+lambda.\*L9” na célula K10.
15. Puxar a célula K10 até C10, usando a alça de replicação.

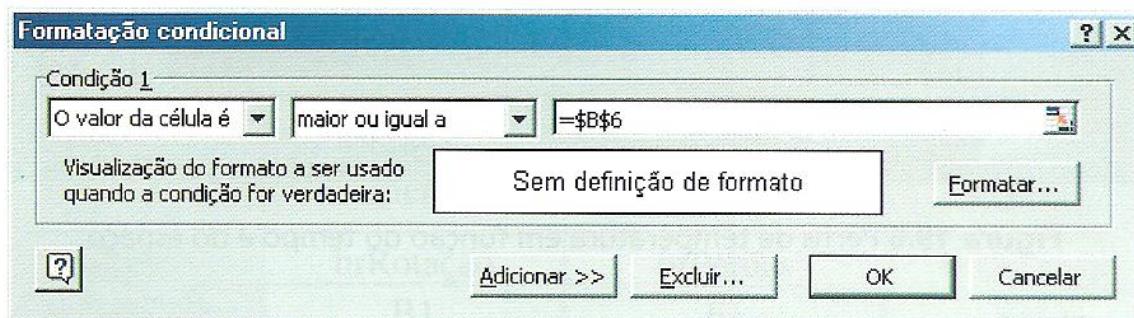
Por que até a coluna C, apenas? Porque a célula B10 corresponde ao centro da placa, em que  $i = 0$ , e não existe  $i = -1$ . Como resolver o problema? A realidade trabalha a nosso favor: se a placa de borracha é simétrica em relação ao centro, o ponto que corresponderia a  $i = -1$  tem temperatura exatamente igual à do ponto  $i = 1$ . Essa relação de simetria é bastante usada em métodos numéricos. Portanto:

16. Introduzir a fórmula “=2\*lambda.\*C9+(1-2\*lambda.)\*B9” em B10.

Resta, agora, apenas puxar pela alça de replicação o conjunto B10:L10. Mas até onde? Lembre-se da formatação condicional: assim que a temperatura na coluna B for maior ou igual a 290°C, o problema acaba.

17. Selecionar B10:L10.

18. Selecionar o menu **Formatar > Formatação condicional** e preencher o diálogo:



**Figura 19.5** Diálogo da Formatação condicional.

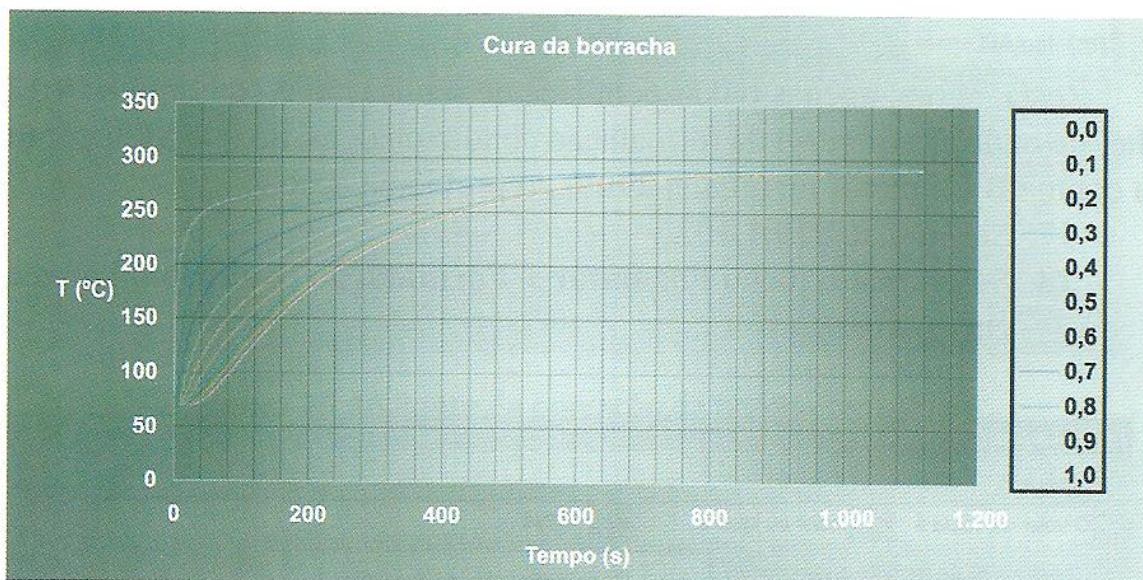
19. Clicar no botão **Formatar** e selecionar **Estilo da Fonte: Negrito e Cor: Vermelho**.

Agora sim: basta selecionar as células A10:L10 e puxá-las pela alça de replicação. Na linha 409, o sistema deve convergir. A resposta pode ser dada na célula J4, por meio da fórmula “=MÁXIMO(A9:A409)/60”, que resultará  $t = 18,6 \text{ min}$ .

O leitor deve estar se perguntando: “Será que puxar células é a melhor maneira de fazer cálculos iterativos no Excel?”. É óbvio que não. Este é um dos pontos em que o *Visual Basic (VBA)* faz a diferença. Já foi apresentado, aqui, com as equações diferenciais ordinárias, como proceder usando o gravador de macros, que está longe de ser a melhor maneira para quem domina o VBA. Aqui, pode-se fazer o mesmo, e o leitor está convidado a tentar. Mas nem tudo está perdido, pois, afinal, o enunciado pede o gráfico dos perfis de temperatura em função do tempo. Esta é a parte em que conhecer as teclas de atalho faz a diferença, e o leitor está convidado a fazer uma pesquisa sobre elas na Ajuda

do Excel.

20. Selecionar a célula A9.
21. Pressionar **CTRL + SHIFT + ↓**.
22. Pressionar **CTRL + SHIFT + →**.
23. Selecionar o menu **Ferramentas > Gráfico**. Selecionar o tipo **Dispersão**.



**Figura 19.6** Perfis de temperatura em função do tempo e do espaço.

Simples, não?

## Capítulo 20

# Estudos de caso

Neste capítulo, será exposta a relativa simplicidade com que alguns problemas complexos são abordados no uso de ferramentas disponíveis ao usuário do Excel. São exemplos resumidos, mas que, por meio das linguagens clássicas de programação, demandariam enorme tempo de desenvolvimento.

### Estatística (análise de regressão)

Embora a regressão linear seja uma das mais comuns, sua análise está longe de ser simples. E, apesar de o leitor já estar familiarizado com ela, será feita uma rápida revisão dos conceitos aqui utilizados. Quando há dois conjuntos de valores tabelados,  $X$  e  $Y$ , e uma equação do tipo  $\hat{Y} = a + b \cdot X$  gera valores  $\hat{Y}$  que estatisticamente explicam o comportamento de  $Y$  em função de  $X$ , diz-se que foi realizada uma regressão linear. Os valores de  $a$  e  $b$  caem nos intervalos de:

$$\begin{aligned} a + t(\alpha/2, N - 2) \times s(a) &> a > a - t(\alpha/2, N - 2) \times s(a) \\ b + t(\alpha/2, N - 2) \times s(b) &> b > b - t(\alpha/2, N - 2) \times s(b) \end{aligned}$$

em que  $s(a)$  e  $s(b)$  são as estimativas dos desvios padrão de  $a$  e  $b$ , e  $t(\alpha/2, N - 2)$  é o valor da estatística  $t$  de Student bicaudal, com confiança<sup>13</sup> de  $(1-\alpha) \times 100$  (em %), com  $N-2$  graus de liberdade, em que  $N$  é o número de elementos dos conjuntos  $X$  e  $Y$ . A segunda relação ( $a$  de  $b$ ) também indica se há correlação linear entre  $X$  e  $Y$ : isso ocorre quando o intervalo não contém o valor 0. Uma outra forma de verificar tal fato é utilizar a distribuição  $F$  de Fisher:

Se  $F_{\text{Regressão}} < F_{\text{Tabelado}} (\alpha, 1, N - 2)$ , existe correlação linear.

Não será detalhado, aqui, como calcular os valores das estatísticas  $t$  de Student ou  $F$  de Fisher para a regressão. O leitor poderá encontrá-las em bons livros de estatística. O interesse maior deste livro é mostrar como se utiliza o Excel para essa tarefa.

13 O nível de confiança mais usual é 95% e é o que será usado neste livro.

### **Aplicação – Previsão do custo de matéria-prima**

Uma empresa pensa em investir na produção de etileno a partir de etanol. No estudo de viabilidade do projeto, foi necessário fazer um estudo do custo da matéria-prima, com base no Quadro 20.1.

**Quadro 20.1** Evolução do preço do etanol.

Ano	Produção de etanol ( $\times 10^6 \text{ m}^3$ )	Preço pago aos produtores (US\$/m <sup>3</sup> )
Até 1978	2,673	952,41
1979	2,854	968,88
1980	3,676	422,33
1981	4,207	862,42
1982	5,818	827,09
1983	7,951	745,45
1984	9,201	733,04
1985	11,563	764,07
1986	9,983	581,23
1987	12,34	612,5
1988	11,523	532,54
1989	11,629	446,84
1990	11,518	406,13
1991	12,863	413,4
1992	11,766	428,53
1993	11,195	385,04
1994	12,512	384,33
1995	12,647	345,15

Fonte: Disponível em: <[www.trabalhoflama.kit.net](http://www.trabalhoflama.kit.net)>. Último acesso em: 12/2/2007.

Para futuras estimativas de custo, decidiu-se utilizar uma regressão linear entre o preço pago ao produtor em US\$/m<sup>3</sup> e a produção de etanol. Pergunta-se:

1. A regressão é válida?
2. Qual é o intervalo de confiança de 95% das previsões?

#### **Resolução**

Para executar e analisar regressões lineares, o usuário do Excel tem várias ferramentas disponíveis. Neste caso particular, será utilizada uma função

chamada PROJ.LIN, a qual é matricial e, portanto, deve ser introduzida com **CTRL + SHIFT + ENTER**, como já visto.

*Efetuando os cálculos da regressão linear:*

1. Construir a planilha da Figura 20.1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1					Tratamento dos dados			Análise de Regressão: $y = a + b \cdot x$		
2	Produção	Preço	Estimativa	$(X - Xm)^2$	Ymin	Ymáx	Coeficiente <b>b</b>			Coeficiente <b>a</b>
3							Erro padrão de <b>b</b>			Erro padrão de <b>a</b>
4							$R^2$			Desvio padrão
5							Estatística F			Graus de liberdade
6							Variação não explicada			Variação explicada
7							Teste t de Student			
8							N =			
9							Variância =			
10										
11							Valor mínimo de <b>b</b>			Valor mínimo de <b>a</b>
12							Valor máximo de <b>b</b>			Valor máximo de <b>a</b>
13							Teste F			
14										

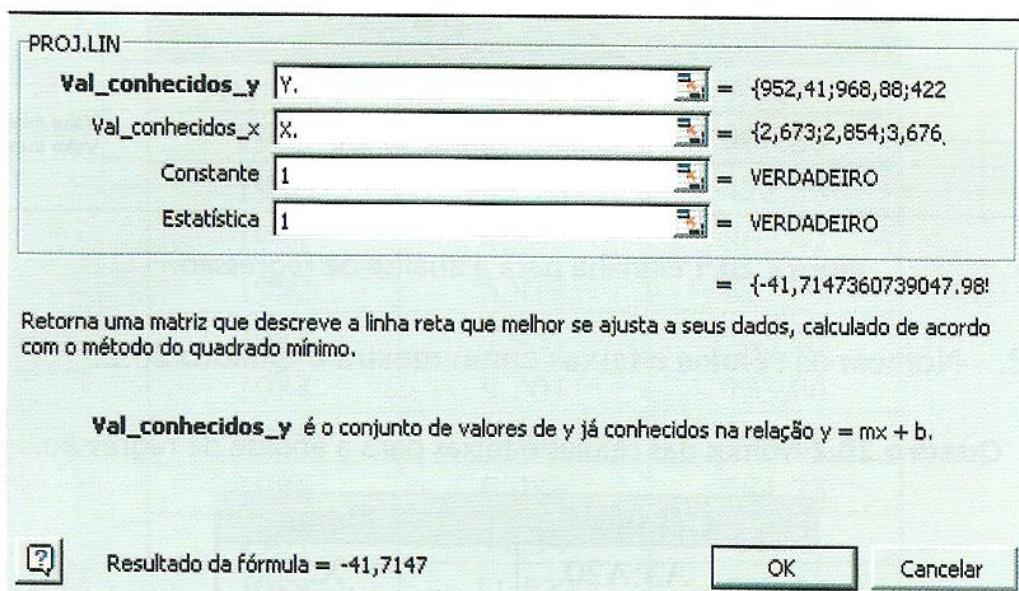
**Figura 20.1** Planilha para a análise de regressão.

2. Nomear as células e faixas como mostra o Quadro 20.2:

**Quadro 20.2** Nomes das células e faixas para a análise de regressão.

Células	Nome
A3:A20	X.
B3:B20	Y.
C3:C20	Yest.
D3:D20	desvioX.
A21	Xm.
D21	SDX.
H2	b.
H3	errob.
I2	a.
I3	erroa.
I4	sigma.
H5	F.
I5	gl.
H8	N.
H9	Sigma2.
H10	Ttab.
H14	Ftab.

3. Preencher as células A3:A20 com os valores da 2<sup>a</sup> coluna do Quadro 20.1.
4. Preencher as células B3:B20 com os valores da 3<sup>a</sup> coluna do Quadro 20.1.
5. Introduzir a fórmula “=MÉDIA(X.)” em A21.
6. Selecionar H2:I6 e, em seguida, o menu Inserir > Função.
7. Na categoria Estatística, selecionar PROJ.LIN.
8. Após clicar em OK, preencher o diálogo:



**Figura 20.2** Diálogo de PROJ.LIN.

9. Pressionar CTRL + SHIFT + ENTER.

Deve surgir um resultado como o da Figura 20.3.

	G	H	I	J
Análise de Regressão: $y = a + b \cdot x$				
2	Coeficiente b	-41,7147	985,15	Coeficiente a
3	Erro padrão de b	9,9307	98,205	Erro padrão de a
4	R <sup>2</sup>	0,52445	150,89	Desvio padrão
5	Estatística F	17,645	16	Graus de liberdade
6	Variação não explicada	401740	364287	Variação explicada

**Figura 20.3** Resultado de PROJ.LIN.

Como o leitor percebeu, os complexos cálculos da regressão já foram realizados. A maioria dos termos é explicada na própria planilha. R<sup>2</sup> representa o coeficiente de determinação, e a estatística F representa o valor F da regressão.

As variações explicada e não-explicada são, respectivamente,  $\Sigma(Y - Y_{média})^2$  e  $\Sigma(Y - Yest.)^2$ .

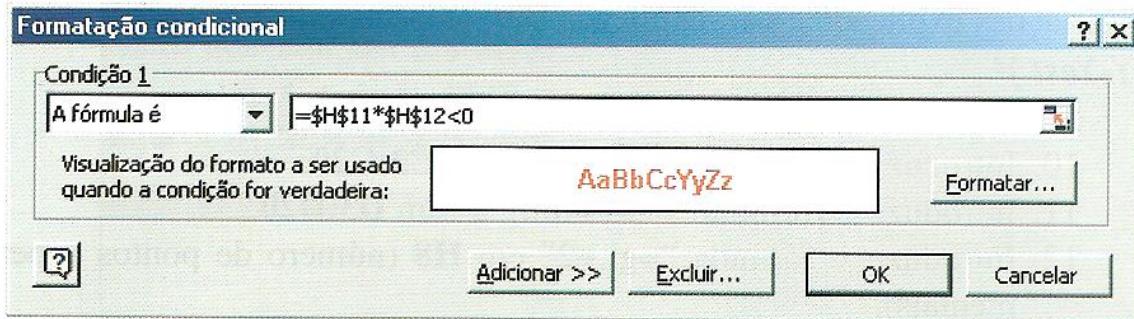
10. Introduzir a fórmula “=a.+b.\*X.” em C3:C20.
11. Introduzir a fórmula “=(X.-Xm.)^2” em D3:D20.
12. Introduzir a fórmula “=gl.+2” em H8 (número de pontos experimentais).
13. Introduzir a fórmula “=sigma.^2” em H9. Cálculo da variância.

### Teste *t* de Student

14. Introduzir a fórmula “=“t(0,05;“&gl.&”)=”” em G10. Perceba que aqui foi utilizado o operador de concatenação de texto &, para que o rótulo fosse atualizado sempre que se alterassem os dados. Deve-se ter sempre a preocupação de desenvolver planilhas bastante universais, assim elas poderão ser reutilizadas para qualquer regressão linear. Os vetores X. e Y. podem ser atualizados apenas com a inserção de células, sem a necessidade de serem renomeados.
15. Introduzir a fórmula “=INVT(0,05;gl.)” em H10. Com essa função, calcula-se a estatística  $t(\alpha/2, N-2)$ . ATENÇÃO: O Excel usa a significância  $\alpha$  no lugar de  $\alpha/2$  para chamar o cálculo bicaudal. Se a intenção for a estatística moncaudal, deve-se usar “=INVT(2\*0,05;gl.)”.
16. Introduzir a fórmula “=b.-ttab.\*errob.” em H11 (b mínimo).
17. Introduzir a fórmula “=b.+ttab.\*errob.” em H12 (b máximo).
18. Introduzir a fórmula “=a.-ttab.\*erroa.” em I11 (a mínimo).
19. Introduzir a fórmula “=a.+ttab.\*erroa.” em I12 (a máximo).

Com 95% de confiança, pode-se rejeitar a hipótese de a reta de regressão cortar o eixo da ordenada no ponto 0, uma vez que o intervalo de  $a$  (776,96 a 1.193,33) não contém esse valor. A análise mais importante, no entanto, é a da inclinação  $b$ : como os extremos do intervalo desse coeficiente (-62,767 a -20,663) não contêm o valor 0, pode-se dizer, com 95% de confiança, que a hipótese de ele ser nulo é rejeitada; portanto, a regressão linear é válida. Para maior segurança, pode-se alertar o usuário caso isso não aconteça:

20. Selecionar G2:H2.
21. Selecionar o menu **Formatar > Formatação Condicional**.
22. Preencher o diálogo conforme ilustra a Figura 20.4:



**Figura 20.4** Diálogo da formatação condicional.

- Clicar em **OK** e selecionar negrito e vermelho.

Agora, toda vez que a hipótese de  $b$  ser nulo for cumprida, as fontes das células **G2** e **H2** mudarão de cor e formato. Para maior segurança, uma vez que se trata de investimento de risco, deve ser executado também o teste de Fisher:

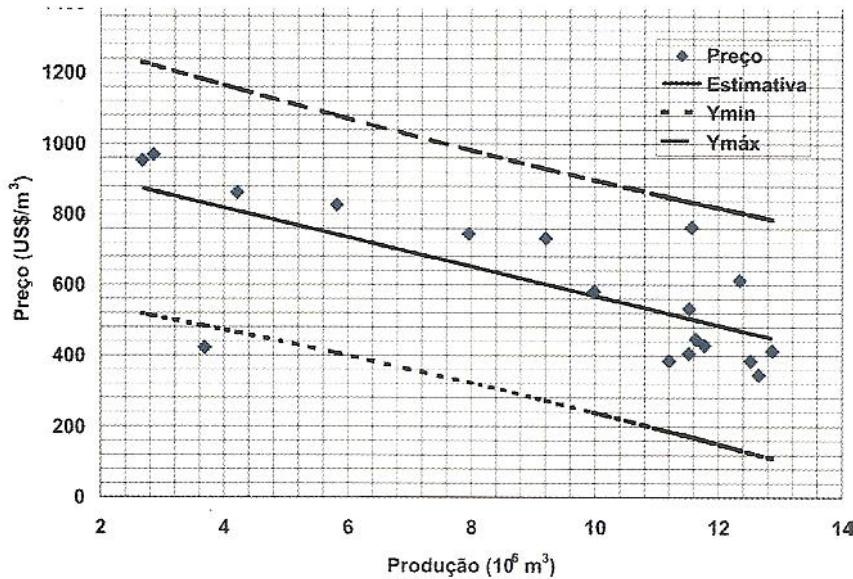
### Teste *F* de Fisher

- Introduzir a fórmula “=“F(0,05;1;“&gl.&”)=”” em **G14**.
- Introduzir a fórmula “=INVF(0,05;1;gl.)”. É mostrado F tabelado para 95% de confiança e N-2 graus de liberdade.
- Introduzir a fórmula “=SE(Ftab.>F;“não “;”)&”existe uma relação linear.” em **H15**.

Essa passagem também tem a função de alertar o usuário sobre o cumprimento ou não da hipótese de  $b$  ser nulo. Como  $F_{\text{Reg}} > F_{\text{Tab}}$  (17,645 e 4,49), essa hipótese é rejeitada, confirmando-se aquela de relação linear entre as variáveis Custo e Produção, conforme previsto por *t de Student*.

### Construção do intervalo de confiança

- Introduzir a fórmula “=SOMA(desvioX.)” em **D21**.
- Introduzir em **E3:E20** a fórmula “=Yest.-ttab.\*RAIZ(sigma2.\*(1+1/N.+desvioX./SDX.))”.
- Introduzir em **F3:F20** a fórmula “=Yest.+ttab.\*RAIZ(sigma2.\*(1+1/N.+desvioX./SDX.))”.
- Construir o gráfico da Figura 20.5 com os dados das colunas **A, B, C, E** e **F**.



**Figura 20.5** Intervalo de confiança da regressão linear.

### Funções de Bessel

A idéia deste tópico é mostrar como cálculos sofisticados podem ser resolvidos de maneira bastante simples. O engenheiro deve dominar os fundamentos e, fora isso, deve apenas se preocupar com a interpretação dos resultados, uma vez que a “programação” é extremamente simples.

### Aplicação – Resfriamento em regime transitório (solução exata)

Um cilindro de aço com 5 cm de diâmetro, valor significativamente menor que seu comprimento, é aquecido em um forno a  $800^\circ\text{C}$ . Após atingir essa temperatura, ele é posto para resfriar ao ar, a  $20^\circ\text{C}$ .

*Quanto tempo levará para que a temperatura do centro atinja  $100^\circ\text{C}$ ? São conhecidos os seguintes valores:*

- $k = 20 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$  (condutividade térmica)
- $\alpha = 6,11 \times 10^{-6} \text{ m}^2.s^{-1}$  (difusividade térmica)
- $h = 150 \text{ W.m}^{-2}.K^{-1}$  (coeficiente de convecção)

### Resolução

Supondo que o fluxo de calor ocorra apenas na direção radial, a equação diferencial que representa o sistema é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

com a condição inicial:

$$T(r,0) = T_i$$

e com as condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{x=L} = h[T(R,t) - T_\infty]$$

em que  $r$  é a posição radial ( $r = 0$ , no centro, e  $r = L$ , na superfície);  $R$  é o raio do cilindro;  $T_i$ , sua temperatura inicial; e  $T_\infty$ , a temperatura do meio circundante. A solução exata é expressa pela série de Fourier:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp(-\zeta_n^2 \cdot Fo) J_0\left(\frac{\zeta_n \cdot r}{R}\right)$$

em que:

$$Fo = \alpha \cdot t / R^2 \quad (\text{número de Fourier})$$

$$\theta = (T - T_\infty) / (T_i - T_\infty)$$

$$C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{(J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n))}$$

em que  $J_0$  e  $J_1$  são funções de Bessel de primeira espécie, ordens zero e um, respectivamente, e  $\zeta_n$  são as raízes positivas da equação transcendente:

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = Bi$$

em que:

$$Bi = \frac{h \cdot R}{2k} \quad (\text{número de Biot})$$

É necessário reconhecer que se está lidando com os aspectos mais sofisticados da Matemática Aplicada. O leitor, no entanto, perceberá a extrema simplicidade com que o Excel lida com eles.

1. Construir a planilha:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	h.	D.	k.	Bi.	$\alpha$ .	t.	Fo.	r.	$T_{inf.}$	$T_{ini.}$
2	150	0,05	20		6,11E-06	1000		0	20	800
3										
4										
5										Modelos do Solver
6	n.	$\zeta$	F.	Cn.	$\theta$					Modelo1. Modelo2.
7	1	0,1								
8	2	3								
9	3	6								
10	4	9								
										$T_{fin.}$

**Figura 20.6** Planilha para a resolução do problema.

O leitor deve observar que os valores do vetor  $\zeta$ . (0,1; 3; 6 e 9) são escolhas convenientes para as estimativas das funções de Bessel. Verifique os valores tabelados dessas funções, encontrados na literatura. Além disso, o valor de  $r = 0$  corresponde ao centro do cilindro.

2. Selecionar A1:J2 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.

Verificar que todos os elementos da linha terminam com o ponto “.”. Se isso não for obedecido, acarretará problemas.

3. Selecionar A6:D10 e pressionar **CTRL + SHIFT + F3**.

4. Selecionar E7:E10 e denominar como **Série**. (com o ponto).

5. Selecionar E11 e denominar como **teta**. (com o ponto).

6. Introduzir a fórmula “=h.\*D./4/k.” em D2 (cálculo de Biot).

7. Introduzir a fórmula “=4\*a.\*t./D.^2” em D2 (cálculo de Fourier).

8. Introduzir a fórmula “=z.\*BESSELJ(B7;1)/BESSELJ(B7;0)-Bi.” em C7.

Estranhamente, a versão 2000 do Excel usada para os cálculos não aceitou BESSELJ(z;...).

9. Introduzir em D7 a fórmula “=2/z.\*BESSELJ(B7;1)/((BESSELJ(B7;0))^2+(BESSELJ(B7;1))^2)”.

10. Introduzir a fórmula “=Cn.\*EXP(0-z.^2\*Fo.)\*COS(r.\*z.)” em E7.

Aqui também EXP(-z.^2\*Fo.) não funcionou.

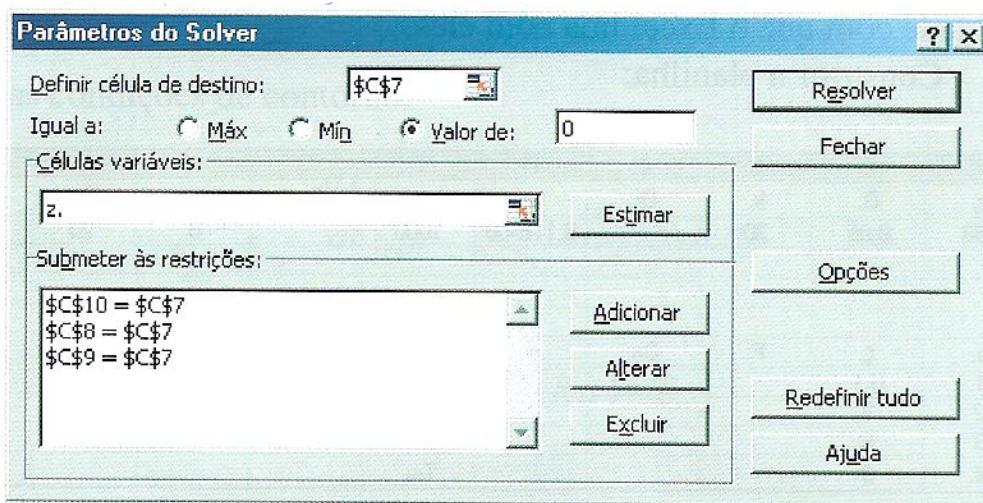
11. Selecionar C7:E7 e puxar pela alça de replicação até a linha 10.

12. Introduzir a fórmula “=SOMA(Série.)” em E11.

13. Introduzir a fórmula “=Tinf.+teta.\*(Tini.-Tinf.)” em F11.

A expectativa é que o leitor reconheça o formulário que está sendo utilizado. A primeira tarefa será achar os valores de  $\zeta_n$  que são raízes da equação transcendente.

14. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver** e preencher o diálogo:



**Figura 20.7** Primeiro diálogo do Solver.

Antes de executar o Solver, lembre-se de que o procedimento adotado requer que o Solver seja acionado duas vezes: uma para o cálculo das raízes e outra para o cálculo de  $q$ . Para evitar o preenchimento desses diálogos, é necessário “salvá-los”:

15. Pressionar o botão **Opções** e, em seguida, o botão **Salvar modelo**, selecionando a célula G7.

16. Pressionar **OK** duas vezes e **Resolver**.

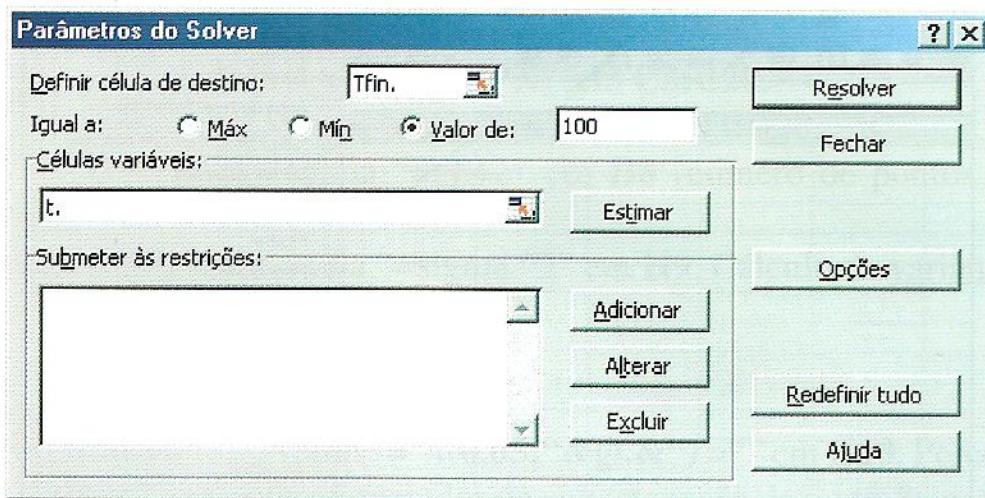
Devem resultar os valores  $\{0,42799; 3,8561; 7,0289; 10,183\}$  para o vetor  $\zeta$ . Observe que os parâmetros do Solver foram salvos nas células G7: G12. Toda vez que essa configuração for necessária em futuros cálculos, basta carregá-la com o botão **Carregar Modelo** das opções do Solver. Essa metodologia remonta às versões antigas do Excel, em que as macros eram gravadas na planilha e consistiam em simples gravadoras de teclas pressionadas. Atualmente a história é bem diferente, e chamar o VBA de “macros” é reduzir demais a capacidade dessa ferramenta poderosíssima.

Resta agora calcular o adimensional de temperatura  $q$  variando o tempo  $t$  (o mesmo que variar  $F_0$ , na prática).

17. Selecionar o menu **Ferramentas > Solver**.

18. Clicar no botão **Redefinir tudo**. Isso apaga tudo.

19. Preencher o diálogo:



**Figura 20.8** Segundo diálogo do Solver.

Antes de executar o Solver, é relevante lembrar de salvar esse conteúdo:

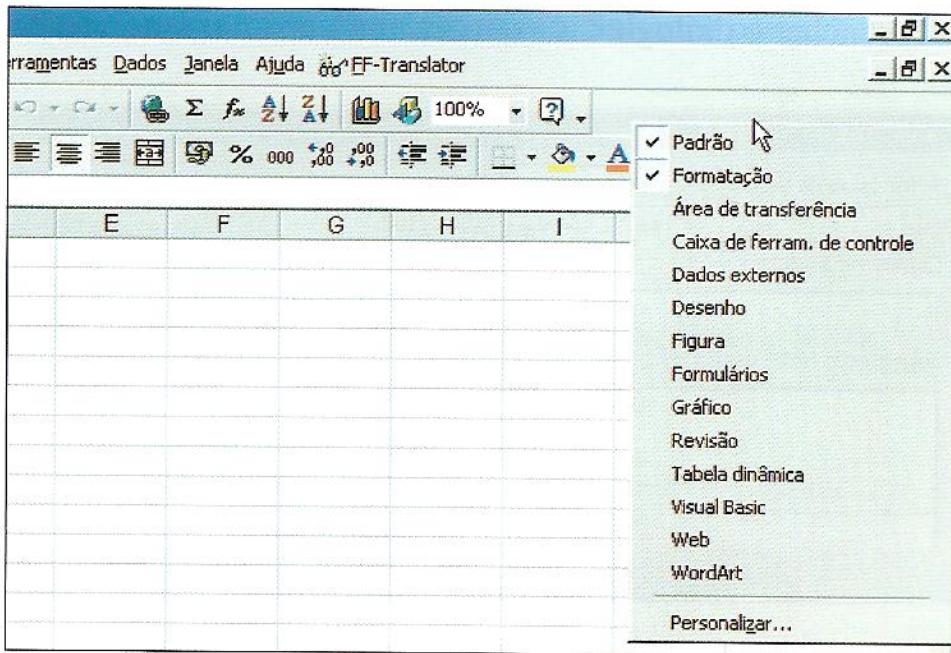
20. Pressionar o botão **Opções** e, em seguida, o botão **Salvar modelo**, selecionando a célula **G7**.
21. Pressionar **OK** duas vezes e **Resolver**.

O resultado deve ser  $t = 1.284\text{ s}$ , algo bastante simples, se for considerado o conhecimento envolvido. Recomenda-se que o leitor tente mudar algum parâmetro do problema e repeti-lo carregando os modelos do Solver. Para  $T_{final} = 200^\circ\text{C}$ , foi obtido  $t = 832\text{ s}$ .

### ***Uso de ferramentas de controle***

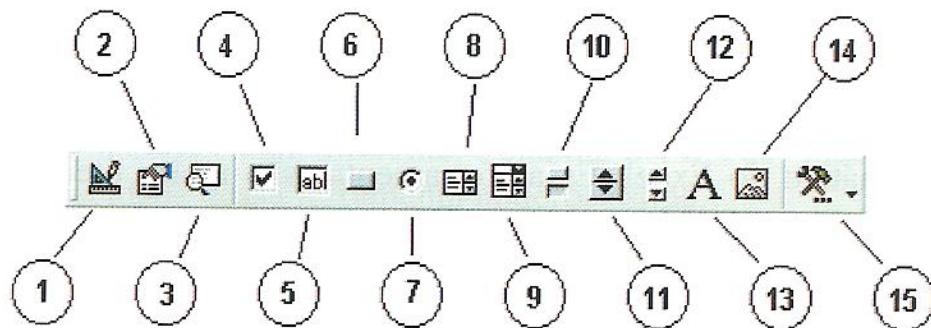
Neste último tópico, pretende-se mostrar a utilização de ferramentas de controle no uso de uma espécie de “programação dinâmica”, apoiada no cálculo automático do Excel. Essas ferramentas são muito úteis, tendo em vista que, na prática, não há como usar o Windows sem acionar algumas delas. Este livro abordará apenas as barras de rolagem que têm uso mais imediato, sem programação VBA. Outras ferramentas importantes são os botões de comando, caixas de texto e formulários, mas isso fica para um livro posterior.

Antes de analisar uma aplicação, é preciso acostumar-se com o manuseio das ferramentas de controle. Clique em qualquer região vazia da barra de ferramentas do Excel, como ilustra a Figura 20.9, a seguir:



**Figura 20.9** Ativação do menu flutuante.

No menu flutuante (*popup menu*), selecione a opção **Caixa de ferramentas de controle**. Surgirá uma pequena barra de ferramentas. Procure acomodá-la na barra **Padrão**. A Figura 20.10 mostra essa barra em detalhes. Nela é possível verificar os seguintes botões: 1) Modo estrutura; 2) Propriedades; 3) Exibir código; 4) Caixa de seleção; 5) Caixa de texto; 6) Botão de comando; 7) Botão de opção; 8) Caixa de listagem; 9) Caixa de combinação; 10) Botão alternar; 11) Botão de rotação; 12) Barra de rolagem; 13) Rótulo; 14) Imagem; e 15) Mais controles.



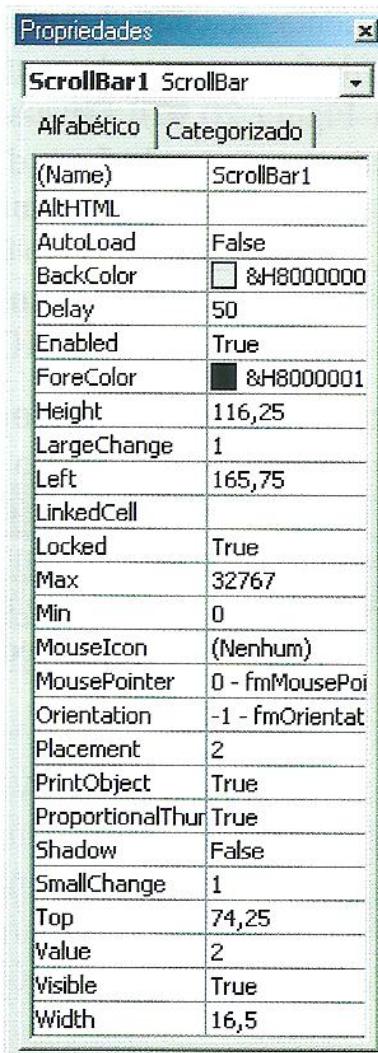
**Figura 20.10** Barra de ferramentas de controle.

A intenção não é se alongar na explicação dessas ferramentas, e sim apenas dizer que algumas são bem comuns: o local onde se escrevem as fórmulas no Excel é uma caixa de texto; os botões em que se clica são botões de comando; as barras na vertical e na horizontal da janela do Excel são barras de rolagem etc.

O contato com as ferramentas de controle será iniciado abrindo uma nova planilha no Excel. Na barra de ferramentas de controle, é selecionada a barra de rolagem (número 12 na Figura 20.10). Deve-se desenhá-la em qualquer lugar da planilha, na vertical, com cerca de 5 cm de altura e 1 cm de largura. Na caixa de nomes, aparece algo como ScrollBar1 (um acrônimo de *Screen Roll Bar*), enquanto na caixa de fórmulas aparece “=INCORPORAR(“Forms. ScrollBar.1”;””). Isso só é visto enquanto a ferramenta estiver selecionada.

### ***Noções de Programação Orientada ao Objeto (OOP)***

O mais importante, no entanto, é o pequeno esquadro chamado **Modo Estrutura** (número 1 na Figura 20.10). O leitor deve perceber que ele está “iluminado”. Isso significa que o objeto está em modo de edição: pode-se alterar suas propriedades. Clique na barra de rolagem com o botão direito do *mouse*. No menu flutuante, selecione **Propriedades**. Deve aparecer uma caixa como a mostrada na Figura 20.10. Nessa caixa estão listadas quase todas as propriedades do objeto barra de rolagem. “Objeto” é um termo muito importante em programação moderna: tudo no Windows que puder ter suas propriedades alteradas por uma ação externa (evento, outro termo importante) é um objeto. O leitor deve entender esse termo não como algo sólido, mas como algo “objeto” de uma ação. Uma célula é um objeto, pois pode ter sua propriedade **conteúdo** alterada. Um documento do Word é um objeto etc.



**Figura 20.11** Caixa de propriedades da barra de rolagem.

Voltando às propriedades da caixa de rolagem, as que serão alvo de referência são:

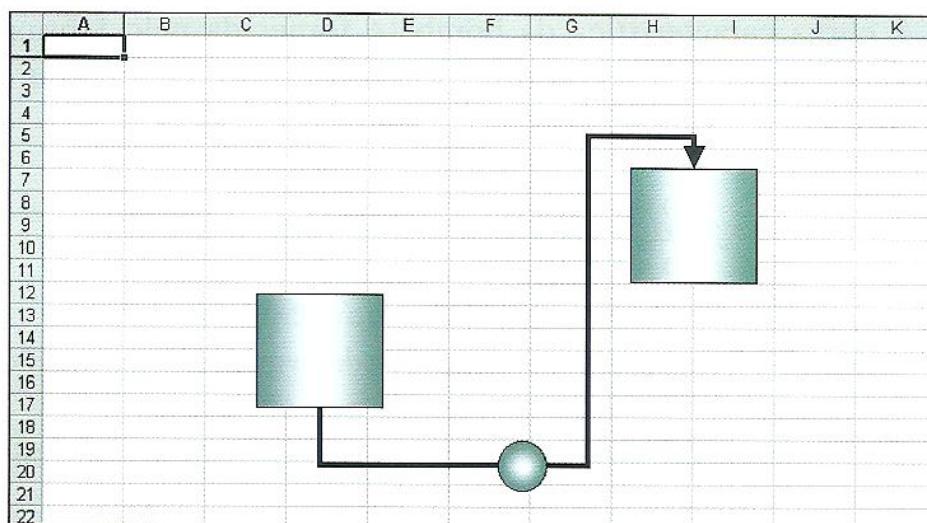
- **Name** – nome do objeto. Digitar **brTemperatura**.
- **LinkedCell** – célula relacionada: contém um valor inteiro referente à posição do cursor da barra. Digitar **A1**.
- **Max** – valor máximo que a barra pode assumir. Digitar **100**.
- **Min** – valor mínimo que a barra pode assumir. Digitar **0**.
- **LargeChange** – variação se o corpo da barra for clicado. Digitar **5**.
- **SmallChange** – variação se as setas da barra forem clicadas. Digitar **1**.

Feche agora a caixa **Propriedades** e clique no botão **Modo Estrutura**, “apagando-o”. Agora a barra entra em operação. Movimente-a e observe o que acontece em **A1**. Depois, introduza a fórmula “=RAIZ(A1)” em **B1**. O que se acabou de fazer foi, aqui, a primeira “programação dinâmica”. Os objetos envolvidos são: 1) o Excel; 2) o arquivo **Pasta1**; 3) a planilha **Plan1**;

4) a barra **brTemperatura**; 5) a célula A1; e 6) a célula B1. Com o evento movimentar o botão da barra, as propriedades **Conteúdo** de todos eles se alteram. A seguir, uma aplicação prática.

### **Aplicação – Ponto de operação de uma bomba centrífuga**

*Analisar o comportamento do ponto de operação de uma bomba centrífuga em função da alteração da rotação do motor e da perda de energia no sistema tanque–tubulações.*



**Figura 20.12** Esquema operacional do sistema de bombeamento.

A curva característica da bomba é fornecida pelo fabricante (Quadro 20.3).

**Quadro 20.3** Curva característica da bomba centrífuga a 1.750 rpm.

$Q$ ( $\text{m}^3/\text{h}$ )	0	2	4	6	8	10	12	14
$H$ (m)	10,6	10,4	10,2	9,9	9,2	8,2	7,2	5,7

A curva do sistema é expressa pela equação  $H_s = a + b \cdot Q^2$ , em que  $H_s$  representa a energia<sup>14</sup> total em m e  $Q$ , a vazão volumétrica em  $\text{m}^3/\text{h}$ . Dados:

- A rotação  $N$  pode variar de 1.000 rpm a 3.500 rpm.
- O parâmetro  $a$  pode variar de 0 m a 8 m.
- O parâmetro  $b$  pode variar de 0,05  $\text{h}^2/\text{m}^5$  a 1,0  $\text{h}^2/\text{m}^5$ .

### Resolução

Eventualmente, o leitor pode não estar familiarizado com a teoria de bombeamento, e aprofundar-se nas operações unitárias nem é o objetivo do livro. Este estudo de caso foi escolhido por ser Mecânica dos Fluidos matéria obrigatória nos cursos de Engenharia. De qualquer forma, os conceitos são bastante simples.

- O ponto de operação de uma bomba centrífuga é a vazão e a energia fornecida ao fluido no encontro da curva característica da bomba a curva do sistema.
- A curva característica da bomba é a energia fornecida por esta ao fluido ( $H$ ), em função da vazão volumétrica ( $Q$ ).
- A curva característica da bomba é fornecida pelo fabricante para determinada rotação (neste caso, 1.750 rpm). Para outras rotações, utilizam-se as relações:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

em que os índices 1 e 2 representam os valores das variáveis na rotação original e atual, respectivamente.

- A curva do sistema é obtida dos cálculos de Engenharia envolvendo Mecânica dos Fluidos.
- O termo  $a$  representa o desnível entre os dois tanques.
- O termo  $b \cdot Q^2$  representa a perda de energia devida ao escoamento.

Seguindo com o procedimento:

1. Construir a planilha com três barras de rolagem:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	N (rpm)	3600	a.	8	b.	100			
2	Q (m³/h)	0	2	4	6	8	10	12	14
3	H (m)	10,6	10,4	10,2	9,9	9,2	8,2	7,2	5,7
4	Q <sub>ajust.</sub> (m³/h)								
5	H <sub>ajust.</sub> (m)								
6	H <sub>s</sub> (m)								
7									
8									
9	Rotação da bomba.								
10									
11									
12	Perda de carga								
13									
14									
15	Desnível								

Figura 20.13 Esquema para a resolução do problema.

2. Nomear as células e faixas conforme indica o Quadro 20.4:

**Quadro 20.4** Nomes das células e faixas.

Células	Nome
B1	N.
D1	a.
F1	b.
B2:I2	Q1.
B3:I3	H1.
B4:I4	Q2.
B5:I5	H2.
B6:I6	Hs.

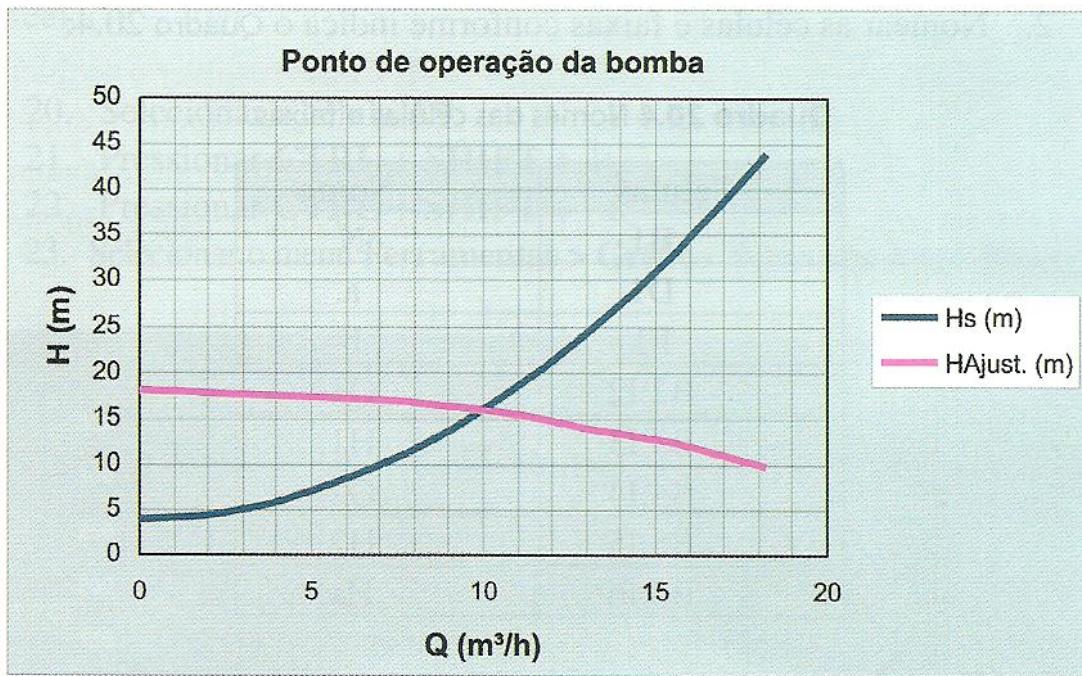
3. Preencher as propriedades das barras de rolagem como:

**Quadro 20.5** Propriedades da barra de rolagem.

	Barra superior	Barra intermediária	Barra inferior
Name	brRotação	brPerdas	brDesnível
LinkedCell	B1	F1	D1
Max	3.500	100	8
Min	1.000	5	0

4. Introduzir a fórmula “=Q1.\*N./1750” em **B4:I4**.
5. Introduzir a fórmula “=H1.\*(N./1750)^2” em **B5:I5**.
6. Introduzir a fórmula “=a.+b./100\*Q2.” em **B6:I6**.
7. Selecionar **A4:I6** e pressionar **F11**.
8. Clicar no gráfico com o botão direito e escolher **Local**.
9. Colocar o gráfico como objeto em **Plan1**.

Agora basta desativar o modo estrutura e mexer com as barras de rolagem. Será fácil verificar que algumas combinações de valores tornam o sistema não-operacional. A Figura 20.13 mostra que, com os valores  $a = 4\text{ m}$ ,  $b = 0,12\text{ h}^2/\text{m}^5$  e  $N = 2.280\text{ rpm}$ , a vazão obtida será  $10\text{ m}^3/\text{h}$ .



**Figura 20.14** Ponto de operação da bomba centrífuga.

## Fontes consultadas

- BENNETT, C.; MYERS, J. E. *Fenômenos de transporte – Quantidade de movimento, calor e massa*. Nova York: McGraw-Hill, 1978. 812 p.
- INCROPERA, F. P. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. Rio de Janeiro: LTC, 1998. 494 p.
- KREYSZIG, E. *Matemática superior*. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 1976. 285 p.
- DIEGUEZ, J. P. P. *Métodos numéricos computacionais para Engenharia*. v. 1. Rio de Janeiro: Interciência, 1992. 301 p.
- DIEGUEZ, J. P. P. *Métodos numéricos computacionais para Engenharia*. v. 2. Rio de Janeiro: Âmbito Cultural, 1994. 348 p.
- JUER, M. *Matemática financeira*. Rio de Janeiro: IBMEC, 1995. 396 p.
- CLÁUDIO, D. M.; MARINS, J. M. *Cálculo numérico computacional*. Rio de Janeiro: Atlas, 1994. 464 p.
- COSTA NETO, P. L. O. *Estatística*. São Paulo: Edgar Blücher, 1977. 265 p.
- ROMAN, S. R. *Desenvolvendo macros no Excel*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 569 p.