SEMINÁRIO DE DINÂMICA ORBITAL 1

“Método de interpolação de Lagrange”

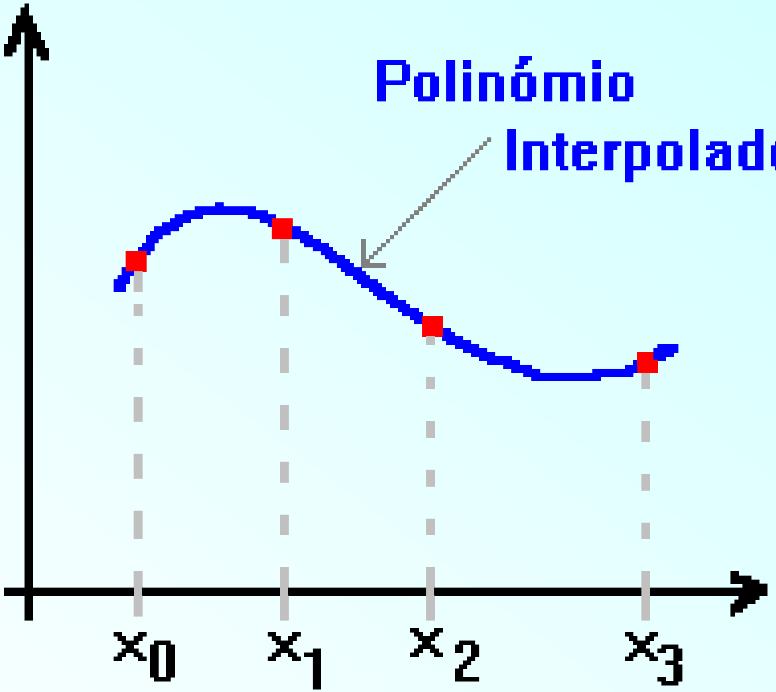
Flaviane Venditti

Interpolação:

- Seja uma função $y=f(x)$, conhecida por $n+1$ pontos isolados (x_i,y_i), $i=0,1,2,...,n$.
- Consiste em estimar um valor para $f(x)$ para qualquer x que está no intervalo (x_0,x_n).
- Se para fazer a estimativa do valor de $f(x)$ for utilizado um polinômio que passa por todos os pontos conhecidos, então está sendo feita uma interpolação polinomial.

Interpolação polinomial:

- Consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos.
- Para cada *n* pontos pode-se obter uma função polinomial de grau até *n*-1.
- Assim, para fazer interpolação de grau 1 precisamos de 2 pontos $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, de modo que o valor de x para o qual se quer o valor de $f(x_i)$ esteja no intervalo (x_i, x_{i+1}).



O polinómio de 3º grau interpola a função em 4 pontos

Interpolação polinomial de Lagrange:

- A fórmula de interpolação de Lagrange pode ser derivada direto do polinômio de diferença dividida de Newton de grau equivalente, primeiramente escrevendo a diferença dividida na forma *simétrica*:

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

- A fórmula de Lagrange envolve somente os pontos x_i e os valores da função correspondente $f(x_i)$. A diferença divida da fórmula fundamental de Newton não precisa ser calculada.

Por exemplo:

- Para um polinômio de segundo grau temos:

$$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

- Substituindo as formas simétricas equivalentes para as diferenças divididas temos...

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} + (x - x_0)\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

- Ou...

$$p_2(x) = \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)}\right] f(x_0) + \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_1 - x_j)}\right] f(x_1) + \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_2 - x_j)}\right] f(x_2)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right] f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i)$$

Então o polinômio interpolador de Lagrange pode ser escrito como:

$$p_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \ldots + L_n(x) f(x_n$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

- Onde $f(x_i)$ é o valor é o valor obtido para cada x_i
- E temos que $L_i(x)$ é:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_n)}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, i = 0,1,...,n$$

Exemplo:

- Para encontrar o polinômio de interpolação de segundo grau que passa por 3 pontos, temos:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

•Sendo x_i e $f(x_i)$ para i de 0 a 2:

i	xi	f(xi)
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=\frac{-x^2+3x}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}=\frac{x^2-x}{6}$$

i	xi	f(xi)
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

Então...

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$P_n = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Sendo:

$$f(x_0) = -5, f(x_1) = 1, f(x_2) = 25$$

$$P_2 = -5L_0(x) + L_1(x) + 25L_2(x)$$

$$P_2 = -5\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{3}\right) + \left(\frac{-x^2 + 3x}{2}\right) + 25\left(\frac{x^2 - x}{6}\right) =$$

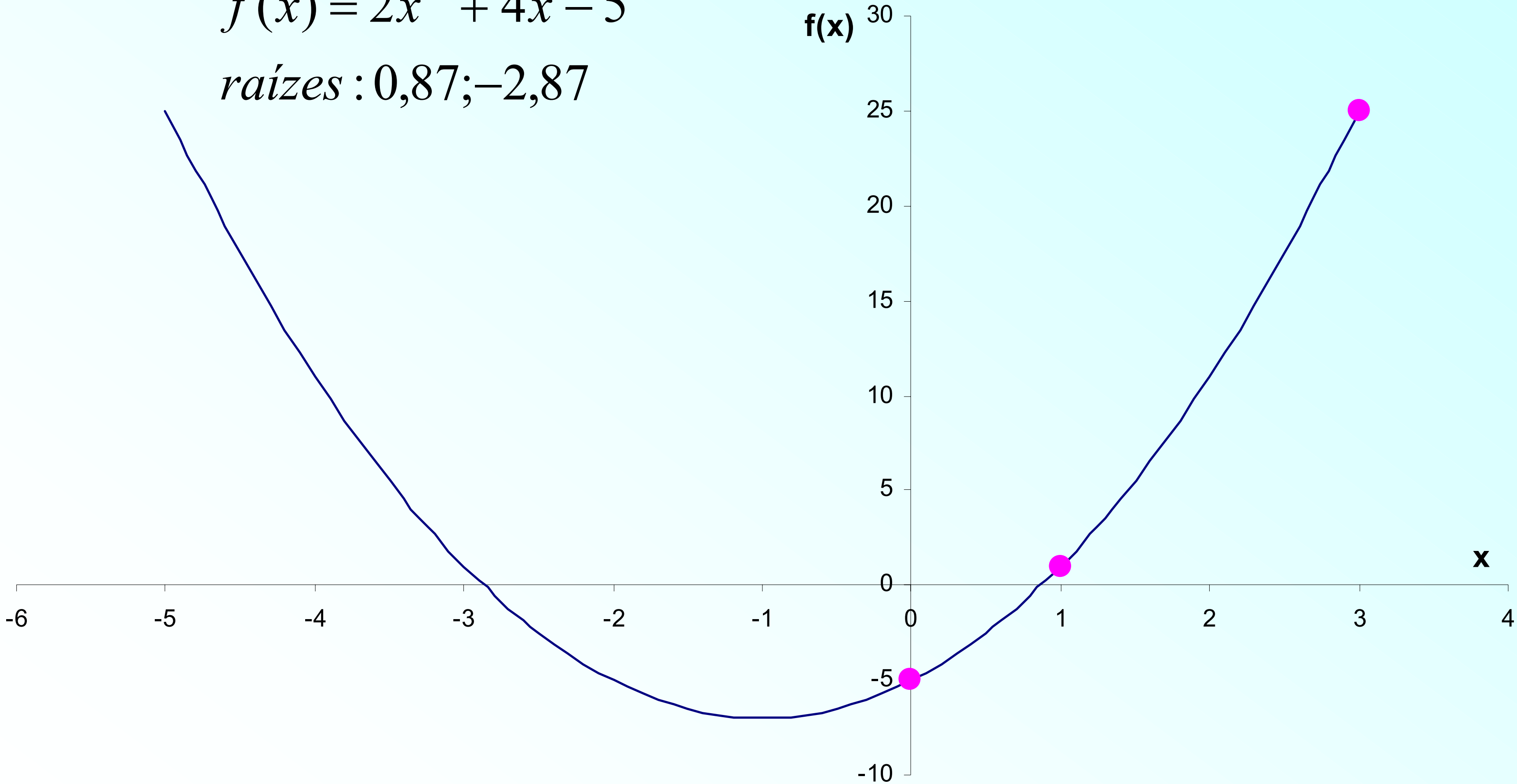
$$= 2x^2 + 4x - 5$$

,que é o polinômio que passa pelos 3 pontos dados.

Gráfico do polinômio encontrado pela interpolação de Lagrange com os 3 pontos conhecidos

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 5$$

$$raízes: 0{,}87; -2{,}87$$



Vantagens

- Quando é feita somente uma interpolação, este método é tão eficiente quanto o de Newton e mais prático por não ser necessário armazenar as tabelas de diferença dividida.

Desvantagens:

- Quando é necessário fazer várias interpolações, este método fica com uma quantidade de cálculos excessiva.
- Quando um novo termo é adicionado é necessário recalcular todos os valores de $Li(x)$, o que não acontece no método de Newton.

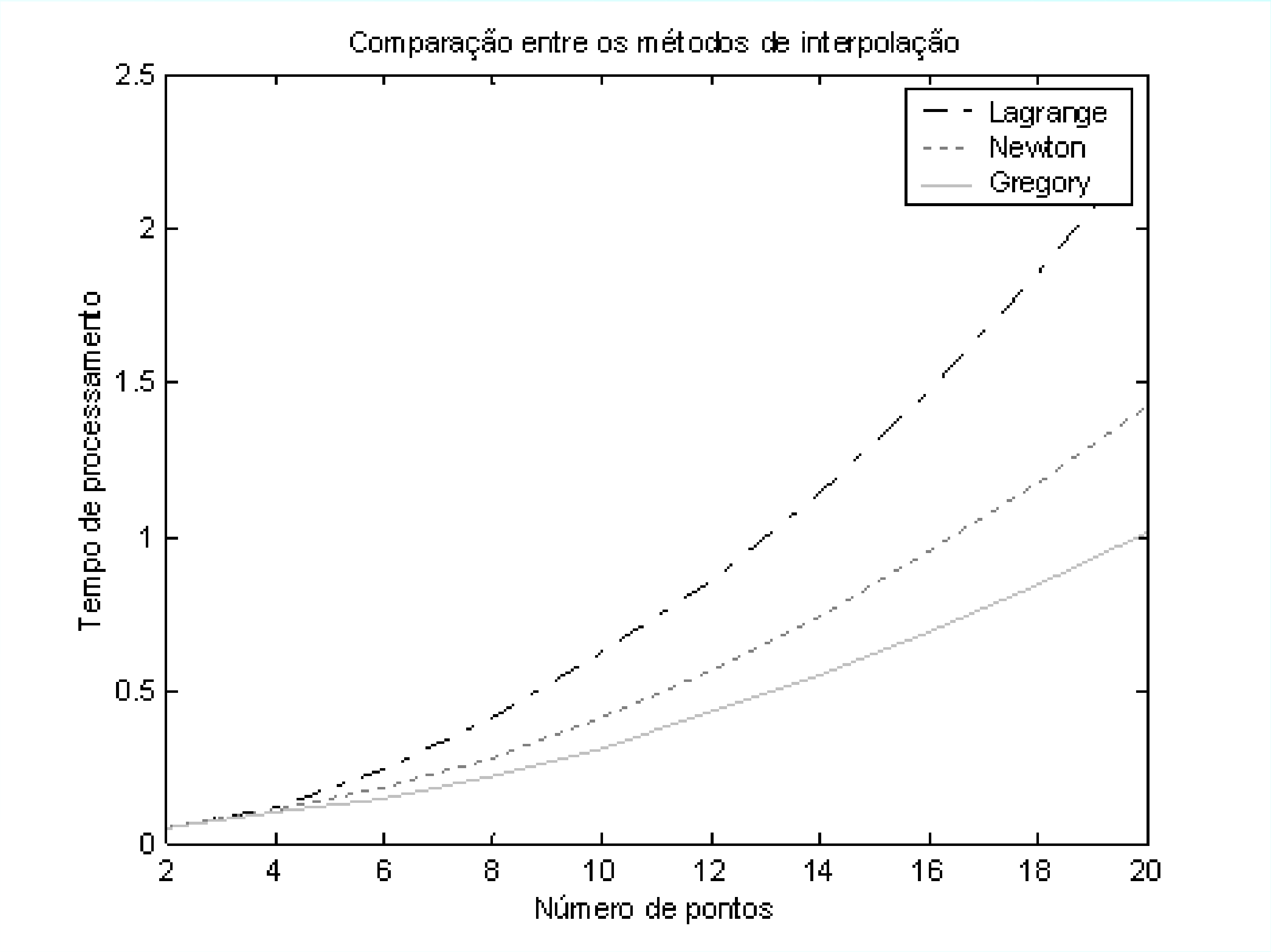
Complexidade da interpolação de Lagrange:

Operações	Complexidade
Adições	$2n^2+3n+1$
Multiplicações	$2n^2+3n+1$
Divisões	$n+1$

Comparação com outros métodos:

Método numérico	Número de operações aritméticas		
	Adições	Multiplicações	Divisões
Lagrange	$2n^2+3n+1$	$2n^2+3n+1$	$n+1$
Gregory-Newton	$1/2n^2+7/2n+2$	n	$n+1$
Newton	$n2+3n$	n	$1/2n^2+1/2n$

Gráfico de comparação de tempo de processamento:



FIM