Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
    - Derivado do método de Gauss-Jacobi, este método utiliza a cada iteração os valores já prontos na própria iteração, para tentar assegurar convergência mais rápida, ou seja:

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right)$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right)$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(k-1)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Portanto, o algoritmo do método pode ser expresso por:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1 \, e \, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k) \to i > j, (k-1) \to i < j} \right)$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Condições de parada:

  - Se para todo $| x_n^{(j)} - x_n^{(j-1)} | \leq$ erro, então $x_n^{(j)}$ são as soluções do sistema.

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Exemplo: Resolver o sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,2 e $x^{(0)} = 1$, $y^{(0)} = 1{,}5$, $z^{(0)} = 0$.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 8 \\ 2x & -4y & +2z & = & -4 \\ -x & +y & +5z & = & 3 \end{array}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Verificação de convergência

$$\begin{aligned} 3x & +2y & -z & = & 8 \\ 2x & -4y & +2z & = & -4 \\ -x & +y & +5z & = & 3 \end{aligned}$$

$$|a_{11}| \geqslant |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |3| \geqslant |2| + |-1|$$

$$|a_{22}| \geqslant |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |-4| \geqslant |2| + |1|$$

$$|a_{33}| \geqslant |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |5| \geqslant |-1| + |2|$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Isolamento das incógnitas

$$x=\frac{1}{3}(-2y+z+8)$$

$$y=-\frac{1}{4}(-2x-2z-4)$$

$$z=\frac{1}{5}(x-y+3)$$

  - Atribuição inicial
    - $x^{(0)} = 1$ $y^{(0)} = 1{,}5$ $z^{(0)} = 0$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Iterações

$$x^{(1)}=\frac{1}{3}(-2y^{(0)}+z^{(0)}+8)=\frac{1}{3}(-2(1{,}5)+0+8)=1{,}6667$$

$$y^{(1)}=-\frac{1}{4}(-2x^{(1)}-2z^{(0)}-4)=-\frac{1}{4}(-2(1{,}6667)-2(0)-4)=1{,}8334$$

$$z^{(1)}=\frac{1}{5}(x^{(1)}-y^{(1)}+3)=\frac{1}{5}(1{,}6667-1{,}8334+3)=0{,}5667$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Iterações

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}(-2(1{,}6667) + 0{,}5667 + 8) = \frac{5{,}2333}{3} = 1{,}7444$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{4}(-2(1{,}7444) - 2(0{,}5667) - 4) = \frac{8{,}6222}{4} = 2{,}1556$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{5}(1{,}7444 - 2{,}1556 + 3) = \frac{2{,}5888}{5} = 0{,}5178$$

  - $| x^{(2)} - x^{(1)} | =$ 0,08 < erro = 0,2
  - $| y^{(2)} - y^{(1)} | =$ 0,3 > erro = 0,2
  - $| z^{(2)} - z^{(1)} | =$ 0,05 < erro = 0,2

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Iterações

$$x^{(3)} = \frac{1}{3}(-2(2,1556) + 0,5178 + 8) = \frac{4,2066}{3} = 1,4022$$

$$y^{(3)} = -\frac{1}{4}(-2(1,4022) - 2(0,5178) - 4) = \frac{7,84}{4} = 1,96$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{5}(1,4022 - 1,96 + 3) = \frac{2,4422}{5} = 0,4884$$

  - $| x^{(3)} - x^{(2)} | = 0,3 > erro = 0,2$
  - $| y^{(3)} - y^{(2)} | = 0,19 < erro = 0,2$
  - $| z^{(3)} - z^{(2)} | = 0,03 < erro = 0,2$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)
  - Iterações

$$x^{(4)} = \frac{1}{3}(-2(1{,}96) + 0{,}4884 + 8) = \frac{4{,}5684}{3} = 1{,}5228$$

$$y^{(4)} = -\frac{1}{4}(-2(1{,}5228) - 2(0{,}4884) - 4) = \frac{8{,}0224}{4} = 2{,}0056$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{5}(1{,}5228 - 2{,}0056 + 3) = \frac{2{,}5172}{5} = 0{,}5034$$

  - $| x^{(4)} - x^{(3)} | = 0{,}1 < erro = 0{,}2$
  - $| y^{(4)} - y^{(3)} | = 0{,}05 < erro = 0{,}2$
  - $| z^{(4)} - z^{(3)} | = 0{,}02 < erro = 0{,}2$
  - Solução do sistema: [1,5228; 2,0056; 0,5034]

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Algébrico)

  - Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$
\begin{aligned}
x + y + 10z &= 12 \\
10x + y + z &= 12 \\
x + 10y + z &= 12
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Métodos Iterativos (Algoritmos Iterativos)
  - Método de Gauss-Seidel (Matricial)
    - Seja o sistema abaixo:

$$a_{11}x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)})$$

$$a_{22}x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)})$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k)})$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Pode ser representado na forma matricial:

$$D\,X^{(k)} = B - I\,X^{(k)} - S\,X^{(k-1)} \rightarrow (D+I)\,X^{(k)} = B - S\,X^{(k-1)}$$

  - Multiplicando ambos os membros pela inversa de (D + I), temos:

$$(D+I)^{-1}(D+I)\,X^{(k)} = (D+I)^{-1}B - (D+I)^{-1}S\,X^{(k-1)}$$

$$X^{(k)} = -(D+I)^{-1}S\,X^{(k-1)} + (D+I)^{-1}B$$

$$X^{(k)} = G\,X^{(k-1)} + F$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

$$X^{(k)} = G\,X^{(k-1)} + F$$

- Onde,

$$G = -(D+I)^{-1}S$$

$$F = (D+I)^{-1}B$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

  - Exemplo: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$\begin{aligned} 10x &+ 2y &+ z &= 7 \\ x &+ 5y &+ z &= -8 \\ 2x &+ 3y &+ 10z &= 6 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

  - Verificação de convergência

$$\begin{array}{rrrrr} 10x & +2y & +z & = & 7 \\ x & +5y & +z & = & -8 \\ 2x & +3y & +10z & = & 6 \end{array}$$

$$|a_{11}| \geqslant |a_{21}| + |a_{31}| \rightarrow |10| \geqslant |1| + |2|$$

$$|a_{22}| \geqslant |a_{12}| + |a_{32}| \rightarrow |5| \geqslant |2| + |3|$$

$$|a_{33}| \geqslant |a_{13}| + |a_{23}| \rightarrow |10| \geqslant |1| + |1|$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

    - Obtenção do Algoritmo

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

  - Obtenção do Algoritmo
  - Então, $G = -(D+I)^{-1}S$

$$\begin{bmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 1/50 & -1/5 & 0 \\ 13/500 & 3/50 & -1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -1/10 \\ 0 & 1/25 & -9/50 \\ 0 & 13/250 & 43/500 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

  - Obtenção do Algoritmo

$$F = (D + I)^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ -1/50 & 1/5 & 0 \\ -13/500 & -3/50 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -87/50 \\ 449/500 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Obtenção do Algoritmo
  - Então:

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}18 \\ 0 & 0{,}052 & 0{,}086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}74 \\ 0{,}898 \end{bmatrix}$$

  - Atribuição inicial
    - $x^{(0)} = 0$ $\quad y^{(0)} = 0$ $\quad z^{(0)} = 0$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

  - Iterações $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}18 \\ 0 & 0{,}052 & 0{,}086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}74 \\ 0{,}898 \end{bmatrix}$

$$x^{(1)} = -0{,}2(0) - 0{,}1(0) + 0{,}7 = 0{,}7$$

$$y^{(1)} = 0{,}04(0) - 0{,}18(0) - 1{,}74 = -1{,}74$$

$$z^{(1)} = 0{,}052(0) + 0{,}086(0) + 0{,}898 = 0{,}898$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}74 \\ 0{,}898 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Iterações $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,04 & -0,18 \\ 0 & 0,052 & 0,086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,74 \\ 0,898 \end{bmatrix}$

$$x^{(2)} = -0,2(-1,74) - 0,1(0,898) + 0,7 = 0,9582$$

$$y^{(2)} = 0,04(-1,74) - 0,18(0,898) - 1,74 = -1,9712$$

$$z^{(2)} = 0,052(-1,74) + 0,086(0,898) + 0,898 = 0,8847$$

- $| x^{(2)} - x^{(1)} | = 0,2 > \text{erro}$
- $| y^{(2)} - y^{(1)} | = 0,2 > \text{erro}$
- $| z^{(2)} - z^{(1)} | = 0,01 < \text{erro}$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9582 \\ -1,9712 \\ 0,8847 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Iterações $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}18 \\ 0 & 0{,}052 & 0{,}086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}74 \\ 0{,}898 \end{bmatrix}$

$$x^{(3)} = -0{,}2(-1{,}9712) - 0{,}1(0{,}8847) + 0{,}7 = 1{,}0058$$

$$y^{(3)} = 0{,}04(-1{,}9712) - 0{,}18(0{,}8847) - 1{,}74 = -1{,}9781$$

$$z^{(3)} = 0{,}052(-1{,}9712) + 0{,}086(0{,}8847) + 0{,}898 = 0{,}8716$$

- $| x^{(3)} - x^{(2)} | = 0{,}04 > \text{erro}$
- $| y^{(3)} - y^{(2)} | = 0{,}007 < \text{erro}$
- $| z^{(3)} - z^{(2)} | = 0{,}01 < \text{erro}$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0058 \\ -1{,}9781 \\ 0{,}8716 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)
  - Iterações $X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}18 \\ 0 & 0{,}052 & 0{,}086 \end{bmatrix} * X^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}74 \\ 0{,}898 \end{bmatrix}$

$$x^{(4)} = -0{,}2(-1{,}9781) - 0{,}1(0{,}8716) + 0{,}7 = 1{,}0085$$

$$y^{(4)} = 0{,}04(-1{,}9781) - 0{,}18(0{,}8716) - 1{,}74 = -1{,}9760$$

$$z^{(4)} = 0{,}052(-1{,}9781) + 0{,}086(0{,}8716) + 0{,}898 = 0{,}8701$$

  - $| x^{(4)} – x^{(3)} | = 0{,}002 < \text{erro}$
  - $| y^{(4)} – y^{(3)} | = 0{,}002 < \text{erro}$
  - $| z^{(4)} – z^{(3)} | = 0{,}001 < \text{erro}$

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1{,}0085 \\ -1{,}9760 \\ 0{,}8701 \end{bmatrix}$$

  - Solução do sistema: [1,0085; -1,9760; 0,8701]

Sistemas Lineares

- Método de Gauss-Seidel (Matricial)

    - Exercício: Obter a solução do sistema abaixo, com 4 decimais com arredondamento e erro menor ou igual a 0,02. Admitir solução inicial nula.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 3 \\
x - 3y &= -3
\end{aligned}
$$