Métodos Numéricos
Erros

Material baseado nos slides dos Professores:

- ✓ Bruno C. N. Queiroz (UFCG);
- ✓ José Eustáquio Rangel de Queiroz (UFCG);
- ✓ Marcelo Alves de Barros (UFCG).

UEPB / CCT / DC

Roteiro

- Existência
- Tipos

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Existência I

- Erro Inerente

  Erro sempre presente nas soluções numéricas devido à incerteza sobre o valor real

  Ex. 01: Representação intervalar de dados

  (50,3 ± 0,2) cm

  (1,57 ± 0,003) ml

  (110,276 ± 1,04) Kg

Existência II

- Erro de Truncamento

  Erro proveniente da limitação do número de iterações dos métodos numéricos durante a determinação de um valor de interesse

  - Número de iterações
    - Teórico ⇨ Infinito ou muito grande
    - Prático ⇨ Limitado por restrições associadas à capacidade de processamento/ armazenamento do sistema

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Existência III

- Erro de Representação

  Aproximação do valor de um número real para sua representação com um número finito de dígitos.

Existência III

- Erro de Representação x Erro de truncamento
  - Erro de Representação
    - Associada à conversão numérica entre bases (representação humana e de máquina) ou à realização de operações aritméticas
  - Erro de Truncamento
    - Associada à quantidade de informação que a máquina pode conter sob a forma de um número

Existência IV

- Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação)

Ex. 02: Cálculo da área de uma circunferência de raio 100 m

Possíveis resultados:

(1) $A = 31400\ m^2$

(2) $A = 31416\ m^2$

(3) $A = 31414{,}92654\ m^2$

Erro de Representação

π não tem representação finita - *3,14* (1), *3,1416* (2) e *3,141592654* (3)

Existência V

- Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação)
  - Dependência da representação numérica da máquina utilizada

$$(0{,}1)_{10} = (0{,}00011001100110011\ldots)_2$$

Um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outra

Erro de Representação

Operações com dados imprecisos ou incertos acarretam a propagação do erro.

Aritmética de Ponto Flutuante

Existência VI

Ex. 03: Cálculo de

$$S = \sum_{i=1}^{3000} x_i$$

usando uma calculadora e um computador, para $x_i = 0{,}5$ e $x_i = 0{,}1$

x_i	Calculadora	Computador
0,5	**S= 1500**	**S= 1500**
0,1	**S= 300**	**S=300,00909424 (precisão *simples*)**
		S=299,999999999999720 (precisão *dupla*)

Existência VII

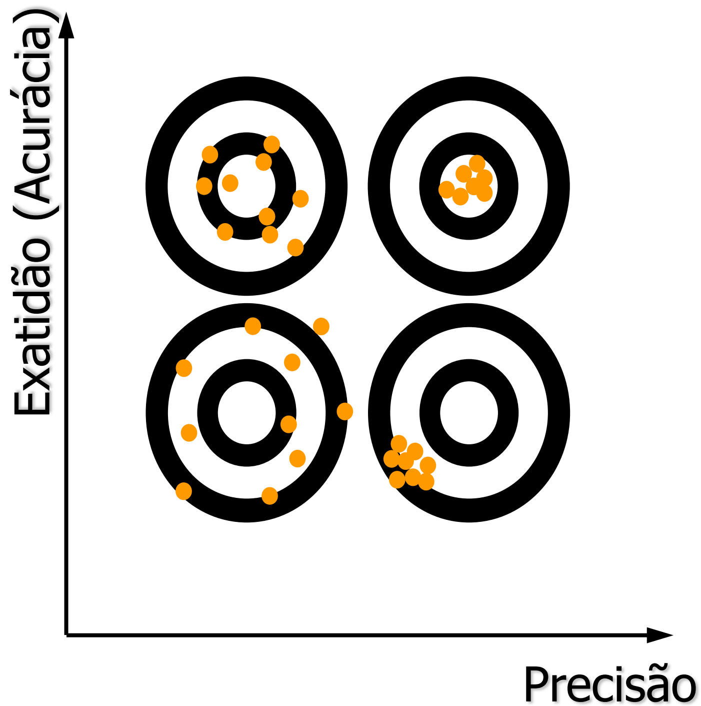
- Exatidão (Acurácia) x Precisão
  - Uso incorreto como sinônimos na linguagem cotidiana (e mesmo em linguagem técnica)
    - Exatidão ⇨ Grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor verdadeiro do mensurando
    - Precisão ⇨ Grau de concordância entre resultados de medição obtidos sob as mesmas condições (repetitividade)

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Existência VII

- Exatidão (Acurácia) x Precisão II



Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipo I

- Absoluto
  - Diferença entre o valor exato de um número e o seu valor aproximado

$$EA_x = x - \bar{x}$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipo I

- Erro Absoluto - Considerações I
  - EA_x só poderá ser determinado se x for conhecido com exatidão
  - Na prática, costuma-se trabalhar com um limitante superior para o erro, ao invés do próprio erro ($|E| < \varepsilon$, onde ε é o limitante)

Tipo I

- Erro Absoluto - Considerações II

Ex. 05: Sejam $a = 3876{,}373$ e $b = 1{,}373$

Considerando-se a parte inteira de a sendo a' o erro absoluto será:

$$EA_a = |a - a'| = 0{,}373$$

e a parte inteira de b, b', o erro absoluto será:

$$EA_b = |b - b'| = 0{,}373$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipo I

- Erro Absoluto - Considerações III
  - Obviamente, o resultado do erro absoluto é o mesmo nos dois casos
  - Entretanto, o peso da aproximação em b é maior do que em a

Tipo II

- Relativo
  - Razão entre o erro absoluto e o valor aproximado

$$ER_x = \frac{(x - \bar{x})}{\bar{x}}$$

Erro Percentual$_x$ = ER$_x$ x 100%

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipo II

- Erro Relativo - Consideração

O erro relativo, pode traduzir perfeitamente o peso da aproximação, pois:

$$ER_a = \frac{0{,}373}{3876} \cong 0{,}000096 \leq 10^{-4}$$

$$ER_b = \frac{0{,}373}{1} \cong 0{,}373 \leq 5 \times 10^{0}$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

Ex. 06: Cálculo do erro relativo considerando-se os números $\bar{a} = 2112{,}9$, $\bar{e} = 5{,}3$ e $|EA| <= 0{,}1$

$|ER_a| = |a - \bar{a}|/|\bar{a}| = 0{,}1/2112{,}9$
$\cong 4{,}7 \times 10^{-5}$

$|ER_e| = |e - \bar{e}|/|\bar{e}| = 0{,}1/5{,}3 \cong 0{,}02$

Conclusão: a é representado com *maior* precisão do que e

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- Arredondamento
- Truncamento

Tipos

- Arredondamento

Ex. 07: Cálculo de $\sqrt{2}$ utilizando uma calculadora digital

Valor apresentado: 1,4142136
Valor real: 1,41421356...

- Inexistência de forma de representação de números irracionais com uma quantidade finita de algarismos
  - Apresentação de uma aproximação do número pela calculadora
    - Erro de arredondamento

Tipos

- Truncamento
  - Associação ao método de aproximação empregado para o cálculo de uma função exata, a partir do uso de fórmulas aproximadas
    - Ex. 08: Cálculo do valor de e^x (irracional) a partir da

$$e = e^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Rightarrow \mathbf{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}$$

- Obs: e = 2.7182818... (constante de Euler)
- Impossibilidade de determinação do valor exato da função

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- Truncamento
  - Trucando a série, por exemplo, após os oito primeiros termos obtemos:

$$\bar{e} = \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{7!} = 2.7182539$$

    - Primeiras quatro casas decimais coincidem com o valor de e.
    - Quantos mais termos da série de Taylor tomarmos, mais nos aproximamos do valor exato.

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- Erros de Truncamento e Arredondamento - Demonstração
  - Em um sistema que opera em ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x:
    - $x = f_x x 10^e + g_x x 10^{e-t}$ $(0,1 \leq f_x < 1$ e $0,1 \leq g_x < 1)$
      - Para $t = 4$ e $x = 234,57$, então:

$$x = 0,2345 \times 10^3 + 0,7 \times 10^{-1}$$
$$f_x = 0,2345$$
$$g_x = 0,7$$

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- No truncamento, $g_x x 10^{e-t}$ é desprezado e

$$\bar{x} = f_x \times 10^e$$

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| \times 10^{e-t} < 10^{e-t}$$

visto que $|g_x| < 1$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|g_x| \times 10^{e-t}}{|f_x| \times 10^e} < \frac{10^{e-t}}{0{,}1 \times 10^e} = 10^{-t+1}$$

pois 0,1 é o menor valor possível para f_x

Tipos

- No arredondamento simétrico (forma mais utilizada):

$$\bar{x} = \begin{cases} f_x \times 10^e & \text{, se } |g_x| < \dfrac{1}{2} \quad (g_x \text{ é desprezado}) \\ f_x \times 10^e + 10^{e-t} & \text{, se } |g_x| \geq \dfrac{1}{2} \quad (\text{soma “1” ao último dígito de } f_x) \end{cases}$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

Se $|g_x| < \frac{1}{2}$

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x| \times 10^{e-t} < \frac{1}{2} \times 10^{e-t}$$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} = \frac{|g_x| \times 10^{e-t}}{|f_x| \times 10^{e}} < \frac{0{,}5 \times 10^{e-t}}{0{,}1 \times 10^{e}} = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

Se $|g_x| \geq \frac{1}{2}$

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = \left|\left(f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-t}\right) - \left(f_x \times 10^e + 10^{e-t}\right)\right|$$

$$|EA_x| = \left|g_x \times 10^{e-t} - 10^{e-t}\right| = |(g_x - 1)| \times 10^{e-t} \leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t}$$

e

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|\bar{x}|} \leq \frac{1/2 \times 10^{e-t}}{\left|f_x \times 10^e + 10^{e-t}\right|} < \frac{1/2 \times 10^{e-t}}{|f_x| \times 10^e} < \frac{1/2 \times 10^{e-t}}{0{,}1 \times 10^e} = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- Erros de Truncamento e Arredondamento

  - Sistema operando em ponto flutuante - Base 10

    - Erro de Truncamento

$$|EA_x| < 10^{e-t} \quad \text{e} \quad |ER_x| < 10^{-t+1}$$

    - Erro de Arredondamento

$$|EA_x| \le \frac{1}{2} \times 10^{e-t} \quad \text{e} \quad |ER_x| < \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

e - nº de dígitos inteiros
t - nº de dígitos

Métodos Numéricos

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

- Sistema de aritmética de ponto flutuante de 4 dígitos, precisão dupla

Ex. 09: Seja $x = 0,937 \times 10^4$ e $y = 0,1272 \times 10^2$.

Calcular x + y

- Alinhamento dos pontos decimais antes da soma

  $x = 0,937 \times 10^4$ e $y = 0,001272 \times 10^4$,

  $x+y = 0,938272 \times 10^4$

- Resultado com 4 dígitos

  Arredondamento : $\overline{x+y} = 0,9383 \times 10^4$

  Truncamento: $\overline{x+y} = 0,9382 \times 10^4$

Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos

Ex. 10: Seja $x = 0{,}937 \times 10^4$ e $y = 0{,}1272 \times 10^2$.

Calcular x.y

$x.y = (0{,}937 \times 10^4) \times (0{,}1272 \times 10^2)$

$x.y = (0{,}937 \times 0{,}1272) \times 10^6$

$x.y = 0{,}1191864 \times 10^6$

- Resultado com 4 dígitos

Arredondamento: $\overline{x.y} = 0{,}1192 \times 10^6$

Truncamento: $\overline{x.y} = 0{,}1191 \times 10^6$

Tipos

Ex. Seja um sistema que opera em aritmética de ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x, escrito na forma: $x = f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-t}$ onde $0.1 \leq f_x < 1$ e $0 \leq g_x < 1$.

- Calcule os erros absolutos de truncamento e arredondamento para:
  - t = 4
  - x = 8120.95