Cálculo numérico

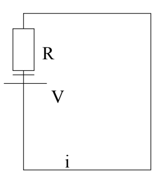
Professor Walter Cunha

Representação numérica

Um conjunto de **ferramentas** ou **métodos** usados para se obter a solução de problemas matemáticos de forma **aproximada**. Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos **numericamente**.

Exemplo

Um circuito elétrico composto de uma fonte de tensão e um resistor.
Desejamos obter a corrente que circula no circuito, dado o valor da tensão *V* e da resistência *R*.



Lei de Kirchoff

V = R i

Ou seja, i = V / R

Para *V=10 V* e *R=100 Ω*, **i=0,1 a.**

Exemplos

Porém, digamos que um outro componente eletrônico seja incluído no circuito: um diodo semicondutor. Esse dispositivo tem uma curva característica, isto é, a tensão nesse componente em função da corrente, que é dada por:

$$v(i) = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{i}{I_s}+1\right)$$

Resulta na seguinte equação:

$$V - R\cdot i - \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{i}{I_s}+1\right) = 0$$

Exemplos

Tornou-se difícil se obter uma expressão para *i*, principalmente quando comparado ao caso anterior, quando tínhamos simplesmente *i=V/R*.

A solução está na utilização de métodos numéricos que serão aprendidos neste curso.

Pontos Importantes

- **Escolher o método** a ser utilizado, procurando aquele que é mais adequado para o seu problema. Que vantagens cada método oferece e que limitações eles apresentam;

- Saber **avaliar a qualidade da solução obtida**. Para isso, é importante ele saber exatamente o que está sendo feito pelo computador ou calculadora, isto é, como determinado método é aplicado.

Objetivos

➢ Apresentar diversos métodos numéricos para a resolução de diferentes problemas matemáticos. Pretende-se deixar bem claro a importância desses métodos, mostrando:

✓A essência de um método numérico;
✓A diferença em relação a soluções analíticas;
✓As situações em que eles devem ser aplicados;
✓As vantagens de se utilizar um método numérico;
✓As limitações na sua aplicação e confiabilidade na solução obtida.

Objetivos

➢ Melhorar a familiarização e "intimidade" do aluno com a matemática, mostrando seu lado prático e sua utilidade no dia-a-dia de um engenheiro.

➢ Apresentar ao aluno maneiras práticas de se desenvolver e utilizar métodos numéricos.

➢ Treinar o aluno a aprender outros métodos numéricos por conta própria. No seu dia-a-dia profissional, ele pode se deparar com um problema cuja solução depende de um método numérico que não foi visto no curso.

Exemplos

Qual o valor de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ = *1,41* ou *1,4142* ou ainda *1,41421356237*

Em uma máquina digital, como uma calculadora ou um computador, os números não são representados na base decimal. Eles são representados na base binária, ou seja, usam o número 2 como base. Na base binária existem somente 2 números: 0 e 1. Portanto, a base binária é usada porque essas máquinas utilizam-se de sinais elétricos, sendo o 0 para ausência de sinal e o número 1 a presença do sinal elétrico.

Ponto fixo e Ponto flutuante

Números inteiros – ponto fixo

Sinal	Dígitos

Números reais – ponto flutuante

Sinal	Mantissa	Posição ponto

$$\pm(0.d_1d_2d_3...d_{-t}) \times b^e$$

$d_1d_2d_3...d_{-t}$ é uma fração na base b, também chamada de **mantissa**, com $0 \le d_i \le b-1$, para todo $i = 1,2,3,...,t$, sendo t o número máximo de dígitos da mantissa e é um expoente que varia em um intervalo dado pelos limites da máquina utilizada.

Ponto fixo e Ponto flutuante

Decimal	Ponto flutuante	Mantissa	Base	Exp
1532	$0.1532 * 10^4$	0.1532	10	4
15.32	$0.1532 * 10^2$	0.1532	10	2
0.00255	$0.255 * 10^{-2}$	0.255	10	-2
10	$0.1 * 10^2$	0.1	10	2

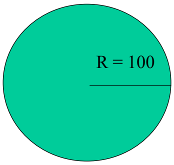
Linguagem de programação

Em qualquer linguagem é possível especificar a representação que deve ser usada para os números a serem armazenados em uma dada variável. Na linguagem C, para **números inteiros** - *int* 2 bytes => (-32768 , 32767).

No caso da representação de **ponto flutuante** - *float* => número máximo de dígitos na base binária igual a 24 ($t=24$) e expoente entre –126 e 127. Portanto, uma variável declarada como *float* pode armazenar números reais entre $\sim10^{-38}$ e $\sim10^{38}$.

Erro numérico

Cálculo da área de um círculo:



O primeiro passo é formular um **modelo matemático** para o nosso **sistema físico** e encontrar a solução do problema representado por esse modelo.

A = Pi R ^{2}

31400
31416
31415,92654

Erro numérico

Qual o valor correto?

Depende da confiabilidade esperada !

Erro absoluto = Valor real – Valor aproximado

Quanto < erro > precisão

Erro numérico

Se o resultado de uma operação é 2*.123.542,7* e o valor esperado era *2.123.544,5*.

O erro absoluto neste caso é *1,8*. Comparada com o valor real, essa diferença é bem pequena, portanto, podemos considerar o resultado preciso.

Se o resultado de uma operação é *0,234* e o resultado esperado era *0,128*. Desta vez o erro absoluto será igual a *0,106* , porém o resultado é bastante impreciso.

Erro relativo = erro absoluto / valor real

Erro numérico

Nos exemplos anteriores qual o erro relativo de cada resultado?

No primeiro caso o erro relativo é de:
0,0000008 ou *0,00008%*

No segundo caso o relativo é de:
0,83 ou *83%.*

Tipos de erro

Toda medida experimental apresenta uma incerteza.
A solução do problema será influenciada pela mesma.

Portanto, logo de início, existem diversos fatores que introduzem incertezas na solução numérica do problema.
Esse tipo de erro é chamado de **erro inicial**.

Erro inicial: Erro gerado no momento de uma medição realizada através de um instrumento.

Tipos de erro

A inevitável limitação na representação de números irracionais, introduz erros no resultado.

Esse tipo de erro é chamado de **erro de arredondamento**.

como mostrado anteriormente: $\sqrt{2}$

Erro de arredondamento: Erro gerado pela aproximação de um resultado devido a dificuldade de representação.

Tipos de erro

O calculo do valor de e^x. Como a *exponencial* é uma função que pode ser representada por uma série infinita dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \Lambda + \frac{x^n}{n!} + \Lambda$$

Portanto, mais uma vez, teremos que fazer uma aproximação, que levará a um erro no resultado final de e^x.

Neste caso, faremos um **truncamento** dessa série.

Erro de truncamento: Erro gerado pelo truncamento de um resultado inexato.

Propagação e condicionamento

Vamos supor que queremos calcular: $\sqrt{2} - e^x$

O resultado da operação de subtração apresentará um erro que é proveniente dos erros nos valores de cada termo separadamente. Em outras palavras, os erros nos valores se **propagam** para o resultado.

Podemos concluir então que, ao se resolver um problema numericamente, a cada etapa e a cada operação realizada, devem surgir diferentes tipos de erros gerados das mais variadas maneiras, e estes erros se propagam e determinam o erro no resultado final obtido.

Propagação e condicionamento

O conceito de propagação de erros é muito importante pois, além de determinar o erro final de uma operação numérica, ele também determina a **sensibilidade** de um determinado problema ou método numérico.

Se uma pequena variação nos dados de entrada de um problema levar a uma grande diferença no resultado final, considera-se que essa operação é **mal-condicionada**, ou seja, existe uma grande propagação de erros nessa operação. Por outro lado, se uma pequena variação nos dados de entrada leva a apenas uma pequena diferença no resultado final, então essa operação é **bem-condicionada**.

Propagação e condicionamento

Operação mau-condicionada: Quando a operação não converge para um resultado confiável.

Operação bem-condicionada: Quando a operação converge para o resultado esperado.

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Computadores precisam representar os números com uma **quantidade finita de algarismos**.

Seja um sistema que opera com em aritmética de ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x, escrito na forma:

$\mathbf{X = fx_{*} \, 10^{e} \quad + \quad gx_{*} \, 10^{e-t}}$

onde $0,1 <= fx < 1$ e $0 <= gx < 1$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Vamos considerar a base decimal ($b=10$) e uma mantissa de 4 algarismos ($t=4$).

O número 734,68, teríamos que truncar para $0,7346\times10^3$

$fx = 0,7346$ e $gx = 0,8$

erro absoluto de $0,8\times10^{-1}$

Generalizando: $\quad erro < b^{e-t}$
(truncamento)

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

ou arredondar para $0,7347 \times 10^{3}$ com um erro de $0,2 \times 10^{-1}$

Generalizando: $erro < \frac{1}{2} \times b^{e-t}$
(arredondamento)

Portanto, para uma representação numérica com $t=53$ (como no caso da maioria dos computadores) esse erro é muito pequeno.

Apesar de pequeno, é importante lembrar que ele se **propagará** nas operações aritméticas realizadas pelo computador.

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

E o erro relativo ?

ERx = Erro Absoluto / X

$$\frac{gx * 10^{e-t}}{fx * 10^{e}} = \frac{gx * 10^{e-t}}{0,1 * 10^{e}} = gx * 10^{-t+1}$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Resumindo :

$|EA| < b^{e-t}$ (truncamento)
$|EA| < ½ \, b^{e-t}$ (arredondamento)
$|ER| < b^{-t+1}$ (truncamento)
$|ER| < ½ \, b^{-t+1}$ (arredondamento)

Propagação e condicionamento

Somando 6563 (= $0,6563 \times 10^{4}$) e 3,375 (= $0,3375 \times 10^{1}$) no nosso computador fictício de mantissa com 4 algarismos.

O valor 6566,375 será calculado $0,6566 \times 10^{4}$ = 6566.

A soma de dois números exatos, o resultado da soma não será exata. Mesmo pequeno, ao se propagar esse erro precisa ser considerado.

Exercícios

Seja um sistema que opera com em aritmética de ponto flutuante de t = 4 dígitos na base 10 calcule os erros absolutos e relativos por truncamento e arredondamento dos seguintes valores:

a) 123,456
b) 374,3 + 3,345
c) 124,34 + 0,1234
d) 22,12 * 0,123
e) 0,3212 *12,32

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de Soma:

$EA \Rightarrow x + y = X + EA_x + Y + EA_y = (X + Y) + EA_x + EA_y$

$\mathbf{EA_{x+y} = EA_x + Ea_y}$

$$ER_{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{X+Y} = \frac{EA_x}{X}\left(\frac{X}{X+Y}\right) + \frac{EA_y}{Y}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$$

$$\mathbf{ER_{x+y} = ER_x \left(\frac{X}{X+Y}\right) + ER_y \left(\frac{Y}{X+Y}\right)}$$

Exercícios

1) Demonstre o erro absoluto e relativo para a operação de subtração
2) Demonstre o erro absoluto e relativo para a operação de multiplicação

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de Subtração:

EA => $x - y = X + EA_x - Y + EA_y = (X - Y) + EA_x - EA_y$

$\mathbf{EA_{x-y} = EA_x - EA_y}$

$$ER_{x-y} = \frac{EA_{x-y}}{X - Y} = \frac{EA_x}{X}\left(\frac{X}{X - Y}\right) - \frac{EA_y}{Y}\left(\frac{Y}{X - Y}\right)$$

$$\mathbf{ER_{x-y} = ER_x\left(\frac{X}{X - Y}\right) - ER_y\left(\frac{Y}{X - Y}\right)}$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de multiplicação:

$x * y = (X + EA_x) * (Y + EA_y) =$

$X * Y + X * EA_y + Y * EA_x + EA_x * EA_y =$

$\mathbf{EA_{x*y} = X * EA_y + Y * EA_x} + EA_x * EA_y$, onde $EA_x * EA_y \Rightarrow 0$

$$ER_{x*y} = \frac{X * EA_y + Y * EA_x}{X * Y} = \frac{EA_x}{X} + \frac{EA_y}{Y}$$

$\mathbf{ER_{x*y} = ER_x + ER_y}$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de divisão:

$$x / y = (X + EA_x) / (Y + EA_y) = \frac{(X + EA_x)}{Y} * \frac{Y}{(Y + EA_y)} =$$

$$\frac{(X + EA_x)}{Y} * \frac{1}{1 + \frac{EAy}{Y}}$$ considerando o 2º termo como uma uma serie infinita, Serie.doc

$$X / Y \cong \frac{(X + EA_x)}{Y} * \left(1 - \frac{EA_y}{Y}\right)$$

$$\mathbf{EA_{x/y} = \frac{Y * EA_x - X * EA_y}{Y^2}}$$

Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

Operação de divisão:

$$ER_{x/y} = \frac{(Y * EA_x - X * EA_y)}{Y^2} * \frac{Y}{X}$$

$$\mathbf{ER_{x/y} = \frac{EAx}{X} - \frac{EAy}{Y}}$$

Exercícios

1) Considere um sistema com ponto flutuante de quatro dígitos e base decimal.

$X = 0{,}7237 * 10^4$ $Y = 0{,}2145 * 10^{-3}$ $Z = 0{,}2585 * 10^1$

Calcule o resultado e o erro relativo de :

a) $X + Y + Z$
b) $X - Y - Z$
c) X / Y
d) $(X * Y) / Z$
e) $X * (Y / Z)$

Exercícios

Converta para base decimal:
a)110010(2)
b)3452(6)
c)76342(7)
d)1AC(16)

Converta para binário:
a)345(10)
b)0,25(10)
c)0,1(10)

Faça as seguintes operações:
a)1100101(2) + 11111(2)
b)1100101(2) - 11111(2)
c)5453(6) + 2534(6)

Conversão para binário

Na conversão de números da base decimal para a base binária (usada por computadores) e vice-versa também ocorrem erros.

Um exemplo bastante peculiar é o número 0,1. Ao convertermos esse número da base decimal para a base binária obtemos como resposta:

$$(0,1)_{10} = (0,0001100110011...)_2$$

O que gera um truncamento. $\sum_{k=1}^{100} 0,1$ não dará 10

Conversão para binário

$1/8 = 0,125 \quad = 1x10^{-1} + 2x10^{-2} + 5x10^{-3}$
$1/9 = 0,111... = 1x10^{-1} + 1x10^{-2} + 1x10^{-3} + ... + 1x10^{-\alpha}$

$R = b_1 \text{ x } 2^{-1} + b_2 \text{ x } 2^{-2} + b_3 \text{ x } 2^{-3} + ... + b_k \text{ x } 2^{-k}$
onde $b_j = 0$ ou 1 $\forall$ j e k tende α.

$$R = \sum_{k=1}^{\alpha} b_k \text{ x } 2^{-k}$$

$$2 \text{ x } R = b_1 + \sum_{k=1}^{\alpha} b_k \text{ x } 2^{-k}$$

Onde b1 é a parte inteira em binário.

Exemplos

$0,5_{(10)} = 5 \text{ x } 10^{-1}$

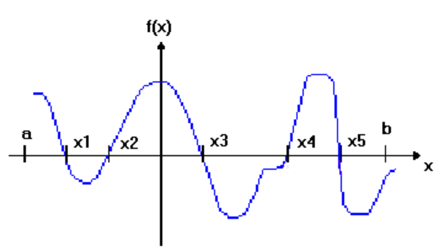
$2 \text{ x } 0,5 = 1 \Rightarrow 0,1_{(2)}$

$0,125_{(10)} = 1 \text{ x } 10^{-1} + 2 \text{ x } 10^{-2} + 5 \text{ x } 10^{-3}$

$2 \text{ x } 0,125 = 0,25 \quad \Rightarrow 0,0_{(2)}$
$2 \text{ x } 0,25 = 0,5 \quad \Rightarrow 0,00_{(2)}$
$2 \text{ x } 0,5 = 1 \quad \Rightarrow 0,001_{(2)}$

Zero de Funções

Dada uma função *f(x)*, dizemos que α é raiz, ou zero de *f(x)* se e somente *f(α)=0*



Zero de Funções

As raízes de uma função podem ser encontradas analiticamente, ou seja, resolvendo a equação *f(x)=0* de maneira exata, como mostrado nos exemplos a seguir:

1−) $f(x) = x - 3$

$x = 3$ é raíz de $f(x)$ pois :

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2−) $g(x) = \frac{8}{3}x - 4$

$$\frac{8}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}x = 4 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ é a raíz de $g(x)$ pois :

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{3}.\frac{3}{2} - 4 = 0$$

Zero de Funções

$3-)\quad h(x) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

tanto $x = 2$ quanto $x = 3$ são soluções de $h(x)$ pois :

$h(3) = 3^2 - 5.3 + 6$ $\qquad$ $h(2) = 2^2 - 5.2 + 6$

$h(3) = 15 - 15 = 0$ $\qquad$ $h(2) = 10 - 10 = 0$

Zero de Funções

Porém, nem sempre é possível se encontrar analiticamente a raiz de uma função, como nos casos a seguir:

1-) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

2-) g(x) = sem(x) + ex

3-) h(x) = x + ln(x)

Zero de Funções

Nestes casos precisamos de um método numérico para encontrar ***uma estimativa*** para a raiz da função estudada, ou seja, um valor tão aproximado quando se deseje.

Tais métodos devem envolver as seguintes etapas:

- Determinação de um intervalo em *x* que contenha pelo menos uma raiz da função *f(x)*, ou seja, isolamento das raízes*;*
- Calculo da raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.

Zero de Funções

Métodos iterativos:

Processos se caracterizam pela **repetição** de determinada operação. A idéia nesse tipo de processo é repetir determinado cálculo várias vezes, obtendo-se, a cada repetição ou **iteração,** um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. A cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Zero de Funções

Estimativa inicial: para iniciar um processo iterativo, é preciso que se tenha uma estimativa inicial do resultado do problema.

Convergência: a cada iteração feita, o resultado deve ser mais próximo daquele esperado, isto é, é preciso estar bem condicionado.

Critério de parada: É preciso parar as iterações em um determinado instante. Para isso, devemos utilizar um certo critério, que vai depender do problema a ser resolvido e da precisão que precisamos obter na solução.

Zero de Funções

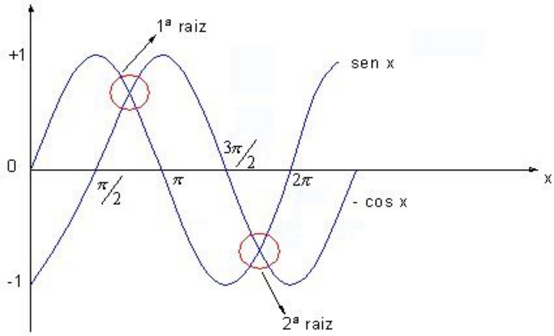
Isolamento de raízes:

Para determinarmos o número e a localização aproximada de raízes de uma função, a fim de obtermos uma estimativa inicial a ser usada nos processo iterativos, podemos examinar o comportamento dessa função através de um esboço gráfico.

Por exemplo, f(x) = sen(x) + cos(x)

sen(x) + cos(x) = 0 , logo sen(x) = -cos(x)

Zero de Funções



Zero de Funções

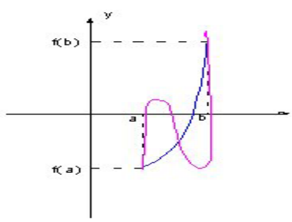
- Pelo gráfico, vemos que a função $g(x)$ irá interceptar a função $h(x)$ entre $\pi/2$ e π e entre $3\pi/2$ e 2π. Portanto, podemos afirmar que existe uma raiz de $f(x)$ no intervalo $[\pi/2, \pi]$ e no intervalo $[3\pi/2, 2\pi]$.

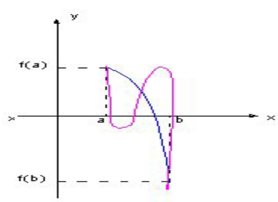
  Porém, nem sempre o esboço gráfico é a forma mais prática de se obter um intervalo que contém pelo menos uma raiz da função $f(x)$. Muitas vezes é preciso se utilizar um método algébrico. Para isso, vamos recorrer ao teorema de Bolzano.

Zero de Funções

- **Teorema de Bolzano**

  Seja uma função f(x) contínua em um intervalo [a,b], tal que, $f(a) * f(b) < 0$. Então a função f(x) possui pelo menos uma raiz no intervalo [a,b].





Exercícios

- Seja a função $f(x) = x - ln(x) - 3,2$. Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x de forma a descobrir o intervalo de uma raiz.

X	1	2	3	4	5
F(x)	-2,2	-1,89	-1,29	-0,58	0,19

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo [4,5].

Exercícios

- Determine o intervalo para pelo menos uma raiz das seguintes funções utilizando bozano:

  1) $x^3 - 9x + 3$

  2) $x^3 - 2x^2 + 2x$

  3) $\sqrt{x} - 5 * e^{-x}$

  4) $x * \log x - 1$

Zero de Funções

- **Método da Dicotomia ou Bisseção**

  Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a,b]$, e α uma raiz de $f(x)$ isolada neste intervalo.

$$\left[a; \frac{a+b}{2}\right] \quad e \quad \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$$

  Inicialmente, subdividimos este intervalo em suas duas metades, e verificamos se a raiz está contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial, usando o teorema de Bolzano.

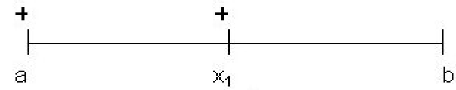
Zero de Funções

Método da Dicotomia ou Bisseção

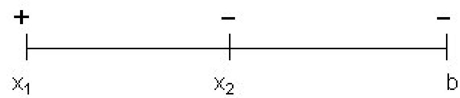
Repetimos o processo para aquela metade que contém a raiz de *f(x)*. Como todo processo numérico, é importante estimarmos o erro nesse resultado obtido.

No caso do método da bisseção, o erro na estimativa será dado pela metade do comprimento do intervalo em estudo.

Zero de Funções



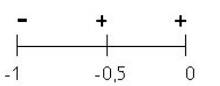
$$x_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right) \pm \frac{|b-a|}{2}$$



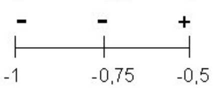
$$x_2 = \left(\frac{x_1+b}{2}\right) \pm \frac{|b-x_1|}{2}$$

Exercícios

Determine uma raiz para a função $f(x) = e^x + x$ considerando um erro menor ou igual a 0,05.



$f(-1) = -0,63$
$f(0) = 1$ $\quad x_1 = -0,5 \pm 0,5$
$f(-0,5) = 0,11$



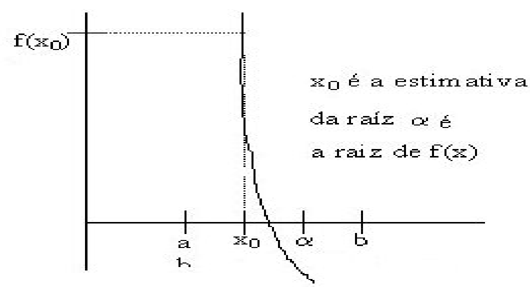
$f(-0,75) = -0,28 \quad x_2 = -0,75 \pm 0,25$

...

$f(-0,594) = -0,04 \quad x_5 = -0,594 \pm 0,032$

Exercícios

Critério de parada: $\left|\dfrac{b_k - a_k}{2}\right| \leq$ erro estipulado



Exercícios

Estimativa do número de iterações k:

$$|b_k - a_k| = \left|\frac{b_o - a_o}{2^k}\right| \quad \text{e} \quad \left|\frac{b_k - a_k}{2}\right| \leq \varepsilon \quad \text{logo} \quad 2\varepsilon \geq \left|\frac{b_o - a_o}{2^k}\right|$$

$$2^{k+1} \geq \frac{|b_o - a_o|}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \log\left(2^{k+1}\right) \geq \log\left(\frac{|b_o - a_o|}{\varepsilon}\right)$$

$$k \geq \frac{\log(|b_o - a_o|) - \log \varepsilon}{\log(2)} - 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

Também chamado de Método de Iteração Linear (MIL)

O método da iteração linear é um processo iterativo que apresenta vantagens e desvantagens em relação ao método da bissecção.
Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo [*a,b*] que contenha uma raiz de *f(x)*. O Método de Iteração Linear inicia-se reescrevendo a função *f(x)* como,

$f(x) = \varphi(x) - x$ **então,** **para** $f(x) = 0$**, teremos que:**

$f(x) = \varphi(x) - x = 0 \quad e \quad \varphi(x) = x$

ou seja, no ponto *x* que corresponde à raiz de *f(x)*, ao substituirmos o valor de *x* na função *φ(x)*, teremos como resultado o próprio valor de *x*. Portanto, a raiz de *f(x)* será o *ponto fixo* de *φ(x)*.

Método das Aproximações Sucessivas

Por exemplo, a função $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser reescrita como,

$f(x) = x^2 - 2 - x = \varphi(x) - x$, onde $\varphi(x) = x^2 - 2$.

Portanto, para encontrarmos a raiz de $f(x)$, podemos encontrar o valor numérico que ao substituirmos em $\varphi(x)$ retorna o próprio valor de x. Para encontrarmos esse valor de x, vamos utilizar um processo iterativo, onde começamos a calcular o valor de $\varphi(x)$ com um valor inicial de x, e recalculamos repetidamente o valor de $\varphi(x)$ sempre usando o resultado de uma dada iteração como a nova estimativa de x, ou seja, fazendo:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \tag{4.17}$$

onde, k é a ordem da iteração em que estamos (k = 0, 1, 2, 3, 4, ...). A função $\varphi(x)$ é chamada de função de iteração.

Método das Aproximações Sucessivas

Pode-se notar que dada uma função f(x) existem diversas funções de iteração que podem ser usadas no processo.

Exemplo: Encontre algumas funções de iteração a partir de

$f(x) = x^2 + \ln(x) - x + 1$.

Método das Aproximações Sucessivas

$$f(x) = x^2 + \ln(x) - x + 1$$

$$f(x) = 0$$
$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$
$$x = x^2 + \ln(x) + 1$$
$$\therefore\ \varphi(x) = x^2 + \ln(x) + 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$
$$\ln(x) = x - x^2 - 1$$
$$x = e^{(x - x^2 - 1)}$$
$$\therefore\ \varphi(x) = e^{(x - x^2 - 1)}$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 = 0$$
$$x.x = x - \ln(x) - 1 \qquad \div x$$
$$x = \frac{x - \ln(x) - 1}{x}$$
$$\therefore\ \varphi(x) = \frac{x - \ln(x) - 1}{x}$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$x^2 + \ln(x) - x + 1 + \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x = \cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1$$
$$x = arc\ \cos(\cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1)$$
$$\therefore \varphi(x) = arc\ \cos(\cos x - x^2 - \ln(x) + x - 1)$$

Método das Aproximações Sucessivas

Exemplo: Encontre uma estimativa para a raiz de :

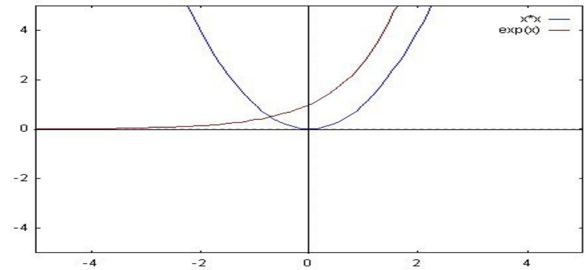
$$f(x) = x^2 - e^x$$

usando o método da iteração linear.

Método das Aproximações Sucessivas

Vamos iniciar a solução encontrando uma boa estimativa inicial para o valor da raiz de *f(x)*. Para isso, vamos usar o método gráfico para o isolamento de raízes. Escrevendo:

$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow g(x) = x^2 \text{ e } h(x) = e^x$$



Método das Aproximações Sucessivas

A partir do esboço gráfico acima, conclui-se que a raiz encontra-se no intervalo [-1,0]. Devemos agora escolher uma função de iteração $\varphi(x)$:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - e^x = 0$$

$$x = \pm\sqrt{e^x}$$

Método das Aproximações Sucessivas

Usando $\varphi(x) = -\sqrt{e^x}$ e $x_0 = -1$, temos :

$$x_0 = -1 \rightarrow \varphi(x_0) = \varphi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} = -0{,}606$$

$$x_1 = -0{,}606 \rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(-0{,}606) = -\sqrt{e^{-0{,}606}} = -0{,}738$$

$$x_2 = -0{,}738 \rightarrow \varphi(x_2) = \varphi(-0{,}738) = -\sqrt{e^{-0{,}738}} = -0{,}691$$

$$x_3 = -0{,}691 \rightarrow \varphi(x_3) = \varphi(-0{,}691) = -\sqrt{e^{-0{,}691}} = -0{,}707$$

$$x_4 = -0{,}707$$

Método das Aproximações Sucessivas

Substituindo os valores de x_k em *f(x)* para cada iteração *k*, vemos que a cada etapa nos aproximamos mais da raiz de *f(x)*, pois o valor dessa função fica mais próximo de zero a cada iteração:

x	$f(x) = x^2 - e^x$
-1	0,632
-0,606	-0,178
-0,738	0,067
-0,691	-0,024
-0,707	0,007

Convergência no MIL

A cada iteração podemos nos aproximar ou nos afastar da solução real. Portanto, antes de resolver um problema através desse método é preciso se verificar se haverá ou não a convergência:

Seja uma função *f(x)* contínua em um intervalo [*a,b*] e α uma raiz de *f(x)* contida em [*a,b*]. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração obtida a partir de *f(x)*.

Se:

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ forem contínuas em $[a,b]$;

ii) $|\varphi'(x)| < 1$ (para todo) $\forall\, x \in [a,b]$;

iii) $x_0 \in [a,b]$.

Então:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$$

Método das Aproximações Sucessivas

Exemplo: Deseja-se encontrar a raiz de $f(x) = x^2 + 0{,}96x - 2{,}08$
Para isto, pretende-se usar uma das seguintes funções de iteração:

$$\varphi_1(x) = \frac{2{,}08}{x + 0{,}96}$$

$$\varphi_1(x) = x^1 + 1{,}96\,x - 2{,}08$$

Vamos iniciar verificando a condição (i) para a função $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = \frac{2{,}08}{x + 0{,}96}$$

$$\varphi_1(x) = 2{,}08\,.(x + 0{,}96)^{-1}$$

$$\varphi_1'(x) = 0.(x + 0{,}96)^{-1} - 2{,}08\,.(x + 0{,}96)^{-2}.1$$

$$\varphi_1'(x) = -\frac{2{,}08}{(x + 0{,}96)^2}$$

Ambas as funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ são contínuas $\forall\, x \in$ R com $x \neq -0{,}96$.

Método das Aproximações Sucessivas

Em seguida, vamos verificar a condição (ii) para $\varphi_1(x)$.

$$|\varphi_1'(x)| < 1$$

$$\left| -\frac{2{,}08}{(x + 0{,}96)^2} \right| < 1$$

$$\frac{|-2{,}08|}{|(x + 0{,}96)^2|} < 1$$

$$\frac{2{,}08}{(x + 0{,}96)^2} < 1$$

Método das Aproximações Sucessivas

$$2{,}08 < (x + 0{,}96)^2$$

$$2{,}08 < x^2 + 1{,}92\,x + 0{,}9216$$

$$x^2 + 1{,}92\,x + 0{,}9216 > 2{,}08$$

$$x^2 + 1{,}92\,x - 1{,}1584 > 0$$

a condição (ii) do teorema da convergência é satisfeita.

Método das Aproximações Sucessivas

Vamos encontrar as raízes da função acima ($x^2 + 1.92x - 1{,}1584$) e, como ela se trata de uma parábola com concavidade para cima, sabemos que a função será positiva para valores menores que a raiz de menor valor (x_1) e valores maiores que a raiz de maior valor (x_2), como ilustrado a seguir:

Método das Aproximações Sucessivas

As raízes da função são:

$$x^2 + 1{,}92\,x - 1{,}1584 = 0$$

$$\Delta = 8{,}32$$

$$x = \frac{-1{,}92 \pm \sqrt{8{,}32}}{2} =$$

$$x_1 = -2{,}40$$

$$x_2 = 0{,}48$$

Portanto:
$|\varphi_1'(x)| < 1$ para $x < -2{,}40$ ou $x > 0{,}48$.
Finalmente, concluímos que as condições (i) e (ii) do Teorema de Convergência são satisfeitas por:

$$\varphi_1(x) = \frac{2{,}08}{x + 0{,}96}$$ **no intervalo [1,2].**