Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial
Parte I

Prof. Jorge Cavalcanti – jorge.cavalcanti@univasf.edu.br

MATERIAL ADAPTADO DOS SLIDES DA DISCIPLINA CÁLCULO NUMÉRICO DA UFCG - *www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/*

Interpolação Polinomial

- A necessidade de obter um valor intermediário que não consta de uma tabela ocorre comumente.
- Dados experimentais, tabelas estatísticas e de funções complexas são exemplos desta situação.
- **Solução**: uso de métodos numéricos - **Interpolação**.

Interpolação Polinomial

- Dado um conjunto de dados $\{x_i, f(x_i)\}$ tal como na tabela abaixo:

x_i	0	1,5	3,0	4,5	6,0
$f(x_i)$	0,001	0,016	0,028	0,046	0,057

- Como obter o valor de $f(x)$ para um valor de x que não tenha sido medido, como por exemplo, $x=2.0$?

- Quando se deseja saber o valor de $f(x)$ para um x intermediário entre duas medidas, isto é, $x_i<x<x_{i+1}$, pode-se usar as técnicas da interpolação.

Interpolação Polinomial

- A interpolação consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos (***nós de interpolação***).

- A classe de funções escolhida para a interpolação é, *a priori,* arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

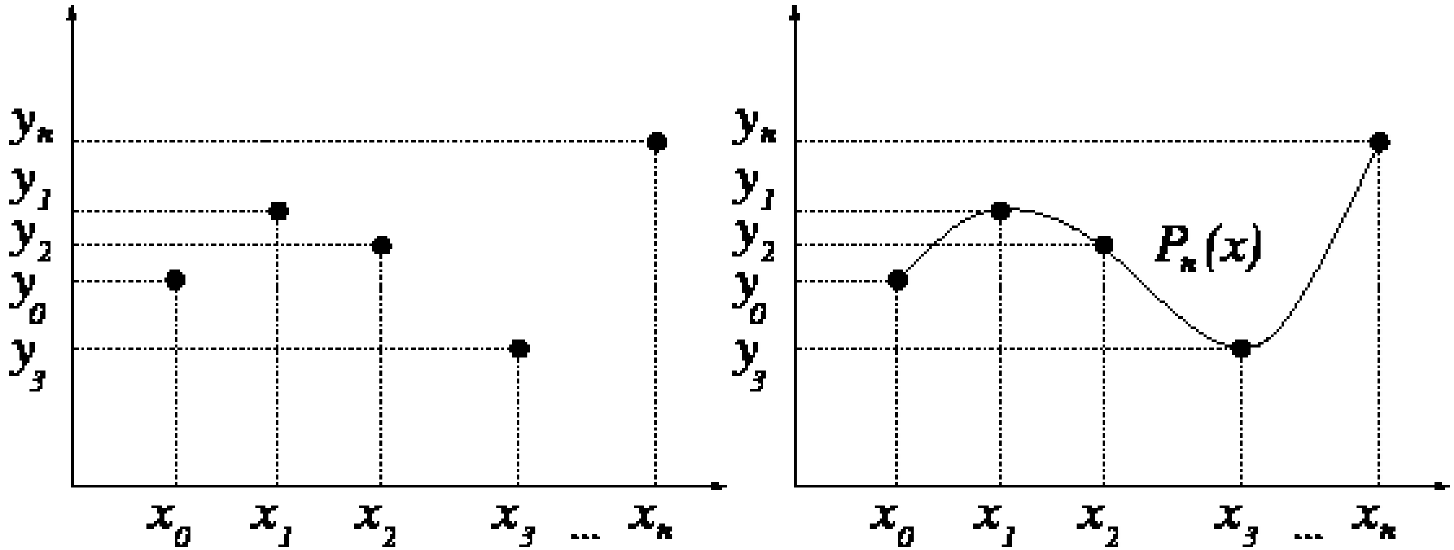
- Função a ser considerada:
  - **Polinômios** $\Rightarrow$ **Interpolação Polinomial**

Interpolação Polinomial

- Métodos de interpolação polinomial são utilizados para aproximar uma função ***f(x)***, principalmente nas seguintes situações:
  - conhece-se apenas valores de ***f(x)*** em apenas pontos discretos $x_0, x_1, x_2, \ldots$
  - ***f(x)*** é extremamente complicada e de difícil manejo,
  - ***f(x)*** não é conhecida explicitamente.

Interpolação Polinomial

- O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em:



- **Interpolar** um ponto ***x*** a um conjunto de ***n+1*** dados **$\{x_i, f(x_i)\}$,** significa calcular o valor de **f(x),** sem conhecer a forma analítica de ***f(x)*** ou ajustar uma função analítica aos dados.

Interpolação Polinomial

- **Interpolação polinomial** consiste em se obter um polinômio ***p(x)*** que passe por **todos os pontos** do conjunto de **(*n+1*)** dados $\{x_i, f(x_i)\}$, isto é:

$$p(x_0)=f(x_0)$$

$$p(x_1)=f(x_1)$$

$$\ldots$$

$$p(x_n)=f(x_n)$$

Obs: contagem começa em zero, portanto tem-se n+1 pontos na expressão.

Interpolação Polinomial

- Polinômio ***p(x)*** - **polinômio interpolador**.
  - Pode-se demonstrar que existe um único polinômio *p(x)* de grau menor ou igual a *n* que passa por todos os *(n+1)* pontos do conjunto $\{x_i, f(x_i)\}$.

- Portanto, pode-se escrever:

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \dots + a_n \cdot x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \cdots + a_n \cdot x_1^n = f(x_1)$$

...

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \cdots + a_n \cdot x_n^n = f(x_n)$$

- O conjunto de equações corresponde a um sistema linear de n+1 equações e n+1 variáveis.

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Interpolação linear**
  - O polinômio que interpola f(x) em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é único.
  - Existem diversas formas de se obter o polinômio. Uma delas é resolvendo o sistema linear obtido anteriormente $P_n(x_n) = f(x_n)$.
  - Teoricamente, todas as formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha depende da estabilidade do sistema, do tempo computacional etc.

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Interpolação linear**
  - Ex. Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

1. Grau do polinômio – como se conhecem os valores da função em três pontos (n+1, n=2), pode-se usar um polinômio de 2º Grau.

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

2. Construção do sistema linear:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1) \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f(x_2) \end{cases}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Interpolação linear**

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

3. Substituindo os valores da tabela dada:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1) \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2= 4 \\ a_0+a_1(0) + a_2(0)^2 = 1 \\ a_0+a_1(2)+a_2(2)^2= - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2= 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 +2 a_1 + 4a_2 = - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = -7/3 \\ a_2 = 2/3 \end{array}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Interpolação linear**

4. Então:

$$p(x)=1- 7/3x+2/3x^2$$

É o polinômio que interpola f(x) em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

- A determinação dos coeficientes do polinômio interpolador por meio da resolução de um sistema de equações lineares, apesar de ser conceitualmente simples, requer um certo esforço computacional.
- Não podemos esperar que essa seja a forma para qualquer sistema.
- Deve-se procurar metodologia alternativa ao modo da solução de sistemas de equações lineares.
- Outras formas:
  - a **forma de Lagrange**
  - a forma de Newton

Interpolação Polinomial

- **Forma de Lagrange**
  - Seja um conjunto de *n+1* dados $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador *p(x), de grau n* que passe por todos os pontos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
    - A Forma de Lagrange representa o polinômio interpolador diretamente, a partir dos pontos originais.
  - Seja um polinômio de grau n, dado pela forma genérica:

$$\mathbf{p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)}$$

$$p(x) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x)\cdot f(x_1) + \ldots + L_n(x)\cdot f(x_n)$$

  - Onde:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_k-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Interpolação Polinomial

- **Forma de Lagrange**
  - Para ilustrar e facilitar a compreensão do método, considere a seguinte tabela:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
f(x)	y_0	y_1	y_2	y_3

  - Os polinômios L_i são dados por:

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_3)}$$

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3)}$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3)}$$

$$\mathbf{L}_3(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2)}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Forma de Lagrange**
  - Ex. Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)+ L_2(x)f(x_2)$$

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_2)} = \frac{(\mathbf{x}-0)(\mathbf{x}-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{\mathbf{x}^2-2\mathbf{x}}{3}$$

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}1-\mathbf{x}_2)} = \frac{(\mathbf{x}+1)(\mathbf{x}-2)}{(0-(-1))(0-2)} = \frac{\mathbf{x}^2-\mathbf{x}-2}{-2}$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)}{(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)} = \frac{(\mathbf{x}+1)(\mathbf{x}-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{\mathbf{x}^2+\mathbf{x}}{6}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Forma de Lagrange**
  - Continuação Exemplo.

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)+ L_2(x)f(x_2)$$

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = 4\left(\frac{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}}{3}\right) + 1\left(\frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}}{6}\right)$$

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{7}{3}\mathbf{x} + \frac{2}{3}\mathbf{x}^2$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Forma de Lagrange**
  - Ex2. Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1

$$P_2(x)=L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)+ L_2(x)f(x_2)$$

Interpolação Polinomial

- **Forma de Newton**
  - A Forma de Newton usa o *Operador Diferenças Divididas*, na definição do seu polinômio interpolador.
- **Operador Diferenças Divididas**
  - Seja f(x) uma função tabelada em n+1 pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n.
  - O Operador Diferenças Divididas é definido por:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}_0] = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \rightarrow \text{Ordem Zero}$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = \frac{\mathbf{f}[\mathbf{x}_1] - \mathbf{f}[\mathbf{x}_0]}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0} \rightarrow \text{Ordem 1}$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \frac{\mathbf{f}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] - \mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]}{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0} \rightarrow \text{Ordem 2}$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = \frac{\mathbf{f}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] - \mathbf{f}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]}{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0} \rightarrow \text{Ordem 3}$$

Interpolação Polinomial

- **Forma de Newton**
  - A fórmula do polinômio interpolador de Newton com diferenças divididas é:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

  - Em que os coeficientes correspondem aos seus respectivos operadores.

$$f[x_0] = a_0$$
$$f[x_0, x_1] = a_1$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = a_2$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = a_n$$

Interpolação Polinomial

- **Forma de Newton**
  - **Operador Diferenças Divididas**

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2 \ldots x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \rightarrow \text{Ordem}\, n$$

  - Podemos tabelar de forma conveniente as diferenças divididas, para facilitar seu cálculo e recuperação.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Forma de Newton

Operador Diferenças Divididas

- Ex. Determine a tabela dos operadores de diferenças para os dados abaixo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$f[x_0] = f(x_0) \rightarrow f(-1) = 4$$

$$f[x_1] = f(x_1) \rightarrow f(0) = 1$$

$$f[x_2] = f(x_2) \rightarrow f(2) = -1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 4}{0 - (-1)} = -3$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{2 - 0} = -1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 + 3}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

X	Ord 0	Ord 1	Ord 2
x_0	4		
		-3	
x_1	1		2/3
		-1	
x_2	-1		

Interpolação Polinomial

Forma de Newton

- A Forma de Newton geral para o polinômio interpolador, considerando os operadores de diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x)=a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$f[x_0] = a_0$$
$$f[x_0, x_1] = a_1$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = a_2$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = a_n$$

- Para n=2:

$$P_2(x)= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x)= 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)(2/3)$$

$$P_2(x)= 2/3x^2 - 7/3x + 1$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- **Exercícios**
  - Seja a seguinte tabela de valores da função $f(x)=e^x$, a partir da qual se deseja obter a aproximação para o ponto *x=1,32*.

x	1,3	1,4	1,5
f(x)	3,669	4,055	4,482

  - Encontre o polinômio interpolador nas formas linear, Lagrange e Newton e encontre a respectiva aproximação do ponto x dado.