Exercícios de Matemática Computacional -Cap. 6 Interpolação e aproximação polinomial

..

Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior

Matemática Computacional

Tabela de Conteúdos - Capítulo 6

Tabela de Conteúdos - Capítulo 6

a) Determine o polinómio de terceiro grau da forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que "passa" pelos pontos $(1, 10)$, $(2, 26)$, $(-1, 2)$ e $(0, 4)$, utilizando o método de eliminação de Gauss para o resolver.

Sugestão Solução Resolução

a) Determine o polinómio de terceiro grau da forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que "passa" pelos pontos $(1, 10)$, $(2, 26)$, $(-1, 2)$ e $(0, 4)$, utilizando o método de eliminação de Gauss para o resolver.

Sugestão | Solução | Resolução

b) A seguinte tabela corresponde à função $f(x) = \frac{1}{x}$

x	3.35	3.4	3.5	3.6
$f(x)$	0.298507	0.294118	0.285714	0.277778

Encontre valores aproximados para $f(3.44)$ utilizando a interpolação linear, quadrática e cúbica. Calcule o valor do erro para cada um dos casos.

Sugestão | Solução | Resolução

a) Uma função g é conhecida exclusivamente através da tabela

x	-2	-1	1	2	3
$g(x)$	-16	0	2	0	4

i) Calcule uma estimativa de $g(1.65)$, usando o polinómio interpolador de lagrange de grau 2.

Sugestão   Solução   Resolução

a) Uma função g é conhecida exclusivamente através da tabela

x	-2	-1	1	2	3
$g(x)$	-16	0	2	0	4

i) Calcule uma estimativa de $g(1.65)$, usando o polinómio interpolador de lagrange de grau 2.

Sugestão Solução Resolução

ii) Determine a melhor estimativa de $g(1.65)$ que os dados permitem.

Sugestão Solução Resolução

a) Uma função g é conhecida exclusivamente através da tabela

x	-2	-1	1	2	3
$g(x)$	-16	0	2	0	4

i) Calcule uma estimativa de $g(1.65)$, usando o polinómio interpolador de lagrange de grau 2.

Sugestão Solução Resolução

ii) Determine a melhor estimativa de $g(1.65)$ que os dados permitem.

Sugestão Solução Resolução

b) Determine o polinómio de Lagrange, $P(x)$, que passa pelos pontos $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(1, -1)$ e $(3, 10)$. Calcule $P(0)$.

Sugestão Solução Resolução

c) Determine aproximações de $cos(\frac{\pi}{8})$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0, \pi]$. Compare os resultados obtidos e indique um majorante para o erro.

Sugestão Solução Resolução

c) Determine aproximações de $cos(\frac{\pi}{8})$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0, \pi]$. Compare os resultados obtidos e indique um majorante para o erro.

Sugestão Solução Resolução

d) A seguinte tabela lista a população, em milhares de pessoas, de 1930 a 1980 num certo país.

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1
população	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	22

Utilize o polinómio de Lagrange para estimar a população no ano 1965.

Sugestão Solução Resolução

e) O tempo t que um automóvel leva a passar de uma velocidade inicial, de 30 Km/h, para uma velocidade v, está descrito na seguinte tabela

$v, \ Km/h$	30	45	50	75
$t, \ s$	0.0	1.8	4.3	9.4

Estime o tempo necessário para atingir 48 Km/h.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

e) O tempo t que um automóvel leva a passar de uma velocidade inicial, de 30 Km/h, para uma velocidade v, está descrito na seguinte tabela

$v,\ Km/h$	30	45	50	75
$t,\ s$	0.0	1.8	4.3	9.4

Estime o tempo necessário para atingir 48 Km/h.

Sugestão Solução Resolução

f) Determine o polinómio de Lagrange, de grau 2 em x e de grau 3 em y, interpolador da função $f(x,y) = -2y^3 + x^2 + 4y^2 - 3x - 1$, no conjunto $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

Sugestão Solução Resolução

a) Suponha que é dada a seguinte tabela relativa à função$f(x) = \sqrt{x}$

x_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x_i)$	1.0000	1.0050	1.0100	1.0149	1.0189	1.0247

i) Construa a tabela da diferenças divididas.

Sugestão Solução Resolução

a) Suponha que é dada a seguinte tabela relativa à função$f(x) = \sqrt{x}$

x_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x_i)$	1.0000	1.0050	1.0100	1.0149	1.0189	1.0247

i) Construa a tabela da diferenças divididas.

Sugestão | Solução | Resolução

ii) Determine uma aproximação para $\sqrt{1.005}$.

Sugestão | Solução | Resolução

a) Suponha que é dada a seguinte tabela relativa à função$f(x) = \sqrt{x}$

x_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x_i)$	1.0000	1.0050	1.0100	1.0149	1.0189	1.0247

i) Construa a tabela da diferenças divididas.

Sugestão Solução Resolução

ii) Determine uma aproximação para $\sqrt{1.005}$.

Sugestão Solução Resolução

iii) Calcule o erro.

Sugestão Solução Resolução

b) Seja $f(x)$ dada pela seguinte tabela.

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

i) a fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas;

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

b) Seja $f(x)$ dada pela seguinte tabela.

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

i) a fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas;

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) a fórmula interpoladora de Newton das diferenças progressivas.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

c) Dada a tabela de valores de uma determinada função real

x	0	1	2	4
y	2	2	3	6

i) Determine o polinómio interpolador da função, de grau 2, usando a tabela das diferenças divididas, e calcule um majorante para o erro cometido.

Sugestão Solução Resolução

c) Dada a tabela de valores de uma determinada função real

x	0	1	2	4
y	2	2	3	6

i) Determine o polinómio interpolador da função, de grau 2, usando a tabela das diferenças divididas, e calcule um majorante para o erro cometido.

Sugestão Solução Resolução

ii) A partir do polinómio da alínea anterior, encontre o polinómio de grau 3 que interpola a função nos quatro pontos tabelados.

Sugestão Solução Resolução

c) Dada a tabela de valores de uma determinada função real

x	0	1	2	4
y	2	2	3	6

i) Determine o polinómio interpolador da função, de grau 2, usando a tabela das diferenças divididas, e calcule um majorante para o erro cometido.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) A partir do polinómio da alínea anterior, encontre o polinómio de grau 3 que interpola a função nos quatro pontos tabelados.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

iii) Indique a melhor estimativa de $y(1.85)$, que os dados permitem.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

d) Num teste para determinar a elongação dum material em função da temperatura obtiveram-se os seguintes valores

Temperatura, ^0C	70	78	83	90	95
Elongação, %	3	5	9	11	17

Preveja a elongação a obter se a temperatura for 80 ^0C.

Sugestão Solução Resolução

d) Num teste para determinar a elongação dum material em função da temperatura obtiveram-se os seguintes valores

Temperatura, ^0C	70	78	83	90	95
Elongação, %	3	5	9	11	17

Preveja a elongação a obter se a temperatura for 80 ^0C.

Sugestão Solução Resolução

e) A diferença de voltagem V que atravessa uma resistência para vários valores de corrente I foi medida e registada na tabela seguinte

I	0.25	0.75	1.25	1.5	2.0
V	-0.45	-0.60	0.70	1.88	6.0

Utilize a interpolação polinomial para estimar a voltagem para $I = 1.1$. Sugestão Solução Resolução

Tabela de Conteúdos

f) Foi feito um teste para relacionar a tensão e a deformação numa barra de alumínio, tendo-se obtido os seguintes valores

Tensão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Deformação	2	4	6	6	6	7	8	7.5	7	7.5	8	7.5

Usando a interpolação determine o valor da deformação correspondente a uma tensão de 7.4. Indique uma estimativa do erro cometido.

Sugestão   Solução   Resolução

a) Considere a tabela

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0
$f'(x)$	0	0	0

i) Defina a estimativa de $f(0.25)$ recorrendo ao polinómio interpolador de Hermite.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

a) Considere a tabela

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0
$f'(x)$	0	0	0

i) Defina a estimativa de $f(0.25)$ recorrendo ao polinómio interpolador de Hermite.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) Determine outra estimativa do mesmo valor, definindo o polinómio de Hermite unicamente no segmento que contém o 0.25

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

a) Considere a tabela

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0
$f'(x)$	0	0	0

i) Defina a estimativa de $f(0.25)$ recorrendo ao polinómio interpolador de Hermite.

Sugestão Solução Resolução

ii) Determine outra estimativa do mesmo valor, definindo o polinómio de Hermite unicamente no segmento que contém o 0.25

Sugestão Solução Resolução

iii) Use a fórmula interpoladora de Newton para calcular uma terceira aproximação de $f(0.25)$.

Sugestão Solução Resolução

a) Considere a tabela

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0
$f'(x)$	0	0	0

i) Defina a estimativa de $f(0.25)$ recorrendo ao polinómio interpolador de Hermite.

Sugestão Solução Resolução

ii) Determine outra estimativa do mesmo valor, definindo o polinómio de Hermite unicamente no segmento que contém o 0.25

Sugestão Solução Resolução

iii) Use a fórmula interpoladora de Newton para calcular uma terceira aproximação de $f(0.25)$.

Sugestão Solução Resolução

b) Construa o polinómio de Hermite de grau 3 para função g, definida a seguir.

x	1	2	3	4
$g(x)$	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{255}{4}$
$g'(x)$	4	$\frac{49}{4}$	$\frac{244}{9}$	$\frac{769}{16}$

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

a) Pretende-se interpolar a função $sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$, por um spline cúbico natural, numa malha uniforme.
Construa o spline cúbico natural que interpola a função nos nós $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$

Sugestão Solução Resolução

6.5 Spline Cúbico

a) Pretende-se interpolar a função $sin(\pi x)$ no intervalo $[0,1]$, por um spline cúbico natural, numa malha uniforme.
Construa o spline cúbico natural que interpola a função nos nós $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$

Sugestão | Solução | Resolução

b) Determine o spline cúbico natural que interpola a função $f(x) = x(1+x^2)$, nos pontos $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

Sugestão | Solução | Resolução

a) Pretende-se interpolar a função $sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$, por um spline cúbico natural, numa malha uniforme.
Construa o spline cúbico natural que interpola a função nos nós $x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{4}, \; x_2 = \frac{1}{2}, \; x_3 = \frac{3}{4}, \; x_4 = 1$

Sugestão Solução Resolução

b) Determine o spline cúbico natural que interpola a função $f(x) = x(1 + x^2)$, nos pontos $x_0 = -1, \; x_1 = 0, \; x_2 = 1$.

Sugestão Solução Resolução

c) De uma função real conhecem-se apenas os valores

x	0.0	0.5	0.7	1.0
$f(x)$	0.0	0.6	1.2	2.2

i) Determine o spline cúbico natural que interpola a função nos pontos dados.

Sugestão Solução Resolução

6.5 Spline Cúbico

a) Pretende-se interpolar a função $sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$, por um spline cúbico natural, numa malha uniforme.
Construa o spline cúbico natural que interpola a função nos nós $x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{4}, \; x_2 = \frac{1}{2}, \; x_3 = \frac{3}{4}, \; x_4 = 1$

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

b) Determine o spline cúbico natural que interpola a função $f(x) = x(1 + x^2)$, nos pontos $x_0 = -1, \; x_1 = 0, \; x_2 = 1$.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

c) De uma função real conhecem-se apenas os valores

x	0.0	0.5	0.7	1.0
$f(x)$	0.0	0.6	1.2	2.2

i) Determine o spline cúbico natural que interpola a função nos pontos dados.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) Calcule uma estimativa de $f(0.3)$.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

Tabela de Conteúdos

d) As funções de Bessel aparecem muitas vezes em engenharia e no estudo de campos eléctricos. Estas funções são bastante complexas de avaliar directamente, por isso são muitas vezes compilados em tabelas, por exemplo

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$J_0(x)$	0.3400	0.2239	0.1104	0.0025	0.0968

Estime $J_0(2.1)$

i) utilizando interpolação polinomial.

Sugestão   Solução   Resolução

d) As funções de Bessel aparecem muitas vezes em engenharia e no estudo de campos eléctricos. Estas funções são bastante complexas de avaliar directamente, por isso são muitas vezes compilados em tabelas, por exemplo

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$J_0(x)$	0.3400	0.2239	0.1104	0.0025	0.0968

Estime $J_0(2.1)$

i) utilizando interpolação polinomial.

Sugestão Solução Resolução

ii) utilizando splines cúbicos.

Sugestão Solução Resolução

d) As funções de Bessel aparecem muitas vezes em engenharia e no estudo de campos eléctricos. Estas funções são bastante complexas de avaliar directamente, por isso são muitas vezes compilados em tabelas, por exemplo

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$J_0(x)$	0.3400	0.2239	0.1104	0.0025	0.0968

Estime $J_0(2.1)$

i) utilizando interpolação polinomial.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) utilizando splines cúbicos.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

iii) Calcule os erros das aproximações anteriores sabendo que o valor exacto é 0.1666.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

a) Uma dada função só é conhecida através da tabela que se segue

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	1	-3	1	9

i) Recorrendo ao método dos mínimos quadrados, determine a equação da recta que melhor aproxima a função.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

a) Uma dada função só é conhecida através da tabela que se segue

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	1	-3	1	9

i) Recorrendo ao método dos mínimos quadrados, determine a equação da recta que melhor aproxima a função.

Sugestão Solução Resolução

ii) Calcule uma estimativa de $f(0.5)$.

Sugestão Solução Resolução

b) Os valores da função g são apresentados na tabela seguinte

x	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
$g(x)$	1.2	1.0	0.7	0.4	0.1	-0.2	-0.6

i) Aproxime a função g por uma parábola, recorrendo ao método dos mínimos quadrados, e defina uma estimativa de $g(0.65)$.

Sugestão Solução Resolução

b) Os valores da função g são apresentados na tabela seguinte

x	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
$g(x)$	1.2	1.0	0.7	0.4	0.1	-0.2	-0.6

i) Aproxime a função g por uma parábola, recorrendo ao método dos mínimos quadrados, e defina uma estimativa de $g(0.65)$.

Sugestão Solução Resolução

ii) Calcule o erro padrão da resposta da alínea anterior.

Sugestão Solução Resolução

b) Os valores da função g são apresentados na tabela seguinte

x	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
$g(x)$	1.2	1.0	0.7	0.4	0.1	-0.2	-0.6

i) Aproxime a função g por uma parábola, recorrendo ao método dos mínimos quadrados, e defina uma estimativa de $g(0.65)$.

Sugestão Solução Resolução

ii) Calcule o erro padrão da resposta da alínea anterior.

Sugestão Solução Resolução

iii) Determine a aproximação dos mínimos quadrados de grau 3 para a função g e defina uma outra estimativa para $g(0.65)$.

Sugestão Solução Resolução

c) Pretende-se aproximar $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[-1, 1]$ por um polinómio.

- **i)** Defina a parábola que melhor aproxima f no intervalo dado, recorrendo ao método dos mínimos quadrados e usando polinómios de Legendre.

  ▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

c) Pretende-se aproximar $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[-1, 1]$ por um polinómio.

- **i)** Defina a parábola que melhor aproxima f no intervalo dado, recorrendo ao método dos mínimos quadrados e usando polinómios de Legendre.

  Sugestão Solução Resolução

- **ii)** Calcule o erro padrão da resposta da alínea anterior.

  Sugestão Solução Resolução

c) Pretende-se aproximar $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[-1, 1]$ por um polinómio.

i) Defina a parábola que melhor aproxima f no intervalo dado, recorrendo ao método dos mínimos quadrados e usando polinómios de Legendre.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

ii) Calcule o erro padrão da resposta da alínea anterior.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

iii) Calcule o erro cometido em $x = 0.7$.

▸ Sugestão ▸ Solução ▸ Resolução

d) Encontre a função do tipo $y = 10^{c_0 + c_1 x}$ que melhor se aproxima, segundo os mínimos quadrados, aos dados da tabela seguinte

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.01	0.1	10	100

Sugestão Solução Resolução

d) Encontre a função do tipo $y = 10^{c_0 + c_1 x}$ que melhor se aproxima, segundo os mínimos quadrados, aos dados da tabela seguinte

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.01	0.1	10	100

Sugestão Solução Resolução

e) É sabido que a maleabilidade do plástico varia em função do tempo gasto no tratamento térmico. A seguinte tabela foi obtida através de dados experimentais.

tempo	10	15	20	25	40	50	55	60	75
maleabilidade	4	20	18	50	30	48	80	60	78

Encontre a recta que melhor se adapta aos dados. Utilize a alínea anterior para estimar a maleabilidade ao fim de 30 min.

Sugestão Solução Resolução

Tabela de Conteúdos

6.6 Método dos Mínimos Quadrados

f) Os dados seguintes foram recolhidos para determinar a relação entre a pressão e a temperatura de uma quantidade fixa de 1 kg de nitrogénio.

$T\ ^0C$	-20	0	20	40	50	70	110	120
$p\ N/m^3$	7500	8104	8700	9300	9620	10200	11200	11700

Sabendo que o volume é 10 m^3 aplique a lei para os gazes ideais $pV = nRT$ e determine R com base nos dados. (note que T deve estar expresso em graus Kelvin)

Sugestão Solução Resolução

Resolução

1

▸ Voltar para a Questão 5.1

Resolução

2

Voltar para a Questão 5.1

Resolução

3 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Resolução

4 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Resolução

5 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Resolução

6 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Resolução

7 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Resolução

8 ▸ Voltar para a Questão 5.2

Solução/Resolução

Solução/Resolução indisponível