Cálculo Numérico – Versão Atualizada

2. Teoria dos Erros

- Aritmética de Ponto Flutuante

2.1. Representação Numérica nas Máquinas Computacionais

dt = Número de dígitos

Número = $(0,d1d2...dt) \times B^{e}$ e = Expoente

Mantissa B = Base

Aonde:

d1 ≠ 0;

exp ϵ [m, M] ; m = limitante inferior do expoente; M = limitante superior do expoente

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

Exercícios 1): Represente os números abaixo em aritmética de ponto flutuante. Considere t = 3 dígitos no sistema computacional.

a) $235{,}89_{(10)} =$
b) $101{,}01_{(2)} =$
c) $0{,}000875_{(10)} =$

2.2. Arredondamento e Truncamento de Aritmética de Ponto Flutuante

Tipos de Arredondamento: Matemático; Estatístico e ABNT.

Critério Matemático:

Quando a casa decimal seguinte àquela que vamos arredondar for 0, 1, 2, 3 ou 4, esta casa decimal permanece como está. Se a casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9, somamos 1 à casa decimal a ser arredondada.

Ex.: a) $0{,}78645_{(10)} = 0{,}786$;

b) $0{,}4545_{(10)} = 0{,}455$

c) $0{,}4575_{(10)} = 0{,}458$

d) $0{,}4548_{(10)} = 0{,}455$

Critério Estatístico:

Esse procedimento é denominado arredondamento e, conforme resolução 886/66 da fundação IBGE deve seguir os seguintes critérios:

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, não se altera o último algarismo a permanecer.

Exemplos: Se temos 25,62489 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 4, ficando 25,62

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se em uma unidade o último algarismo a permanecer.

Exemplo: Se temos 75,24623 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 6 porém, aumentamos uma unidade ao 4 que é o último algarismo a permanecer. Ficando 75,25.

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for o 5, temos que observar o seguinte: a) se após o 5 aparecer, em qualquer casa decimal, pelo menos um algarismo diferente de zero, aumenta-se uma unidade ao último algarismo a permanecer.

Exemplos: 54,265003 fica 54,27

12,4851 fica 12,49

b) se após o 5 não aparecer mais nenhum algarismo ou se aparecer apenas zero, somente será acrescentado uma unidade ao último algarismo a permanecer se ele for ímpar.

Exemplos: 18,145 fica 18,14

28,4650000 fica 28,46

41,375 fica 41,38

0,775000 fica 0,78

Critério ABNT:

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for > 5, então (soma +1);

Se for < 5, então (mantém o dígito)

Se for =5, então (Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

Exercícios 2): Calcule o arredondamento e truncamento da máquina computacional. Considere **t = 3 dígitos**, numa **base B = 10**, em uma máquina que opera com **Padrão ABNT** de arredondamento.

a) $235{,}89_{(10)}$ =
b) $235{,}39_{(10)}$=
c) $235{,}59_{(10)}$=
d) $234{,}59_{(10)}$=
e) $12{,}76_{(10)}$=
f) $12{,}74_{(10)}$=

2.3. Overflow e Underflow - SPF (Sistema de Ponto Flutuante)

t = Número de dígitos
SPF(B, t, m, M) exp ∊ [m;M], máquina opera por arredondamento ABNT
B = Base

Exercícios 3): Calcule se no SPF ocorreu: Overflow, Underflow ou Nem Overflow / Nem Underflow. Considere B = 10, t = 3, exp ∊[-5;5]

a) $235{,}89_{(10)}$=
b) $0{,}345 \times 10^{-7}$=
c) $0{,}875 \times 10^{9}$=

2.4. Representação de Palavra de 16bits

Nota: Existe também representação de palavra: 32bits, 64bits, 128bits.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Expoente (Posição 2 a 5)
Mantissa (Posição 6 a 15)
Sinal do expoente (Posição 1)
Sinal do número (Posição 0)

Nota: O que a máquina computacional faz. Ela pega o número que está representado em uma base qualquer, transforma em um sistema binário e em seguida transforma em aritmética de ponto flutuante, (sistema binário).

Representação do sinal: 0 (positivo); 1 (negativo)

Ex.: $5{,}75_{(10)}$= $101{,}11_{(2)}$ => $0{,}10111 \times 2^{11}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Exercício: a) $12,25_{(10)} = 1100,01_2 = 0,110001 \times 2^{100}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

2.5. Erro Absoluto e Relativo

Erro Absoluto (EA):

$EA = |X - Xa|$

X = Valor exato ou valor original;

Xa = Valor aproximado

Erro Relativo (ER):

$ER = \frac{EA}{|Xa|}$

Erro Relativo (ER) em percentual:

$ER = \frac{EA}{|Xa|} * 100$

Exemplo: Área do Círculo

R = 100m; $\pi 1$ = 3,14 Valor aproximado; $\pi 2$ = 3,141592 Valor original.

$A = \pi r^2$ (Área da circunferência)

$A_1 = \pi 1 \times R^2 = 3,14 \times 100^2 \Rightarrow A_1 = 31400 m^2$

$A_2 = \pi 2 \times R^2 \Rightarrow 3,141592 \times 100^2 \Rightarrow A_2 = 31415,92 m^2$

$EA = |A_2 - A_1| = |31415,92 - 31400| = 15,92 m^2$

$ER = \frac{EA}{A_1} = 15,92 / 31400 \Rightarrow ER = 5,07 \times 10^{-4} m^2$

Exercícios 4): Calcule o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) dos valores abaixo:

a) Sejam os valores X=0.000006 e X'=0.000004

$EA = |0.000006 - 0.000004| \Rightarrow EA = 0.000002; \Rightarrow EA = 2 \times 10^{-6}$;

$ER = EA/X'; EA = 0.000002 / 0.000004 \Rightarrow ER = 0.5 \times 10^{-6}$

b) Seja P=π e P'= 3,1416; (π = **3,141592653589793**)

EA = |3,141592653589793 - 3,1416| = EA = 0,000007347 => EA = 7,347 x 10^{-6}

ER = EA/P'; ER = 0,000007347 / 3,1416 => ER = 0,000002338 => ER = 2,338 x 10^{-6}

c) Seja V = 40320 e V'= 40319,958

EA = |40320 - 40319,958| = EA = 0.042; => EA = 4,2 x 10^{-2};

ER = EA/V'; EA = 0.042 / 40319,958 => ER = 0,000001041 => ER = 1,041 x 10^{-6};

2.6. Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de erro)

(Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante)

Onde: RA = $\frac{1}{2}x10^{-t+1}$, porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando ERx=0; ERy=0;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição $ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA$

Subtração $ER(x-y) < ERx\left|\frac{x}{x-y}\right| - ERy\left|\frac{y}{x-y}\right| + RA$

Divisão $ER(x/y) < ERx - ERy + RA$

Multiplicação $ER(x*y) < ERx + ERy + RA$

Exercícios 5): Calcule as operações aritméticas abaixo. A máquina opera por arredondamento ABNT e está exatamente representada.

Dados: X = 0,937 x 10^4; Y = 0,1272 x 10^2; Z = 0,231 x 10^1; t = 4 dígitos.

a) |E(x+y+z)|=?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 10^4 + 0,001272 x 10^4 => S1 = 0,938272 * 10^4

S1 + Z => 0,938272 * 10^4 + 0,000231 x 10^4

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 10^4.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

$$\boldsymbol{ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA}$$

$$ER(X+Y) < ERx\left|\frac{0{,}937 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + ERy\left|\frac{0{,}001272 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < 0 * \left|\frac{0{,}937 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + 0 * \left|\frac{0{,}001272 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < \frac{1}{2} * 10^{-3}$$

$$ER(s1+z) < ERs1\left|\frac{s1}{s1+z}\right| + ERz\left|\frac{z}{s1+z}\right| + RA$$

$$ER(s1+z) < \frac{1}{2} * 10^{-3} * \left|\frac{0{,}938272 * 10^4}{0{,}938272 * 10^4 + 0{,}000231 * 10^4}\right| + 0 * \left|\frac{0{,}000231 * 10^4}{0{,}938272 * 10^4 + 0{,}000231 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-4+1}$$

$$ER(s1+z) < \frac{1}{2} * 10^{-3} * \left|\frac{0{,}938272 * 10^4}{0{,}938503 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-3}$$

$ER(s1+z) < 0{,}4999 * 10^{-3} + \frac{1}{2} * 10^{-3} \Rightarrow ER(s1+z) = 0{,}9999 * 10^{-3}$ $\boldsymbol{ER(s1+z) = ER(x+y+z) < 0{,}9999 * 10^{-3} \Rightarrow 9{,}999 * 10^{-4}}$

Dados: X = 0,937 x 10^4; Y = 0,1272 x 10^2; Z = 0,231 x 10^1; t = 4 dígitos.

b) $\left|E\left(\frac{x*y}{z}\right)\right|$=?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 10^4 + 0,001272 x 10^4 => S1 = 0,938272

S1 + Z => 0,938272 + 0,000231 x 10^4

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 10^4.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

$$ER(x+y) < ERx\left|\frac{x}{x+y}\right| + ERy\left|\frac{y}{x+y}\right| + RA$$

$$ER(X+Y) < ERx\left|\frac{0{,}937 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + ERy\left|\frac{y0{,}001272 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < 0 * \left|\frac{0{,}937 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + 0 * \left|\frac{y0{,}001272 * 10^4}{0{,}937 * 10^4 + 0{,}001272 * 10^4}\right| + \frac{1}{2} * 10^{-4+1}$$

$$ER(X+Y) < \frac{1}{2} * 10^{-3}$$

$$ER\left(\frac{s1}{z}\right) < ERs1 - ERz + RA$$

$$ER\left(\frac{S1}{z}\right) < \frac{1}{2} * 10^{-3} - 0 + \frac{1}{2} * 10^{-3} \Rightarrow ER\left(\frac{s1}{z}\right) = 1 * 10^{-3} \Rightarrow \boldsymbol{ER\left(\frac{S1}{z}\right) = ER\left(\frac{x+y}{z}\right) < 10^{-3}}$$

Respostas

Exercícios 1)

a) $0,23589 \times 10^{3}$; b) $0,10101 \times 2^{11}$ c) $0,875 \times 10^{-3}$

Exercícios 2)

a) $0,236x10^{3}$(A); $0,235 \times 10^{3}$ (T)
b) $0,235x10^{3}$(A); $0,235x10^{3}$ (T)
c) $0,236x10^{3}$(A); $0,235x10^{3}$ (T)
d) $0,234x10^{3}$(A); $0,234x10^{3}$ (T)
e) $0,128x10^{2}$(A); $0,127x10^{2}$ (T)
f) $0,127x10^{2}$(A); $0,127x10^{2}$ (T)

Exercícios 3)

a) $0,236x10^{3}$; $3 \in [-5;5]$ => Nem Overflow / Nem Underflow
b) $0,345x10^{-7}$; $-7 \notin [-5;5]$ => Underflow
c) $0,875x10^{9}$; $9 \notin [-5;5]$ => Overflow

Exercícios 4)

a) Erro absoluto é de $2x10^{-6}$ e o erro relativo é de $0,5 \times 10^{-6}$
b) Erro absoluto é de $7,347x10^{-6}$ e o erro relativo é de $2,338x10^{-6}$
c) Erro absoluto é de $4,2x10^{-2}$ e o erro relativo é de $1,041x10^{-6}$

Exercícios 5)

a) $9,9987x10^{-4}$
b) 10^{-3}