Análise assintótica: ordens *O*, *Omega* e *Theta*

Ao ver uma expressão como $n+10$ ou n^2+1, a maioria das pessoas pensa automaticamente em valores pequenos de n. A análise de algoritmos faz exatamente o contrário: *ignora os valores pequenos* e concentra-se nos valores *enormes* de n. Para valores enormes de n, as funções

$$n^2\ , \quad (3/2)n^2\ , \quad 9999n^2\ , \quad n^2/1000\ , \quad n^2+100n\ , \quad \text{etc.}$$

crescem todas com a mesma velocidade e portanto são todas "equivalentes". Esse tipo de matemática, interessado somente em valores *enormes* de n, é chamado *assintótico*. Nessa matemática, as funções são classificadas em "ordens" (como as ordens religiosas da Idade Média); todas as funções de uma mesma ordem são "equivalentes". As cinco funções acima, por exemplo, pertencem à mesma ordem.

Veja o verbete *Big O notation* na Wikipedia.

Ordem *O*

Convém restringir a atenção a funções *assintoticamente não negativas*, ou seja, funções f tais que $f(n) \geq 0$ para todo n suficientemente grande. Mais explicitamente: f é assintoticamente não negativa se existe n_0 tal que $f(n) \geq 0$ para todo n maior que n_0. Agora podemos definir a ordem O. [Esta letra é um O maiúsculo. Ou melhor, um *ômicron* grego maiúsculo, conforme Knuth.]

> DEFINIÇÃO: Dadas funções assintoticamente não negativas f e g, dizemos que f *está na ordem O de g* e escrevemos $f = \mathrm{O}(g)$ se $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para *algum* c positivo e para *todo* n suficientemente grande. Em outras palavras, existe um número positivo c e um número n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo n maior que n_0.

(A notação "O(∗)" empregada nesta definição é conhecida como notação assintótica ou notação de Landau.)

Exemplo 1: Se $f(n) \leq 9999\ g(n)$ para todo $n \geq 1000$ então $f = \mathrm{O}(g)$. (Cuidado: a recíproca não é verdadeira!)

Exemplo 2: Suponha que $f(n) = 2n^2 + 3n + 4$ e $g(n) = n^2$. Observe que

$$2n^2 + 3n + 4 \;\leq\; 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 \;=\; 9n^2$$

desde que $n \geq 1$. Resumindo, $f(n) \leq 9\ g(n)$ para todo $n \geq 1$. Portanto, $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$.

Exemplo 3: Suponha que $f(n) = 3 + 2/n$ e que $g(n) = n^0$, ou seja, $g(n) = 1$. Então

$$3 + 2/n \;\leq\; 3 + 1 \;=\; 4 \;=\; 4n^0$$

desde que $n \geq 2$. Resumindo, $f(n) \leq 4\ g(n)$ para todo $n \geq 2$. Portanto, $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$.

Exemplo 4: Suponha que $f(n) = n^3$ e que $g(n) = 200n^2$. Não é verdade que $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$. De fato, se existissem c e n_0 tais que $f(n) \leq c\ g(n)$, teríamos $n \leq 200c$ para todo $n \geq n_0$. Mas isso é absurdo!

Exercícios

1. Faz sentido dizer "$f(n)$ está em $\mathrm{O}(n^2)$ para $n \geq 4$"?
2. Fica bem dizer "$f(n)$ está em $\mathrm{O}(n^2)$ com $c = 12$ e $n_0 = 4$"?
3. Critique a seguinte definição alternativa da classe O: "Dizemos que f está em $\mathrm{O}(g)$ se existem números positivos c, n_0 e $n \geq n_0$ tais que $f(n) \leq c\ g(n)$."
4. Critique a seguinte definição alternativa da classe O: "Dizemos que f está em $\mathrm{O}(g)$ se existe um número natural n_0 tal que $f(n) \leq c\ g(n)$ para algum número positivo c e para todo $n \geq n_0$."
5. [INTERESSANTE] A cláusula "n suficientemente grande" na definição da classe O é supérflua quando estamos lidando com funções estritamente positivas. De fato, suponha que f é $\mathrm{O}(g)$ e $g(n) > 0$ para todo n natural e mostre que existe um número positivo c' tal que $f(n) \leq c'\ g(n)$ para todo n natural.
6. Critique o seguinte raciocínio: "A derivada de $4n^2+2n$ é $8n+2$. A derivada de n^2 é $2n$. Como $8n+2 > 2n$, podemos concluir que $4n^2+2n$ cresce mais que n^2 e portanto $4n^2+2n$ não é $\mathrm{O}(n^2)$." Critique o seguinte raciocínio: "A derivada de $4n^2+2n$ é $8n+2$. A derivada de $9n^2$ é $18n$. Como $8n+2 \leq 18n$ para $n \geq 1$, podemos concluir que $4n^2+2n$ é $\mathrm{O}(9n^2)$."
7. É verdade que $10n = \mathrm{O}(n)$? É verdade que $10n^2 = \mathrm{O}(n)$? É verdade que $10n^{55} = \mathrm{O}(2^n)$?
8. É verdade que $n^2 + 200n + 300 = \mathrm{O}(n^2)$?
9. É verdade que $n^2 - 200n - 300 = \mathrm{O}(n)$?
10. É verdade que $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4 = \mathrm{O}(n)$? É verdade que $(3/2)n^2 + (7/2)n - 4 = \mathrm{O}(n^2)$?
11. É verdade que $n^3 - 999999n^2 - 1000000 = \mathrm{O}(n^2)$?
12. Seja $\binom{n}{k}$ o número de combinações de n objetos tomados k a k. Mostre $\binom{n}{2} = \mathrm{O}(n^2)$. Mostre que $\binom{n}{3} = \mathrm{O}(n^3)$. É verdade que, para qualquer número natural $k \leq n$, tem-se $\binom{n}{k} = \mathrm{O}(n^k)$?
13. É verdade que 2^{n+1} está em $\mathrm{O}(2^n)$? É verdade que 3^n está em $\mathrm{O}(2^n)$?
14. É verdade que $\log_2 n = \mathrm{O}(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = \mathrm{O}(\log_2 n)$?
15. É verdade que $\lceil \lg n \rceil = \mathrm{O}(\lg n)$? (Veja as definições de *teto* e lg no dicionário.)
16. Prove que $n = \mathrm{O}(2^n)$. (Sugestão: use indução matemática para provar que $n \leq 2^n$ para todo n suficientemente grande.)
17. Prove que $\lg n$ está em $\mathrm{O}(n)$.
18. Prove que n é $\mathrm{O}(2^{n/4})$. (Sugestão: use indução matemática para provar que $n \leq 2^{n/4}$ para todo n suficientemente grande.)
19. Prove que $4 \lg n$ está em $\mathrm{O}(n)$.
20. Prove que $100 \lg n - 10n + 2n \lg n$ está em $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Ordem *Omega*

A expressão "$f = \mathrm{O}(g)$" tem o mesmo sabor que "$f \leq g$". Agora precisamos de um conceito que tenha o sabor de "$f \geq g$".

> DEFINIÇÃO: Dadas funções assintoticamente não negativas f e g, dizemos que f *está na ordem Omega de g* e escrevemos $f = \Omega(g)$ se $f(n) \geq c \cdot g(n)$ para *algum* c positivo e para *todo* n suficientemente grande. Em outras palavras, existe um número positivo c e um número n_0 tais que $f(n) \geq c \cdot g(n)$ para todo n maior que n_0.

Exemplo: Se $f(n) \geq g(n)/100000$ para todo $n \geq 888$ então $f = \Omega(g)$. (Cuidado: a recíproca não é verdadeira!)

Qual a relação entre O e Ω? Não é difícil verificar que $f = \mathrm{O}(g)$ se e somente se $g = \Omega(f)$.

Exercício

1. Seja $\binom{n}{k}$ o número de combinações de n objetos tomados k a k. Mostre $\binom{n}{2} = \Omega(n^2)$. Mostre que $\binom{n}{3} = \Omega(n^3)$. É verdade que, para qualquer número natural $k \le n$, tem-se $\binom{n}{k} = \Omega(n^k)$?
2. Prove que $100 \lg n - 10n + 2n \lg n$ está em $\Omega(n \lg n)$.
3. É verdade que 2^{n+1} está em $\Omega(2^n)$? É verdade que 3^n está em $\Omega(2^n)$?

Ordem *Theta*

Além dos conceitos que têm o sabor de "$f \le g$" e de "$f \ge g$", precisamos de um que tenha o sabor de "$f = g$".

> DEFINIÇÃO: Dizemos que f e g *estão na mesma* e escrevemos $f = \Theta(g)$ se $f = \mathrm{O}(g)$ e $f = \Omega(g)$. Trocando em miúdos, $f = \Theta(g)$ significa que existe números positivos c e d tais que $c\, g(n) \le f(n) \le d\, g(n)$ para todo n suficientemente grande.

Exemplo: As funções abaixo pertencem todas à ordem $\Theta(n^2)$:

$$n^2 \quad , \quad (3/2)n^2 \quad , \quad 9999n^2 \quad , \quad n^2/1000 \quad , \quad n^2+100n \;.$$

Exercício

1. Quais das conjeturas abaixo são verdadeiras?
   a. $(3/2)n^2 + (7/2)n3 - 4 = \Theta(n^2)$
   b. $9999\, n^2 = \Theta(n^2)$
   c. $n^2/1000 - 999n = \Theta(n^2)$
   d. $\log_2 n + 1 = \Theta(\log_{10} n)$
   e. $\lfloor \lg n \rfloor = \Omega(\lg n)$ (confira a definição de *piso*)

Onde as funções estão definidas?

A discussão acima supõe, implicitamente, que todas as funções estão definidas no conjunto dos números naturais. Mas tudo continua funcionando se as funções estiverem definidas em algum outro domínio. Eis alguns exemplos de domínios:

- números naturais maiores que 99,
- potências inteiras de 2 (ou seja, 2^0, 2^1, 2^2, etc.),
- potências inteiras de 1½,
- números racionais maiores que ½.

A mesma notação O é usada para todos os domínios. Por exemplo, se f é uma função assintoticamente não negativa definida nas potências inteiras de 2, dizer que $f(n) = \mathrm{O}(n^2)$ é o mesmo que dizer que existe um número positivo c tal que $f(n) \le c\, n^2$ para todo n da forma 2^k com k suficientemente grande.

As mesmas observações se aplicam à notação Ω e à notação Θ.

Veja aula em video sobre notação assintótica no AcademicEarth

---

Lista de fórmulas "Know Thy Complexities": complexidade de algoritmos básicos

---

http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/
Last modified: Mon Apr 13 07:07:56 BRT 2015
Paulo Feofiloff
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística da USP