1 Noções Básicas de Lógica

1.1 Proposições

Uma proposição é uma frase que pode ser apenas **verdadeira** ou **falsa**.

Exemplos:

1. Os sapos são anfíbios.
2. A capital do Brasil é Porto Alegre.
3. O tomate é um tubérculo.
4. Por favor, estudem!
5. Escreva o nome da sua mãe.
6. Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.
7. A avenida Ipiranga, em Porto Alegre, RS, tem 6km de comprimento.
8. Toda água do planeta terra é potável.
9. O beija-flor é um pássaro.
10. Vai trabalhar!
11. Você gosta de cerveja?
12. $3 + 5 = 7$
13. Pablo Picasso é um pintor famoso.
14. Faça um breve resumo de sua vida.
15. Maria,CPF:...,comprou um carro 0 km.
16. Existem formas de vida em outros planetas.
17.
18.
19.
20. Todos os alunos da UFRGS amam Matemática Discreta.

Quais das frases acima são proposições?
Quais são verdadeiras?
Quais são falsas?

Toda proposição é verdadeira ou falsa, ou seja, toda proposição assume um **valor verdade** ou **lógico** (**V** ou **F**). As proposições acima são chamadas de simples ou atômicas, pois não podem ser decompostas em mais de uma proposição. Em geral, as proposições são compostas, ou seja, são obtidas através de duas ou mais proposições simples, e seu valor lógico depende dos valores verdade de cada uma das proposições que a compõe.
Notação: usaremos as letras p, q, r e s para designar proposições.

1.2 Conetivos Lógicos

Para compor proposições usamos os conetivos lógicos. Existem dois tipos de conetivos: unários e binários.

- **Unário:** modifica uma proposição (não).
- **Binários:** unem duas proposições (e, ou, se então, se e somente se)

Exemplos:

1. Baleias são mamíferos e aranhas são repteis.
2. Vou comprar um Gol ou um Ka.
3. Se eu ganhar na loto então presentearei cada aluno com um iate.
4. Hoje não é domingo.
5. Passarei em Matemática Discreta se e somente se eu estudar muito.

1.2.1 Negação

Seja p uma proposição, a negação de p é a proposição "Não é verdade que p".

Notação: $\sim p \quad , \dashv p$

Tabela Verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Exemplo:
p : Hoje é terça-feira
$\sim p$: Não é verdade que hoje é terça-feira.
Ou equivalentemente: Hoje não é terça-feira.

1.2.2 Conjunção

Sejam p e q duas proposições, a conjunção de p e q é a proposição "p e q". Esta proposição será verdadeira somente quando p e q forem verdadeiras.

Notação: $p \wedge q$

Tabela Verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo:
p : Comi 20 chocolates.
q : Estou com sede.
$p \wedge q$: Comi 20 chocolates e estou com sede.

1.2.3 Disjunção

Sejam p e q duas proposições, a disjunção de p e q é a proposição "p ou q". Esta proposição será verdadeira se uma das proposições p ou q for verdadeira.

Notação: $p \vee q$

Tabela Verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

p : Comprei um Gol.

q : Comprei uma Ferrari.

$p \vee q$: Comprei um Gol ou comprei uma Ferrari.

1.2.4 Condição

Sejam p e q duas proposições, a condição entre p e q é a proposição "Se p então q", ou "A condição p é suficiente para q", ou "q se p ", ou "q é conseqüência de p". Esta proposição só não será verdadeira quando q for falsa e p for verdadeira.

Notação: $p \longrightarrow q$

Tabela Verdade:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo:

p : Roubei um banco.

q : Comprei uma Ferrari.

$p \longrightarrow q$: Se eu roubar um banco então comprarei uma Ferrari.

1.2.5 Bicondição

Sejam p e q duas proposições, a bicondição entre p e q é a proposição "p se e somente se q", ou "p se e só se q", ou "p sss q ". Esta proposição é verdadeira somente quando as duas proposições (p e q) tem o mesmo valor-verdade.

Notação: $p \longleftrightarrow q$

Tabela Verdade:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo:

p : Estudei muito Matemática Discreta.

q : Passei em Matemática Discreta.

$p \longleftrightarrow q$: Estudei muito Matemática Discreta se e somente se eu passei em Matemática Discreta.

Quadro-resumo dos conetivos:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Podemos agora combinar proposições compostas utilizando conetivos e parênteses. Para isso definimos uma ordem entre esses operadores:

1. Conetivos dentro do parênteses - dos mais internos para os mais externos.
2. $\sim$: negação
3. $\wedge, \vee$: conjunção, disjunção
4. $\longrightarrow$: condicional
5. $\longleftrightarrow$: bicondicional

Exemplos:

1. $\sim (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

2. $\sim (p \longrightarrow q)$

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim (p \longrightarrow q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

3. $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Observação: Nem todas as combinações de conetivos com proposições e parênteses são válidas - regras de sintaxe. Por exemplo a combinação: $p \wedge q \sim \vee r$ não é válida.

Exercício: Construa a tabela-verdade para a proposição: $p \vee q \vee r$

1.3 Tautologia e Contradição

Definição 1.1. *Uma proposição é uma tautologia se ela for sempre verdadeira independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõe. Ou seja, a última coluna de sua tabela verdade só possui Vs.*

Exemplo: $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Definição 1.2. *Uma proposição é uma contradição se ela for sempre falsa independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõe. Ou seja, a última coluna de sua tabela verdade só possui Fs.*

Exemplo: $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Notação: tautologia: **V** e contradição: **F**

Definição 1.3. *Dadas duas proposições p e q dizemos que p implica q se a proposição "Se p então q."é uma tautologia.*

Notação: $p \Longrightarrow q$

Exemplos:

1. Adição: $p \Longrightarrow p \vee q$

p	q	$p \vee q$	$p \longrightarrow p \vee q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

2. Simplificação: $p \wedge q \Longrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \longrightarrow p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Definição 1.4. *Dadas duas proposições p e q dizemos que p é equivalente a q se a proposição "p se e somente se q."é uma tautologia.*

Notação: $p \Longleftrightarrow q$

Note que a bicondição é verdadeira somente quando as duas proposições tem o mesmo valor verdade, assim se duas proposições tem a última coluna de suas tabelas-verdade iguais então elas são equivalentes. A recíproca também é verdadeira, ou seja, se duas proposições são equivalentes então a última coluna de suas tabelas-verdade são iguais. Utilizando esse resultado e os exemplos de tabela-verdade 1. e 3. da aula passa podemos afirmar que:

$$\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Essa é uma importante propriedade das equivalências chamada Lei de De Morgan. Veremos a seguir várias outras.

1.4 Propriedades das Equivalências

Sejam p, q e r proposições $\mathbf{V}$ uma tautologia e $\mathbf{F}$ uma contradição. As seguintes propriedades são válidas:

1. Idempotência: $p \vee p \Longleftrightarrow p \quad \text{e} \quad p \wedge p \Longleftrightarrow p$
2. Comutatividade: $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p \quad \text{e} \quad p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$
3. Associatividade: $p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad \text{e} \quad p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
4. Distributividade: $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{e} \quad p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Identidades: $p \vee \mathbf{V} \Longleftrightarrow \mathbf{V} \quad \text{e} \quad p \wedge \mathbf{F} \Longleftrightarrow \mathbf{F}$
   $p \vee \mathbf{F} \Longleftrightarrow p \quad \text{e} \quad p \wedge \mathbf{V} \Longleftrightarrow p$
6. Complementares: $p \vee \sim p \Longleftrightarrow \mathbf{V} \quad \text{e} \quad p \wedge \sim p \Longleftrightarrow \mathbf{F}$
7. Dupla negação : $\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$
8. Absorção: $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p \quad \text{e} \quad p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$
9. Leis de De Morgan: $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
   $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$

As afirmações acima podem ser verificadas através de tabelas-verdade. Faremos alguns exemplos.

1. $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$ Iniciamos com a tabela-verdade de $p \wedge (p \vee q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

   Notamos que a primeira e a última coluna da tabela acima são iguais, assim, pela observação acima, temos que: $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$.

2. $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Fazemos a tabela-verdade das proposições que queremos mostrar que são equivalentes.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Vemos que a última coluna da primeira tabela é igual a última coluna da segunda tabela, assim, pela observação anterior $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Também poderíamos ter feito a comparação em uma única tabela, e mostrar que $p \wedge (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é uma tautologia; essa tabela tem a primeira linha dada abaixo.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Uma das aplicações das propriedades das equivalências é na simplificação de comandos.

$$p \wedge \sim (p \wedge q) \iff p \wedge (\sim p \vee \sim q) \iff (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q) \iff \mathbf{F} \vee (p \wedge \sim q) \iff (p \wedge \sim q)$$

1.5 Equivalências Fundamentais

As equivalências abaixo serão a base de algumas técnicas de demonstração.

1. $p \longrightarrow q \iff \sim p \vee q$
2. $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$ (contraposição)
3. $p \longrightarrow q \iff p \wedge \sim q \longrightarrow \mathbf{F}$ (absurdo)

Exercício: Utilize as tabelas abaixo para mostrar as três equivalências acima.

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q			
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

1.6 Quantificadores

Consideramos a sentença "$p : n \geq 5$ ". O valor lógico dessa proposição varia com os valores de n. Se $n = 1$, p é falsa, se $n = 7$, p é verdadeira, se $n = 129$, p é verdadeira e se $n = 4$, p é falsa. Isso nos leva a pensar em proposições sobre conjunto de valores.

Definição 1.5. *Seja A um conjunto qualquer. Uma proposição sobre A é uma proposição cujo valor lógico depende do elemento $x \in A$ considerado. Uma proposição p a qual descreve alguma proposição de um elemento $x \in A$ é denominada, em geral, por $p(x)$.*

Toda proposição p em A determina:

- Conjunto-verdade de p : são os elementos de A para os quais p é verdadeira.

  Notação: $V(p) = \{x \in A; p(x) \text{ e V}\}$

- Conjunto-falsidade de p : são os elementos de A para os quais p é falsa.

  Notação: $F(p) = \{x \in A; p(x) \text{ e F}\}$

Exemplos:

1. $p : n^3 \geq 8$ em $A = \mathbb{N}$

   $V(p) = \{2, 3, 4, 5, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}\ ; n \geq 2\}$

   $F(p) = \{0, 1\}$

2. $p : n \geq 0$ em $A = \mathbb{N}$

   $V(p) = \mathbb{N}$

   $F(p) = \emptyset$

3. $p : n^2 + 5 = 3$ em $A = \mathbb{N}$

   $V(p) = \emptyset$

   $F(p) = \mathbb{N}$

Os dois últimos exemplos são uma TAUTOLOGIA e uma CONTRADIÇÃO. Dizemos que uma proposição p em A é uma TAUTOLOGIA se $V(p) = A$ e dizemos que uma proposição p em A é uma CONTRADIÇÃO se $V(p) = \emptyset$.

1.6.1 Quantificador Universal

Seja A um conjunto e p uma proposição em A. Usamos o símbolo $\forall$ para designar o quantificador universal. Escrevemos:

$$(\forall x \in A)\ p(x) \quad \text{ou} \quad \forall x \in A,\ p(x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in A)\ (p(x))$$

Podemos ler qualquer uma das afirmações acima dos seguintes modos:

- Para todo x pertencente a A, $p(x)$ é verdadeira. ou
- Para cada x pertencente a A, $p(x)$ é verdadeira. ou
- Para qualquer x pertencente a A, $p(x)$ é verdadeira.

1.6.2 Quantificador Existencial

Seja A um conjunto e p uma proposição em A. Usamos o símbolo $\exists$ para designar o quantificador existencial. Escrevemos:

$$(\exists x \in A)\ p(x) \quad \text{ou} \quad \exists x \in A,\ p(x) \quad \text{ou} \quad (\exists x \in A)\ (p(x))$$

Podemos ler qualquer uma das afirmações acima dos seguintes modos:

- Existe x pertencente a A, tal que $p(x)$ é verdadeira. ou
- Existe pelo menos um x pertencente a A, tal que $p(x)$ é verdadeira.

Quantificador Existencial Único: Usamos o símbolo $\exists!$ para designar o quantificador existencial único. Escrevemos:

$(\exists!\ x \in A)\ p(x)$ e lemos: Existe e é único o x pertencente a A, tal que $p(x)$ é verdadeira.

O conetivo *e* é fundamental nessa afirmação, usando esse conetivo podemos reescrever a afirmação de modo equivalente:

$$(\exists!\ x \in A)\ p(x) \Longleftrightarrow \big((\exists x \in A)\ p(x)\big) \wedge \Big[\big((\exists x \in A)\ p(x) \wedge (\exists y \in A)\ p(y)\big) \longrightarrow x = y\Big]$$

Exemplo: $(\exists!\ n \in \mathbb{N})\ n^2 = 1$

1.6.3 Valores-verdade de proposições quantificadas

Seja A um conjunto e p uma proposição em A. A proposição $(\forall x \in A)\ p(x)$ é verdadeira se e somente se $V(p) = A$ e é falsa caso contrário, ou seja, caso $V(p) \neq A$. A proposição $(\exists x \in A)\ p(x)$ é verdadeira se e somente se $V(p) \neq \emptyset$ e é falsa caso contrário, ou seja, caso $V(p) = \emptyset$. Resumindo:

- $(\forall x \in A)\ p(x)$ é V sss $V(p) = A$
- $(\forall x \in A)\ p(x)$ é F sss $V(p) \neq A$
- $(\exists x \in A)\ p(x)$ é V sss $V(p) \neq \emptyset$
- $(\exists x \in A)\ p(x)$ é F sss $V(p) = \emptyset$
- $(\exists!\ x \in A)\ p(x)$ é V sss
- $(\exists!\ x \in A)\ p(x)$ é F sss

Exemplos:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^3 \geq 8$
2. $(\exists n \in \mathbb{N})\ n^3 \geq 8$
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n! \geq 30$
4. $(\exists n \in \mathbb{N})\ n! \geq 30$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq 0$
6. $(\exists n \in \mathbb{N})\ n \geq 0$

Observação: Note que sempre que uma proposição do tipo $(\forall x \in A)\ p(x)$ é V então a proposição $(\exists x \in A)\ p(x)$ também é V, e equivalentemente, se uma proposição do tipo $(\exists x \in A)\ p(x)$ é F, então a proposição $(\forall x \in A)\ p(x)$ também é F. Podemos afirmar, mesmo que .... que:

"Quantificador Universal $\Longrightarrow$ Quantificador Existencial "

Generalizando: Sejam $A_1, A_2, \dots A_n$ conjuntos, $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$ e $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma proposição envolvendo $x_1, x_2, \dots, x_n$. Devemos quantificar cada x_i separadamente.

Exemplos:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\ m > n$ é V pois

2. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ m > n$ é F pois

   Cuidado! A ordem dos quantificadores não pode ser alterada!!!

3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ é V pois

4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ é F pois

5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ é V pois

6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ é V pois

1.7 Negação de proposições quantificadas

Seja A um conjunto e p uma proposição em A. Sabemos que a proposição $(\forall x \in A)\ p(x)$ é verdadeira se e somente se $V(p) = A$ e é falsa caso $V(p) \neq A$, ou seja, se existir $x \in A$ tal que $p(x)$ não é verdade. Assim:

$$\sim \big[(\forall x \in A)\ p(x)\big] \Longleftrightarrow (\exists x \in A) \sim p(x)$$

Analogamente, sabemos que a proposição $(\exists x \in A)\ p(x)$ é verdadeira se e somente se $V(p) \neq \emptyset$ e é falsa caso $V(p) = \emptyset$ ou seja, se para cada $x \in A$, $p(x)$ não é verdade. Assim:

$$\sim \big[(\exists x \in A)\ p(x)\big] \Longleftrightarrow (\forall x \in A) \sim p(x)$$

Exemplos:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ é V pois

   $\sim \big[(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0\big] \Longleftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}) \sim (x^2 \geq 0) \Longleftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)$ é falso.

2. $(\exists n \in \mathbb{N})\ (n+1)$ é par é ..... pois

   $$\begin{aligned} \sim \big[(\exists n \in \mathbb{N})\ (n+1) \text{ é par }\big] &\Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \sim \big((n+1) \text{ é par }\big) \\ &\Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \big((n+1) \text{ é ímpar }\big) \end{aligned}$$

3. $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ é ..... pois

   $\sim \big[(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\big] \Longleftrightarrow$

Vejamos o que acontece com duas variáveis: Sejam A e B dois conjuntos, $x \in A$, $y \in B$ e $p(x,y)$ uma proposição em $A \times B$.

A proposição $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ p(x,y)$ é verdadeira se para cada par ordenado $(x,y) \in A \times B$ a proposição $p(x,y)$ for verdadeira; e será falsa se existir um par ordenado $(x,y) \in A \times B$ tal que $p(x,y)$ é falsa. Assim:

$$\sim \big[(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ p(x,y)\big] \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B)\ \sim p(x,y)$$

A proposição $(\exists x \in A)(\exists y \in B)\ p(x,y)$ é verdadeira se existe um par ordenado $(x,y) \in A \times B$ a proposição $p(x,y)$ é verdadeira; e será falsa se não existir um tal par ordenado, ou seja se para cada $(x,y) \in A \times B$ $p(x,y)$ for falsa. Assim:

$$\sim \big[(\exists x \in A)(\exists y \in B)\ p(x,y)\big] \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in B)\ \sim p(x,y)$$

Similarmente obtemos:

$$\sim \big[(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ p(x,y)\big] \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in B)\ \sim p(x,y)$$

e

$$\sim \big[(\exists x \in A)(\forall y \in B)\ p(x,y)\big] \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in B)\ \sim p(x,y)$$

Exercício: Negue as proposições abaixo.

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\ m > n$
2. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ m > n$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$
4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$