第三讲 一元线性回归

许文立*[1,2]

[1]安徽大学经济学院
[2]安徽生态与经济发展研究中心

January 6, 2018

2015年，政府提高香烟消费税对吸烟率的影响是什么？小班教学能提高学生测试得分吗？性别对工资的影响是什么？

其实，上述三个问题都是在问一个变量，X（包括消费税、班级规模和性别）的变化对另一个变量，Y （包括吸烟率、测试分数和工资）的影响。

线性回归模型就是把X和Y联系起来。这条回归线的斜率就是X变化一单位引起的Y的变化。因为Y 的总体均值未知，所以这个斜率也未知。而计量经济学就是要用X,Y的样本数据来估计回归线的斜率。

1 线性回归模型估计

1.1 线性回归模型

回顾一下小班教学的例子。李院长还不太确定是否要缩减你们本科的班级规模。假设你们是计量经济学家或者咨询师，李院长来向你们寻求帮助。李院长说，他面临着一个选择困难：一方面，父母肯定是希望小班教学；另一方面，缩小班级规模，就要雇佣更多的老师，要支出更多的经费。因此，他问你们：如果缩小班级规模，学生的成绩会发生什么变化？

也就是说，如果李院长要改变班级规模，例如每个班级缩减10名学生，那么，学生的标准化成绩会发生什么变化？我们用希腊字母，$\beta_{ClassSize}$，来表示班级规模变化引起的成绩变化，数学表达式为

$$\beta_{ClassSize} = \frac{ScoreChange}{ClasssizeChange} = \frac{\Delta Score}{\Delta ClassSize} \tag{1}$$

其中，Δ表示变化量；而$\beta_{ClassSize}$就是由班级规模变化引起的学生成绩变化与班级规模变化的比值。如果你们运气好，知道了这个$\beta_{ClassSize}$，例如，-0.5，那么，你们可以直接告诉李院长，班级规模变小，会让学生的成绩提高，且根据公式（1），提高的幅度为：

$$\Delta Score = \beta_{ClassSize} \times \Delta ClassSize \tag{2}$$

---

*E-mail：xuweny87@163.com。非常欢迎大家给我们提出有益意见和建议。个人和机构可以利用本讲稿进行教学活动，但请不要用于商业目的。当然，文责自负。

那么，班级规模减少10名学生，预期学生成绩会提高$(-0.5) \times (-10) = 5$。也就说，每个班级减少10名学生，预期学生成绩会提高5分。据此，公式（1）定义了班级规模与学生成绩之间直线的斜率。因此，可以把这条直线写成

$$Score = \beta_0 + \beta_{ClassSize} \times ClassSize \tag{3}$$

这个时候，你会不会兴奋地拿着公式（3）跑到李院长办公室，告诉他，我不仅能告诉您每个班级减少10人，学生成绩会提高多少。而且，只要您告诉我班级规模，我还能预期到学生的平均成绩会是多少。但是，李院长会说，不好意思，我对你这个方程和结果表示怀疑。因为每个班的学生本身有差异，每个班的授课老师不同，可能用的课本也不同。这些原因都可能导致学生的成绩不同，因此，公式（3）并不是对所有班级都成立。

接受了李院长的建议，回去重新修正模型，加入影响学生成绩的其他因素，得到下式

$$Score = \beta_0 + \beta_{ClassSize} \times ClassSize + OtherFactors \tag{4}$$

其中，$OtherFactors$里面包含了李院长提到的，和没提到的影响学生成绩的因素。公式（4）更一般化，因为我们关注于班级规模与学生成绩，所以才能把其它因素统统“装进”$OtherFactors$中。假设有n个班级，Y_i表示第i个班级的平均成绩，X_i 表示第i个班级的学生人数。那么，公式（4）就可以表示为

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \tag{5}$$

公式（5）称为**一元线性回归模型**，Y称为**因变量或被解释变量**，X 称为**自变量或解释变量**。$\beta_0 + \beta_1 X_i$称为**总体回归线或总体回归方程**。截距β_0和斜率β_1是总体回归线的系数，也称参数。斜率β_1可以理解为X变化一单位，Y的变化程度。[1]

u_i为**误差项**，其对应着第i个班级平均成绩与总体回归线预测的成绩只检测差异的所有因素。因此，误差项包含除了X之外所有决定因变量Y的因素。

1.2 系数估计

在实际情形中，我们不可能知道总体分布，即我们不可能知道总体回归线中的两个参数值。但是从第二讲可知，我们可以从随机抽样的样本数据中估计总体参数。同理，我们也可以用数据来估计总体回归线的斜率与截距。

如果大家有兴趣，可以去调查一下班级大小与成绩的信息，然后自己估计一下回归系数。正如第一讲中提到，这类调查往往成本巨大，可能有一些机构或者教育部门有这类调查数据，但是很遗憾没有公开。那么，我们就暂且使用一下美帝的数据样本来作为例子。数据为1999年加利福利亚420个学区的测试分数和班级规模。表1中概述了这两个样本的分布。

由表1可以看到，平均每个老师带19.64个学生，标准差为1.89。每个学区的分数均值为654.16，标准差为19.05。两个样本的散点图，如图1所示。分数与班级规模的相关系数为-0.226。

[1]需要注意的是，从数学上理解，截距β_0是X=0时Y的值，也就是总体回归线与Y轴的交点。但在经济学忠，这个截距有时候有经济学含义，有时候则没有经济学含义，例如班级规模为0 时，班级的平均成绩为β_0就不符合实际了，因此，这个时候要将其单纯理解成数学意义上的系数。

Table 1: 测试分数与师生比的分布

	样本量	均值	标准差	分位数		
				10%	50%	95%
学生-老师比	420	19.64	1.89	17.35	19.72	22.65
测试分数	420	654.16	19.05	630.38	654.45	685.5

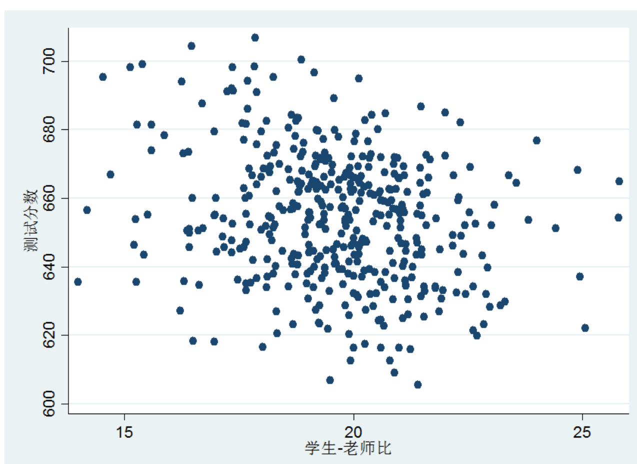


Figure 1: 学生-老师比与分数散点图

根据散点图和相关系数，我们大致可以判断基于这些数据的直线应该是向右下倾斜。只要我们画出这条线，我们就得到了斜率β_1的估计值。但是我们如何画出这条线呢？最常用的方法就是普通最小二乘（OLS）来拟合这些数据。

（1）**OLS估计量** OLS估计量使得估计的回归线尽量的接近观测数据。而接近程度则由给定X条件下，预测Y的误差平方和来测度。

假设$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$用来表示β_0和β_1的估计量。那么，第i 个观测值的误差为$Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$。那么，误差平方和为

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \tag{6}$$

根据第二讲的统计学理论，存在唯一一对$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$ 来使得公式（6）最小化。由此得到的系数为β_0和β_1的OLS估计量。OLS回归线称为样本回归线或样本回归函数。第i个观测值Y_i与其预测值之差为余项（residual）：$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$。

OLS估计量的公式为

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \tag{7}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} \tag{8}$$

OLS预测值及残差

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \tag{9}$$

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i \tag{10}$$

（2）**示例** 我们用Stata14来估计OLS回归线：

$$\hat{Y} = 698.9 - 2.28 \times X \tag{11}$$

Source	SS	df	MS			
				Number of obs	=	420
				F(1, 418)	=	22.58
Model	7794.11004	1	7794.11004	Prob > F	=	0.0000
Residual	144315.484	418	345.252353	R-squared	=	0.0512
				Adj R-squared	=	0.0490
Total	152109.594	419	363.030056	Root MSE	=	18.581

testscr	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
str	-2.279808	.4798256	-4.75	0.000	-3.22298	-1.336637
_cons	698.933	9.467491	73.82	0.000	680.3231	717.5428

Figure 2: stata结果

我们在Y上面加hat是为了区别它为基于OLS回归线的预测值。负斜率意味着班级规模越大，平均测试分数越低。

1.3 拟合度

我们已经估计出了班级规模对测试成绩效应的线性回归，如公式（11）。正如李院长质疑的，我们都可能疑惑，估计的线性回归线对数据的拟合程度如何呢？

在计量经济学中，R^2和回归标准误（SER）用来测量OLS回归线对数据的拟合程度。$0 \leq R^2 \leq 1$测量的是X_i能解释Y_i的方差的比例。SER测量的是Y_i 离预测值有多远。

（1）R^2

根据预测值与残差的定义，可知

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i \tag{12}$$

根据R^2的定义，它的数学形式可以表达为**回归平方和或者解释平方和（explained sum of squares，ESS）**与**总平方和（Total Sum of Squares，TSS）**之比。

$$ESS = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \tag{13}$$

$$TSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 \tag{14}$$

那么，R^2的公式为

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \tag{15}$$

我们还可以这么思考：X不能解释Y的方差的比例，同样可以表示出R^2。不能解释的部分就是**残差平方和（sum of squared residuals，SSR）**，即$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$。综上所述，$TSS = ESS + SSR$。据此，

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{TSS} \tag{16}$$

注：一元回归中的R^2就是X和Y的相关系数的平方。R^2越接近于1，说明用X预测Y越好，即回归线拟合数据越好，反之亦然。

SER

回归标准误（SER）是回归误差标准差的估计量。它是观测值在回归线附近的分散程度的一种测量。OLS残差为$\hat{u}_i$。那么，

$$SER = \sqrt{S_{\hat{u}}^2}, S_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \frac{SSR}{(n-2)} \tag{17}$$

其中，OLS残差的样本均值为0。

例如，图2中的回归结果，$R^2 = 0.0512, SER(MSE) = 18.581$。这意味着，班级规模可以解释测试分数方差的5.21%。而$SER = 18.581$说明观测值在回归线附近分散较开，这也可以从图3中看出。

注意：**事实上，R^2很小（或者SER很大）本身并不能说明回归的“好坏”。很小的R^2只是表面，除了解释变量X外，还有其它重要的因素影响Y。但是较小的R^2 或者较大的SER并不能给出缺失的重要因素是什么，它们仅仅说明现有的X只能解释Y方差的较小部分。**

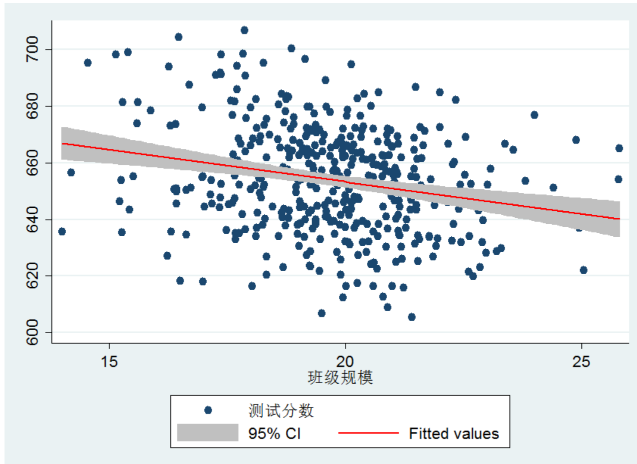


Figure 3: 回归线

1.4 最小二乘的假设

下面，我们简单的介绍一下OLS的三个假设。

假设一：给定X的条件下，u的条件均值为0

这个假设是说，“丢弃”到残差项u里的其它因素与X无关，即给定X条件下，这些因素的分布均值为0。该假设等价于总体回归线就是给定X条件下的Y的条件均值。且该假设也意味着$corr(X,u)=0$。

假设二：(X_i,Y_i)是独立同分布

假设三：X_i,Y_i不可能有较大奇异值

较大的奇异值会使得OLS结果产生误差。这个假设就使得X，Y有非零的四阶矩：$0\leq E(X_i^4)\leq\infty$,$0\leq E(Y_i^4)\leq\infty$。也就说，X和Y 存在有限峰度。可能的来源：1、输入错误；2、单位错误。如果输入错误，就纠正它，如果不能纠正，就从样本中删除。

2 假设检验和置信区间

第一部分概述了一元回归系数的估计，这个部分将概述估计量有多精确地描述了抽样不确定性。

2.1 回归系数的假设检验

有一些人武断地说，班级规模并不会对测试分数产生影响。也就说，总体回归线的斜率$\beta_1=0$。下面，我们就来检验斜率是否为0。也就说，我们先假设$\beta_1=0$（原假设）。然后，我们来判断是否接受或者拒绝原假设。

首先，我们回顾一下3.2节中的总体假设检验。

原假设为Y的均值为某一特定值$\mu_{Y,0}$，可以写成$H_0:E(Y)=\mu_{Y,0},H_1\neq\mu_{Y,0}$。

假设检验分三步走：

1、计算$\overline{Y}$的标准误$SE(\overline{Y})$；

2、计算t统计量，即$t=\frac{(\overline{Y}-\mu_{Y,0})}{SE(\overline{Y})}$；

3、计算p值，它是拒绝原假设的最低显著性水平。双边假设p值为$2\Phi(-|t_{act}|)$，其中，t_{act}是计算得到的t统计量，Φ是积累标准正态分布。

在实践中，第三步的p值通常与临界值比较。例如，5%显著性水平的双边假设对应着$|t_{act}|>1.96$。即是说，总体均值在5%的显著性水平下显著异于假设值。

系数的假设检验

上面已经提到过，有些人觉得小班没有效果。我们应该假设$\beta_1=0$，那么，原假设和双边备择假设为

$$H_0:\beta_1=0 \ \ vs. \ \ H_1\neq 0 \tag{18}$$

那么，按照上述三步走：

第一步：计算$\hat{\beta}_1$的标准误$SE(\hat{\beta}_1)$。该标准误是$\sigma_{\hat{\beta}_1}$的一个估计值。即

$$SE(\hat{\beta}_1)=\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}} \tag{19}$$

其中，

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}=\frac{1}{n}\times\frac{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\hat{u}_i^2}{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]^2} \tag{20}$$

第二步：计算t统计量

$$t=\frac{\hat{\beta}_1-0}{SE(\hat{\beta}_1)} \tag{21}$$

第三步：计算p值

$$\begin{aligned}p-value&=Pr_{H_0}[|\hat{\beta}_1-0|>|\hat{\beta}_1^{act}-0|]\\&=Pr_{H_0}[|\frac{\hat{\beta}_1-0}{SE(\hat{\beta}_1)}|>|\frac{\hat{\beta}_1^{act}-0}{SE(\hat{\beta}_1)}|]=Pr_{H_0}(|t|\geq|t^{act}|\end{aligned} \tag{22}$$

因为t统计量近似标准正态分布，因此

$$p-value=Pr(|Z|>|t^{act}|)=2\Phi(-|t^{act}|) \tag{23}$$

如果p值小于5%，即是说，在5%的显著性水平下拒绝原假设。5%的显著性水平对应着1.96的临界值。

在实践中，我们并不用分别按照上述步骤计算出估计量和统计量，因为现在我们有计量经济学软件包，例如Stata。我们把数据导入stata中，输入回归命令就可以直接得到上述三个步骤的结果，如图2所示。

例如，从图2中可以看出，β_1的标准误为0.48，系数为-2.28，那么$t=\frac{-2.28-0}{0.48}=-4.75$。t统计量的绝对值大于1.96，也就是在5% 显著性水平下拒绝原假设。其实，我们计算的t统计量绝对值还要大于2.58 （1%）。

2.2 置信区间

从样本数据并不能得到系数的真值。但是，我们能根据OLS估计量和标准误构建一个包含真值的置信区间。

系数β_1的95%置信区间：

1、用5%显著性水平的双边假设检验不能拒绝的一系列值；

2、有95%的可能性包含β_1真值的区间

当样本规模很大时，β_1的95%置信区间为

$$[\hat{\beta}_1 - 1.96SE(\hat{\beta}_1), \hat{\beta}_1 + 1.96SE(\hat{\beta}_1)] \tag{24}$$

例如，班级规模与测试分数回归中的β_1的95%置信区间为$[-2.28 \pm 1.96 \times 0.48] = [-3.22, -1.34]$

2.3 虚拟变量

迄今为止，我们讨论的自变量为连续型变量。还有一类回归因子为二值，即它只取两个值－－0和1。例如，当班级规模小于20人时为小班，X取值为1，当班级规模大于等于20人时为大班，X取值为0。这样的变量也被称为**指示变量、哑变量或虚拟变量**。

虚拟变量回归与上述回归相同，但是对于虚拟变量回归系数的理解却有些不同。

二值因变量回归实际上就是执行了一个均值差分。假设D_i等于0或1，取决于班级规模大小：

$$D_i = \begin{cases} 1, & X < 20 \\ 0, & X \geq 20 \end{cases}$$

总体回归方程为

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i \tag{25}$$

因为D_i是二值，那么，不能再将β_1理解成斜率，因为回归方程不是一条线了。那么，我们应该如何理解D_i呢？当$D_i = 0$时，回归方程变成

$$Y_i = \beta_0 + u_i \tag{26}$$

因为$E(u_i|D_i) = 0$，所以$E(Y_i|D_i = 0) = \beta_0$。也就是说，β_0是大班的情况下的平均分数。类似地，当$D_i = 1$时，回归方程变成

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 + u_i \tag{27}$$

因此，$E(Y_i|D_i = 1) = \beta_0 + \beta_1$；即是说$\beta_0 + \beta_1$是小班的平均分。

综上所述，$(\beta_0 + \beta_1) - \beta_0 = \beta_1$就是小班和大班平均分数的差异。换句话说，$\beta_1 = E(Y_i|D_i = 1) - E(Y_i|D_i = 0)$。因为$\beta_1$是总体均值之间的差异，因此，OLS估计量就是两个组的Y的平均值之差。

假设检验和置信区间与前面内容相同。

例如，小班教学的例子中，设置学生-老师比小于20时虚拟变量为1，其余为0。回归结果如下图所示。

Source	SS	df	MS			
				Number of obs	=	420
				F(1, 418)	=	15.99
Model	5605.54742	1	5605.54742	Prob > F	=	0.0001
Residual	146504.046	418	350.488149	R-squared	=	0.0369
				Adj R-squared	=	0.0345
Total	152109.594	419	363.030056	Root MSE	=	18.721

testscr	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
D	7.37241	1.843475	4.00	0.000	3.748774	10.99605
_cons	649.9788	1.387717	468.38	0.000	647.2511	652.7066

Figure 4: 虚拟变量回归结果

3 STATA教程（一）

Stata是一款流行的统计软件包。目前已经更新至stata15，更多详细信息可参见`www.stata.com`。本讲稿向大家介绍Stata以及上述回归的操作。

我使用的Stata14 MP版。点击桌面的“stata”图标，打开之后的界面如下图

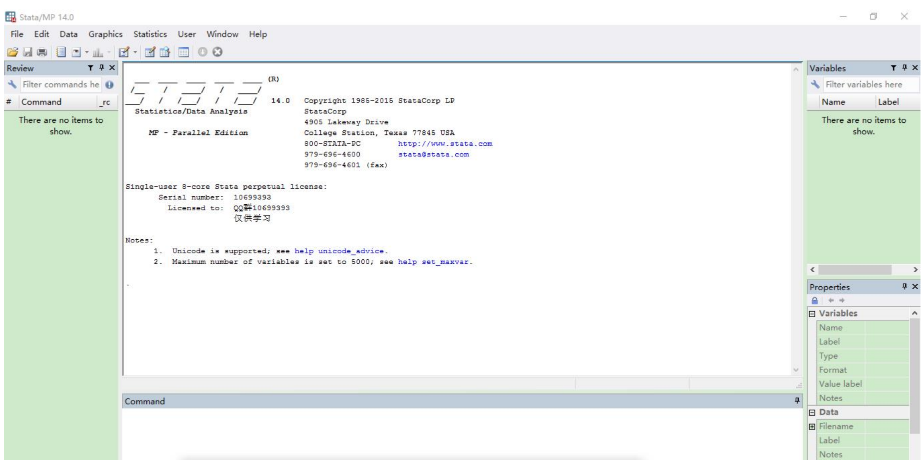


Figure 5: stata界面

stata面板最上面是“菜单栏”
左边窗口是“历史命令”
中间上窗口是“结果显示”
中间下窗口是“命令”
右边上窗口是“变量名”
（1）数据输入
首先点击“菜单栏”中的“Data”－“Data Editor”，选择“Data Editor（Edit）”，就会出现如下窗口

在这个界面，我们可以手动输入数据，也可以直接从Excel中复制粘贴。我们输入的数据如下：

edit.png

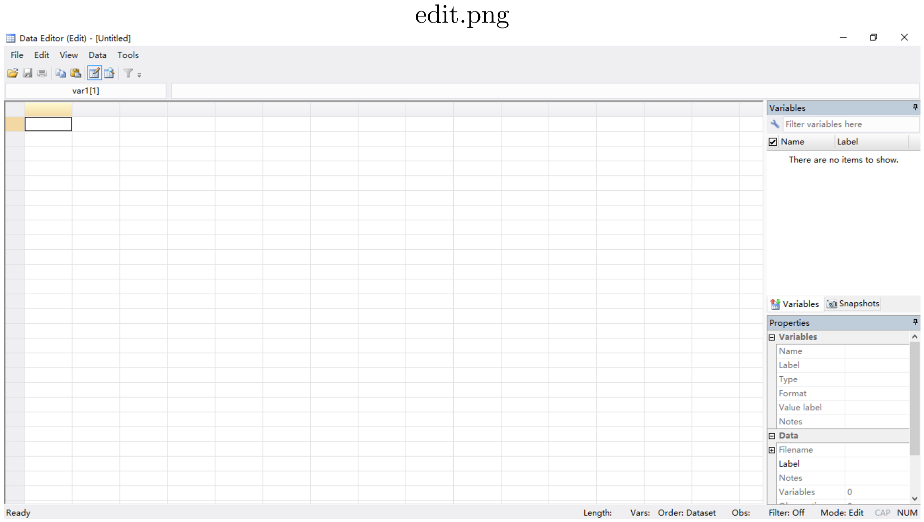


Figure 6: 数据输入界面

Table 2: 输入数据

obs	testscr	str
1	690.8	17.889
2	661.2	21.5247
3	643.6	18.6713
⋮	⋮	⋮

得到如下界面：

edit1.png

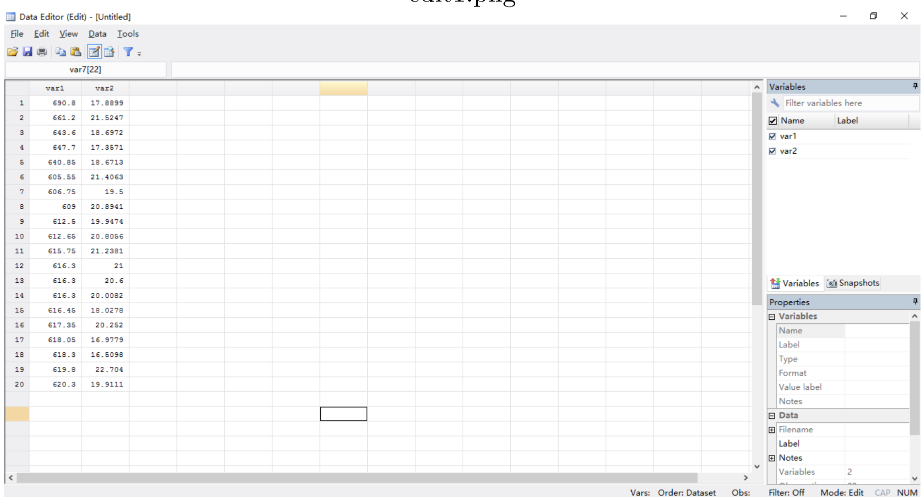


Figure 7: 数据输入界面

单击第一列的灰色方框，可以看到右侧下窗口“properties”变成

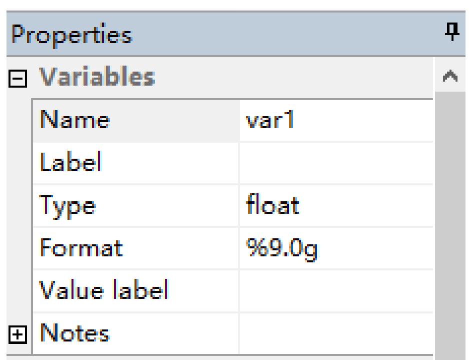


Figure 8: 数据输入界面

单击其中的“name”，修改“var1”为“testscr”。同理，也可以把“var2”修改为“str”。得到下图的数据输入结果。

与此同时，我们还可以在stata主面板上看到如下结果

打开data editor（edit）的另一种方式是点击菜单栏中的表格按钮“data editor（edit）”。

这样输入数据很麻烦，也会出很多错误。下面还会介绍另一种输入数据的方式。

通常，我们会查看一下现存的一些变量，可以输入下列命令

我们上面的变量名，所要输入的命令是

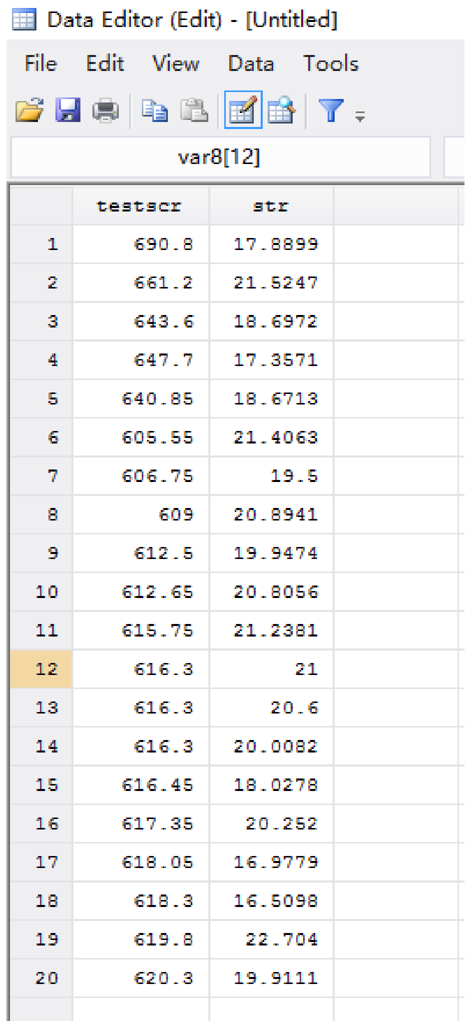
edit2.png 

Figure 9: 数据输入界面

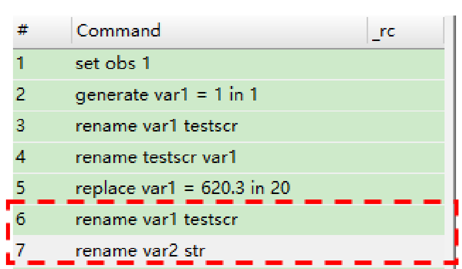


Figure 10: 数据输入界面

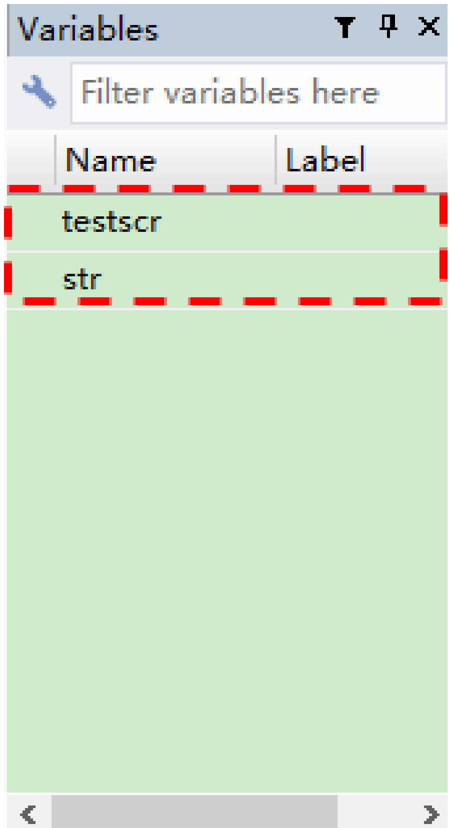


Figure 11: 数据输入界面

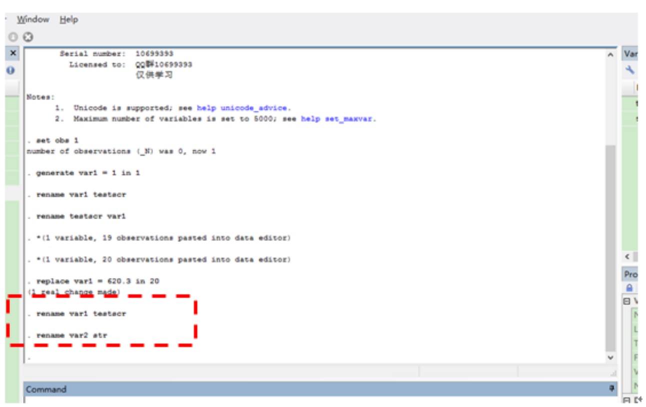


Figure 12: 数据输入界面

```
list  varname1  varname2  ...
```

list　testscr　str

这个命令将会把所有变量的观测值都列示在结果窗口中。缺失数据会用"."表示。但是一旦样本量大了，这种列示所有观测数据的方法就不适用了。要想终值列示进程，可以点击菜单栏中的"break"按钮。以后再介绍另一些检查错误的方式。你会看到如下界面

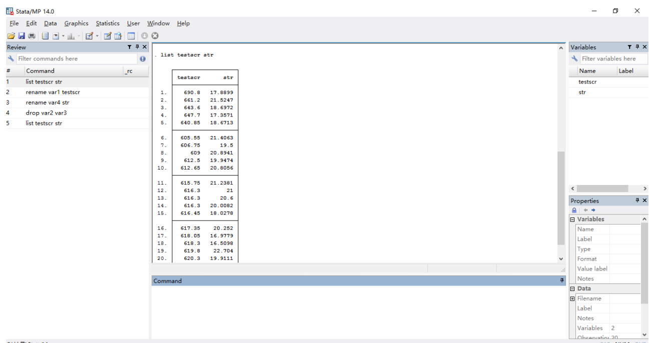
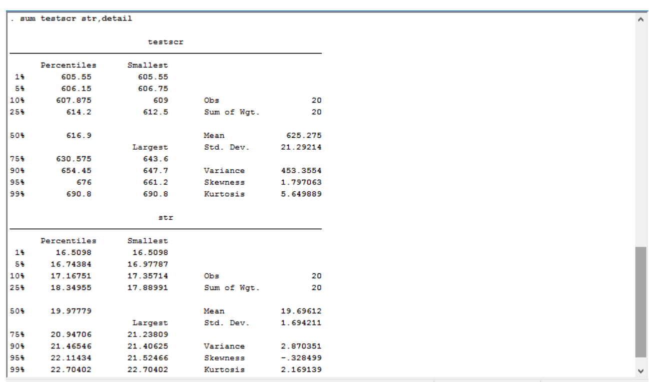


Figure 13: 观测值列表

如本讲中，我们需要知道样本数据的统计特征。我们可以输入如下命令

sum　testscr　str,detail

我们可以得到下图



```
. sum testscr str,detail

                          testscr
-------------------------------------------------------------
      Percentiles      Smallest
 1%       605.55         605.55
 5%       606.15         606.75
10%      607.875            609       Obs                  20
25%        614.2          612.5       Sum of Wgt.          20

50%        616.9                      Mean            625.275
                        Largest       Std. Dev.       21.29214
75%      630.575          643.6
90%       654.45          647.7       Variance       453.3554
95%          676          661.2       Skewness       1.797063
99%        690.8          690.8       Kurtosis       5.649889

                            str
-------------------------------------------------------------
      Percentiles      Smallest
 1%      16.5098        16.5098
 5%     16.74384       16.97787
10%     17.16751       17.35714       Obs                  20
25%     18.34955       17.88991       Sum of Wgt.          20

50%     19.97779                      Mean           19.69612
                        Largest       Std. Dev.      1.694211
75%     20.94706       21.23809
90%     21.46546       21.40625       Variance       2.870351
95%     22.11434       21.52466       Skewness       -.328499
99%     22.70402       22.70402       Kurtosis       2.169139
```

Figure 14: 统计量

散点图的命令为

scatter　testscr　str

得到的图形如下

我们还想看看散点图的拟合线。命令如下

twoway　scatter　testscr　str　——　lfit　testscr　str

得到的图如下：

而简单的回归的命令为

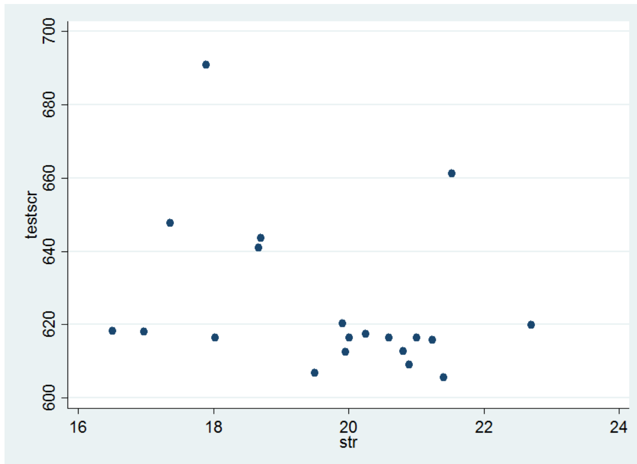


Figure 15: 散点图

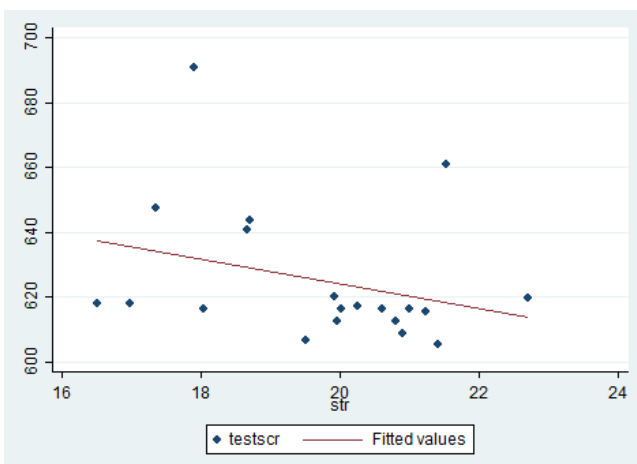


Figure 16: 拟合线

reg testscr str
得到的结果如下

```
. reg testscr str

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        20
-------------+----------------------------------   F(1, 18)        =      1.84
       Model |  799.805171         1  799.805171   Prob > F        =    0.1914
    Residual |  7813.94765        18  434.108203   R-squared       =    0.0929
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.0425
       Total |  8613.75282        19  453.355412   Root MSE        =    20.835

------------------------------------------------------------------------------
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -3.829551   2.821335    -1.36   0.191    -9.756957    2.097855
       _cons |   700.7023   55.76432    12.57   0.000     583.5458    817.8588
------------------------------------------------------------------------------
```

Figure 17: 简单回归结果

而稳健标准误的回归命令为
reg testscr str,r
得到的结果如下

```
. reg testscr str,r

Linear regression                               Number of obs     =         20
                                                F(1, 18)          =       1.47
                                                Prob > F          =     0.2404
                                                R-squared         =     0.0929
                                                Root MSE          =     20.835

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
     testscr |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         str |  -3.829551   3.154197    -1.21   0.240    -10.45627     2.79717
       _cons |   700.7023   63.98125    10.95   0.000     566.2827    835.1219
------------------------------------------------------------------------------
```

Figure 18: 稳健标准误回归结果