Chapitre 3 : Dérivation, convexité et continuité

1. Composer des fonctions

Technique :

- ➜ Chercher l'image 1 par la 2e fonction.
- ➜ Chercher l'image de l'image 1 par la 1ere fonction.

Exemple : Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$, v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x - 1$ et w la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $w(x) = \sqrt(x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $u \circ v$, puis déterminer explicitement $(u \circ v(x))$
2. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ u$, puis déterminer explicitement $(v \circ \sqrt{u}(x))$
3. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ w$, puis déterminer explicitement $(v \circ w(x))$
4. Préciser l'ensemble de définition de $w \circ v$, puis déterminer explicitement $(w \circ v(x))$

Définition :
Soient u et v deux fonctions dont les ensembles de définitions respectifs sont notés $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$.
La **fonction composée** de u par v, notée $v \circ u$, est la fonction définie par $(v \circ \sqrt{u}(x)) = v(u(x))$.
L'ensemble de définition de $v \circ u$ est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathscr{D}_u$ dont l'image par u appartient à $\mathscr{D}_v$.

2. Dériver une fonction composée

Technique :

- ➜ Dériver d'abord u (intérieur de la fonction).
- ➜ Dériver la fonction de référence v (fonction englobante) prise en u.

Exemple : Dans chaque cas, déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g sur l'intervalle f donné.

1. g est la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x - 4}$; $I =]2; +\infty[$. item g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 1)^4$; $I = \mathbb{R}$.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-3}$; $I = \mathbb{R}$.

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I, u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Cas particuliers :

- La fonction f, définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit n un entier relatif non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
  Si $n > 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$
  Si $n < -1$ et si u ne s'annule pas sur I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

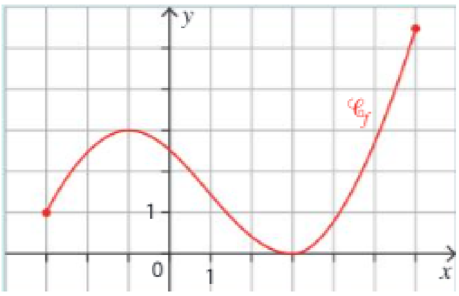
3. Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Technique :

➜ Lorsque la tangente à la courbe en un point est au-dessus de la courbe, la fonction est concave.

➜ Lorsque la tangente à la courbe en un point est au-dessous de la courbe, la fonction est convexe.

Exemple : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3; 6]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f sur $[-3; 6]$.
2. Déterminer graphiquement le ou les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- f est convexe sur I si la courbe $\mathscr{C}$ est située **au-dessus** de toutes ses tangentes sur I.
- f est concave sur I si la courbe $\mathscr{C}$ est située **en dessous** de toutes ses tangentes sur I.

4. Déterminer graphiquement l'existence d'un point d'inflexion

Technique :

➜ Si la courbe traverse la tangente en 1 point de la courbe.

Exemple : On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-2; 2]$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracer T_a.
3. En déduire graphiquement l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$.
A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.

5. Utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité d'une fonction

Technique :
- ➜ Dériver 2 fois la fonction.
- ➜ Étudier le signe de la dérivée seconde :
  - — s'il est positif, la fonction est convexe.
  - — s'il est négatif, la fonction est concave.

Exemple : Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. A l'aide d'une calculatrice, conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer la dérivée seconde de f.
3. En déduire la convexité de f.
4. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de f.

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur l'intervalle I.
- f'' est positive sur l'intervalle I.
- f' est croissante sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est concave sur l'intervalle I.
- f'' est négative sur l'intervalle I.
- f' est décroissante sur I.

6. Relier convexité d'une fonction et sens de variation de sa dérivée

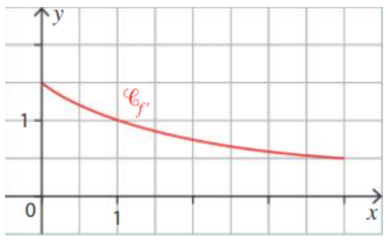
Technique :

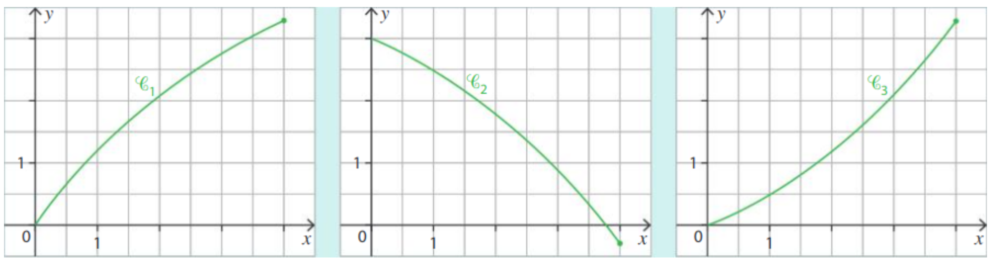
➜ Le signe de la dérivée seconde donne les variations de la dérivée :

— Si $f'' > 0$ alors f' est croissante.

— Si $f'' < 0$ alors f' est décroissante.

Exemple : Soit une fonction définie et dérivable sur $[0;4]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée f' représentée ci-contre.
$\mathscr{C}_f$ est l'une des trois courbes ci-dessous.
Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.





Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel appartenant à I.

- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

7. Étudier une fonction définie par morceau

Technique :

➜ Tracer chacune des fonctions définies sur un intervalle précis.

➜ Vérifier la continuité au point de recouvrement des 2 courbes.

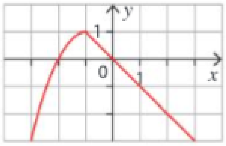
Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si} x > -1 \end{cases}$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
2. Étudier la continuité de la fonction f :

   (a) sur l'intervalle $]-\infty; -1]$; (b) sur l'intervalle $]-1; +\infty]$; (c) en -1.

3. Que peut-on en conclure ?

1. Voir le graphique ci-dessous.



2.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \subset l$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est continue sur I si, pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

Propriétés :

- Les fonctions affines les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Propriété :
Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

8. Prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type f(x)=k

Technique :

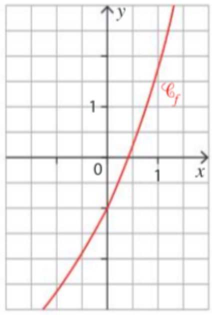
➜ Déterminer la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur cet intervalle.

➜ Trouver la solution de l'équation à la calculatrice par encadrements successifs.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 2$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
2. Démontrer que f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

4. Déterminer avec la calculatrice un encadrement decimal de α à 10^{-2} près.



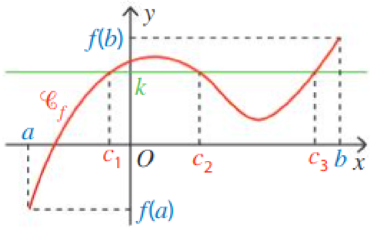
Régler l'intervalle

0.41	-0.08318221
0.42	-0.05803844
0.43	-0.03274248
0.44	-0.007292781
0.45	0.01831219
0.46	0.04407398

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

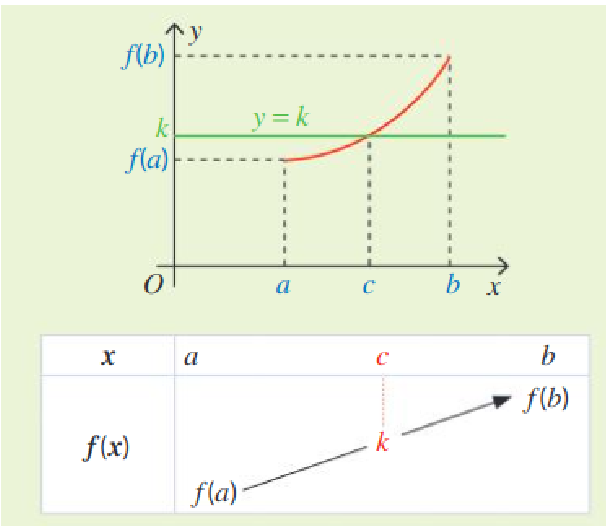


Cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Cas où f est strictement croissante :



Cas où f est strictement décroissante :