第 5 章
时间序列平滑预测法

金 林
中南财经政法大学统计系
jinlin82@qq.com

2015 年 4 月

Outline

1. 移动平均法
2. 一次指数平滑法
3. 线性二次指数平滑法
4. 温特线性与季节指数平滑法

1. 移动平均法
   - 一次移动平均法
   - 线性二次移动平均法
2. 一次指数平滑法
3. 线性二次指数平滑法
4. 温特线性与季节指数平滑法

- 一次移动平均法
- 线性二次移动平均法

移动平均

1. 移动平均（英语：Moving Average，MA），是一种分析时间序列数据的工具，主要思想是利用平均值抚平短期波动，反映出长期趋势或周期。
2. 根据使用的数据不同，可以分为：
   1. 中心化移动平均
   2. 前置移动平均
   3. 预测中主要使用前置移动平均
3. 根据平均值采取的形式不同，可以分为：
   1. 简单移动平均
   2. 加权移动平均

前置移动平均

1. 前置移动平均法是收集一组观察值，计算这组观察值的均值，利用这一均值作为下一期的预测值。

$$
\begin{aligned}
F_{t+1} &= \frac{1}{n}(x_t + x_{t-1} + \cdots + x_{t-n+1}) \qquad (1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=t-n+1}^{t} x_i \qquad (2)
\end{aligned}
$$

1. 在移动平均值的计算中包括的过去观察值的实际个数，必须一开始就明确规定。每出现一个新观察值，就要从移动平均中减去一个最早观察值，再加上一个最新观察值，计算移动平均值，这一新的移动平均值就作为下一期的预测值。
2. 主要适用于没有趋势性和季节性的时间序列数据。

移动平均中步长的选择

1. 当数据的随机因素较大时，宜选用较大的 N，这样有利于较大限度地平滑由随机性所带来的严重偏差；
2. 反之，当数据的随机因素较小时，宜选用较小的 N，这有利于跟踪数据的变化，并且预测值滞后的期数也少。
3. 由移动平均法计算公式可以看出，每一新预测值是对前一移动平均预测值的修正，N 越大，平滑效果越好。
4. 移动平均法有两种极端情况
    1. 在移动平均值的计算中包括的过去观察值的实际个数 N=1，这时利用最新的观察值作为下一期的预测值；
    2. N=n，这时利用全部 n 个观察值的算术平均值作为预测值。

移动平均的优点和局限性

1. 移动平均法的优点：
   1. 计算量少；
   2. 移动平均线能较好地反映时间序列的趋势及其变化。
2. 移动平均法的两个主要限制：
   1. 计算移动平均必须具有 N 个过去观察值，当需要预测大量的数值时，就必须存储大量数据；
   2. N 个过去观察值中每一个权数都相等，早于（t - N +1）期的观察值的权数等于 0，而实际上往往是最新观察值包含更多信息，应具有更大权重。

例子

- 一次移动平均法
- 线性二次移动平均法

基本思想

1. 为了避免利用移动平均法预测有趋势的数据时产生系统误差，发展了线性二次移动平均法。
2. 这种方法的基础是计算二次移动平均，即在对实际值进行一次移动平均的基础上，再进行一次移动平均。
3. 基本思想：一次平均数与实际数据之间存在滞后偏差，二次移动平均与一次移动平均之间也存在滞后偏差，利用这种偏差来预测。

计算方法

1. 二次平均在一次平均的基础上计算得到

$$S_t^{(2)} = \frac{S_t^{(1)} + S_{t-1}^{(1)} + \cdots + S_{t-N+1}^{(1)}}{N}$$

其中 $S_t^{(1)}$ 是一次移动平均值，$S_t^{(2)}$ 是二次移动平均值，N 是步长。

2. 预测公式为

$$F_{t+T} = a_t + b_t T$$

其中 T 为要预测的时间长度，

$$a_t = S_t^{(1)} + (S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \quad (3)$$

$$b_t = \frac{2}{N-1}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \quad (4)$$

例子

1 移动平均法

2 一次指数平滑法

- 一次指数平滑法

3 线性二次指数平滑法

4 温特线性与季节指数平滑法

- 一次指数平滑法

一次指数平滑法

1. 一次指数平滑法是利用前一期观测值和前一期预测值的加权平均得到的。
$$F_{t+1} = \alpha x_t + (1-\alpha)F_{t-1}$$
其中 α 为权重，一般称为光滑参数；
2. 为什么叫“指数”平滑？

一次指数平滑的特点

1. 一次指数平滑法是一种加权预测，权数为 α 。
2. 它提供的预测值是前一期预测值加上前期预测值中产生的误差的修正值。
3. 一次指数平滑适用于没有趋势性和季节性的时间序列数据。
4. 一次指数平滑法的初值的确定有以下几种方法：
    1. 取第一期的实际值为初值；
    2. 取最初几期的平均值为初值。
5. 需要找到最佳的 α 值，以使均方误差 MSE 最小，这需要通过反复试验确定。

$$\mathsf{SSE} = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_{t|t-1})^2 = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 \tag{5}$$

例子

- 布朗单一参数模型
- 霍尔特双参数模型

基本思想

1. 其基本原理与线性二次移动平均法相似
2. 因为当趋势存在时，一次和二次平滑值都滞后于实际值，将一次和二次平滑值之差加在一次平滑值上，则可对趋势进行修正。

计算方法

1. 二次光滑在一次光滑的基础上计算得到

$$S_t^{(1)} = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} \tag{6}$$
$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)} \tag{7}$$

其中 $S_t^{(1)}$ 是一次移动平均值，$S_t^{(2)}$ 是二次移动平均值，α 是光滑参数。

1. 预测公式为

$$F_{t+m} = a_t + b_t m$$

其中 m 为要预测的时间长度，

$$a_t = S_t^{(1)} + (S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \tag{8}$$
$$b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \tag{9}$$

例子

- 布朗单一参数模型
- 霍尔特双参数模型

基本思想

1. 其基本原理与布朗线性指数平滑法相似
2. 它不用二次指数平滑，而是对趋势直接进行平滑

计算方法

1. 预测公式为

$$F_{t+m} = S_t + b_t m$$

其中 m 为要预测的时间长度，

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) \quad (10)$$

$$b_{t-1} = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1} \quad (11)$$

其中 α 和 γ 是参数。

1. 初始值确定方法

$$S_0 = x_1 \quad (12)$$

$$b_0 = x_2 - x_1 \quad (13)$$

例子

- 温特季节模型

基本思想

1. 温特线性和季节性指数平滑法利用三个方程式，其中每一个方程式都用于平滑模型的三个组成部分（平稳的、趋势的和季节性的），且都含有一个有关的参数。
2. 温特季节模型不仅可以处理趋势性，还可以处理季节性。
3. 使用此方法时，一个重要问题是如何确定 α 、β 和 γ 的值，以使均方差达到最小。通常确定 α 、β 和 γ 的最佳方法是反复试验法。

计算方法

1. 预测公式为

$$F_{t+m} = (S_t + b_t m) I_{t+m-L}$$

其中 m 为要预测的时间长度，

$$\begin{aligned} S_t =& \alpha \frac{x_t}{I_{t-L}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1}) && (14) \\ b_{t-1} =& \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma) b_{t-1} && (15) \\ I_t =& \beta \frac{x_t}{S_t} + (1-\beta) I_{t-L} && (16) \end{aligned}$$

其中 α γ 和 β 是参数，L 是周期长度，I 是季节指数。

初始值确定方法

1. 初始值确定方法

$$S_{L+1} = x_{L+1} \tag{17}$$

$$b_{L+1} = \frac{(x_{L+1} - x_1) + (x_{L+2} - x_2) + (x_{L+3} - x_3)}{3L} \tag{18}$$

$$I_1 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}}, I_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}}, \cdots, I_L = \frac{\bar{x}_L}{\bar{x}}, \tag{19}$$

其中 $\bar{x}_L$ 为不同年度同一季度的平均值，$\bar{x}$ 为总体平均值。

例子