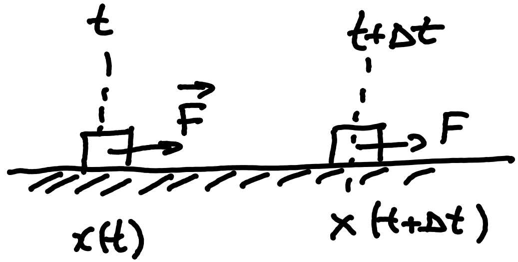
CURS 6

Modele matematice date prin ecuații diferențiale de ordinul II

1) Mișcarea unui corp sub acțiunea unei forțe



$x(t)$ – poziția corpului la momentul $t>0$

x_0 – poziția corpului la momentul inițial $t_0=0$

$$\boxed{x(0)=x_0}$$

Legea lui Newton : $\boxed{\vec{F}=m\cdot\vec{a}}$

$$v_m=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$ viteza medie

viteza instantanee (la momentul t) $\longrightarrow v(t)$

$$v_m(\Delta t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

v_0 – viteza inițială a corpului la mom. inițial $t_0 = 0$.

$$v(0) = \boxed{x'(0) = v_0.}$$

În general, forța ce acționează asupra corpului nu este constantă, aceasta poate să depindă de timp, de poziție și de viteză, adică:

$$F = F(t, x(t), x'(t)).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot x'' = F(t, x, x') \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

În cazul particular al forței constante

$$F(t, x, x') \equiv F$$

$$\Rightarrow \quad m x'' = F \quad \Rightarrow x'' = \frac{F}{m} \Rightarrow x' = \int \frac{F}{m} \cdot dt + c_1$$

$$x' = \frac{F}{m} \cdot t + c_1$$

$$x(t) = \int \left(\frac{F}{m} t + c_1 \right) dt + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{2m} \cdot t^2 + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

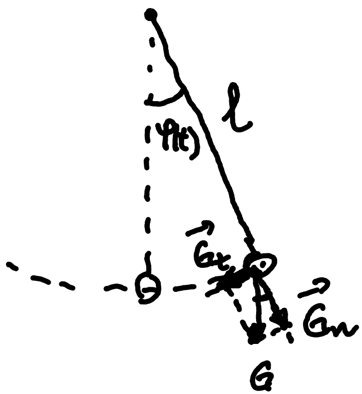
sol. gen. a ec. dif.

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_2 = x_0$$

$$x'(0) = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$$

$\Rightarrow$ soluția modelului $\boxed{x(t) = \frac{F}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0}$

2) Pendulul matematic



Pendulul matem. este format dintr-un punct material de masă m suspendat de un fir inextensibil de masă neglijabilă, de lungime l

corpul se scoate din poziția de echilibru și astfel acesta va efectua o mișcare oscilatorie în jurul poz. de echilibru (poz. verticală). Nu se ia în considerare forța de frecare cu aerul.

$\varphi(t)$ – unghiul format de fir și verticală la mom. $t>0$

φ_0 – unghiul format de fir și verticală la mom. inițial $t_0=0$

$$\boxed{\varphi(0)=\varphi_0}$$

$$\boxed{m\cdot a = F}$$

$$F = -G_t = -mg\cdot\sin\varphi$$

dist. parcursă de corp

$$s = s(t) = l \cdot \varphi(t)$$

$\uparrow$

lung. arcului de cerc.

$$v = s'(t) = \boxed{l \cdot \varphi'(t)}$$

v_0 – viteza corpului la mom. inițial $t_0 = 0$

$$s(0) = l \cdot \varphi'(0) = v_0 \implies \boxed{\varphi'(0) = \frac{v_0}{l}}$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = l \cdot \varphi''(t).$$

$$\implies \cancel{m} \cdot l\, \varphi''(t) = -\cancel{m} g \sin \varphi(t)$$

$$\implies \begin{cases} \varphi''(t) + \dfrac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t)) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \dfrac{v_0}{l} \end{cases}$$

ecuația pendulului neliniar.

Cazul oscilațiilor mici $\Rightarrow$ φ mic. $\Rightarrow$ $\sin\varphi \simeq \varphi$.

$\Rightarrow$ $\varphi'' + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$ ecuația pendulului liniar

(ec. liniară omogenă de ord. 2 cu coef. const.).

$\frac{g}{l} \overset{not}{=} \omega^2$ $\Rightarrow$ $\varphi'' + \omega^2 \cdot \varphi = 0$

$r^2 + \omega^2 = 0$

$r^2 = -\omega^2$

$r_{1,2} = \pm i\omega$.

$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ sol. gen.

$\varphi(0) = \varphi_0 \Rightarrow c_1 = \varphi_0$

$\varphi'(t) = -c_1\omega \sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t$

$\varphi'(0) = \frac{v_0}{l} \Rightarrow c_2\omega = \frac{v_0}{l} \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{l.\omega}$

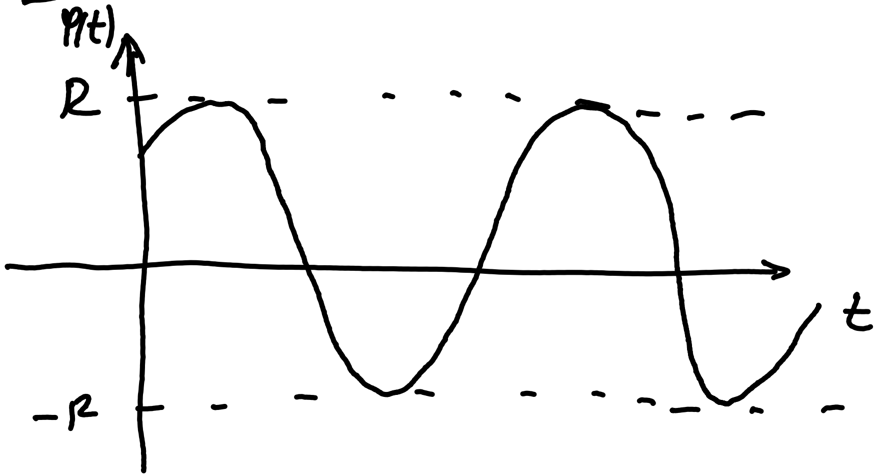
$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{l.\omega}\sin\omega t}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = R\cdot\cos\delta \\ \dfrac{v_0}{l\omega} = R\cdot\sin\delta \end{cases} \iff \begin{cases} R = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{l\omega}\right)^2} \\ \delta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0}{\varphi_0\omega l}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = R\cdot\cos\omega t\cdot\cos\delta + R\cdot\sin\omega t\cdot\sin\delta =$$

$$\boxed{\varphi(t) = R\cdot\cos(\omega t - \delta)}$$

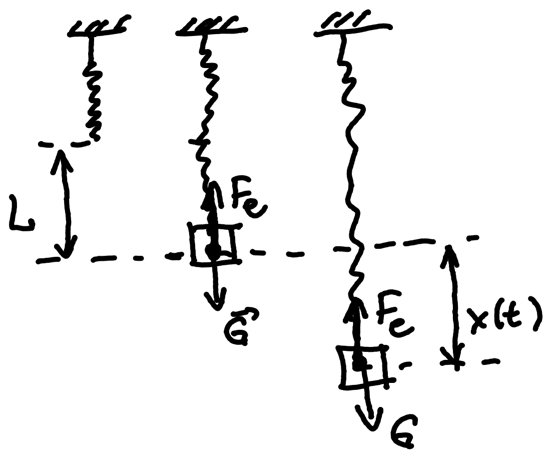
R - amplitudinea mișcării



mișcarea este periodică cu perioada $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

În cazul oscilațiilor mici perioada mișcării nu depinde de masa corpului, aceasta este proporțională cu $\sqrt{l}$.

3) Pendulul armonic fără frecare



se consideră un resort de care se suspendă un corp de masă m.

L - alungirea resortului în poz. de echilibru.

se scoate corpul din poz. de echilibru

- nu se ia în considerare forțele de frecare.

$x(t) \to$ poz. corpului față de poz. de echil. la mom. $t>0$

$x_0 \to$ poz. corpului la mom. inițial $t_0=0$

$v_0 \to$ viteza corpului la mom. inițial $t_0=0$

$$\boxed{m \cdot a = F}$$

$x = x(t) \Rightarrow v(t) = x'(t) \Rightarrow a(t) = v'(t) = x''(t)$.

$x(0) = x_0$

$v(0) = x'(0) = v_0$ cond. inițiale

$F = G - F_e$ $\quad F_e$ – forța de elasticitate a resortului

legea lui Hooke: F_e este prop. cu alungirea resortului

în poz. de echilibru: $F_e = G \Rightarrow mg = k \cdot L$

k – const. de elasticitate

$$\boxed{k = \frac{mg}{L}}$$

la momentul $t > 0$: $F_e = k(L+x) = \frac{mg}{L}(L+x)$

$$\Rightarrow F = G - F_e = mg - \frac{mg}{L}(L+x) =$$

$$= \cancel{mg} - \cancel{mg} - \frac{mgx}{L}$$

$$\Rightarrow m \cdot a = F \Rightarrow \cancel{m} \cdot x'' = -\frac{\cancel{m} g x}{L} \Rightarrow \boxed{x'' + \frac{g}{L} x = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' + \frac{g}{L} x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 . \end{cases}$$

$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \rightarrow$ frecvența naturală a pend. armonic

$$\Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$$

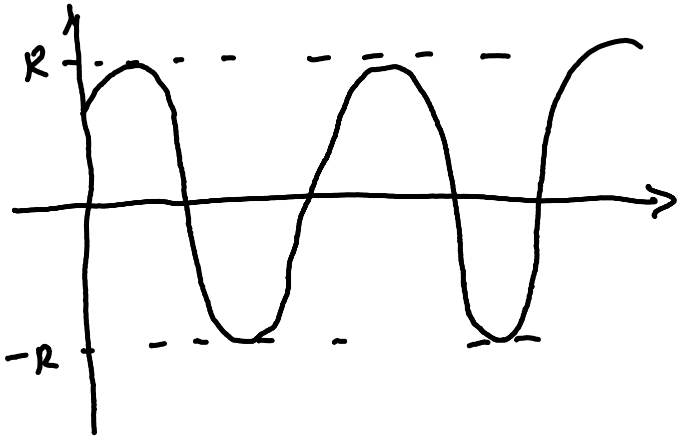
$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \omega_0$$

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

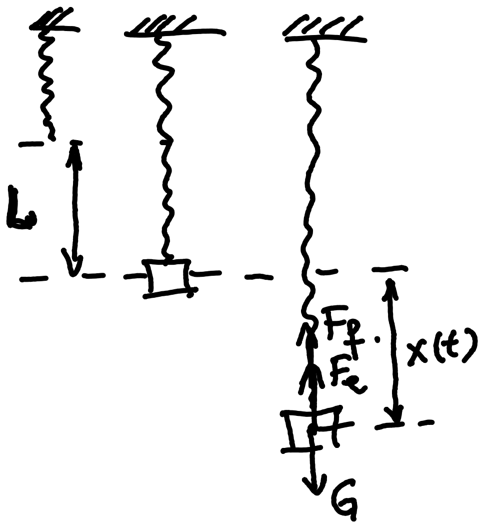
$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = R \cos \delta \\ \frac{v_0}{\omega_0} = R \cdot \sin \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \delta = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{x_0 \omega_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{x(t) = R \cdot \cos(\omega_0 t - \delta)}$$



4) Pendulul armonic cu frecare



dacă se ia în considerare și forța de frecare

$\Rightarrow F = G - F_e - F_f.$

forța de frecare este proporțională cu viteza corpului la mom. t.

$$F_f = \mu \cdot x'(t)$$

$m \cdot a = F \quad \Rightarrow \quad m \cdot x'' = mg - \frac{mg}{L}(x+L) - \mu \cdot x'$

$F = G - F_e - F_f$

$$m x'' = \cancel{mg} - \frac{mgx}{L} - \cancel{mg} - \mu \cdot x'$$

$$m x'' + \mu \cdot x' + \frac{mg}{L} \cdot x = 0 \quad \Big| :m.$$

$$x'' + \frac{\mu}{m} \cdot x' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega_0^2} \cdot x = 0$$

notăm cu $\lambda = \frac{\mu}{m}$, $\underline{\lambda > 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' + \lambda \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

$x'' + \lambda x' + \omega_0^2 x = 0$

$r^2 + \lambda \cdot r + \omega_0^2 = 0$ ec. caract.

$$\boxed{D = \lambda^2 - 4\omega_0^2}$$

$\underline{I}$ $D>0 \iff \lambda^2 > 4\omega_0^2$ (cazul supra-amortizării)

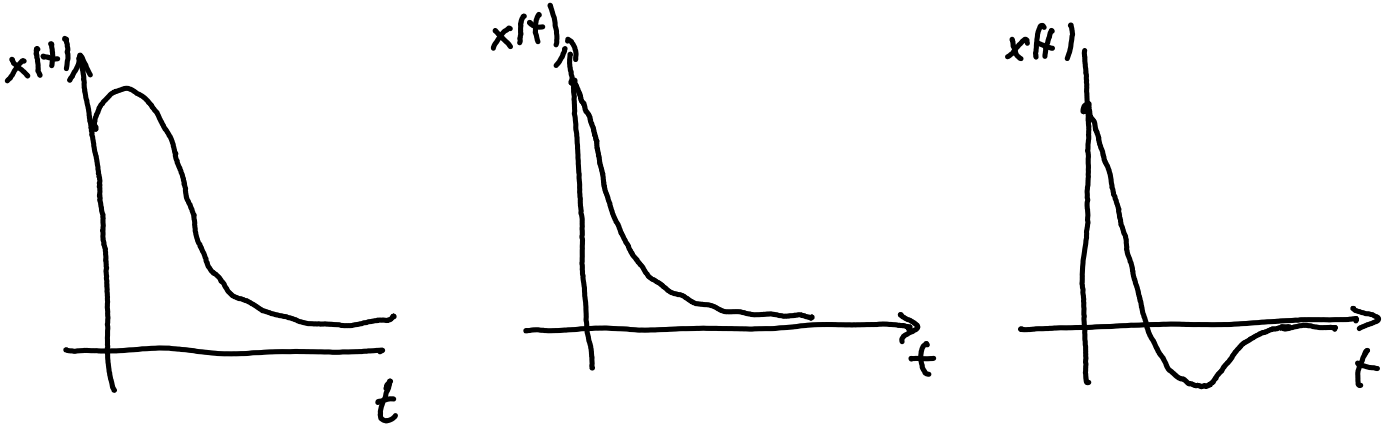
$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

c_1, c_2 sunt det. de cond. inițiale x_0 și v_0

avem $r_{1,2} < 0$ $\Rightarrow x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

corpul revine la poz. de echilibru



$\underline{\text{II}}$ $\Delta = 0 \iff \lambda^2 = 4\omega_0^2$ (amortizarea critică)

$$r_{1,2} = r_2 = -\frac{\lambda}{2} < 0$$

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

c_1, c_2 sunt det. de val. inițiale x_0 și v_0

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{\lambda}{2}t}}_{\downarrow 0}(\underbrace{c_1 + c_2 \cdot t}_{})$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} < 0$$

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$\underline{\text{III}}$ $\Delta < 0 \iff \lambda^2 < 4\omega_0^2$ (amortizarea slabă)

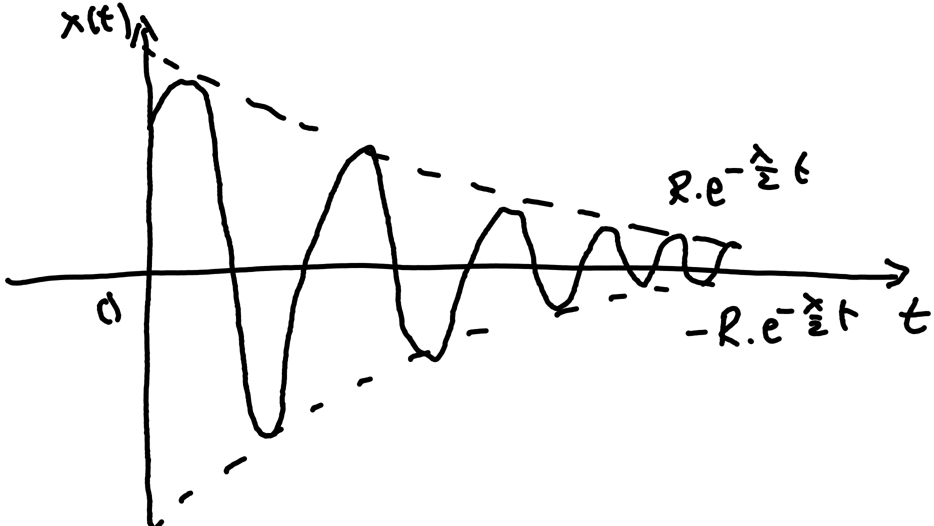
$$r_{1,2} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2}}_{\omega}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cdot \cos\omega t + c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cdot \sin\omega t$$

c_1, c_2 sunt det de x_0 și v_0

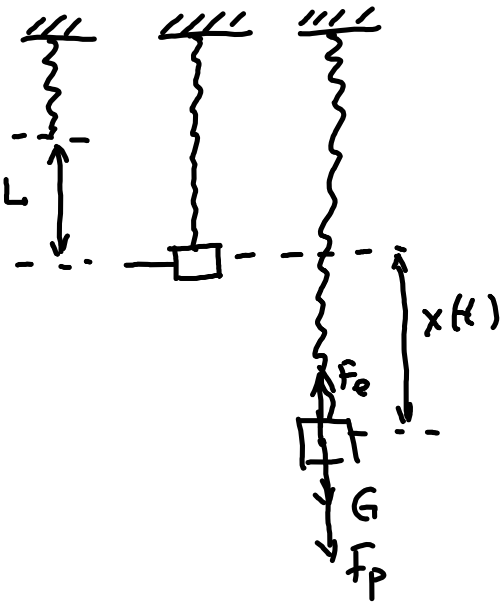
$$\begin{cases} c_1 = R\cdot\cos\delta \\ c_2 = R\cdot\sin\delta \end{cases} \iff \begin{cases} R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \delta = \operatorname{arctg}\frac{c_2}{c_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = R\cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t}\cos(\omega t - \delta)$$



$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ mișcarea este oscilatorie în jurul poz. de echilibru, mișcare ce se amortizează în timp.

5) Pendulul armonic. Oscilații forțate



- se consideră pendulul armonic fără frecare
- asupra corpului acționează o forță externă, periodică de forma

$$F_p(t) = A\cdot\cos\omega t$$

$$ma = F \quad , \quad F = G - F_e + F_p$$

$$mx'' = mg - \frac{mg}{L}(x+L) + A\cos\omega t$$

$$mx'' = \cancel{mg} - \frac{mg}{L}x \cancel{-mg} + A\cos\omega t \;/:m$$

$$x'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega_0^2}x = \underbrace{\frac{A}{m}}_{a}\cos\omega t$$

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2 x = a\cdot\cos\omega t \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

ec. de ord. 2, liniară, neomogenă cu coef. const

sol. gen: $x = x_{hom} + x_p$

x_{hom} - sol. gen. a ec. liniare omogene

x_p - o sol. partic. a ec. liniare neomogene

$x'' + \omega_0^2 x = 0$ ec. liniară omogenă

$r^2 + \omega_0^2 = 0$ ec. caract. $\Rightarrow r_{1,2} = \pm i\omega_0$

$x_{hom}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sol. gen

$x_p(t) = ?$ $\quad f(t) = a \cdot \cos \omega t = a \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos \omega t = P_0(t) e^{0 \cdot t} \cdot \cos \omega t$

se aplică metoda coef. nedeterminați (caz III)

trebuie verif. dacă $0 + i\omega = i\omega$ este sau nu este răd. a ecuației caract.

1. <u>cazul $\omega \neq \omega_0$</u> ($i\omega$ nu este sol. a ec. caract.)

$\Rightarrow x_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

$x_p'(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$

$x_p''(t) = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$

înlocuim în ecuația neomogenă

$x_p'' + \omega_0^2 x_p = a \cdot \cos \omega t$

$\Rightarrow -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 \left(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \right) = a \cos \omega t$

$C_1 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + C_2 (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t = a \cdot \cos \omega t$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 (\omega_0^2 - \omega^2) = a \Rightarrow C_1 = \dfrac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ C_2 (\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_p(t) = \dfrac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$

$\Rightarrow$ sol. gen: $x = x_{hom} + x_p$

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c_1, c_2 depinde de valorile inițiale x_0 și v_0.

2. <u>cazul $\omega = \omega_0$</u> (cazul de rezonanță)

$\omega = \omega_0 \Rightarrow i\omega = i\omega_0$ sol. a ec. caract. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_p(t) = t\cdot(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t)$

$x_p'(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + t(-C_1\omega_0\sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t)$

$x_p''(t) = 2\cdot(-C_1\omega_0\sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t) + t\cdot(-C_1\omega_0^2\cos\omega_0 t - C_2\omega_0^2\sin\omega_0 t)$

înlocuim în ecuația neomogenă

$x_p'' + \omega_0^2 x_p = a\cdot\cos\omega_0 t$ (am înlocuit $\omega = \omega_0$)

$\Rightarrow 2\cdot(-C_1\omega_0\sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t) + t\cdot(\cancel{-C_1\omega_0^2\cos\omega_0 t - C_2\omega_0^2\sin\omega_0 t}) +$

$+ \cancel{\omega_0^2\cdot t\cdot(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t)} = a\cdot\cos\omega_0 t$

$\Rightarrow 2C_2\omega_0\cos\omega_0 t - 2C_1\omega_0\sin\omega_0 t = a\cdot\cos\omega_0 t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_2\omega_0 = a & \Rightarrow c_2 = \frac{a}{2\omega_0} \\ -2c_1\omega_0 = 0 & \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sol. generală: $x = x_{hom} + x_p$

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + \frac{a}{2\omega_0} t \cdot \sin\omega_0 t$$

$$x(t) = c_1 \cos\omega_0 t + \left(c_2 + \frac{a}{2\omega_0} t\right) \sin\omega_0 t,$$

c_1, c_2 depind de x_0 și v_0

dacă utilizăm subst

$$\begin{cases} c_1 = R(t)\cos\delta(t) \\ c_2 + \frac{a}{2\omega_0} t = R(t)\sin\delta(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(t) = \sqrt{c_1^2 + \left(c_2 + \frac{at}{2\omega_0}\right)^2} \\ \delta(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{c_2 + \frac{a}{2\omega_0} t}{c_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = R(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \delta(t))$$

$R(t) = \sqrt{c_1^2 + \left(c_2 + \frac{a}{2\omega_0}\right)^2}$ amplitudinea mișcării

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{c_1^2 + \left(c_2 + \frac{a}{2\omega_0} t\right)^2} = +\infty$$

amplitudinea mișcării crește nelimitat. Din punct de vedere fizic acest fenomen duce la ruperea resortului.