POZA 2

1. a) funcție surjectivă: o funcție a.î. toate elem. din codom au un corespondent în domeniu

ordin al unui elem. într-un grup: dacă ordinul e finit se def. ca cel mai mic $n$ a.î. elem.$^n = 0$, dacă nu există un astfel de $n$, ordinul este $\infty$

inel: un triplet $(R, +, \cdot)$ pentru care $(R,+)$ - grup abelian și $\cdot$ este asociativă și distributivă bilateral față de $+$

bază a unui spațiu vectorial: un sistem de vectori $[b_1, \dots, b_n]$ liniar ind. și care generează spațiul vectorial

? polinom caract. al unui end. al unui sp. vec:

b) 1. surj. de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$ $\quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = x$

2. el. de ordin 7 al unui grup $\quad$ în $(\mathbb{Z}_{14}, +)$ $\quad$ $\hat{2}$ are ord. 7 a.î. $\hat{7} \cdot \hat{2} = \widehat{14} = \hat{0}$

3. inel cu 10 elemente

$(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ $\qquad$ $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ - grup abelian

$\cdot$ - asoc. și distr. bilateral

4. aplicație liniară injectivă

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ ($\mathbb{R}$ - sp. vec. pe $\mathbb{R}$)

$f(x) = x$

c) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ - grup

$\langle 2, 3 \rangle = \{ 2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$

$\langle 2, 3 \rangle = \{ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \mid x_i \in \{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}, i \in \{1, \dots, n\} \}$

I grupăm termenii $x_1, \dots, x_n$ ca produs de puteri de 2 și produs de puteri de 3 $\Rightarrow \in \{ 2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$

$H = \{2^n 3^m / n, m \in \mathbb{Z}\}$

$H = \langle 2, 3 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} H \leq \mathbb{Q}^* \\ \{2,3\} \subseteq \mathbb{Q}^* \\ \forall G \leq \mathbb{Q}^*, \{2,3\} \subseteq G \Rightarrow H \leq G \end{cases}$

① $H \leq \mathbb{Q}^*$

$1 \in H$ pt. că $\exists\ n = m = 0$ pt. care $2^0 \cdot 3^0 = 1 \in H$

$x, y \in H \overset{?}{\Rightarrow} x \cdot y^{-1} \in H$

$x \in H \Rightarrow x = 2^n \cdot 3^m$

$\left.\begin{array}{l} y \in H \Rightarrow y = 2^{n'} \cdot 3^{m'} \Rightarrow y^{-1} = 2^{-n'} \cdot 3^{-m'} \in H \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} = 2^n \cdot 3^m \cdot 2^{-n'} \cdot 3^{-m'} = 2^{n-n'} \cdot 3^{m-m'} \in H$

$H \subseteq \mathbb{Q}^*$

$x \in H \Rightarrow x = 2^n \cdot 3^m$

$\left.\begin{array}{l} 2^n \in \mathbb{Q}^* \ \left(\frac{2^n}{1} = 2^n\right) \\ 3^m \in \mathbb{Q}^* \ \left(\frac{3^m}{1} = 3^m\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2^n \cdot 3^m \in \mathbb{Q}^*$

② $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{Q}^*$

$\left.\begin{array}{l} 2 \in \mathbb{Q}^* \text{ pt. că } \frac{2}{1} = 2 \\ 3 \in \mathbb{Q}^* \text{ pt. că } \frac{3}{1} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}^*$

③ $\forall G \leq \mathbb{Q}^*, \{2,3\} \subseteq G \Rightarrow H \leq G$

H - subgrup

G - subgrup

$\Rightarrow$ dem. că $H \subseteq G$

$x \in H \overset{?}{\Rightarrow} x \in G$

$x \in H \Rightarrow x = 2^n 3^m \overset{?}{\Rightarrow} 2^n 3^m \in G$

G - parte stabilă față de $\cdot \Rightarrow \forall x_1, \ldots, x_n \in \{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \in G$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot \overset{\text{de n ori}}{\ldots} \cdot 2 \in G \\ 3 \cdot 3 \cdot \overset{\text{de m ori}}{\ldots} \cdot 3 \in G \end{array}\right. \Rightarrow 2^n \cdot 3^m \in G$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to [1, \infty)$

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & x \in (0, \infty) \end{cases}$ $\quad g(x) = x^2+1$

a) $f$ - inj

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ din $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

I $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$

$\Rightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$

II $x_1 \in (-\infty, 0]$ $\quad x_2 = (0, \infty)$

$\Rightarrow 2x_1+1 = x_2+3 \Rightarrow 2x_1 = x_2+2$

$\max x_1 = 0 \quad \min x_2 = 0$

$\Rightarrow 2x_1 \max = 0 \quad \min x_2+2 = 2$

$\Rightarrow$ nu se întâmplă niciodată $2x_1+1 = x_2+3$

III $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$x_1+3 = x_2+3 \Rightarrow x_1 = x_2$

$f$-surj.

$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

$2x+1$ - $\max = 1$

$x+3$ - $\min = 3$

$\Rightarrow$ pt. $y = 2$ $\nexists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = 2$

g - inj.

pt. $x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad g(-1) = 2, \; g(1) = 2 \Rightarrow g(-1) = g(1)$ şi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ nu e inj

g - surj. (Imf = codom)

$x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+1 \in [1, \infty) \Rightarrow g(x) \in [1, \infty)$

$\Rightarrow$ Imf $= [1, \infty) =$ codom $\Rightarrow$ surj.

b) $f$ - injectivă $\Rightarrow \exists$ inversă la dreapta

$f \circ h = 1 \qquad 1(x) = x$

$(f \circ h)(x) = x$

$f(h(x)) = x$

I $\quad h(x) \in (-\infty, 0]$

$2 \cdot h(x) + 1 = x$

$h(x) = \frac{x-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq 0$

$x - 1 \leq 0$

$x \leq 1 \Rightarrow x \in (\infty, 1]$

II $\quad h(x) \in (0, \infty)$

$h(x) + 3 = x$

$h(x) = x - 3$

$\Rightarrow x - 3 > 0$

$x > 3$

$\Rightarrow x \in (3, \infty)$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \in (\infty, 1] \\ x - 3, & x \in (3, \infty) \end{cases}$$

$g$ - surj. $\Rightarrow \exists$ inversă la stânga

$(h \circ g)(x) = x$

$h(g(x)) = x$

$h(x^2+1) = x \quad /()^2$

$(h(x^2+1))^2 = x^2 \quad /+1$

$(h(x^2+1))^2 + 1 = \underbrace{x^2+1}_{=y}$

$(h(y))^2 = y - 1$

$h(y) = \sqrt{y-1}$

c) $f \circ g(x) = f(g(x)) \Rightarrow$ codom $g$ = dom $f$ $\qquad$ nu e def

$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(2x+1) & x \in (-\infty, 0] \\ g(x+3) & x \in (0, \infty) \end{cases} = \begin{cases} (2x+1)^2 + 1 & x \in (-\infty, 0] \\ (x+3)^2 + 1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x^2 + 4x + 2 & x \in (-\infty, 0] \\ x^2 + 6x + 10 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

d) $h_1 \circ f = h_2 \circ f$

$h_1 \neq h_2$

$f$ - nu e surj $\exists$ $y \in \mathbb{R}$ a.î. $\nexists$ $x \in \mathbb{R}$ pt. care $f(x) = y$

$h_1(x) = \begin{cases} x, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ $\quad h_2(x) = \begin{cases} x, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$

$\begin{cases} h_1(f(x)) = h_2(f(x)) \ \forall x \in \mathbb{R} \ (f(x) \text{ nu are niciodată val } y) \\ h_1(y) \neq h_2(y) \Rightarrow h_1 \neq h_2 \end{cases}$

3. $G = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1 \}$

a) $G \leq \mathbb{C}^*$ $\quad (\mathbb{C}^*, \cdot)$ - grup

TC: ① $1 \in G$ pt. că $\exists$ $1 \in \mathbb{C}$ pt. care $1^6 = 1$

② $x, y \in G \overset{?}{\Rightarrow} x \cdot y^{-1} \in G$

$\left. \begin{array}{l} x \in G \Rightarrow x^6 = 1 \\ y \in G \Rightarrow y^6 = 1 \end{array} \right\} \overset{?}{\Rightarrow} (x \cdot y^{-1})^6 = 1$

$(x \cdot y^{-1})^6 = x^6 \cdot (y^{-1})^6 = x^6 \cdot y^{-6} = x^6 \cdot (y^6)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in G$

b) $f : \mathbb{Z} \to G \quad f(k) = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}$

I $f$ - morfism $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ $\quad (\mathbb{Z}, +) \quad (G, \cdot)$ - grupuri

$f(x+y) = \cos \frac{2(x+y)\pi}{6} + i \sin \frac{2(x+y)\pi}{6}$

$f(x) + f(y) = 1\left(\cos \frac{2x\pi}{6} + i \sin \frac{2x\pi}{6}\right) + 1 \cdot \left(\cos \frac{2y\pi}{6} + i \sin \frac{2y\pi}{6}\right) =$

$= 1 \cdot 1 \left( \cos\left(\frac{2x\pi}{6} + \frac{2y\pi}{6}\right) + i \cdot \sin \frac{2x\pi}{6} + \frac{2y\pi}{6} \right) =$

$= \cos \frac{2\pi(x+y)}{6} + i \sin \frac{2\pi(x+y)}{6} = f(x+y)$

$f(k_1) \in G \ \forall \ k_1 \in \mathbb{Z}$

$G = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z^6 = 1 \}$

$(f(k))^6 = \cos \frac{2k\pi}{6} \cdot 6 + i \sin \frac{2k\pi}{6} \cdot 6 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = \cos 0 + i \sin 0 =$

$= 1 + i \cdot 0 = 1$

$\underline{\text{II}}$ $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \sim)$

$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

refl: $x \sim x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ „A"

tranz: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$\left. \begin{array}{l} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = f(z)$ „A"

simetrică: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$ „A"

c) $\perp : G \times G \to G$

$(G, \cdot, \perp)$ - inel unitar

$(G, \cdot)$ - grup abelian ✓

$\perp$ : asociativă

distrib. bilateral față de $\cdot \Leftrightarrow a \perp (b \cdot c) = (a \perp b) \cdot (a \perp c)$

$(b \cdot c) \perp a = (b \perp a) \cdot (c \perp a)$

definim $a \perp b = a^{\ln b}$

$a^{\ln bc} = a^{\ln b} \cdot a^{\ln c}$ ✓

$(b \cdot c)^{\ln a} = b^{\ln a} c^{\ln a}$ ✓

$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$

$(a \perp b) \perp c = (a^{\ln b})^{\ln c} = a^{\ln b \cdot \ln c}$

$a \perp (b \perp c) = a^{\ln (b^{\ln c})} = a^{\ln c \cdot \ln b}$

$a \perp \boxed{e} = a$ : $a^{\ln e} = a$ $\quad e \perp a = e^{\ln a} = a$ (e - el. neutru)

$S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$T = \langle v_1, v_2 \rangle$

$u_1 = (1, 2, -1, -2)$ $\qquad$ $v_1 = (-1, 2, -7, 3)$

$u_2 = (3, 1, 1, 1)$ $\qquad$ $v_2 = (2, 5, -6, -5)$

$u_3 = (-1, 0, 1, -1)$

a) $S \underset{\mathbb{R}}{\leq} \mathbb{R}^4$ ($S$ nu e submulțime în $\mathbb{R}^3$)

① $0 = (0,0,0,0) \in S$ pt. că $\exists\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \in \mathbb{R}$, a.î. $\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = 0$

② $\left.\begin{matrix} x, y \in S \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in S$

$x \in S \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in S$

$y \in S \Rightarrow \alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 \in S$

$\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_1')u_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\alpha_2')u_2 + (\alpha\alpha_3 + \beta\alpha_3')u_3$

comb. lin de elem din $S \Rightarrow \in S$

b) $[u_1, u_2, u_3]$ - bază $\Leftrightarrow$ lin ind

generează $S$ ✓

lin. ind. $\Leftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\alpha_1(1, 2, -1, -2) + \alpha_2(3, 1, 1, 1) + \alpha_3(-1, 0, 1, -1) = 0$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - 2 - \cancel{1} - 4 = -6 \neq 0$

$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ sol unică $(0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \dim S = 3$

$[v_1, v_2]$ - bază $\Leftrightarrow$ $[v_1, v_2]$ - lin ind

$\langle v_1, v_2 \rangle$ - generează T ✓

$[(-1,2,-7,-3), (2,5,-6,-5)]$ - lin. ind

$$\alpha_1(-1,2,-7,-3) + \alpha_2(2,5,-6,-5) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$(-\alpha_1 + 2\alpha_2,\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2,\ -7\alpha_1 - 6\alpha_2,\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2) = 0$$

$$\begin{cases} -\alpha + 2\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \\ -7\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5-4 = -9 \neq 0$$

$\Rightarrow$ sol unică $(0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ lin. ind

$\Rightarrow [v_1, v_2]$ - bază în T

$\Rightarrow \dim T = 2$

pt. S+T avem dim max = 4 (subs. în $\mathbb{R}^4$)

scriem unul dintre ele ca și comb liniară de restul 4

$$v_2 = u_1 + u_2 + u_3 + v_1 \text{ (prin verificare)}$$

$$\Rightarrow \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \rangle = S+T = \langle u_1, u_2, u_3, v_1 \rangle$$

lin. ind.

$$\alpha_1(1,2,-1,-2) + \alpha_2(3,1,1,1) + \alpha_3(-1,0,1,-1), \alpha_4(-1,2,-7,-3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

bază $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow [b]_e \neq 0$ (invers)

unde e - baza canonică în $\mathbb{R}^4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dim S+T < 4 \\ \dim S = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim S+T = 3$$

$\left.\begin{matrix} \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \text{ lin ind} \\ \dim [u_1, u_2, u_3] = 3 = \dim S+T \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [u_1, u_2, u_3]$ - bază în S+T

$S+T=S$

$T \subseteq S+T=S$

$T \subseteq S \Rightarrow S \cap T = T \Rightarrow \dim S \cap T = 2$

bază în $S \cap T = [v_1, v_2]$

c) $V$ - $K$ sp vec,

$\dim V = n$

$V_1, V_2 \leq_K V$

$\begin{cases} \dim V_1 = n-1 \\ V_2 \subseteq V_1 \end{cases}$

? $\dim (V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1$

$V_1 + V_2 = V \Leftrightarrow \dim(V_1+V_2) = n$ (ideea)

$V_1 + V_2 \leq_K V$ (știm)

$V = [v_1, \dots, v_{n-1}]$ - bază în $V_1$ $\quad \dim V_1 = n-1$

$V' = [v_1', \dots, v_m']$ - bază în $V_2$ $\quad \dim V_2 = m$

$\exists\, v_i' \notin V_1 \quad v_i' \in V_2$

$[v_1, \dots, v_{n-1}, v_i']$ - lin. ind ($v_i'$ - nu poate fi comb lin de elem din $[v_1, \dots, v_{n-1}]$)

$\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_i'\} \in V_1 + V_2 \Rightarrow \dim V_1 + V_2 \geq n$ (L. S.)

ceva ce generează $V_1 + V_2$ $\quad \hookrightarrow [v_1, \dots, v_{n-1}, v_i']$ - lin ind

$V_1, V_2$ - subs. în $V \Rightarrow V_1 + V_2 \leq_K V \Rightarrow \dim V_1 + V_2 \leq \dim V$

$\dim V_1 + V_2 \leq n$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = n$

$\left.\begin{array}{l} \dim(V_1+V_2) = n \\ \dim V = n \\ V_1 + V_2 \leq_K V \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 + V_2 = V$

$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1$

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

$n - 1 + \underset{\text{ii}}{\dim V_2} = n + \dim(V_1 \cap V_2)$

$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1$

5. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2)$

$v = [(1, 2), (-2, 1)]^t$

$w = [(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)]^t$

a) $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$\left.\begin{array}{l} x, y \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, x_2) \\ y = (y_1, y_2) \end{array}$

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) = f((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) =$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2, 3\alpha x_1 + 3\beta y_1 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2)$

$= (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), \alpha(2x_1 - x_2) + \beta(2y_1 - y_2), \alpha(3x_1 + 2x_2) + \beta(3y_1 + 2y_2)$

$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(2x_1 - x_2), \alpha(3x_1 + 2x_2)) + (\beta(y_1 + y_2), \beta(2y_1 - y_2), \beta(3y_1 + 2y_2)) =$

$= \alpha(x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2) + \beta(y_1 + y_2, 2y_1 - y_2, 3y_1 + 2y_2) =$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

b) $v$ - bază în $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + 4 \neq 0$ ✓

$[v]_e$ - inv $e$ - baza can. în $\mathbb{R}^2$

$w$ bază în $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$ ✓

$[w]_{\bar{e}}$ - inv

$\bar{e}$ - bază can. în $\mathbb{R}^3$

$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}$

b) $[f]_{v,w} = [f(v)]_w^t = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_w \\ [f(v_2)]_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{16}{3} & \frac{22}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$f(v_1) = f(1,2) = (3,0,7)$

$[f(v_1)]_w = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

unde $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 \cdot w_3 = (3,0,7)$

$\alpha_1(1,-1,0) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(1,1,1) = (3,0,7)$

$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 7 \Rightarrow \alpha_1 = 7 - \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow$

$2(7-\alpha_2) - \alpha_2 = 7$

$14 - 3\alpha_2 = 7$

$3\alpha_2 = 7$

$\alpha_2 = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow \alpha_1 = {}^{3/}7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$

$\alpha_3 = \frac{14}{3}$

$f(v_2) = f(-2,1) = (-1,-5,-4)$

$[f(v_2)]_w = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

unde $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3 = (-1,-5,-4)$

$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = -5 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \Rightarrow \alpha_2 = 7 - \alpha_3 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1 - 7 + \alpha_3 + \alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 7 + 2\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = -5 \Rightarrow \alpha_3 = -5 + \alpha_1 \end{cases}$

$\alpha_1 - 7 + 2(-5 + \alpha_1) = -1$

$3\alpha_1 - 17 = -1$

$3\alpha_1 = 16 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{16}{3}$

$\alpha_3 \overset{3/}{=} -5 + \frac{16}{3} = \frac{-1}{3}$

$\alpha_2 \overset{3/}{=} 7 - \frac{-1}{3} = \frac{22}{3}$

c) o bază şi dim pt. Ker f şi Im f

Ker f $\quad \ker f = \{x \mid f(x) = 0\}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_2 - x_2 = 0 \\ -3x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow \dim \ker f = 0$ (dim $\{0\} = 0$ teoremă)

bază în Ker f = listă fără niciun element

Im f

dim dom = dim Ker f + dim Im f $\Rightarrow$ dim Im f = dim $\mathbb{R}^2 = 2$

bază în Im f ?

încercări (orice listă de 2 elemente, dacă e lin ind $\Rightarrow$ bază; dacă generează $\Rightarrow$ bază - au dim = dim $\mathbb{R}^2$)

$[f(1,1), f(1,2)] = [(2,1,5), (3,0,7)]$

$\alpha_1(2,1,5) + \alpha_2(3,0,7) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$(2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1, 5\alpha_1 + 7\alpha_2) = (0,0)$

$\alpha_1 = 0$

$3\alpha_2 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ lin ind