

# Algoritmica grafurilor

## I. Introducere

Mihai Suciu

Facultatea de Matematică și Informatică (UBB)  
Departamentul de Informatică

Februarie, 25, 2025

1 / 51



## Continut

### 1 Organizare

- Prezentarea cursului

### 2 Introducere

### 3 Definiții

- Multigraf neorientat
- Graf simplu
- Multigraf orientat
- Multigraf ponderat
- Drumuri
- Graf conex

### 4 Reprezentări ale grafurilor

### 5 Matricea distanțelor

2 / 51

Organizare Prezentarea cursului



## Organizare

Organizare Prezentarea cursului



## Structura

- curs și seminar: Mihai Suciu ([mihai.suciu \[at\] ubbcluj.ro](mailto:mihai.suciu@ubbcluj.ro), [www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu](http://www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu))

### laborator:

- Lector dr. Adriana COROIU ([adriana.coroiu \[at\] ubbcluj.ro](mailto:adriana.coroiu@ubbcluj.ro), <http://www.cs.ubbcluj.ro/~adrianac/>)
- Dr. Alexandru MARINESCU ([alexandru.marinescu \[at\] ubbcluj.ro](mailto:alexandru.marinescu@ubbcluj.ro))
- Drd. POP Ioan Daniel ([ioan.daniel.pop \[at\] ubbcluj.ro](mailto:ioan.daniel.pop@ubbcluj.ro))
- C.d. asociat CAPILNAS Matei ([matei.capilnas \[at\] ubbcluj.ro](mailto:matei.capilnas@ubbcluj.ro))
- Mihai Suciu

- Pagina web a cursului (cod acces MsTeams: xfyst9g)  
[www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu](http://www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu)

3 / 51

4 / 51

- Curs: 2 ore / săptămână

- Seminar: 1 oră / săptămână

- Laborator: 1 oră / săptămână

Orar:

<https://www.cs.ubbcluj.ro/files/orar/2024-2/disc/MLR5025.html>

Organizare Prezentarea cursului



## Evaluare și cerințe

Organizare Prezentarea cursului



## Evaluare și cerințe (II)

- Colocviu (C) - examen scris (~curs 14)

- Activitate Laborator (L)

- două laboratoare vor fi notate (test la laborator):
  - săpt. 7/8
  - săpt. 13/14

- Puncte bonus la laborator (B)

- nota finală:

$$0.67 * C + 0.33 * L + B = \text{nota\_grafuri}$$

- colocviu** - nota trebuie să fie **minim 5!!**

- laborator**

- pentru colocviu: nota la fiecare activitate notată la laborator  $\geq 5$
- pentru restante: media la laborator  $\geq 5$

5 / 51

6 / 51

- problemele primite la laborator trebuie rezolvate în **C/C++**

- Activitatea de seminar este OBLIGATORIE în proporție de minim 75% → maxim 2 absențe.

- Activitatea de laborator este OBLIGATORIE în proporție de minim 90% → maxim 1 absență.

- Studentii vor participa la activități împreună cu grupa lor** (așa cum reiese din academicinfo)!

## Evaluare și cerințe (III)



- Este necesară participarea studentilor la ambele ore de seminar / laborator pentru a fi luată în considerare prezența, pentru a primi prezența la laborator trebuie abordate cerințele primite în timpul laboratorului.
- Studentii cu **mai mult de 2 absente nemotivate** la **seminar** și **1 absență la laborator** nu vor fi primiți la examenul din sesiunea normală și **nici** la examenul din sesiunea de restanță (acești studenți vor trebui să repete acest curs în anul universitar următor). Sunt exceptați de la această cerință cei scutiti medical care pot dovedi cu acte fiecare absență în parte.

## De ce?



### Obiective:

- Obținerea unei imagini de ansamblu, cunoașterea și înțelegerea noțiunilor, modelelor generale de probleme și algoritmilor de rezolvare a acestora
- Cunoașterea conceptelor teoretice ale algoritmicii grafurilor și aplicarea acestora în modelarea și rezolvarea problemelor
- Analizarea unui graf și a problemelor ce țin de grafuri: conectivitate, cel mai scurt drum, drum minim, flux de date, problema comis-voiajorului, etc.
- Cunoașterea implementării algoritmilor într-un limbaj de programare

## Conținut curs



- Notiuni de bază**
- Studiu aprofundat al reprezentării grafurilor. Drumuri în grafuri.
- Algoritmul lui Bellman-Kalaba, algoritmul lui Ford, algoritmi matriceali, drum ciclic, drumuri Euleriene, drumuri Hamiltoniene.
- Conectivitate și probleme de lanț minim. Parcurgeri de graf în lățime și adâncime.
- Numere fundamentale în teoria grafurilor.
- Arbore și păduri

## Conținut curs (II)



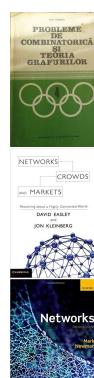
- Cuplaje în grafuri**
- Probleme extremale**
- Probleme grele: ciclu Hamiltonian, problema comis-voiajorului.** Probleme de numărare și enumerare.
- Probleme grele: clique, vertex cover, colorare**
- Ciclu elementar Eulerian.** Grafuri planare.
- Retele de transport.**
- Fluxuri în rețele de transport.**
- Probleme de cuplaj.**

## Bibliografie



- Berge C., Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970.
- Berge C., Teoria grafurilor și aplicațiile ei, Ed. Tehnica, 1972
- T. Toadere, Gafe. Teorie, algoritmi și aplicații, Ed. Albastra, Cluj-N (ed. I, II, III), 2002 și 2009
- KÁSA ZOLTÁN, Combinatorică cu aplicații, Presa Universitară Clujeana, 2003.
- Cormen, Leiserson, Rivest, Introducere în algoritmi, Editura Computer Libris Agora, 2000.
- Rosu A., Teoria grafelor, algoritmi, aplicații. Ed. Militară, 1974.
- Ciurea E., Ciupala L., Algoritmi - algoritmi fluxurilor în rețele, Ed. Matrix Rom, 2006.
- CATARANCIUC S., IACOB M.E., TOADERE T., Probleme de teoria grafelor, Lito. Univ. Cluj-Napoca, 1994.
- KÁSA Z., TARTIA C., TAMBLEUA L.: Culegere de probleme de teoria grafelor, Lito. Univ. Cluj-Napoca 1979.

## Bibliografie (II)

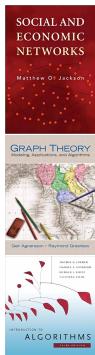


TOMESCU I., Probleme de combinatorică și teoria grafurilor. Ed. Did. si Pedag. Bucuresti 1981.

Easley David and Kleinberg Jon. 2010. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. Cambridge University Press, New York, NY, USA.

Mark Newman. 2010. Networks: An Introduction. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA

## Bibliografie (III)



Matthew O. Jackson. 2008. Social and Economic Networks. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Geir Agnarsson and Raymond Greenlaw. 2006. Graph Theory: Modeling, Applications, and Algorithms. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press.

13 / 51

## Bibliografie (IV)

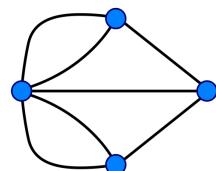
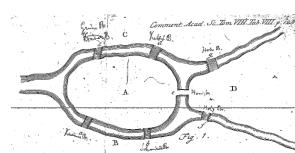


Claude Berge. 1962. The theory of graphs. Dover publications.

Robert Sedgewick, Philippe Flajolet. 2013. An introduction to the analysis of algorithms (second edition). Addison-Wesley.

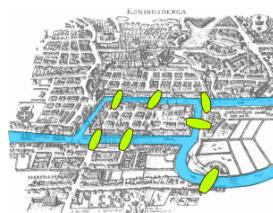
14 / 51

## Partea II



15 / 51

## Incepaturi

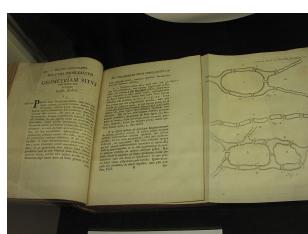


16 / 51

## Solutie

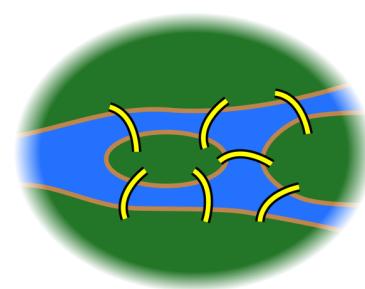


Leonhard Euler (1707-1783)



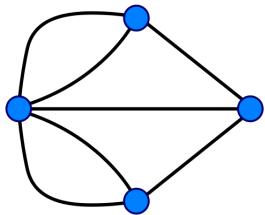
17 / 51

## Podurile din Königsberg



18 / 51

## Podurile din Königsberg (II)



## Plecând de la poduri...

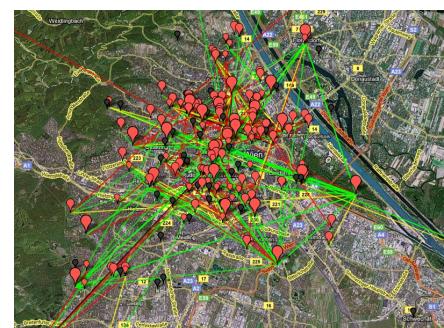


- drumuri și circuite Euleriene - problema poștașului chinezesc, etc.
- drumuri și circuite Hamiltoniene - TSP, rutarea vehiculelor, etc.
- colorarea grafurilor - probleme de planificare / alocare (alocarea regiștrilor CPU), etc.
- cuplaje în grafuri - probleme de asignare, repartizare, admitere în învățământ
- fluxuri în grafuri - reconstrucție de imagini 3D, calcul paralel, etc.
- drumuri de cost minim - hărți, algoritmi de compresie, etc.

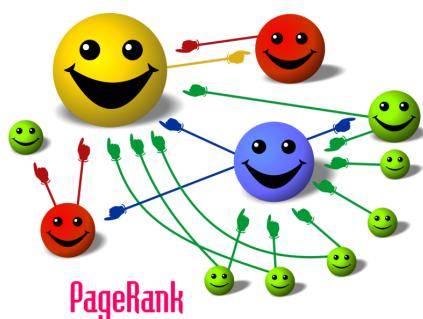
## Unde suntem acum?



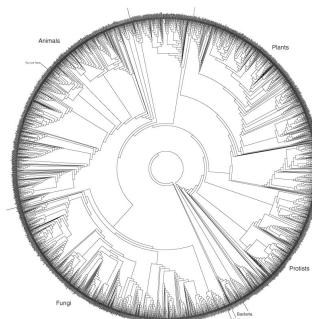
## Unde suntem acum? (II)



## Unde suntem acum? (III)



## Unde suntem acum? (IV)



## Definiții



## Multigraf neorientat

se numește multigraf orice sistem de forma  $G = (V, E, g)$  unde  
 $V$  - mulțimea vârfurilor,  $V \neq \emptyset$   
 $E$  - mulțimea muchiilor,  $V \cap E = \emptyset$   
 $g : E \rightarrow V \otimes V$

Se mai poate scrie

$$G = (V(G), E(G), g(G))$$

Observații:

- dacă mulțimile  $V$  și  $E$  sunt finite  $\Rightarrow$  multigraful  $G$  este finit
- $AxB = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$  - pereche ordonată de elemente
- $A \otimes B = \{(a, b) | a \in A, b \in B \text{ sau } a \in B, b \in A\}$  - pereche neordonată

## Multigraf (n,m)



$$n = |V| - \text{ordinul multigrafului } G$$

$$m = |E| - \text{dimensiunea multigrafului } G$$

- dacă extremitățile unei muchii coincid, muchia se numește **bucă**

$$g(e) = \{a, a\}$$

- dacă

$$g(e_1) = g(e_2)$$

atunci muchiile  $e_1$  și  $e_2$  sunt paralele

## Muchii adiacente



- setul muchiilor ce leagă vârfurile  $a$  și  $b$  este

$$g^{-1}(a, b) = \{e \in E(G) | g(e) = \{a, b\}\}$$

## Muchii adiacente

fie  $x$  un vârf din  $G$ .  $N_G(x)$  sau  $N(x)$  este setul muchiilor adiacente lui  $x$ :

$$N_G(x) = \{y \in V(G), \exists e \in E(G), g(e) = \{x, y\}\}$$

sau

$$N_G(x) = \{y \in V(G), g^{-1}(x, y) \neq \emptyset\}$$

## Muchii incidente



## Muchii incidente

într-un multigraf  $G$ , setul muchiilor incidente lui  $x$  (care nu sunt bucle) este:

$$I_G(x) = \{e \in E(G), \exists y \in V(G), y \neq x, g(e) = \{x, y\}\}$$

## Bucle incidente

setul buclelor incidente nodului  $x$  este:

$$L_G(x) = \{e \in E(G), g(e) = \{x, x\}\}$$

## Gradul unui vârf



## Gradul unui vârf

gradul unui vârf, notat  $d(x)$ , este numărul muchiilor incidente lui  $x$ :

$$d(x) = \text{card}(I_G(x)) + 2 * \text{card}(L_G(x)).$$

## Gradul maxim / minim

vom nota cu  $\Delta(G)$  gradul maxim al vârfurilor grafului  $G$  și cu  $\delta(G)$  gradul minim al vârfurilor lui  $G$ .

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v), \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$$

Dacă:

- $d(x) = 0$ ,  $x$  este un vârf izolat
- $d(x) = 1$ ,  $x$  este vârful unei muchii



## Graf simplu

## Graf simplu

un multigraf fără bucle și muchii paralele se numește **graf simplu**. În acest caz

$$|g^{-1}(a, b)| \leq 1, \forall a, b \in V.$$

Se poate scrie  $\{a, b\}$  în loc de  $g(e) = \{a, b\}$ .

Graful se notează  $\bar{G} = (V, E)$ .

Observații:

- pentru un graf simplu gradul unui nod este:

$$d(x) = |N_G(x)|$$

**Definiții****graf regular**

graf în care toate vârfurile au același grad.

Graf  $k$ -regular, toate vârfurile au gradul  $k$

$$d(x) = k, \forall x \in V(G).$$

**Graf complet**

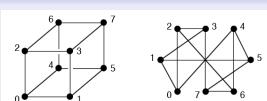
un graf pentru care toate perechile de vârfuri sunt adiacente se numește **graf complet**. Un graf complet de ordinul  $n$  se notează  $K_n$ .

Exemple

**Izomorfism****Izomorfism multigraf**

multigrafurile  $G_1$  și  $G_2$  sunt izomorfe dacă există bijecțiile  $f : V_1 \rightarrow V_2$  și  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  astfel ca:

$$(i, j, k) \in E_1 \Leftrightarrow (f(i), f(j), g(k)) \in E_2.$$

**Izomorfism (III)****Exemplu izomorfism****Teoremă**

relația de izomorfism în mulțimea grafurilor este o relație de echivalență.

**Definiții (II)**

graful  $G' = (V', E')$  este complementul grafului  $G = (V, E)$ , dacă  $V' = V$  și  $E' = \{\{a, b\} | \{a, b\} \notin E\}$ .

- dacă  $G$  este un graf de ordinul  $n$  atunci  $E(G) \cup E(G') = E(K_n)$ .

**Izomorfism (II)****Izomorfism graf simplu**

două grafuri  $G_1$  și  $G_2$  sunt izomorfe dacă există funcția bijectivă  $f : V_1 \rightarrow V_2$  astfel că:

$$(a, b) \in E_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2.$$

sau

**Izomorfism graf simplu**

un graf  $G_1 = (V_1, E_1)$  este izomorf cu un graf  $G_2 = (V_2, E_2)$  dacă există o corespondență binunivocă între mulțimile vârfurilor  $V_1$  și  $V_2$  și o corespondență biunivocă între mulțimile muchiilor  $E_1$  și  $E_2$  în așa fel încât dacă  $e_1$  este o muchie cu extremitățile  $u_1$  și  $v_1$  în graful  $G_1$ , atunci muchia corespondentă  $e_2$  a grafului  $G_2$  are extremitățile în vâfurile  $u_2$  și  $v_2$  din  $V_2$ , vârfuri care corespund cu  $u_1$  și  $v_1$ .

**Exemple de grafuri**

- graf nul
- graf linie
- graf ciclu
- graf complet
- graf bipartit complet

## hand-shaking

pentru un graf G avem

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2|E(G)|.$$

## corolar

într-un graf există întotdeauna un număr par de vârfuri ce au grad impar

## corolar

fiecare graf  $k$ -regular pe  $n$  vârfuri are  $\frac{kn}{2}$  muchii, în particular  $K_n$  are  $\frac{n(n-1)}{2}$  muchii.



## Subgraf

## Definiție

pentru multigraful  $G_1 = (V_1, E_1, g_1)$  și  $G = (V, E, g)$  spunem că  $G_1$  este subgraf al lui  $G$  dacă

$$V_1 \subseteq V$$

$$E_1 \subseteq E$$

$$g_1(e) = g(e), \forall e \in E_1$$

se notează  $G_1 \subseteq G$



## Multigraf, graf orientat

## Multigraf orientat

se numește multigraf orientat orice sistem de forma  $\vec{G} = (V, E, \eta)$  unde  $V$  este mulțimea vârfurilor,  $V \neq \emptyset$

$E$  este mulțimea arcelor,  $V \cap E = \emptyset$

$$\eta : E \rightarrow V \times V$$

- $\eta(e) = \{u, v\}$  arcul este **incident spre exterior** vârfului  $u$ , arcul este **incident spre interior** vârfului  $v$
- $\eta(e) = \{u, u\}$  - arc buclă
- $\eta(e_1) = \eta(e_2)$  - arce paralele
- un **graf orientat simplu** se definește în mod similar unui graf neorientat



## Subgrad interior, exterior

## Definiție

fie multigraful  $G = (V, E, \eta)$  și vârful  $x \in V$

- se numește subgradul interior, se notează  $d^-(x)$ , numărul arcelor incidente spre interior vârfului  $x$ :

$$d^-(x) = |\{e \in E | \eta(e) = \{y, x\}, \forall y \in V\}| = |N_G^{in}(x)|$$

- se numește subgradul exterior, notat  $d^+$ , numărul arcelor incidente spre exterior nodului  $x$ :

$$d^+(x) = |\{e \in E | \eta(e) = \{x, y\}, \forall y \in V\}| = |N_G^{out}(x)|$$

- 

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$



## Subgrad interior, exterior (II)

## Teoremă

pentru un multigraf orientat avem:

$$\sum_{x \in V(\vec{G})} d^-(x) = \sum_{x \in V(\vec{G})} d^+(x) = |E(\vec{G})|$$



## Multigraf ponderat

se numește multigraf ponderat orice sistem de forma  $G = (V, E, g, W)$

$V$  - mulțimea vârfurilor,  $V \neq \emptyset$

$E$  - mulțimea muchiilor,  $V \cap E = \emptyset$

$$g : E \rightarrow V \otimes V$$

$$W : E \rightarrow \mathbb{R} - ponderea muchiilor$$

## Multigraf ponderat orientat

se numește multigraf ponderat orientat orice sistem de forma

$$\vec{G} = (V, E, \eta, W) \text{ unde}$$

$V$  este mulțimea vârfurilor,  $V \neq \emptyset$

$E$  este mulțimea arcelor,  $V \cap E = \emptyset$

$$\eta : E \rightarrow V \times V$$

$$W : E \rightarrow \mathbb{R} - ponderea arcelor$$

## Drumuri în grafuri



## Drum

fiind dat un graf orientat  $G = (V, E)$ , prin **drum** în graful  $G$  înțelegem o succesiune de arce cu proprietatea că extremitatea terminală a unui arc al drumului coincide cu extremitatea inițială a arcului urmator din drum.

- **drum** = o succesiune de vârfuri care sunt extremități ale arcelor ce compun drumul
- un drum  $\mu$  este  $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$  fie  $\{i_0, i_1, \dots, i_q\}$  cu proprietatea că  $e_j = (i_{j-1}, i_j) \in E$  pentru  $j = 1, 2, \dots, q$

## Drumuri în grafuri (II)



## Lungimea unui drum

lungimea unui drum este numărul arcelor care compun drumul respectiv.

Un drum într-un graf este:

- **simplu** dacă nu folosește de două ori un același arc
- **compus** dacă nu este simplu
- **elementar** dacă nu conține (trece) de două ori un același vârf
- **circuit** dacă extremitatea inițială a drumului coincide cu cea finală
- **eulerian** dacă este simplu și trece prin toate arcele grafului
- **hamiltonian** dacă este elementar și trece prin toate vârfurile grafului

## Drumuri în grafuri neorientate



- corespunzător noțiunilor de drum și circuit în grafurile neorientate sunt noțiunile de **lanț** și **ciclu**

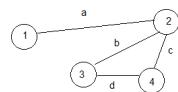
## Lanț

un **lanț** este o succesiune de muchii cu proprietatea că oricare muchie are o extremitate comună cu muchia precedentă și cealaltă extremitate este comună cu muchia următoare.

## Ciclu

dacă extremitățile lanțului coincid, atunci lanțul se numește **ciclu**.

## Exemplu



- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2
- Lanț elementar: 1a2b3
- Ciclu simplu: 2b3d4c2

## Graf tare conex, conex



## Graf tare conex

un graf orientat este **tare conex** dacă între oricare două vârfuri ale grafului există un drum.

- graf tare conex - prin oricare două vârfuri trece ce puțin un circuit

## Graf conex

un graf neorientat este **conex** dacă între oricare două vârfuri ale grafului există un lanț.

## Reprezentarea matricială



Pentru exemplele date grafurile au fost reprezentate grafic, pentru un program scris această reprezentare nu este suficientă.

Un graf poate fi reprezentat folosind:

- **matricea de adiacență**  
 $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n$  unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E \\ 0, & (i, j) \notin E \end{cases}$$

- **matricea de incidentă** - se atașează grafurilor simple a căror mulțime de arce s-a ordonat, linia  $i$  corespunde vârfului  $i$  iar coloana  $j$  corespunde arcului  $e$ , matricea este de tipul  $n \times m$ . Elementele matricii:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists j \in V | e = (i, j), i \in V, e \in E \\ -1, & \exists j \in V | e = (j, i), i \in V, e \in E \\ 0, & altfel \end{cases}$$

- **listă**

## Determinarea matricei distanțelor



## Exemplu



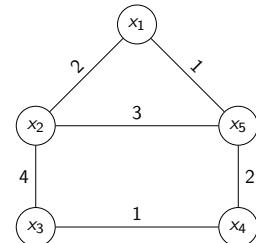
algoritmul Warshall

WARSHALL( $D_0$ )

```

1.    $D := D_0$ 
2.   for  $k := 1$  to  $n$  do
3.       for  $i := 1$  to  $n$  do
4.           for  $j := 1$  to  $n$  do
5.                $d_{ij} := \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$ 
6.   return  $D$ 
```

Fie graful ponderat



$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 4 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$