Subiectul 1

LS: 8p

PS: 1p

Nume [redacted]

Grupa

1p.of. **1p oficiu**

**Exerciţiul 1**

0,5 *(a)* **(0,5p)** *Care este legea şi modelul matematic al dezintegrării radioactive?*

0,5 *(b)* **(0,5p)** *Determinaţi soluţia modelului dezintegrării radioactive.*

0,5 *(c)* **(0,5p)** *Ce este timpul de înjumătăţire? Exprimaţi soluţia modelului în funcţie de timpul de înjumătăţire.*

0,5 **Exerciţiul 2** **(0,5p)** *Definiţi noţiunea de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul 1.*

**Exerciţiul 3** *Determinaţi soluţiile generale pentru ecuaţiile:*

0,5 *(a)* **(0,5p)** $(x^2+1)\,y' + 2x \cdot y = 1$

1 *(b)* **(1p)** $y'' + 2y' + 10y = 10x + 2$

**Exerciţiul 4** **(1p)** *Determinaţi soluţia problemei bilocale:*

1p

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x\ln(x)}y' &= 12x^2\ln(x) \\ y(1) &= -\frac{1}{4} \\ y(2) &= e^4 \end{cases}$$

1 **Exerciţiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' &= x^2 + y \\ y(0) &= 0 \end{cases}$. *Scrieţi formula lui Euler de calcul a valorilor soluţiei aproximante pentru o reţea de noduri echidistante. Pentru pasul* $h = 0.2$ *calculaţi primele trei valori aproximative ale soluţiei pe intervalul* $[0;1]$.

**Exerciţiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & xy - 1 \\ y'(t) = & x^2 - y^2 \end{cases}$$

*Se cere:*

0,5p *(a)* **(0,5p)** *Să se determine punctele de echilibru.*

1p *(b)* **(1p)** *Să se studieze stabilitatea acestora.*

**Problema suplimentară:**

1p **Exerciţiul 7** **(1p)** *Să se determine soluţia generală a sistemului:*

$$\begin{cases} y_1' = & 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

1. JPG

3) a) $(x^2+1)\cdot y' + 2x\cdot y = 1$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$$(x^2+1)\cdot y' + 2x\cdot y = 0$$

$$(x^2+1)\cdot y' = -2\cdot xy \quad |:y \quad |:x^2+1 \qquad y\neq 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2+1} \quad |\cdot dx$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{2x}{x^2+1}dx \quad |\int$$

$$\ln|y| = -\ln(x^2+1) + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln(C_2) - \ln(x^2+1)$$

$$|y| = \frac{C_2}{x^2+1} \qquad \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{0-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{C}{x^2+1}} \quad , C\in\mathbb{R}$$

II Determinăm o soluție particulară

$$y_p = \frac{C(x)}{x^2+1}$$

$$y_p' = C'(x)\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{C(x)\cdot(-2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$(x^2+1)\cdot\left[c'(x)\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x\cdot c(x)}{(x^2+1)^2}\right]+2x\cdot\frac{c(x)}{x^2+1}=1$$

$$c'(x)-\cancel{\frac{2x\cdot c(x)}{x^2+1}}+\cancel{\frac{2x\cdot c(x)}{x^2+1}}=1$$

$$c'(x)=1 \quad / \int$$

$$\left.\begin{array}{l} c(x)=x+c \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c(x)=x \Rightarrow y_p=\frac{x}{x^2+1}$$

III Scriem soluția finală $y=y_0+y_p$

$$\boxed{y=\frac{c}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}}, \quad c\in\mathbb{R}$$

b) $y''+2y'+10y=10x+2$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$$y''+2y'+10y=0$$

scriem ecuația caracteristică

$$r^2+2r+10=0$$

$$\Delta=4-40=-36$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=6i \quad \begin{cases} r_1=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i \\ r_2=-1-3i \end{cases} \qquad \begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta=3\end{array}$$

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x=e^{-x}\cdot\cos 3x$$

$$y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x=e^{-x}\cdot\sin 3x \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$y_0=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}\cos 3x+c_2e^{-x}\cdot\sin 3x$$

II Determinăm o soluție particulară

Cazul I - $\begin{matrix} b=10 \\ b\neq 0 \end{matrix} \Rightarrow a) \Rightarrow y_p = ax+b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$\Rightarrow 0 + 2a + 10ax + 10b = 10x + 2$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 10a = 10 \Rightarrow a = 1 \\ 2a + 2b = 2 \Rightarrow b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_p = x$$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^{-x} \cos 3x + c_2 e^{-x} \sin 3x + x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x\ln x} y' = 12x^2 \ln x \\ y(1) = -\dfrac{1}{4} \\ y(2) = e^4 \end{cases}$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$y'' - \dfrac{1}{x\ln x} y' = 0$

$z = y'$

$z' = y''$

$$z' - \frac{1}{x\ln x} z = 0$$

$$z' = \frac{1}{x\ln x} z \quad | : z \quad z \neq 0 \quad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{z} dz = \frac{1}{x\ln x} dx \quad | \int$$

$$\ln|z| = \ln(\ln x) + c$$

$$\ln|z| = \ln(\ln x) + \ln c_1$$

$$|z| = c_1 \cdot \ln x$$

$$z_0 = c \cdot \ln x, \quad c \in \mathbb{R}$$

II Determinăm o soluție particulară

$$z_p = c(x) \cdot \ln(x)$$

$$z_p' = c'(x) \cdot \ln x + c(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) \cdot \cancel{\ln x} + \cancel{c(x) \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x\ln x} \cdot c(x) \cdot \ln x} = 12x^2 \cancel{\ln x}$$

$$x \neq 1$$

$$c'(x) = 12x^2 \quad | \int$$

$$c(x) = 4x^3 + c_1 \quad \Big\} \Rightarrow c(x) = 4x^3$$

$$c_1 = 0$$

$$\Rightarrow z_p = 4x^3 \cdot \ln x$$

III Scriem soluția finală $z = z_0 + z_p$

$= c \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \ln x \quad , c \in \mathbb{R}$

$y' = c \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \ln x \quad | \int$

$y = c \underbrace{\int \ln x \, dx}_{I_1} + 4 \underbrace{\int x^3 \cdot \ln x \, dx}_{I_2}$

$I_1 = \int \ln x \, dx = \int x' \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= x \ln x - x$

$I_2 = \int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^{\cancel{4}\,3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4$

$y = x \ln x \cdot c - x \cdot c + \quad + x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} + c_1$

$y(1) = -\frac{1}{4}$

$y(2) = e^4$

$y(1) = 0 - c + 0 - \frac{1}{4} + c_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = c_1$

$y(2) = e^4 \Rightarrow 2 \ln 2 \cdot c - 2c + 16 \ln 2 - 4 + c_1 = e^4$

$c(2 \ln 2 - 2 + 1) = e^4 + 4 - 16 \ln 2$

$c = \frac{e^4 + 4 - 16 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} = c_1$

5) $\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

I Rez pb Cauchy

$$y' = x^2 + y$$

$$y' - y = x^2$$

1) Rez ec omogenă

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y} dy = dx$$

$$\ln|y| = x + c_1$$

$$y_0 = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) Det o sol part

$$y_p = c(x) \cdot e^x$$

$$y_p' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^x + \cancel{c(x) \cdot e^x} - \cancel{c(x) \cdot e^x} = x^2$$

$$c'(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \Big| \int$$

$$c(x) = \int \frac{x^2}{e^x} dx = \int (-e^{-x})' \cdot x^2 dx$$

$$= x^2 \cdot -e^{-x} + 2\int e^{-x} \cdot x \, dx$$

$$= x^2 \cdot -e^{-x} + 2\left(-e^{-x} \cdot x + \int e^{-x} dx\right) + c$$

$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2e^{-x} \cdot x - 2e^{-x} + C$

$\qquad\qquad\qquad

6)

$$\begin{cases} x' = xy - 1 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} xy - 1 = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \\ x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \cancel{x^2 = y^2} \end{cases}$

$\cancel{x = \pm y}$

$\frac{1}{y^2} - y^2 = 0$

$\frac{1}{y^2} = y^2 \Rightarrow y^4 = 1$

$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$

$y_3 = i \Rightarrow x_3 = \frac{1}{i} = -i$

$y_4 = -i \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{i} = i$

$x_1^*(1,1), x_2^*(-1,-1)$ - pct de echilibru

b) $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

I $J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A$

$x_1^*(1,1)$ - pct de echil instabil de tip șa

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 2 = 0$

$\cancel{\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 3) = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3}$

$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$

$\Delta = 17$

$\sqrt{\Delta} = 17$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda+1)(\lambda-2) - 2 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$

$\Delta = 17$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$ $\left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$

$X_2^*(-1,-1)$ - pct de echil instabil de tip șa

7) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \Rightarrow y_2 = \dfrac{2y_1 - y_1'}{5} \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$

$y_2' = \frac{1}{5}(2y_1' - y_1'')$

$\frac{1}{5}(2y_1' - y_1'') = 5y_1 + \dfrac{4y_1 - 2y_1'}{5} \quad | \cdot 5$

$2y_1' - y_1'' = 25y_1 + 4y_1 - 2y_1'$

$y_1'' - 4y_1' + 29y_1 = 0$

$r^2 - 4r + 29 = 0$

$\Delta = 16 - 116 = -100 \quad \sqrt{\Delta} = 10i$

$r_{1,2} = 2 \pm 5i \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = 5$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_1 = c_1 e^{2x}\cos 5x + c_2 e^{2x}\sin 5x \ ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y_1' = c_1(2e^{2x}\cos 5x - 5e^{2x}\sin 5x) + c_2(2e^{2x}\sin 5x$$

$$+5e^{2x}\cos 5x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5}\Big[\cancel{2c_2e^{2x}\cos 5x} + \cancel{2c_2e^{2x}\sin 5x} - \cancel{2c_1e^{2x}\cos 5x}$$

$$+ c_1 5e^{2x}\sin 5x - \cancel{2c_2e^{2x}\sin 5x} - 5c_2e^{2x}\cos 5x\Big]$$

$$\boxed{y_2 = c_1e^{2x}\sin 5x - c_2e^{2x}\cos 5x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1' = e^{2x}\big(\sin 5x(2c_2 - 5c_1) + (2c_1 + 5c_2)\cos 5x\big)$$

$$y_1 = c_1e^{2x}\cos 5x + c_2e^{2x}\sin 5x$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(2y_1 - y_1')$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\cancel{2c_1e^{2x}\cos 5x} + \cancel{2c_2e^{2x}\sin 5x} - \cancel{2c_2e^{2x}\sin 5x}$$

$$+ 5e^{2x}c_1\sin 5x - \cancel{2e^{2x}c_1\cos 5x} - 5c_2e^{2x}\cos 5x$$

Subiectul 2

LS: 7,1p

PS: 0,25p

7p.of.

**1p oficiu**

**Nume** [redacted]

**Grupa**

**Exercițiul 1** *Se consideră modelul de creștere a unei populații în care se face o recoltare constantă*

$$\begin{cases} x'(t) = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*Se cere:*

0,5 *(a)* **(0,5p)** *În ce condiții asupra parametrilor $r, K, h \in \mathbb{R}_+$ ecuația admite* x *două soluții de echi pozitive distincte și care sunt acestea?*

1 *(b)* **(1p)** *Pentru $h = \frac{rK}{4}$ determinați și studiați stabilitatea soluțiilor de echilibru. Concluzie.*

0,25 **Exercițiul 2** **(0,5p)** *Definiți noțiunea de sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferen liniară omogenă de ordinul 2.*

**Exercițiul 3** *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5 *(a)* **(0,5p)** $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin(x)}$

1 *(b)* **(1p)** $y'' + 6y' + 9y = (x+1) \cdot e^{-x}$

**Exercițiul 4** **(1p)** *Determinați soluția problemei Cauchy:*

Nf

$$\begin{cases} y'' + tg(x) \cdot y' = \cos(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

0,5 **Exercițiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. *Scrieți ecuația integrală Volt echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.*

**Exercițiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases}$$

*Se cere:*

1p *(a)* **(1p)** *Să se determine fluxul*

0,35p *(b)* **(0,5p)** *Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echili* $(0;0)$.

**Problema suplimentară:**

0,25p **Exercițiul 7** **(1p)** *Să se determine punctele de echilibru și să se studieze stabilitatea acestora pen sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = y^3 + 1 \\ y'(t) = x^2 + y \end{cases}$$

2.JPG

3)

a) $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin x}$

I) Det sol ec omogene

$y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 0$

$y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{y} dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\ln|y| = \arcsin x + c$

$|y| = e^{\arcsin x + c}$

$y_0 = c \cdot e^{\arcsin x}, \; c \in \mathbb{R}$

II) Det o sol part

$y_p = c(x) \cdot e^{\arcsin x}$

$y_p' = c'(x) \cdot e^{\arcsin x} + c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$c'(x) \cancel{e^{\arcsin x}} + \cancel{c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$= 4x^3 \cdot \cancel{e^{\arcsin x}}$

$c'(x) = 4x^3 \;\; | \int \Rightarrow c(x) = x^4 + \underset{0}{c_1} \Rightarrow c(x) = x^4$

$\Rightarrow y_p = x^4 \cdot e^{\arcsin x}$

III Scriem sol final a: $y = y_0 + y_p$

$y = c \cdot e^{\arcsin x} + x^4 \cdot e^{\arcsin x}$

$c \in \mathbb{R}$

1)

b) $y'' + 6y' + 9y = (x+1)\cdot e^{-x}$

I Rez ec omogenă

$y'' + 6y' + 9y = 0$

scriem ec caract: $r^2 + 6r + 9 = 0$

$(r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -3$

$y_1(x) = e^{rx} = e^{-3x}$

$y_2(x) = x\cdot e^{rx} = x\cdot e^{-3x}$

$y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 x\cdot e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II Det o sol particulară

Cazul II - a) $\quad y_p = e^{rx}\cdot Q_m(x)$

$y_p = e^{-x}(ax+b)$

$y_p' = -e^{-x}(ax+b) + e^{-x}\cdot a$

$= e^{-x}(a-b-ax)$

$y_p'' = -e^{-x}(a-b-ax) + e^{-x}(-a)$

$= e^{-x}(-a-a+b+ax) = e^{-x}(ax+b-2a)$

$\cancel{e^{-x}}(\underline{a}x + b - 2a + 6a - 6b - 6\underline{a}x + 9\underline{a}x + 9b) = (x+1)\cancel{e^{-x}}$

$4ax + 4a + 4b = x + 1$

$\left.\begin{cases} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 4a + 4b = 1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y_p = \frac{x}{4}\cdot e^{-x}$

III Scriem sol finală: $y = y_0 + y_p$; $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-3x}\cdot x + \frac{x}{4}\cdot e^{-x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' + tg(x)\cdot y' = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Not
$z = y'$
$z' = y''$
$\Rightarrow z' + tg x \cdot z = \cos x$

I Rez ec omogenă

$z' + tg x \cdot z = 0$

$\cancel{\int x' \cdot tg x dx = x tg x}$

$z' = - tg x \cdot z$

$\frac{1}{z} dz = - tg x \cdot dx \,|\int$

$\ln|z| = - \int x' \cdot tg x dx + c$

$\ln|z| = \ln(\cos x) + \ln c_1$

$|z| = c_1 \cos x$

$z_0 = c \cdot \cos x$

II Det sol particulară

$z_p = c(x) \cdot \cos x$

$z_p' = c'(x) \cos x + c(x) \cdot (-\sin x)$

$c'(x) \cos x + \cancel{c(x)(-\sin x)} + \cancel{tg x \cdot c(x) \cdot \cos x} = \cos x$

$c'(x) \cos x = \cos x \Rightarrow c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c_1}} \Rightarrow c(x) = x$

$\Rightarrow z_p = x \cos x$

III Scriem sol finală: $z = z_0 + z_p = c \cdot \cos x + x \cos x$, $c \in \mathbb{R}$

$y' = c \cdot \cos x + x \cos x \,|\int$

$y = c \cdot \sin x + x \sin x + \cos x + c_1$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\cdot\cos 0 + 0 = 1 \Rightarrow C=1 \\ 1+C_1 = 1 \Rightarrow C_1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = x\sin x + \cos x$$

5) $$\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y' = x^2 - y^2$$

$$y' + y^2 = x^2$$

I) Rez ~~sol~~ ec omogenă

$$y' + y^2 = 0$$

$$y' = -y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -dx$$

$$+\frac{1}{y} = +x + C$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{1}{x+C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

II Det o sol particulară

$$y_p = \frac{1}{x+C(x)} \; ; \; y_p' = \frac{0 - (1 + C'(x))}{(x+C(x))^2}$$

$$\frac{-1 - C'(x)}{(x+C(x))^2} + \frac{1}{(x+C(x))^2} = x^2$$

$$-C'(x) = x^2 (x + C(x))^2$$

$$-C'(x) = x^2 (x^2 + 2xC(x) + C^2(x))$$

$$c'(x) = -x^4 - 2x^3 c(x) - x^2 c^2(x)$$

$$c(x) = z$$

$$z' = -x^4 - 2x^3 \cdot z - x^2 \cdot z^2$$

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(s)\,ds$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x \cancel{x^2 t}$$

$$\cancel{y_{n+1}(x) = y_n} \quad y(x) = y^0 + \int_0^x f(s, y(s))\,ds$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x s^2 - y(s)^2\,ds$$

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y(s)^2\,ds$$ ec integrală Volterra

sirul aprox succesive

$$y_{n+1}(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y_n(s)^2\,ds$$

$$(a+b-c)(a+b-c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x 1\,ds$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - x$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y_1(s)^2\,ds$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x 1 + \frac{s^6}{9} + s^2 + \frac{2s^3}{3} - 2s - \frac{2s^4}{3}\,ds$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - x - \frac{x^7}{63} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{12} \cdot x^4 + x^2 + \frac{2}{15} \cdot x^5$$

6) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases}$

$x(0) = \eta_1$

$y(0) = \eta_2$

a) $x' = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Leftrightarrow \ln|x| = t + c_3$

$x = c_1 \cdot e^t, \; c_1 \in \mathbb{R}$

$y' = 3y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = 3dt \Leftrightarrow \ln|y| = 3t + c_4$

$y = e^{3t} \cdot c_2, \; c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = c_1 \cdot e^t \\ y = c_2 \cdot e^{3t} \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cdot e^t \\ y = \eta_2 \cdot e^{3t} \end{cases}$$

$P(t, \eta_1, \eta_2) = (\eta_1 \cdot e^t, \eta_2 \cdot e^{3t})$

$$\left.\begin{array}{l} P: I_{max} \cdot \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow P: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

b) $\begin{cases} x = \eta_1 \cdot e^t \uparrow^3 \\ y = \eta_2 \cdot e^{3t} \end{cases} :$

$\frac{y}{x^3} = \frac{\eta_2}{\underbrace{\eta_1^3}_{=c}} \Rightarrow \boxed{y = x^3 \cdot c}$

portretul fazic

$\cancel{\frac{y}{x} = \frac{\eta_2}{\eta_1 = c} \cdot e^{2t} \Rightarrow \frac{y}{x} = c \cdot e^{2t}}$

$y = c \cdot e^{2t} \cdot x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^*(0,0)$$

pct de echilibru instabil de tip ⁿ nod

7) $\begin{cases} x' = y^3 + 1 \\ y' = x^2 + y \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} y^3 + 1 = 0 \Rightarrow y^3 = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x^2 + y = 0 \Rightarrow \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \pm 1$$

$x_1^*(1,-1)$; $x_2^*(-1,-1)$

pct de echilibru

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

$$I(1,-1) = J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda(\lambda - 1) - 6 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \end{matrix}$$

$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -2$

pct instabil de tip ⁿ a

$\underline{II}\ (-1,-1)$

$$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda(\lambda-1)+6=0$$

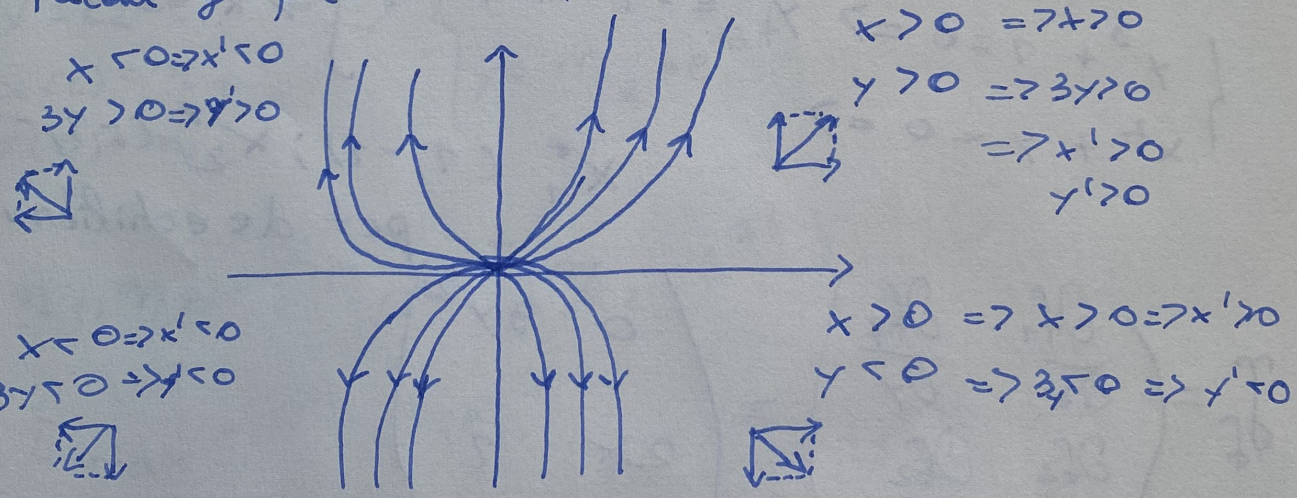
$$\lambda - \lambda + 6 = 0$$

$$\Delta = 1-24 = -23 \qquad \sqrt{\Delta} = i\sqrt{23} \quad \begin{cases} \dfrac{1+i\sqrt{23}}{2} \\ \dfrac{1-i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

pct instabil de tip focus

Completare ex 6

Facem graficul $c \cdot x^3 = y$




Sila Volterra ar trebui dem că-l putem folosi

Subiectul 3

LS: 7,1p

PS: 0,25p

7p.of.

1p oficiu

Nume [redacted]

Grupa

**Exercițiul 1** *Se consideră modelul de creștere a unei populații în care se face o recoltare constantă*

$$\begin{cases} x'(t) = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*Se cere:*

0,5 (a) **(0,5p)** *În ce condiții asupra parametrilor $r, K, h \in \mathbb{R}_+$ ecuația admite* **x** *două soluții de echi pozitive distincte și care sunt acestea?*

1 (b) **(1p)** *Pentru $h = \frac{rK}{4}$ determinați și studiați stabilitatea soluțiilor de echilibru. Concluzie.*

0,25 **Exercițiul 2** **(0,5p)** *Definiți noțiunea de sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferen liniară omogenă de ordinul 2.*

**Exercițiul 3** *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5 (a) **(0,5p)** $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin(x)}$

1 (b) **(1p)** $y'' + 6y' + 9y = (x+1) \cdot e^{-x}$

**Exercițiul 4** **(1p)** *Determinați soluția problemei Cauchy:*

Nf

$$\begin{cases} y'' + tg(x) \cdot y' = \cos(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

-0,5 **Exercițiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. *Scrieți ecuația integrală Volt echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.*

**Exercițiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases}$$

*Se cere:*

1p (a) **(1p)** *Să se determine fluxul*

0,35p (b) **(0,5p)** *Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echili* $(0;0)$.

**Problema suplimentară:**

0,25p **Exercițiul 7** **(1p)** *Să se determine punctele de echilibru și să se studieze stabilitatea acestora pen sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = y^3 + 1 \\ y'(t) = x^2 + y \end{cases}$$

3.JPG

3)

a) $(1-x^3)\cdot y' - 3x^2\cdot y = 1-4x^3$

I) Det sol omogenă

$(1-x^3)\cdot y' - 3x^2 y = 0$

$(1-x^3)\, y' = 3x^2 y$

$\frac{1}{y}\, dy = \frac{3x^2}{1-x^3}\, dx$

$\ln|y| = -\ln|1-x^3| + c_1$

$\ln|y| = \ln\frac{c_2}{1-x^3}$

$y_0 = \frac{c}{1-x^3}$ ; $c \in \mathbb{R}$

II) Det sol particulară

$y_p = \frac{c(x)}{1-x^3}$

$y_p' = \frac{c'(x)\cdot(1-x^3) + 3x^2\cdot c(x)}{(1-x^3)^2}$

$\frac{c'(x)\cdot\cancel{(1-x^3)} + \cancel{3x^2\cdot c(x)}}{\cancel{1-x^3}} - \cancel{\frac{3x^2\cdot c(x)}{1-x^3}} = 1-4x^3$

$c'(x) = 1-4x^3 \,/\, \int$

$c(x) = x - x^4 + c_0 = x - x^4 \Rightarrow y_p = \frac{x-x^4}{1-x^3} = x$

III Scriem soluția finală

$y = y_0 + y_p$

$y = \frac{c}{1-x^3} + x$ ; $c \in \mathbb{R}$

b) $y'' + 2y' + 5y = (4x+8)\cdot e^{-x}$

I Rez ec omogenă

$y'' + 2y' + 5y = 0$

scriem ec caract: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$ $\left[\begin{array}{l} \to -1 + 2i \\ \to -1 - 2i \end{array}\right.$ $\alpha = -1$, $\beta = 2$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_0 = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$

II Det o sol particulară

Caz II $\to$ a) $\Rightarrow y_p = e^{-x}(ax+b)$

$y_p' = -e^{-x}(ax+b) + e^{-x}\cdot a = e^{-x}(a - ax - b)$

$y_p'' = -e^{-x}(a - ax - b) + e^{-x}(-a) = e^{-x}(ax + b - 2a)$

$\cancel{e^{-x}}(ax + b - \cancel{2a} + \cancel{2a} - 2ax - 2b + 5ax + 5b) = (4x+8)\cdot\cancel{e^{-x}}$

$\begin{cases} 4ax = 4 \Rightarrow a = 1 \\ 4b = 8 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow y_p = e^{-x}(x+2)$

III Sol finală $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x + e^{-x}(x+2)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x+1} \cdot y' = e^{-x} + 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $\quad z = y'$, $\quad z' = y''$

$$z' - \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z = e^{-x} + 1$$

I Re z ec omogenă

$$z' - \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z = 0$$

$$z' = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z \quad \Big| : z \;\Big|\cdot dx \quad z \neq 0$$

$$\frac{1}{z} dz = \frac{e^x}{e^x+1} dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + c_1$$

$$|z| = c_2 (e^x+1)$$

$$z_0 = c(e^x+1), \quad c \in \mathbb{R}$$

II Det sol part

$$z_p = c(x) \cdot (e^x+1)$$

$$z_p' = c'(x)(e^x+1) + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x)\cancel{(e^x+1)} + \cancel{c(x) \cdot e^x} - \cancel{c(x) \cdot e^x} = e^{-x} + 1 = \frac{\cancel{e^x+1}}{e^x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{e^x} \cancel{\frac{e^{-x}+1}{e^x+1}} \quad \Big| \int$$

$$c(x) = -e^{-x} + \underset{0}{c_1} \Rightarrow c(x) = -e^{-x}$$

$$z_p = -e^{-x}(e^x+1)$$

4) Scriem sol finală

$z = z_0 + z_p$

$z = C(e^x+1) - e^{-x}(e^x+1)$

$z = C\cdot e^x + C - 1 - e^{-x} = y' \quad | \int$

$y = C\cdot e^x + C\cdot x - x + e^{-x} + C_1$

$y' = C\cdot e^x + C - 1 - e^{-x}$

$$\begin{cases} y(0)=2 \Rightarrow C + 0 - 0 + 1 + C_1 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = -1} \\ y'(0)=2 \Rightarrow C + C - 1 - 1 = 2 \end{cases}$$

$2C = 4 \Rightarrow \boxed{C=2}$

5) $\begin{cases} y' = 4x^3 + xy^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$

$y(x) = 0 + \int_0^x 4s^3 + s\cdot y(s)^2\,ds$

$y(x) = 0 + x^4 + \int_0^x s\cdot y(s)^2\,ds$

$= 0 + x^4 + \cancel{s\cdot \frac{y(s)^3}{3}\Big|_0^x - \frac{1}{3}\int_0^x y(s)^3\,ds}$

$= 0 + x^4 + \cancel{x\cdot \frac{y(x)^3}{3} - \frac{1}{3}\int_0^x y(s)^3\,ds}$

$$y_{n+1}(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot y_n(s)^2 \, ds$$

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot 0 \, ds = x^4 + \int_0^x 0 \, ds = x^4$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot y_1(s)^2 \, ds$$

$$= x^4 + \int_0^x s \cdot s^8 \, ds$$

$$= x^4 + \int_0^x s^9 \, ds = x^4 + \frac{x^{10}}{10}$$

b) $\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) \end{cases}$

$$y = \frac{x'}{2} \quad | \text{derivăm}$$

$$y' = \frac{x''}{2} \Rightarrow x'' = -4x$$

$$x'' + 4x = 0$$

Scriem ec carac

$$r^2 + 4 = 0 \quad r^2 = -4 \quad \alpha = 0, \ \beta = 2$$

$$r = \pm 2i \quad \begin{cases} x_1 = \cos 2x \\ x_2 = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$x' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$$

$$y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x$$

$$\begin{cases} x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \\ y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \eta_1 \\ c_2 = \eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x \\ y = \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x \end{cases}$$

$$\varphi(t, \eta_1, \eta_2) = (\eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x, \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi : I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{cases}$ :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow x\,dx = -y\,dy \quad | \int$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$(0,0)$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

pct stabil de tip centru

7) $\begin{cases} x' = 1 - x^2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1^*(1,-1)$

$x_2^*(-1,-1)$

pct de echilibru

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I $(1,-1)$

$$J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right.$

pct instabil de tip şa

II $(-1,-1)$

$$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 2$

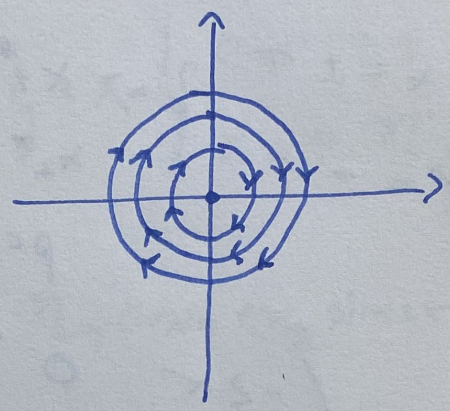
$\lambda_2 = 1$

pct instabil de tip nod

7)

Completare 6

Facem graficul lui $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$



$x > 0 \Rightarrow x' > 0$

$y > 0 \quad y' < 0$

Şi la Volterra ar trb să dem că-l putem folosi

1) modelul evoluției unei populații cu resurse constante

a) în ce condiții asupra parametrilor $h, K, r$ ecuația nu admite nici o sol. de echilibru pozitivă?

b) pt $h < \frac{rK}{4}$ det. și studiați stab. sol. de echil. (gen. Cauchy)

2) soluție pt o ec. dif. de ordin 2

3) a) $x \ln x \cdot y' - 2y = \ln x$

b) $y'' - 2y' + 5y = (8x+4)e^x$

Subiectul 4

4) $\begin{cases} (x^2+3)y'' - 2x \cdot y' = -\frac{(x^2+3)^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ se consideră pb Cauchy

- ecuația integrală Volterra
- formula șirului aprox. succesive

și pt funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculează primele 2 aproximații succesive

6) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 4x(t) \end{cases}$

a) fluxul

b) portret fazic

stabilitate + tipul pct $(0,0)$

7) $\begin{cases} x'(t) = -x + xy \\ y'(t) = -4y + 8xy \end{cases}$ puncte de echil. + stabilitate + tip

*tuplu ordonat

4. JPG

3) a) $x \ln x \cdot y' - 2y = \ln x$

I Rez ec omogenă

$x \ln x \cdot y' - 2y = 0$

$x \ln x \cdot y' = 2y$

$\frac{1}{y} dy = 2 \cdot \frac{1}{x \ln x} dx$

$\ln|y| = 2 \ln \ln x + C_1$

$\ln|y| = \ln \ln^2 x + \ln C_2$

$|y| = C_2 \cdot \ln^2 x$

$\boxed{y_0 = C \cdot \ln^2 x}$

II Det o sol part

$y_p = C(x) \cdot \ln^2 x$

$y_p' = C'(x) \cdot \ln^2 x + C(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$x \ln^3 x \, C'(x) + \cancel{C(x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \ln x} - \cancel{2C(x) \ln^2 x} = \ln x$

$C'(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} \int$

Sv = $t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

$C(x) = \int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$ $\boxed{y_p = -\ln x}$

III Scriem soluția finală

$y = y_0 + y_p$

$y = C \ln^2 x - \ln x, \; C \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 2y' + 5y = (8x+4) \cdot e^x$

I Rez ec omogenă

$y'' - 2y' + 5y = 0$

scriem ecuația caracteristică

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \quad \sqrt{\Delta} = 4i \quad \begin{cases} r_1 = 1+2i \\ r_2 = 1-2i \end{cases}$

$\alpha = 1 \qquad y_{01} = e^x \cos 2x$

$\beta = 2 \qquad y_{02} = e^x \sin 2x$

$y_0 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x \; ; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II Determinăm o sol particulară

Cazul II - b) $\Rightarrow y_p = e^x (ax+b)$

$y_p' = e^x (ax+b) + e^x \cdot a = e^x (ax+a+b)$

$y_p'' = e^x (ax + 2a + b)$

$\cancel{e^x} (\underline{a}x + \cancel{2a} + b - \underline{2a}x - \cancel{2a} - 2b + \underline{5a}x + 5b) = (8x+4) \cdot \cancel{e^x}$

$4ax + 4b = 8x + 4$

$\begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow y_p = e^x (2x+1)$

III Scriem rez final $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + e^x (2x+1)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} (x^2+3)\,y'' - 2x \cdot y' = \dfrac{-(x^2+3)^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$

$z = y' \quad z' = y'' \Rightarrow (x^2+3)\cdot z' - 2x \cdot z = \dfrac{-(x^2+3)^2}{x^2}$

I Rez ec omogenă

$(x^2+3)\cdot z' - 2x \cdot z = 0$

$\frac{1}{z}\,dz = \frac{2x}{x^2+3}\,dx \;\Big|\int$

$\ln|z| = \ln(x^2+3) + C_1$

$\ln|z| = \ln(x^2+3) + \ln(C_2)$

$|z| = C_2(x^2+3)$

$z_0 = C(x^2+3), \; C \in \mathbb{R}$

II Det sol part

$z_p = C(x)(x^2+3)$

$z_p' = C'(x)(x^2+3) + 2x \cdot C(x)$

$\cancel{(x^2+3)^2 C'(x) + 2x(x^2+3)C(x) - 2x\cdot(x^2+3)C(x)}$

$= -\frac{\cancel{(x^2+3)^2}}{x^2} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{x^2} \;\Big|\int$

$C(x) = +\frac{1}{x}$ $\qquad z_p = \frac{x^2+3}{x}$

$\cancel{C(x) = -\ln x + C_0 \Rightarrow C(x) = -\ln x \Rightarrow z_p = -\ln x\,(x^2+3)}$

III Scrierea sol finală

$$z = z_0 + z_p = C(x^2+3) - \ln x\,(x^2+3)\ ;\ C \in \mathbb{R}$$

$$y' = z \quad /\int$$

$$y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - \int \ln x\,(x^2+3)\,dx$$

$$\int \ln x\,(x^2+3)\,dx = \int \ln x \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)' dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right.$$

III $\quad z = z_0 + z_p = C(x^2+3) + \dfrac{x^2+3}{x} = y' \quad /\int$

$$y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) + \int x + \frac{3}{x}\,dx$$

$$y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) + \frac{x^2}{2} + 3\ln x + C_1$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \\ C \cdot 4 + 4 = 4 \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3\ln x - \frac{1}{2}$$

5) $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x 3s^2 + y(s)^2\,ds$$

$y(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y(s)^2 ds$ – ec integrală Volterra

<u>Șirul aprox:</u>

$$y_{n+1}(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y_n(s)^2 ds$$

$y_0(x) = 1$

$$y_1(x) = 1 + x^3 + \int_0^x \underbrace{y_0(s)}_{1}{}^2 ds = 1 + x^3 + \int_0^x ds$$

$$= 1 + x^3 + x$$

$$y_2(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y_1(s)^2 ds =$$

$$= 1 + x^3 + \int_0^x (s^3 + s + 1)^2 ds$$

$$= 1 + x^3 + \int_0^x s^6 + s^2 + s + 2s^4 + 2s^3 + 2s \, ds$$

$$= 1 + x^3 + \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2}$$

6) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 4x(t) \end{cases}$ $\Rightarrow -x'' = y'$

$\alpha = 0$; $\beta = 2$

$x = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$x' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y = 2C_1 \sin 2x - 2C_2 \cos 2x$

$x(0) = \eta_1$

$y(0) = \eta_2$

$\Rightarrow -x'' = 4x$

$\Rightarrow x'' + 4x = 0$

scriem ec carac

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4$

$r = \pm 2i$

$$\cancel{\begin{cases} c_2 = \frac{n_1}{2} \\ -2c_2 = \frac{n_2}{2} \end{cases}} \quad \begin{cases} c_1 = n_1 \\ c_2 = \frac{-n_2}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(t, n_1, n_2) = \left(n_1 \cos 2x - \frac{n_2}{2} \sin 2x,\right.$$

$$\left. 2n_1 \sin 2x + n_2 \cos 2x\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi : I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = 4x \end{cases} :$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{4x}$$

$$4x\,dx = -y\,dy$$

$$2x^2 = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$2x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

2) $\begin{cases} x' = -x + xy \\ y' = -4y + 8xy \end{cases}$

$$\begin{cases} -x + xy = 0 \Rightarrow x = xy \Rightarrow y = 1 \\ -4y + 8xy = 0 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_1^*(\frac{1}{2}, 1)$ $\quad x_2^*(0,0)$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 8y & 8x-4 \end{pmatrix}$$

I $(0,0)$

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = A \quad \det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+4) = 0 \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

local as stab de tip nod

II $(\frac{1}{2}, 1)$

$$J_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -8 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

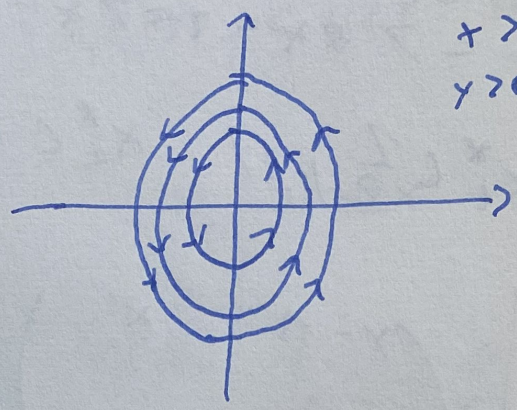
$\lambda^2 = 4$

$\lambda = \pm 2$

pct de echilibru instabil de tip şa

Completare 6

Facem graficul lui $2x^2 + \frac{y^2}{2} = C$



$x > 0 \Rightarrow x' < 0$

$y > 0 \Rightarrow y' > 0$

Şi la Volterra ar trb dom că-l putem folosi

Subiectul 5

Nume

Grupa

1p.of. 1p oficiu

**Exerciţiul 1** *Se consideră modelul pradă-prădător*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax - bxy \\ y'(t) = & -cy + dxy \end{cases}$$

0 *(a)* **(0,5p)** *Care este semnificaţia parametrilor* $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$*?*

0 *(b)* **(0,5p)** *Determinaţi punctele de echilibru şi studiaţi stabilitatea acestora;*

0 *(c)* **(0,5p)** *Determinaţi ecuaţia orbitelor din portretul fazic.*

0 **Exerciţiul 2** **(0,5p)** *Definiţi noţiunea de punct de echilibru asimptotic stabil pentru un sistem planar de ecuaţii diferenţiale autonome.*

**Exerciţiul 3** *Determinaţi soluţiile generale pentru ecuaţiile:*

0,5p *(a)* **(0,5p)** $(1 - x^3) \cdot y' - 3x^2 \cdot y = 1 - 4x^3$

1p *(b)* **(1p)** $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}$

**Exerciţiul 4** **(1p)** *Determinaţi soluţia problemei Cauchy:*

1p

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x + 1} \cdot y' & = 0 \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 2 \end{cases}$$

0 **Exerciţiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = 4x^3 + y^2 \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

*Scrieţi ecuaţia integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula şirului aproximaţiilor succesive şi pentru funcţia de start* $y_0(x) \equiv 0$ *calculaţi primele două aproximaţii succesive.*

**Exerciţiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & 2y(t) \\ y'(t) = & -2x(t) \end{cases}$$

*Se cere:*

0 *(a)* **(1p)** *Să se determine fluxul*

0,25 *(b)* **(0,5p)** *Să se determine portretul fazic şi să se precizeze stabilitatea şi tipul punctului de echilibru* $(0; 0)$.

5.JPG

3)

a) $(1-x^3)\cdot y' - 3x^2\cdot y = 1-4x^3$

I Rez ec omogenă

$(1-x^3)\cdot y' = 3x^2 y$

$\frac{1}{y}\,dy = \frac{3x^2}{1-x^3}\,dx \,\Big|\int$

$\ln|y| = -\ln|1-x^3| + C_1$

$\ln|y| = \ln\left|\frac{C_2}{1-x^3}\right|$

$y_0 = \frac{C}{1-x^3}$, $C \in \mathbb{R}$

II Dat o sol part

$y_p = \frac{C(x)}{1-x^3}$

$y_p' = \frac{C'(x)}{1-x^3} + C(x)\cdot\frac{0+3x^2}{(1-x^3)^2}$

$C'(x) + \cancel{\frac{C(x)\cdot 3x^2}{(1-x^3)^2}} - \cancel{\frac{3x^2\cdot C(x)}{1-x^3}} = 1-4x^3$

$C'(x) = 1-4x^3 \Rightarrow C(x) = x - x^4 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c}} = x - x^4$

$y_p = \frac{x(1-x^3)}{1-x^3} = x$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p \Rightarrow y = \frac{C}{1-x^3} + x$, $C \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}$

I Rez ec omogenă $y'' - 2y' + 5y = 0$

scriem ec caracteristică $r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$

$r_1 = 1 + 2i$ $\Rightarrow y_0 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$

$r_2 = 1 - 2i$

II Det o soluție particulară

Cazul II $\rightarrow$ a) $y_p = e^{2x} \cdot a$

$y_p' = e^{2x} \cdot 2a$

$y_p'' = e^{2x} \cdot 4a$

$\cancel{e^{2x}}(\cancel{4a} - \cancel{4a} + 5a) = 5 \cdot \cancel{e^{2x}} \Rightarrow a = 1$

$y_p = e^{2x}$

III Scriem sol finală $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + e^{2x}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x + 1} \cdot y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $z = y'$, $z' = y''$

$z' = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \cdot z$

$$\frac{1}{z}\,dz = \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx \;\Big|\int$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + c_1$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + \ln c_2$$

$$|z| = c_2(e^x+1)$$

$$z = c\,(e^x+1)$$

$$y' = c\,(e^x+1) \;\Big|\int$$

$$y = c\cdot\int e^x dx + c\cdot\int dx$$

$$y = c\cdot e^x + c\cdot x + c_1$$

$$y' = c\,(e^x+1)$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = e^x + x$$

5) $\begin{cases} y' = 4x^3 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$ - ec integrală Volterra

$$y(x) = 0 + \int_0^x 4s^3 + y(s)^2\,ds$$

$$y(x) = x^4 + \int_0^x y(s)^2\,ds$$

$y_0(x) \equiv 0$

$$y_{n+1}(x) = x^4 + \int_0^x y_n(s)^2\,ds$$

$$y_1(x) = x^4 + \int_0^x \underbrace{y_0(s)^2}_{0}\,ds = x^4$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x y_1(s)^2\,ds =$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x \cancel{x}^8\,ds$$

$$y_2(x) = x^4 + \frac{x^9}{9}$$

6) $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -2x \end{cases}$ $\quad | ' \Rightarrow x'' = 2y' \Rightarrow y' = \frac{x''}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x''}{2} = -2x \Leftrightarrow x'' + 4x = 0$$

scriem ec caracteristică $\quad r^2 + 4 = 0 \quad r_{1,2} = \pm 2i$

$$x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$x' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$$

$$y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x$$

$$\begin{cases} x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\eta_1 \\ c_2 = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x \\ y = \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x \end{cases}$$

$f(t, x_1, x_2) = (x_1 \cos 2t + x_2 \sin 2t, x_2 \cos 2t - x_1 \sin 2t)$

$$\left.\begin{array}{l} f : I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

fluxul

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{array}\right. : \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

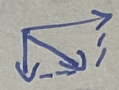
$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$ - portretul fazic

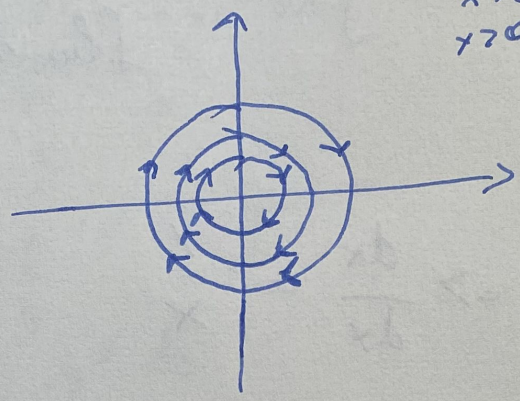
Completare 6

Facem graficul lui $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$

$x > 0$ $\quad x' > 0$

$y > 0$ $\quad y' < 0$





Și la Volterra ar trb dem că-l putem folosi

Nume

Grupa

Subiectul
6 = 8

1p oficiu

**Exerciţiul 1** *Se consideră modelul logistic (Verhulst) de creştere a unei populaţii*

$$\begin{cases} x'(t) = & r_0 \cdot x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{K}\right) \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

*Se cere:*

- *(a)* **(0,5p)** *Care este semnificaţia parametrilor $r_0$ şi $K$?*
- *(b)* **(0,5p)** *Determinaţi soluţia modelului;*
- *(c)* **(0,5p)** *Determinaţi soluţiile echilibru şi stabilitatea acestora.*

**Exerciţiul 2** **(0,5p)** *Definiţi noţiunea de punct de echilibru asimptotic stabil pentru o ecuaţie diferen autonomă de ordinul 1.*

**Exerciţiul 3** *Determinaţi soluţiile generale pentru ecuaţiile:*

0,5p *(a)* **(0,5p)** $y' \cdot \cos(x) - 2y \cdot \sin(x) = 1$

0,5p *(b)* **(1p)** $y'' - 4y' + 8y = 8x - 4$

**Exerciţiul 4** **(1p)** *Determinaţi soluţia problemei bilocale:*

1p

$$\begin{cases} (1 + x^3) \cdot y'' - 3x^2 \cdot y' & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(2) & = 6 \end{cases}$$

**Exerciţiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' & = x + 2y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$. *Scrieţi formula lui Euler de cal a valorilor soluţiei aproximante pentru o reţea de noduri echidistante. Pentru pasul $h = 0.1$ calcul primele trei valori aproximative ale soluţiei pe intervalul $[0; 1]$.*

**Exerciţiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & x - xy^2 \\ y'(t) = & x - y \end{cases}$$

*Se cere:*

*(a)* **(0,5p)** *Să se determine punctele de echilibru*

*(b)* **(1p)** *Să se studieze stabilitatea acestora.*

$\boxed{6.JPG} = \boxed{8.JPG}$

3) a) $y' \cdot \cos x - 2y \sin x = 1$

I Rez ec omogenă

$$y' \cdot \cos x = 2y \sin x$$

$$\frac{1}{y} dy = 2 tg x \, dx$$

$$\ln|y| = -2 \ln|\cos x| + \cancel{\ln}\, (c_1)$$

$$|y| = \frac{c_1}{\cos^2 x}$$

$$y_0 = \frac{c}{\cos^2 x}$$

II Det o sol part $y_p = \frac{c(x)}{\cos^2 x}$

$$y_p' = c'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + c(x) \cdot \frac{0 + 2\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{4}\,3} x}$$

$$y_p' = c'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + c(x) \cdot \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$c'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + \cancel{c(x) \cdot \frac{2\sin x}{\cos^2 x}} - \cancel{\frac{c(x) \cdot 2\sin x}{\cos^2 x}} = 1$$

$$c'(x) = \cos x \,\Big|\, \int$$

$$c(x) = \sin x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c}} = \sin x \Rightarrow y_p = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

III Scriem soluția finală: $y = y_0 + y_p = \frac{c}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; $c \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x - 4$

I Rezec omogenă

$y'' - 4y' + 8y = 0$

scriem ec carac: $r^2 - 4r + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 8 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i \begin{cases} 2+2i & \alpha = 2 \\ 2-2i & \beta = 2 \end{cases}$

$y_0 = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$

II Det o sol part

Caz I $\rightarrow a$ $\quad y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$0 - 4a + 8ax + 8b = 8x - 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \\ 8b - 4a = -4 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Big\} \Rightarrow y_p = x$

III Scriem sol finală $\quad y = y_0 + y_p = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + x$

4) $\begin{cases} (1+x^3) \cdot y'' - 3x^2 \cdot y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 6 \end{cases}$ $\quad z = y'$, $\quad z' = y''$

$(1+x^3) \cdot z' = 3x^2 \cdot z$

$\frac{1}{z} dz = \frac{3x^2}{x^3+1} dx$

$\ln|z| = \ln(x^3+1) + \ln c_1$

$|z| = c_1(x^3+1)$

$z = c(x^3+1)$

$y' = c(x^3+1) \mid \int$

$y = c \cdot \frac{x^4}{4} + c \cdot x + c_1$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 4c + 2c + 0 = 6 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{x^4}{4} + x$

5) $\begin{cases} y' = x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$[0,1]$

$h = 0,1 \Rightarrow N = 10$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0,1 \quad y_1 = 1,2$

$x_2 = 0,2 \quad y_2 = 1,45$

$x_3 = 0,3 \quad y_3 = 1,76$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

$y_{n+1} = y_n + (x_n + 2y_n) \cdot h$

$y_1 = y_0 + (x_0 + 2y_0) \cdot h$

$= 1 + 0,2 = 1,2$

$y_2 = y_1 + (x_1 + 2y_1) \cdot h$

$= 1,2 + 2,5 \cdot 0,1$

$= 1,45$

$y_3 = y_2 + (x_2 + 2y_2) \cdot h$

$= 1,45 + 3,1 \cdot 0,1$

$= 1,45 + 0,31$

$= 1,76$

6) $\begin{cases} x' = x - xy^2 \\ y' = x - y \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - xy^2 = 0 \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$

$x - x^3 = 0$

$x(1 - x^2) = 0$

$x(1-x)(1+x) = 0$

$x_1^*(0,0)$ ; $x_2^*(1,1)$; $x_3^*(-1,-1)$ - 3 pct de echil

b) $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y^2 & -2xy \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

I $x_1^*(0,0)$

$J_f(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$ $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ $\left[ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right.$ pct de echilibru instabil de tip ?a

4)

II $x_2^*(1,1)$

$$J_f(x_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda+1) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 \quad \sqrt{\Delta} = i\sqrt{7}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{array} \right.$$

pct de echilibru asimptotic stabil de tip focus

III $x_3^*(-1,-1)$

$$J_f(x_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

analog ca la II

$\Rightarrow$ pct de echilibru local asimptotic stabil de tip focus

Nume .

Grupa .

Subiectul 7

1p.of. 1p oficiu

**Exerciţiul 1** *Se consideră modelul matematic al răcirii corpurilor*

$$\begin{cases} T'(t) &= -k \cdot (T(t) - T_m) \\ T(0) = & T_0 \end{cases}$$

(a) **(0,5p)** *Care este semnificaţia parametrilor* $k, T_m, T_0 \in \mathbb{R}_+$*? Argumentaţi de ce* $k > 0$.

(b) **(0,5p)** *Determinaţi soluţia modelului;*

(c) **(0,5p)** *Determinaţi soluţiile de echilibru şi studiaţi stabilitatea acestora.*

**Exerciţiul 2** **(0,5p)** *Definiţi noţiunea de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul 1.*

**Exerciţiul 3** *Determinaţi soluţiile generale pentru ecuaţiile:*

0,5p (a) **(0,5p)** $y' - \frac{2}{x}y = -1$

1p (b) **(1p)** $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x}$

**Exerciţiul 4** **(1p)** *Determinaţi soluţia problemei bilocale:*

$$\begin{cases} (3x-1) \cdot y'' - 3 \cdot y' &= -3 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

**Exerciţiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' &= xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. *Scrieţi formula lui Euler de calcul a valorilor soluţiei aproximante pentru o reţea de noduri echidistante. Pentru pasul* $h = 0.1$ *calculaţi primele trei valori aproximative ale soluţiei pe intervalul* $[0; 1]$.

**Exerciţiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & y^3 - x \\ y'(t) = & x^3 - y \end{cases}$$

*Se cere:*

(a) **(0,5p)** *Să se determine punctele de echilibru*

(b) **(1p)** *Să se studieze stabilitatea acestora.*

7.JPG

3) a) $y' - \frac{2}{x} y = -1$

I Rez ec omogenă

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x} \cdot y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + \ln(c_1)$$

$$|y| = c_1 \cdot x^2$$

$$y_0 = c \cdot x^2$$

II Determinăm soluția particulară

$$y_p = c(x) \cdot x^2$$

$$y_p' = c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot 2x$$

$$c'(x) \cdot x^2 + \cancel{c(x) \cdot 2x} - \frac{2}{x} \cdot \cancel{c(x) \cdot x^2} = -1$$

$$c'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{c_1} = \frac{1}{x} \Rightarrow y_p = x$$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$$y = c \cdot x^2 + x, \; c \in \mathbb{R}$$

b) $y'' + 4y' + 5y = 2 \cdot e^{-x}$

I Rez ec omogenă

$y'' + 4y' + 5y = 0$

scriem ec caract

$r^2 + 4r + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\frac{-4+2i}{2} = -2+i$

$\frac{-4-2i}{2} = -2-i$

$\alpha = -2$

$\beta = 1$

$y_0 = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$

II Det o sol part

Cazul II $\to$ a) $\Rightarrow y_p = e^{-x} \cdot a$

$y_p' = -a \cdot e^{-x}$

$y_p'' = a \cdot e^{-x}$

$\cancel{e^{-x}}(a - 4a + 5a) = 2 \cdot \cancel{e^{-x}}$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y_p = e^{-x}$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$= C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x + e^{-x}$

4) $\begin{cases} (3x-1)\cdot y'' - 3\cdot y' = -3 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad z = y'$, $\quad z' = y''$

I Rez ec omogenă

$(3x-1)\cdot z' - 3z = 0$

$\frac{dz}{z} = \frac{3}{3x-1}\,dx$

$\ln|z| = \ln|3x-1| + \ln c_1$

$|z| = c_1(3x-1)$

$z_0 = c(3x-1),\ c \in \mathbb{R}$

II ~~Rez o~~ Det o sol part

$z_p = c(x)(3x-1)$

$z_p' = c'(x)(3x-1) + c(x)\cdot 3$

$(3x-1)^2 c'(x) + \cancel{3(3x-1)c(x)} - \cancel{3c(x)(3x-1)} = -3$

$c'(x) = \frac{-3}{(3x-1)^2} \quad | \int$

$c(x) = \frac{1}{3x-1} + \underset{0}{c_1} \Rightarrow z_p = 1$

III Scriem soluția finală $z = z_0 + z_p$

$z = c(3x-1) + 1$

$y = c\cdot\frac{3}{2}\cdot x^2 - c\cdot x + x + c_1$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ \frac{3}{2}c-c+1=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}c-c=\frac{3}{2}-1$$

$$c\left(\cancel{\frac{3}{2}-1}\right)=\cancel{\frac{3}{2}-1}$$

$$c=1$$

$$y(x)=\frac{3x^2}{2}$$

5) $\begin{cases} y'=xy \\ y(0)=1 \end{cases}$

$[0,1]$

$x_0=0 \quad y_0=1$

$x_1=0.1 \quad y_1=1$

$x_2=0.2 \quad y_2=1{,}01$

$x_3=0.3 \quad y_3=1{,}0302$

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)\cdot h=y_n+x_n y_n h$$

$h=0{,}1 \quad N=10$

$$y_1=y_0+x_0y_0h=1$$

$$y_2=y_1+x_1y_1h=1+0{,}01=1{,}01$$

$$y_3=y_2+x_2y_2h=1{,}01+0{,}2\cdot 1{,}01\cdot 0{,}1$$
$$=1{,}01+0{,}0202$$
$$=1{,}0302$$

6) $\begin{cases} x'=y^3-x \\ y'=x^3-y \end{cases}$

a) $\begin{cases} y^3-x=0 \Rightarrow x^9-x=0 \\ x^3-y=0 \Rightarrow y=x^3 \end{cases}$

$x(x^8-1)=0$

$x(x^4-1)(x^4+1)=0$

$x_1^*(0,0)$, $x_2^*(1,1)$, $x_3^*(-1,-1)$ pct de echilibru

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3x^2 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

I $(0,0) \Rightarrow J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$ pct de echilibru asimptotic

$\lambda = -1$ stabil de tip nod

II $(1,1) \Rightarrow J_f \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+1)^2 - 9 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad \sqrt{\Delta} = 6 \quad \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$

pct de echilibru instabil de tip șa

III $(-1,-1) \Rightarrow J_f \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = A$

analog II $\Rightarrow$ pct de echilibru instabil de tip șa

1) $\begin{cases} x'(t) = b_0 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

a) Determinați soluția modelului

b) pentru $b_0 > 0$ calculați $\lim_{t \to \infty} x(t)$

2. Definiți noțiunea de punct de echilibru [redacted] asimpt. stabil pt. un sistem de ec. autonome.

3. Soluțiile pt:

a) $(\cos x)^2 y' - y = e^{\operatorname{tg} x}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 2$

Subiectul 9

4. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ [redacted] sol. generale.

5. $\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ → clule → calculați primele 3 valori aproximative a soluției pe intervalul $[0,1]$

$h = 0.1$

[redacted]

6) $x'(t) = x - x^3$

a) Determinați punctele de echil + stabilitatea lor

b) portretul fazic.

9.JPG

3)

a) $\cos^2 x \cdot y' - y = e^{tg x}$

I Rez ec omogenă

$\cos^2 x \cdot y' = y$

$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$\ln|y| = tg\, x + c_1$

$y_0 = c \cdot e^{tg x}$ ; $c \in \mathbb{R}$

II Det sol part

$y_p = c(x) \cdot e^{tg x}$

$y_p' = c'(x) \cdot e^{tg x} + c(x) \cdot e^{tg x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$c'(x) \cdot \cancel{e^{tg}} \cdot \cos^2 x + \cancel{c(x) \cdot e^{tg x}} - \cancel{c(x) \cdot e^{tg x}} = \cancel{e^{tg x}}$

$c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$c(x) = tg\, x + \underset{0}{c_1} \Rightarrow y_p = tg \cdot e^{tg}$

III Scriem sol finală

$y = c \cdot e^{tg x} + tg x \cdot e^{tg x}$ , $c \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 2$

I Rez ec omogenă

$y'' - 4y' + 8y = 0$ scriem ec caract $r^2 - 4r + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16$

$\sqrt{\Delta} = 4i \quad \left[ \begin{array}{l} 2+2i \\ 2-2i \end{array} \right. \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} \cos 2x + c_2 e^{2x} \sin 2x$

II Det o sol particulară

Caz I - a) $\Rightarrow y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$2a - 8ax - 4b + 8ax^2 + 8bx + 8c = 8x^2 - 2$

$a = 1 \qquad x(8b - 8a) = 0$

$b = 1 \qquad 2a - 4b + 8c = -2$

$c = 0 \qquad 2 - 4 + 8c = -2$

$y_p = x^2 + x$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p \Rightarrow y = c_1 e^{2x} \cos 2x + c_2 e^{2x} \sin 2x + x^2 + x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y_2' + y_2}{2} = y_1$

$y_1' = \dfrac{y_2'' + y_2'}{2} \Rightarrow y_2'' + \cancel{y_2'} = \cancel{y_2'} + y_2 - 5y_2$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_2' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$$y_1 = \frac{2c_2 \cos 2x - 2c_1 \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}{2}$$

$$y_1 = \frac{\cos 2x\,(2c_2 + c_1) + \sin 2x\,(c_2 - 2c_1)}{2}$$

$$\frac{y_2'' + y_2'}{2} = \frac{y_2' + y_2}{2} - 5y_2$$

$$y_2'' + \cancel{y_2'} = \cancel{y_2'} + y_2 - 10y_2$$

$y_2'' + 9y_2 = 0$

$r^2 + 9 = 0$ $\quad r = \pm 3i \Rightarrow y_2 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$\Rightarrow y_2' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$

$$y_1 = \frac{3c_2 \cos 3x - 3c_1 \sin 3x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x}{2}$$

$$y_1 = \frac{\cos 3x\,(3c_2 + c_1) + \sin 3x\,(c_2 - 3c_1)}{2}$$

5) $\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$ $\quad h = 0.1$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

$[0,1]$

$N = 10$

$y_{n+1} = y_n + (2x_n + y_n) \cdot h$

$y_{n+1} = y_n + (2x_n + y_n) \cdot h$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0.1 \quad y_1 = 1,1$

$x_2 = 0.2 \quad y_2 = 1,23$

$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1,393$

$n = 0 \; ; h = 0.1$

$y_1 = y_0 + (2x_0 + y_0) \cdot h$

$y_1 = 1 + (0 + 1) \cdot 0,1$

$y_1 = 1,1$

$n = 1$

$y_2 = y_1 + (2x_1 + y_1) \cdot h$

$= 1,1 + (0,2 + 1,1) \cdot 0,1$

$= 1,1 + 1,3 \cdot 0,1$

$= 1,1 + 0,13$

$= 1,23$

$n = 2$

$y_3 = y_2 + (2x_2 + y_2) \cdot h$

$= 1,23 + (0,4 + 1,23) \cdot 0,1$

$= 1,23 + 1,63 \cdot 0,1$

$= 1,23 + 0,163$

$= 1,393$

6) $x' = x - x^3$

a) $x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

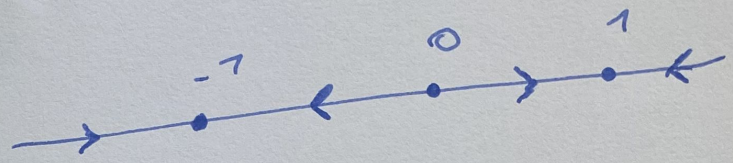
$x(1-x)(1+x) = 0 \quad x_1^* = 0, \; x_2^* = 1, \; x_3^* = -1$

$f' = (x - x^3)' = 1 - 3x^2$

$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ instabil | $f'(1) = -2 < 0$ stabil | $f'(-1) = -2 < 0$ stabil

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$x - x^3$




$f'(x) = 1 - 3x^2$

SUBIECT SD - gr. 214

① $\begin{cases} x'(t) = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

a) soluția modelului

b) $r_0 > 0$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = ?$. Concluzie.

② Definiți punctul de echilibru pentru un sistem planar.

③ a) $y' \sin(x) + 2y \cos(x) = 1$

b) $y'' - 4y' + 6y = 12x + 16$

Subiectul 10

④ $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ → sistemul lui Euler. Să scriem ma ția a lui Euler și să calculăm primii 3 termeni.

⑥ $x'(t) = 2x - x^3$

a) Punctele de echilibru, stabilitatea.

b) Portretul fazic.

10.JPG

3) a) $y' \sin x + 2y \cos x = 1$

I Rez ec omogenă

$y' \sin x + 2y \cos x = 0$

$\frac{1}{y} dy = -2 \operatorname{ctg} x \, dx$

$\ln|y| = -2 \ln|\sin x| + c_1$

$y = \frac{C}{\sin^2 x}$

II Det o sol part

$y_p = \frac{C(x)}{\sin^2 x}$

$y_p' = C'(x) \frac{1}{\sin^2 x} + C(x) \cdot \frac{0 - 2\sin x \cos x}{\sin^4 x}$

$\frac{C'(x)}{\sin x} + \cancel{C(x) \cdot \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{\sin^3 x}} + \cancel{\frac{2\cos x \, C(x)}{\sin^2 x}} = 1$

$C'(x) = \sin x$

$C(x) = -\cos x + c_0 \Rightarrow y_p = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p = \frac{C}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad C \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 6y = 12x + 16$

I Rez ec omogenă

$$y'' - 4y' + 6y = 0$$

scriem ec caract

$$r^2 - 4r + 6 = 0$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{2} \begin{cases} 2 + i\sqrt{2} \\ 2 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y_0 = c_1 e^{2x} \cos(x\sqrt{2}) + c_2 e^{2x} \sin(x\sqrt{2})$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

II Det o sol part

$f(x) = 12x + 16$

Cazul I $\rightarrow$ a) $\Rightarrow y_p = ax + b$

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

$$-4a + 6ax + 6b = 12x + 16$$

$$\begin{cases} 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ 6b - 4a = 16 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

4) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = 2y_1 - y_1'$

$$y_2' = 2y_1' - y_1''$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i \begin{cases} 2 + i \\ 2 - i \end{cases}$$

$$2y_1' - y_1'' = y_1 + 4y_1 - 2y_1'$$

$$y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$\cancel{y_1 = 2c_1 e}$

$$y_1' = 2C_1 e^{2x}\cos x - C_1 e^{2x}\sin x + 2C_2 e^{2x}\sin x + C_2 e^{2x}\cos x$$

$$y_2 = \cancel{2C_1 e^{2x}\cos x} + \cancel{2C_2 e^{2x}\sin x} - \cancel{2C_1 e^{2x}\cos x} + C_1 e^{2x}\sin x - \cancel{2C_2 e^{2x}\sin x} - C_2 e^{2x}\cos x$$

$$y_2 = C_1 e^{2x}\sin x - C_2 e^{2x}\cos x$$

5) $\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Euler

$h = 0.1$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0.1 \quad y_1 = 1{,}1$

$x_2 = 0.2 \quad y_2 = 1{,}212$

$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1{,}3412$

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\cdot h$$

$$y_{n+1} = y_n + (2x_n^2 + y_n)\cdot h$$

$n = 0$

$$y_1 = y_0 + (2x_0^2 + y_0)\cdot h$$
$$= 1 + (0 + 1)\cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}1$$

$n = 1$

$$y_2 = y_1 + (2x_1^2 + y_1)\cdot h$$
$$= 1{,}1 + (0{,}02 + 1{,}1)\cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}1 + 1{,}12\cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}212$$

$n = 3$

$$y_3 = y_2 + (2x_2^2 + y_2)\cdot h$$
$$= 1{,}212 + (0{,}08 + 1{,}212)\cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}212 + 1{,}292\cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}2120 + 0{,}1292$$
$$= 1{,}3412$$

6) $x' = 2x - x^3$

a) $2x - x^3 = 0$

$x(2 - x^2) = 0$

$x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0 \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \sqrt{2} \\ x_3^* = -\sqrt{2} \end{cases}$ - pct de echil

$f' = (2x - x^3)' = 2 - 3x^2$

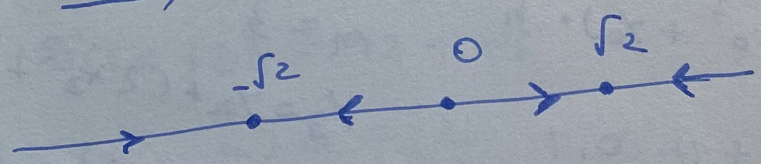
$f'(0) = 2 > 0$ - instabil

$f'(\sqrt{2}) = -4 < 0$ - stabil

$f'(-\sqrt{2}) = -4 < 0$ - stabil

b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| | | $\nearrow$ | | $\swarrow$ | | $\nearrow$ | | $\swarrow$ | |




- portret fazic