本文档是 New_DepartableUtilityFunction 的承接，主要阐明如何为那些从退休期开始决策（也就是没有工资收入部分）的人计算最优路径。这些人主要就是那些转轨路径开始时仍然存活但已经退休的人，他们的这个问题会在转轨路径开始时计算。

另外，若无特别说明，沿用上一部分文档的所有记号。

1. 跨期预算约束（新）

假设我们从第$\tilde{s}$岁年初开始计算，初始资产是$\mathcal{A}_{\tilde{s}}$。显然，要计算的年龄段是$\tilde{s},\dots,S$，共$S-\tilde{s}+1$年/岁。为了方便表示，我们不妨平移年龄区间令$\tilde{s}=1, S=S-\tilde{s}+1, \mathcal{A}_{\tilde{s}}=\mathcal{A}_1$，这样就可以继续沿用之前的符号了。

因为从退休后（至少是退休后第一年）开始，所以跨期预算约束仅仅保留了退休后的部分：

$$a_s a_{s+1}=(1+r_s)a_s+\Lambda_s-(1-\mathscr{d}_s)c_s, 1\le s\le S$$
$$a_s\Phi_{s+1}=(1+r_s)\Phi_s+\mathbb{P}_s+\mathscr{g}_s c_s$$
$$a_s\mathcal{A}_{s+1}=(1+r_s)\mathcal{A}_s+\mathscr{j}_s-(1-\mathscr{h}_s)c_s$$

然后我们列出收入流和支出流：

真正收入流	真正支出流
退休期：$\mathscr{j}_s\frac{1}{a_s}$ 第 1 期：$\mathcal{A}_{\tilde{s}}\frac{1}{a_s}$	每一期：$(1-\mathscr{h}_s)c_s\frac{1}{a_s}$

同样的，注意死亡率带来的金额修正。

然后定义一个新的净现金流现值函数：

$$\mathcal{G}(c_1,\dots,c_S)=\frac{V_1}{a_1}\mathcal{A}_1+\sum_1^S\frac{V_s}{a_s}\mathscr{j}_s-\sum_1^S\frac{V_s}{a_s}(1-\mathscr{h}_s)c_s$$

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial c_s}=-\tilde{V}_s(1-\mathscr{h}_s)$$

以及修正的折现因子：

$$\tilde{V}_s=\frac{1}{a_s}\prod_1^s(1+r_s)^{-1}$$

2. Lagrange Function:

$$\max_{c_s,l_s} L=\sum_1^S\widetilde{\beta_s}u_s-\lambda_0\mathcal{G}$$

3. FOCs

$$\frac{\partial L}{\partial c_s} = \tilde{\beta}_s \frac{\partial u_s}{\partial c_s} - \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial c_s} = 0, s = 1, \dots, S$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \mathcal{G} = 0$$

4. Euler Equation

退休后就没有了闲暇，所以动态方程只剩下欧拉方程：

$$\frac{c_{s+1}}{c_s} = \left[\frac{1 + r_{s+1}}{1 + \delta} \frac{(1 - \mathcal{h}_s)}{(1 - \mathcal{h}_{s+1})}\right]^{\gamma} \left[\frac{1 - q_s}{1 - q_{s+1}}\right]^{1-\gamma}, s = 1, \dots, S - 1$$

$$\mathcal{P}_{s,s+1} = \frac{1 + r_{s+1}}{1 + \delta} \frac{(1 - \mathcal{h}_s)}{(1 - \mathcal{h}_{s+1})}, s = 1, \dots, S - 1$$

$$\mathcal{Q}_{s,s+1} = \frac{1 - q_s}{1 - q_{s+1}}, s = 1, \dots, S - 1$$

$$\frac{c_{s+1}}{c_s} = \mathcal{P}_{s,s+1}^{\gamma} \mathcal{Q}_{s,s+1}^{1-\gamma} \geq 0$$

欧拉方程与上一篇文档完全相同，意味着只要初始消费相同、其他参数相同，最终出来的路径应当是相同的。

5. 路径求解

首先写出累积的欧拉方程：

$$c_s = \mathcal{T}_{1\to s} c_1, s = 1, \dots, S$$

$$\mathcal{T}_{1\to s} = \begin{cases} 1, s = 1 \\ \left[\prod_{i=1}^{s-1} \mathcal{P}_{i,i+1}\right]^{\gamma} \left[\prod_{i=1}^{s-1} \mathcal{Q}_{i,i+1}\right]^{1-\gamma}, s > 1 \end{cases}$$

然后整理预算约束：

$$\sum_1^S \tilde{V}_s (1 - \mathcal{h}_s) c_s = \tilde{V}_1 \mathcal{A}_1 + \sum_1^S \tilde{V}_s \mathcal{j}_s$$

$$\left\{\sum_1^S \tilde{V}_s (1 - \mathcal{h}_s) \mathcal{T}_{1\to s}\right\} c_1 = \tilde{V}_1 \mathcal{A}_1 + \sum_1^S \tilde{V}_s \mathcal{j}_s$$

$$\mathcal{X}_{1\to s} c_1 = \mathcal{Y}_{1\to s}$$

由于退休期没有闲暇的资源约束，所以没有必要进行闲暇的矫正，直接使用二分法矫正初始消费c_1令$\mathcal{A}_{dead} = 0$即可

6. 缩写

在这样一个问题里涉及到的缩写有：

层次	变量/缩写定义	要求的合法性检查	备注
Level 0	• 长度为S的：q_s, p_s, cp_s^B, F_s • 标量：δ, γ	• q_s, p_s, cp_s^B, F_s均要求在 0 和 1 的开区间内 • $\alpha > 0, \delta \neq -1, \gamma \in (0,1), \sigma \in (0,1)$ • 如果$F_{s=S} \neq 0$，那么抛警告并强行修改为 0	原始输入的外生参数
Level 0	• 长度为S的：r_s • 长度为S的：$\Lambda_s, \mathbb{P}_s$	• $r_s \neq -100\%$ for all $s = 1, \dots, S$ • $w_s > 0, \Lambda_s \geq 0, \mathbb{P}_s \geq 0$	原始输入的经济体状态变量
Level 2	• $a_s = 2 - \frac{1}{1-F_s}, a_s \in [1, +\infty)$ • $d_s = q_s \frac{p_s + (1-cp_s^B)}{1+p_s}, d_s \in [0,1)$ • $g_s = -\frac{q_s p_s}{1+p_s}, g_s \in [0,1]$ • $h_s = d_s + g_s = q_s \frac{1-cp_s^B}{1+p_s}, h_s \in [0,1]$ • $j_s = \Lambda_s + \mathbb{P}_s, j_s \geq 0$ • $V_s = \prod_1^s (1+r_s)^{-1}$ • $\tilde{V}_s = \frac{V_s}{a_s}$ • $\widetilde{\beta_s} = \frac{1-F_s}{(1+\delta)^{s-1}}$	• $h_s = q_s \frac{1-cp_s^B}{1+p_s} \in (0,1)$	由 Level 0 和 Level 1 一起定义
Level 3	• $\mathcal{P}_{s,s+1} = \frac{1+r_{s+1}}{1+\delta} \frac{(1-h_s)}{(1-h_{s+1})}, s = 1, \dots, S-1$ • $\mathcal{Q}_{s,s+1} = \frac{1-q_s}{1-q_{s+1}}, s = 1, \dots, S-1$	• $\mathcal{P}_{s,s+1} > 0$ for all $s = 1, \dots, S-1$ • $\mathcal{Q}_{s,s+1} > 0$ for all $s = 1, \dots, S-1$	主要用于欧拉方程等动态关系
Level 4	• $\mathcal{T}_{1 \to s} = \left[\prod_{i=1}^{s-1} \mathcal{P}_{i,i+1}\right]^{\gamma} \left[\prod_{i=1}^{s-1} \mathcal{Q}_{i,i+1}\right]^{1-\gamma}, s > 1$	• $\mathcal{T}_{1 \to s} > 0$	用于积累的消费/闲暇递推式
Level 5	• $\mathcal{X}_{1 \to S} = \sum_1^S \tilde{V}_s (1-h_s) \mathcal{T}_{1 \to s}$ • $\mathcal{Y}_{1 \to S} = \tilde{V}_1 \mathcal{A}_1 + \sum_1^S \tilde{V}_s j_s$	• $\mathcal{X}_{1 \to S}, \mathcal{Y}_{1 \to S} \neq 0$ • $\frac{\mathcal{Y}_{1 \to S}}{\mathcal{X}_{1 \to S}} > 0$	用于无约束的c_1求解