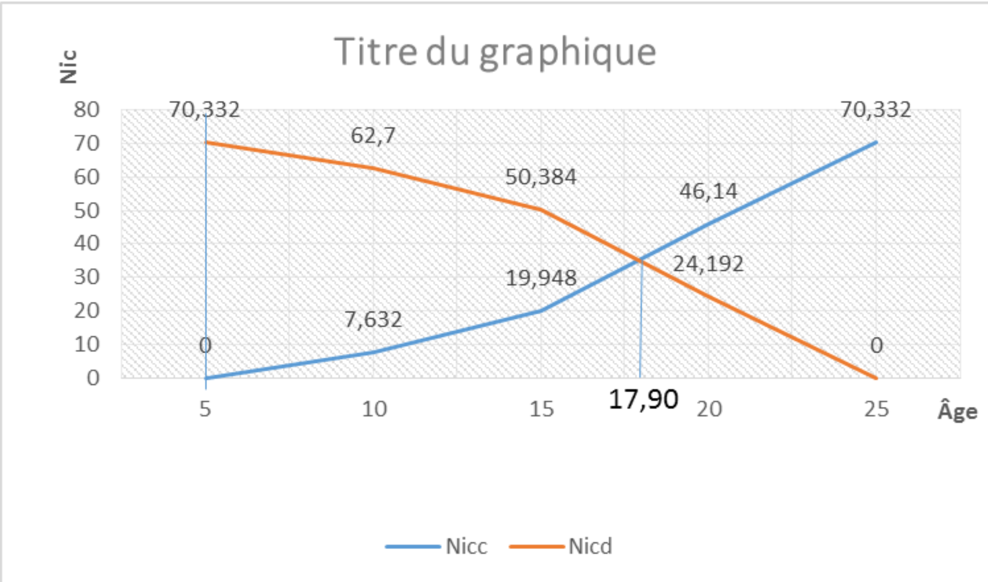
Correction Série 4 : Caractéristiques de position & de dispersion

Exercice 1.

Âge	Ci	ni	Nicc	Nicd
[5 ; 10[	7,5	7,632	7,632	70,332
[10 ; 15[	12,5	12,316	19,948	62,7
[15 ; 20[	17,5	26,192	46,14	50,384
[20 ; 25[	22,5	24,192	70,332	24,192
TOTAL		70,332		

Les coordonnées des points pour tracer le polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant

Age	N_icc	N_icd
5	0,000	70,332
10	7,632	62,7
15	19,948	50,384
20	46,140	24,192
25	70,332	-



2. a) Calcul du mode de la série :

On applique la formule : Mo $= x_1 + \frac{k_1}{k_1+k_2} \times (x_2 - x_1)$

- $[x_1 ; x_2[$= [15,20[« La classe ayant l'effectif le plus élevé » C'est la classe modale.
- k_1 = l'effectif de la classe modale - l'effectif de la classe [10 ; 15[= 26,192 - 12,316 = **13,876**
- k_2 = l'effectif de la classe modale - l'effectif de la classe [20 ; 25[= 26,192 - 24,631 = **1.561**
- L'amplitude $x_2 - x_1$ = 20 -15 = 5

Si on remplace ces quantités dans l'expression de "Mo", on trouve :

$$M_o = 15 + \frac{13,876}{13,876+2} \text{ x } 5 \approx 19,37$$

L'âge modal de la population étudiée est 19,37 ans, soit 19 ans et 4 mois

2. b) Les quartiles :

On applique la formule : $Q_j = x_i + \dfrac{N \times j - N_{\{i-1,cc\}}}{n_i}(x_{i+1} - x_i)$

- ✓ **Le premier quartile :** **j=1/4 = 0.25** et $\dfrac{n}{4} = \dfrac{70{,}332}{4} \approx 17{,}58$

  Donc la classe du premier quartile c'est [10,15[

$$\boxed{Q_1 = 10 + \frac{70{,}332 \times 0.25 - 7{,}632}{12{,}316}(15-10) \approx 13{,}98}$$

Un quart de la population étudiée a moins de 13,98 ans, soit environ 14 ans

- ✓ **Le deuxième quartile = La médiane :** **j=1/2 = 0.75** et N/2 = 35,166
  Donc la classe du deuxième quartile c'est [15 ; 20[

$$\boxed{Q_2 = Me = 15 + \frac{35{,}166 - 19{,}948}{26{,}192} \times 5 \cong 17{,}90}$$

La moitié de la population étudiée a moins de 17,90 ans, soit 17 ans et 11 mois

- ✓ **Le troisième quartile :** **j=3/4 = 0.75** et 3N/4 = 3 × 17.583 = 52,759
  Donc la classe du troisième quartile c'est [20 ; 25[

$$\boxed{Q_3 = 20 + \frac{53{,}759 - 46{,}140}{24{,}631} \times 5 \cong 21{,}54}$$

Les trois quart de la population étudiée a moins de 21,54 ans, soit environ 21 ans et 3 mois

2. c) Calcul de la moyenne de la série : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i c_i = \frac{1213{,}87}{70{,}771} = 17{,}25}$

L'âge moyen de la population étudiée est 17,25 ans, soit environ 17 ans et 3 mois

3) **Calcul de la variance :** On applique la formule $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i\, x_i^2 - \bar{x}^2$

Âge	C_i	n_i	n_iC_i	n_iC_i ^2
[5 ; 10[	7,5	7,632	57,24	429,3
[10 ; 15[	12,5	12,316	153,95	1924,375
[15 ; 20[	17,5	26,192	458,36	8021,3
[20 ; 25[	22,5	24,192	544,32	12247,2
TOTAL		70,332	1213,87	22622,175

$$V = \frac{22622{,}175}{70{,}332} - 17{,}25^2 \approx 20{,}90$$

$\boxed{\text{L'écart type : } \sigma = 4.90}$

4) Les déciles :

On applique la formule : $D_j = x_i + \dfrac{n \times j - N_{\{i-1,cc\}}}{n_i}(x_{i+1} - x_i)$

- ✓ **Le premier décile :** **j=1/10 = 0.01** et N/10 =70,332 = 7,0332
  Donc la classe du premier décile c'est [5 ; 10[

$$\boxed{D_1 = 5 + \frac{7{,}0332 - 0}{7{,}632}(10-5) \approx 9{,}60}$$

10% de la population étudiée a moins de 9,60 ans, soit environ 9 ans et 7 mois

✓ **Le troisième décile :** **j=9/10 = 0.09** et 7,0332 × 9 = 63,2988
Donc la classe du troisième décile c'est [20 ; 25[

$$\boxed{D_9 = 20 + \frac{63{,}2988 - 46{,}140}{24{,}631} \times 5 \cong 23{,}48}$$

90% de la population étudiée a moins de 23,56 ans, soit environ 23 ans et 6 mois.

Exercice 2.

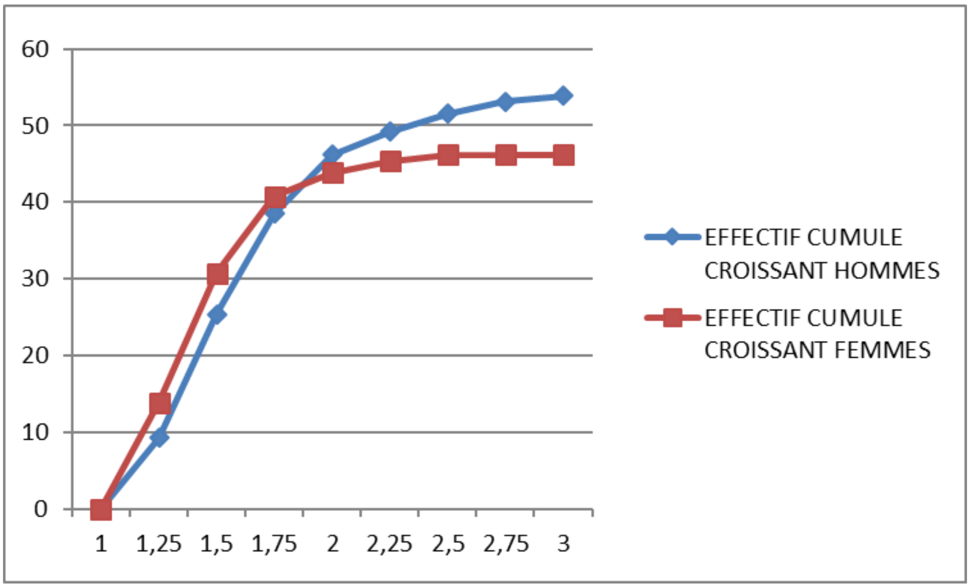
Classe	[1 ;1,25[	[1,25 ; 1,5[	[1,5 ;1,75[	[1,75 ; 2[	[2 ; 2,25[	[2,25 ; 2,5[	[2,5 ; 2,75[	[2,75 ; 3[	$\sum$
c_i	1,125	1,375	1,625	1,875	2,125	2,375	2,625	2,875	
n_i h	12	21	17	10	4	3	2	1	70
n_if	18	22	13	4	2	1	0	0	60
n_ic_i(h)	13,5	28,875	27,625	18,75	8,5	7,125	5,25	2,875	112,5
n_ic_i(f)	20,25	30,25	21,125	7,5	4,25	2,375	0	0	85,75
$n_{ih}c_i^2$	15,1875	39,703125	44,89063	35,15625	18,0625	16,92188	13,78125	8,265625	191,96875
$n_{if}c_i^2$	22,78125	41,59375	34,328125	14,0625	9,03125	5,640625	0	0	127,4375
f_{ih}	0,17142857	0,3	0,242857	0,142857	0,057143	0,042857	0,028571	0,014286	
F_{ih}	0,17142857	0,47142857	0,714286	0,857143	0,914286	0,957143	0,985714	1	
f_{if}	0,3	0,36666667	0,216667	0,066667	0,033333	0,016667	0	0	
F_{if}	0,3	0,66666667	0,883333	0,95	0,983333	1	1	1	

Moy HOMME =	**1,60714286**
Moy FEMME =	**1,42916667**
VAR h =	**0,545196006**
VAR f =	**0,15950255**
ECART TYPE1 =	**0,3993777**
ECART TYPE2 =	**0,28537865**
CV h=	**0,24850168**
CV f=	**0,1996818**

Sachant que la variance se calcule à partir de $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i\, c_i^2 - \bar{x}^2$

L'écart type c'est $\sigma = \sqrt{V}$ et **la moyenne arithmétique** c'est $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\, c_i$

Le coefficient de variation c'est $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$



3) La deuxième série « Femmes » est plus dispersée que la première série.

4) La moyenne totale = $\frac{1}{N_H+N_F} \sum_i (n_{Hi}\, c_i + n_{Fi}\, c_i)$ **par définition de la moyenne**

$$= \frac{N_H}{N_H+N_F} \times \frac{1}{N_H} \sum_i n_{Hi}\, c_i + \frac{N_F}{N_H+N_F} \times \frac{1}{N_F} \sum_i n_{Fi}\, c_i$$

$$\textbf{La moyenne totale} = \frac{N_H}{N_H+N_F} \times m_H + \frac{N_F}{N_H+N_F} \times m_F$$

Avec N_H c'est l'effectif total des hommes ;
N_F C'est l'effectif total des femmes ;
m_H et m_F C'est le salaire moyen des hommes et des femmes respectivement.

Exercice 3.

x_i	n_i	$n_i\,x_i$	$n_i\,x_i^2$
0	6	0	0
1	4	4	4
2	9	18	36
3	7	21	63
4	3	12	48
5	2	10	50
Somme	31	65	201

1) Calcul de la moyenne du nombre de films vus au cinéma :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{65}{31} \cong 2{,}10$$

2) Calcul de la variance du nombre de films vus au cinéma :

On applique la formule $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \bar{x}^2$

$V = \frac{201}{31} - 2{,}1^2 = 6{,}49 - 4{,}41 = 2.08$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2{,}08} = 1\,.44$

Exercice 4.

Importations		
Année	**x_i**	**x_i^2**
1990	57 023	3251622529
1991	59 730	3567672900
1992	62 805	3944468025
1993	61 908	3832600464
1994	65 963	4351117369
TOTAL	**307 429**	**18947481287**

Exportations	
x_i	**x_i^2**
34 858	1215080164
37 283	1390022089
33 959	1153213681
34 366	1181021956
36 546	1335610116
177 012	**6274948006**

$\bar{x}_1 =$	61485,8
$\frac{1}{307\ 429}\sum_i x_i^2 =$	3789496257
$\bar{x}_1^2 =$	3780503602
Var 1 =	8992655,76
Ecart type 1=	**2998,77571**

Moy 2 =	35402,4
moy des carrés	1254989601
moy au carré	1253329926
Var 2	1659675,44
Ecart type 2 =	**1288,283913**

CV1=	0,048771842

CV2=	0,036389734

On s'aperçoit que le coefficient de variation (CV) des importations est plus élevé que celui des exportations. Donc, la dispersion pour les importations est plus élevée que les exportations.