Exercices corrigés de la leçon "optimisation sans contrainte"
Partie 3 - chapitres I et II

Exercice 1 Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local, minimum local, col) pour les fonctions f définies ci-dessous

a) $f(x,y) = (x-5)^2 + (y-2)^2$
b) $f(x,y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y$
c) $f(x,y) = 4x^2 - 12xy + y^2$

Exercice 2 On considère la fonction f suivante :

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$

a) calculez les dérivées partielles de f et les dérivées secondes de f
b) évaluez les dérivées partielles et les dérivées secondes de f aux points $A\begin{pmatrix} x=1 \\ y=-1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x=-1 \\ y=1 \end{pmatrix}$.

A et B sont ils des points critiques de f ?

c) déterminer la nature de ces points critiques (maximum local, minimum local, col,...)

Exercice 3 Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local, minimum local, col) pour les fonctions f définies ci-dessous

a) $f(x,y) = x^2 + 2x + y + y^2$
b) $f(x,y) = 10 - x^2 - 5y^2 + 3xy - x + 2y$
c) $f(x,y) = x^2 - 12x + y^2 - 27y$
d) $f(x,y) = xy - x^2$
e) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 12y + 10$

Exercice 4 Un industriel produit simultanément 2 biens A et B dont il a le monopole de la production et de la vente dans un pays. Soit x la quantité produit du premier bien et y la quantité produite du second. Les prix p_A et p_B auxquels il vend les bien A et B sont fonction des quantités écoulées selon les relations : $\begin{cases} p_A = f(x) \\ p_B = g(y) \end{cases}$

Le coût de production total des quantités x et y est une fonction $c(x,y)$.

Le Bénéfice de l'entreprise si elle vend les quantités x et y est donc la fonction

$$\pi(x,y) = xf(x) + yg(y) - c(x,y)$$

Dans chacun des cas suivants, trouvez les quantités qui maximisent le bénéfice de l'entreprise, la valeur maximale du bénéfice ainsi que les prix de vente de chacun des biens

a) $\begin{cases} p_A = 1 - x \\ p_B = 1 - y \\ c(x,y) = xy \end{cases}$

b) $\begin{cases} p_A = 28 - 3x \\ p_B = 22 - 2y \\ c(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4xy \end{cases}$

c) $\begin{cases} p_A = 33 - 4x \\ p_B = 27 - y \\ c(x,y) = x^2 + 3y^2 + xy \end{cases}$

Solutions

Rappelons que

- (1) Un point critique de la fonction f est un point (x_0, y_0) pour lequel $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right.$
- (2) pour étudier la nature du point critique (x_0, y_0) on doit calculer les dérivées secondes et $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2$. On a alors les 4 cas suivants :

$$- \left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & D = 0 & \text{on ne peut rien dire} \\ \text{(b)} & D < 0 & \text{le point critique est un col} \\ \text{(c)} & D > 0 \text{ et } f''_{xx} > 0 & \text{le point critique est un minimum local} \\ \text{(d)} & D > 0 \text{ et } f''_{xx} < 0 & \text{le point critique est un maximum local} \end{array}\right.$$

Exercice 1

a) $f(x, y) = (x-5)^2 + (y-2)^2$

On a $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 2(x-5) \\ f'_y = 2(y-2) \end{array}\right.$ Les coordonnées (x, y) d'un point critique sont solution de $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right.$

soit de $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 2(x-5) = 0 \\ f'_y = 2(y-2) = 0 \end{array}\right.$. On trouve donc $\left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Pour étudier la nature des points critiques, on calcule les dérivées secondes : $\left\{\begin{array}{l} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{array}\right.$. et on a $D = 2*2 - 0^2 = 4$

$D > 0$ et $f''_{xx} > 0$: le point critique est un minimum local.

Remarque Considérons dans le plan le point $A \left(\begin{array}{c} x_A = 5 \\ y_A = 2 \end{array}\right)$ et le point $M \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$. La distance entre les points A et M vaut $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 = f(x, y)$

La fonction f est simplement la distance entre le point A et le point M. Ce que nous dit ce calcul c'est que la distance entre A et M est minimale lorsque A et M coïncident, par contre elle n'admet pas de maximum.

b) $f(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y$

On a $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 4x - 5 \\ f'_y = 12y + 4 \end{array}\right.$ Les coordonnées (x, y) d'un point critique sont solution de $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right.$

soit de $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 4x - 5 = 0 \\ f'_y = 12y + 4 = 0 \end{array}\right.$. On trouve donc $\left\{\begin{array}{l} x = 5/4 \\ y = 4/12 = 1/3 \end{array}\right.$

Pour étudier la nature des points critiques, on calcule les dérivées secondes : $\left\{\begin{array}{l} f''_{xx} = 4 \\ f''_{yy} = 12 \\ f''_{xy} = 0 \end{array}\right.$.

On a : $D = 4 * 12 - 0^2 = 48$

$D > 0$ et $f''_{xx} > 0$: le point critique est un minimum local.

c) $f(x,y) = 4x^2 - 12xy + y^2$

On a $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 8x - 12y \\ f'_y = -12x + 2y \end{array} \right.$ Les coordonnées (x,y) d'un point critique sont solution de $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right.$

soit de $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 8x - 12y = 0 \\ f'_y = -12x + 2y = 0 \end{array} \right.$.

De la seconde équation, on trouve que $2y = 12x$ soit que $x = 6y$.

On reporte cette valeur dans la première équation qui devient : $8(6y) - 12y = 0$ soit $36y = 0$

La seule solution est telle que $y = 0$ et donc $x = 0$. Le seul point critique de ce problème est $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$

Pour étudier la nature des points critiques, on calcule les dérivées secondes

Comme $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 8x - 12y \\ f'_y = -12x + 2y \end{array} \right.$ on a : $\left\{ \begin{array}{l} f''_{xx} = 8 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = -12 \end{array} \right.$.

$D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 8 * 2 - (-12)^2 = 16 - 144 = -128$

$D < 0$: le point critique est un col

Exercice 2

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$

a) On a $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} f''_{xx} = 6x + 6y \\ f''_{yy} = 6x \\ f''_{xy} = 6x + 6y \end{array} \right.$

b) Soit (x,y) un point critique : $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 = 0 \end{array} \right.$

On demandait simplement de vérifier que A et B sont des points critiques :

Calculons les dérivées partielles au point A : $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3(-1)^2 + 3(1)^2 + 6(-1)(1) = 0 \\ f'_y = 3(-1)^2 + 6(-1)(1) + 3 = 0 \end{array} \right.$ Au point A les deux dérivées partielles sont nulles, A est un point critique.

Calculons les dérivées partielles au point B : $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3(1)^2 + 3(-1)^2 + 6(1)(-1) = 0 \\ f'_y = 3(1)^2 + 6(1)(-1) + 3 = 0 \end{array} \right.$ Au point B les deux dérivées partielles sont nulles, B est un point critique.

Remarquons qu'il n'était pas très difficile de montrer que A et B sont les deux seuls points critiques :

il faut trouver (x,y) tels que $\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 = 0 \end{array} \right.$

De la seconde équation, on tire $3x^2 + 6xy = -3$

Reportons dans la première équation qui s'écrit : $3y^2 + (3x^2 + 6xy) = 0$ soit

$3y^2 - 3 = 0$ ou encore $y^2 = 1$

Cette dernière équation admet 2 solutions :

1) $y = +1$ dans ce cas, x est solution de $3x^2 + 6x + 3 = 0$ soit $3(x+1)^2 = 0$ et $x = -1$

On obtient ainsi un premier point critique : $\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$

2) $y = -1$ dans ce cas, x est solution de $3x^2 - 6x + 3 = 0$ soit $3(x-1)^2 = 0$ et $x = +1$

On obtient ainsi un premier point critique : $\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = -1 \end{pmatrix}$

En conclusion, la fonction f admet 2 points critiques : $A : \begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$ et $B : \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = -1 \end{pmatrix}$

Pour étudier la nature des points critiques, il faut calculer les dérivées secondes :

	au point $A \begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$	au point $B \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = -1 \end{pmatrix}$
$f''_{xx} = 6x + 6y$ $f''_{yy} = 6x$ $f''_{xy} = 6x + 6y$	$f''_{xx} = 0$ $f''_{yy} = -6$ $f''_{xy} = 0$	$f''_{xx} = 0$ $f''_{yy} = 6$ $f''_{xy} = 0$

Au point A, $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$: On ne peut rien dire

Au point B, $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$: on ne peut rien dire

Exercice 3

a) $f(x,y) = x^2 + 2x + y + y^2$. On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 \\ f'_y = 1 + 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$$

Le point critique est solution de $\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \\ f'_y = 1 + 2y = 0 \end{cases}$. La résolution de ce système est immédiate : il n'y a qu'un seul point critique $\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = -1/2 \end{pmatrix}$

Pour trouver la nature de ce point critique, on calcule $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ au point $\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = -1/2 \end{pmatrix}$: $D = 2 * 2 = 4$. On constate que D est positif et que f''_{xx} est aussi positif au point $\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = -1/2 \end{pmatrix}$. On en déduit que ce point réalise un minimum de la fonction f.

b) $f(x,y) = 10 - x^2 - 5y^2 + 3xy - x + 2y$. On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 3y - 1 \\ f'_y = -10y + 3x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f''_{xx} = -2 \\ f''_{yy} = -10 \\ f''_{xy} = 3 \end{cases}$$

Le point critique est solution de $\begin{cases} f'_x = -2x + 3y - 1 = 0 \\ f'_y = -10y + 3x + 2 = 0 \end{cases}$

Pour résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues, on procède par substitution : on exprime x en fonction de y dans la première équation qui s'écrit

$2x = 3y - 1$ soit $x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$

On substitue x par son expression en fonction de y dans la seconde équation :

$-10y + 3(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}) + 2 = 0 \qquad soit \qquad -\frac{11}{2y} + \frac{1}{2} = 0 \qquad y = \frac{1}{11}$

On reporte dans l'expression de x et la solution est $\begin{pmatrix} x = \frac{-4}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Pour trouver la nature de ce point critique, on calcule $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ au point $\begin{pmatrix} x = \frac{-4}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{pmatrix}$: $D = (-2) * (-10) - (3)^2 = 11$. On constate que D est positif et que f''_{xx} est négatif au point $\begin{pmatrix} x = \frac{-4}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{pmatrix}$. On en déduit que ce point réalise un maximum de la fonction f.

c) $f(x,y) = x^2 - 12x + y^2 - 27y$ On calcule les dérivées premières et secondes :

$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 \\ f'_y = 2y - 27 \end{cases} \qquad \begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$ Le point critique est solution de $\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 \\ f'_y = 2y - 27 = 0 \end{cases}$

Le seul point critique est donc $\begin{pmatrix} x = 6 \\ y = \frac{27}{2} \end{pmatrix}$. En ce point, on peut calculer $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 2 * 2 - 0 = 4$

Comme $D > 0$ et $f''_{xx} = 2 > 0$, on conclut que ce point critique réalise un minimum de f

d) $f(x,y) = xy - x^2$ On calcule les dérivées premières et secondes :

$\begin{cases} f'_x = y - 2x \\ f'_y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} f''_{xx} = -2 \\ f''_{yy} = 0 \\ f''_{xy} = 1 \end{cases}$

Le point critique est solution de $\begin{cases} f'_x = y - 2x = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{cases}$. De la seconde équation, on peut calculer la valeur de x : $x = 0$ reportant dans la première équation, on trouve que y doit lui aussi être nul. Donc on n'a ici qu'un seul point critique $\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$.

Pour trouver la nature de ce point critique, on calcule $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-2) * 0 - 1^2 = -1$

D est négatif, le point critique est un col.

e) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 12y + 10$ On calcule les dérivées premières et secondes :

$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3 \\ f'_y = 2y - 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} f''_{xx} = 6x \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$

Les coordonnées d'un point critique sont solutions du système d'équations $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f'_y = 2y - 12 = 0 \end{cases}$. Ce système admet évidemment deux solutions : $A\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 6 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 6 \end{pmatrix}$

Pour trouver la nature de ces points critiques, on va calculer $D = D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$

Au point A $\begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$ et $D = 6 * 2 - 0 = 12$. En ce point $D > 0$ et $f''_{xx} > 0$: le point A est un minimum local

Au point B $\begin{cases} f''_{xx} = 6x = -6 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$ et $D = -6 * 2 - 0 = -12$. En ce point $D < 0$ et on ne peut rien dire.

Exercice 4

a) $\left\{\begin{array}{l} p_A = 1 - x \\ p_B = 1 - y \\ c(x,y) = xy \end{array}\right.$ On a $\pi = x(1-x) + y(1-y) - xy = -x^2 - y^2 - xy + x + y$

On calcule les dérivées premières et secondes :

$\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -2x - y + 1 \\ \pi'_y = -2y - x + 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \pi''_{xx} = -2 \\ \pi''_{yy} = -2 \\ \pi''_{xy} = -1 \end{array}\right.$

Un point critique est solution de $\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -2x - y + 1 = 0 \\ \pi'_y = -2y - x + 1 = 0 \end{array}\right.$ soit $\left(\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{array}\right)$

Calculons $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3$

$D > 0$ et $\pi''_{xx} < 0$: le point critique est un maximum local.

b) $\left\{\begin{array}{l} p_A = 28 - 3x \\ p_B = 22 - 2y \\ c(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4xy \end{array}\right.$ On a $\pi = x(28-3x) + y(22-2y) - x^2 - 3y^2 - 4xy$

soit $\pi = -4x^2 - 5y^2 - 4xy + 28x + 22y$

On calcule les dérivées premières et secondes :

$\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -8x - 4y + 28 \\ \pi'_y = -10y - 4x + 22 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \pi''_{xx} = -8 \\ \pi''_{yy} = -10 \\ \pi''_{xy} = -4 \end{array}\right.$

Un point critique est solution de $\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -8x - 4y + 28 \\ \pi'_y = -10y - 4x + 22 \end{array}\right.$ soit $\left(\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \end{array}\right)$ (que l'on trouve par la méthode des substitutions)

Calculons $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-8)(-10) - (-4)^2 = 80 - 16 = 64$

$D > 0$ et $\pi''_{xx} < 0$: le point critique est un maximum local.

c) $\left\{\begin{array}{l} p_A = 33 - 4x \\ p_B = 27 - y \\ c(x,y) = x^2 + 3y^2 + xy \end{array}\right.$

On a $\pi = x(33-4x) + y(27-y) - x^2 - 3y^2 - xy$

soit $\pi = -5x^2 - 4y^2 - xy + 33x + 27y$

On calcule les dérivées premières et secondes :

$\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -10x - y + 33 \\ \pi'_y = -8y - x + 27 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \pi''_{xx} = -10 \\ \pi''_{yy} = -8 \\ \pi''_{xy} = -1 \end{array}\right.$

Un point critique est solution de $\left\{\begin{array}{l} \pi'_x = -10x - y + 33 \\ \pi'_y = -8y - x + 27 \end{array}\right.$ soit $\left(\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \end{array}\right)$ (que l'on trouve par la méthode des substitutions)

Calculons $D = f''_{xx} * f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-10)(-8) - (-1)^2 = 80 - 1 = 79$

$D > 0$ et $\pi''_{xx} < 0$: le point critique est un maximum local.