Croissances comparées

Dans les modules traitant du logarithme et de l'exponentielle,
nous avons déjà démontré les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

Ces formules de comparaison peuvent être étendues à toute **fonction puissance**
du type : $x \to x^n$ avec n entier naturel non nul :

Pour tout entier n > 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

Remarque :
Si dans les deux limites comportant un logarithme, on remplace lnx par 1, on obtient le même résultat.

On dit alors que la **fonction puissance** l'emporte sur le logarithme en l'infini et en zéro.

Cette remarque permet de plus de retenir aisément ce résultat.

De même, dans les limites comportant une exponentielle, si on remplace x^n par 1, on obtient le même résultat.

On dit que la fonction exponentielle l'emporte sur la **fonction puissance** en l'infini et en zéro.

Démonstration :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \times x \ln x = 0 \times 0 = 0$$

Pour démontrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, il faut poser le changement de variable : $X = \frac{x}{n}$

Alors : x = nX , d'où : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{nX}}{(nX)^n} = \left(\frac{e^X}{X}\right)^n \times \frac{1}{n^n}$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

De plus : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n = +\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{e^X}{X^n}\right)^n = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{e^X}{X^n}\right)^n \times \frac{1}{n^n} = +\infty \times \frac{1}{n^n} = +\infty$

Pour démontrer : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$, il faut poser le changement de variable : X = -x

Alors : x = -X d'où : $x^n e^x = (-X)^n e^{-X} = (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} (-1)^n \times \frac{X^n}{e^X} = (-1)^n \times \frac{1}{+\infty} = 0$

2/ Exposant réel

Depuis longtemps, nous connaissons les puissances d'exposants entiers naturels :

par définition, si n > 0 : $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{\text{n facteurs}}$

Nous avons ensuite appris à manipuler les puissances d'exposants entiers négatifs, en utilisant la propriété suivante : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Il est alors à remarquer que la fonction : $x \longrightarrow x^{-n}$ n'est pas définie en zéro.

Et nous avons enfin touché du doigt les exposants rationnels, par l'intermédiaire de la fonction racine carré :

La propriété : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ayant parfois été utilisée lors de divers calculs.

Remarque : nous généraliserons cet exemple un peu plus loin dans ce module.

Le moment est donc venu de réunir tous ces résultats et de définir de façon générale la notion de puissance pour un exposant réel.

Dans le module sur le logarithme, nous avons démontré pour a réel strictement positif et n entier : $\ln an = n \ln a$

Donc : $e^{\ln a}n = en \ln a$
D'où : $an = en^{\ln} a$
On décide donc d'étendre cette égalité à tout type d'exposant :

Pour tout réel a > 0 et pour tout réel b, on pose : $\mathbf{a^b = e^{b \ln a}}$

Se lit :

a exposant b
ou
a puissance b.

Remarque :
Par construction, on retrouve alors la propriété qui était déjà vraie pour un exposant entier, à savoir : $\mathbf{\ln a^b = \ln e^{b \ln a} = b \ln a}$

Quelques exemples :

$\mathbf{3^{1,2} = e^{1,2 \ln 3}}$

$\mathbf{1^{0,3} = e^{0,3 \ln 1} = e^0 = 1}$

Propriétés algébriques :

La puissance avec exposant réel possède les mêmes propriétés qu'avec un exposant entier.

Pour tous réels a et a' strictement positifs et tous réels b et c :

$$a^b \times a^c = a^{b+c} \qquad (a^b)^c = a^{b\times c} \qquad \frac{1}{a^b} = a^{-b} \qquad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$a^b \times a'^b = (a \times a')^b \qquad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

Remarque :
ces propriétés se démontrent très facilement à l'aide des propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

3 / Fonctions puissances. Fonctions exponentielles de base a

Ayant défini la notion de puissance pour un exposant réel, il est maintenant possible de s'intéresser à deux nouveaux types de fonctions :

Type n° 1 : $x \to x^a$ avec a réel quelconque et x > 0.

Ce type de fonction est appelé ***fonction puissance.***
Nous connaissons déjà de nombreuses fonctions de ce type.

Nous retrouverons plus loin le cas où a s'écrit $a = \frac{1}{n}$, avec n entier naturel.
Type n° 2 : $x \to a^x$ avec x réel quelconque et a > 0.

Ce type de fonction est appelé ***fonction exponentielle*** *de base a.*
Et nous allons de suite l'étudier :

Définition : soit a > 0.

La fonction définie sur **R** par : $x \xrightarrow{\exp_a} a^x$ est appelée **fonction exponentielle** de base a et notée : $\mathbf{exp_a}$

Pour tout réel x, on a donc : on a donc $\mathbf{exp_a(x) = ax = e^{x \ln a}}$
Remarques :
1) Si a = e alors : $exp_e(x) = e^{x\, lne} = e^x$
La **fonction exponentielle** est donc la **fonction exponentielle** de base e.

2) Quel que soit a : $exp_a(1) = e^{1 \ln a} = a$. Ou tout simplement : $exp_a(1) = a^1 = a$
L'image de 1 par la fonction exponentielle de base a est donc a.
On retrouve ainsi que e est l'image de 1 par la **fonction exponentielle** (de base e).

3) Si a = 1 alors : $exp_1(x) = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$
La **fonction exponentielle** de base 1 est donc la fonction constante égale à 1.

4) Quel que soit a, la fonction exp_a est *strictement positive* sur **R**. Et $a^0 = e^0 = 1$

4 / Etude des fonctions exponentielles de base a

quel que soit a réel strictement positif :

La **fonction exponentielle** de base a est dérivable sur **R** et pour tout x : $\mathbf{exp_a'(x) = a^x \ln a}$

Démonstration :

Pour tout x : $\mathbf{exp_a(x) = e^{x \ln a}}$, donc la fonction $\mathbf{exp_a}$ est une fonction composée :

$$x \xrightarrow{u} \underbrace{x \ln a}_{X}$$
$$X \xrightarrow{\exp} e^X$$

u fonction affine est dérivable sur **R**.

La fonction exponentielle est dérivable sur **R** donc également sur u(**R**).

Par composition, la fonction $\mathbf{exp_a}$ est donc dérivable sur **R** et pour tout x :

$$\exp_a'(x) = \ln a \times e^X = \ln a \times e^{x \ln a} = a^x \times \ln a$$

Or, si $0 < a < 1$ alors : $\ln a < 0$ donc, comme $a^x > 0$: $\exp'_a(x) < 0$

Si $a = 1$ alors $a^x = 1$

Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ donc $\exp'_a(x) > 0$

Par conséquent :

Si $0 < a < 1$ alors la **fonction** $\mathbf{exp_a}$ est strictement décroissante sur **R**.

Si $a = 1$ alors la **fonction** $\mathbf{exp_a}$ est constante sur **R** et vaut 1 pour tout x.

Si $a > 1$ alors la **fonction** $\mathbf{exp_a}$ est strictement croissante sur **R**.

Remarque :

Tout ceci est logique et simple à retenir, car si a est plus grand que 1, plus l'exposant x sera grand et plus a puissance x sera grand. Et inversement pour $0 < a < 1$

Intéressons-nous maintenant aux limites au bornes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } 0 < a < 1 \text{ alors : } \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 . \\ \text{Si } a > 1 \text{ alors : } \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty . \end{array}}$$

Remarque :

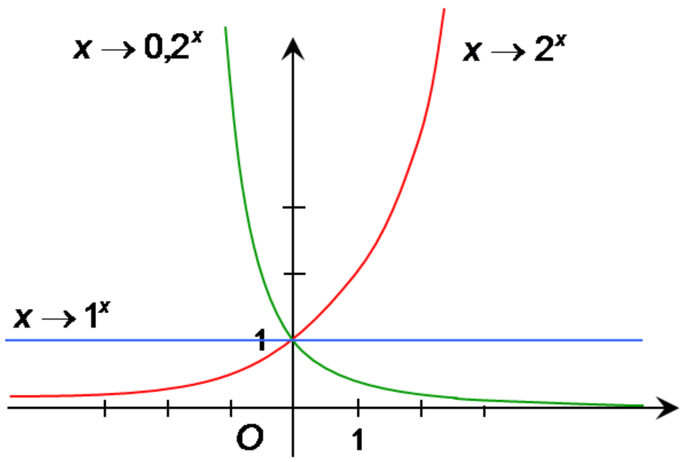
Dans ce cas, en prenant a = e, on retrouve les limites connues de la fonction exponentielle.
De plus les deux résultats en plus l'infini sont déjà bien connus pour les limites de suites géométriques.

Démonstration : ces limites se déduisent aisément de celles de la **fonction exponentielle.**

En résumé,
voici les tableaux de variations et courbes dans les différents cas :

Si $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'_a(x)$		$-$	
$\exp_a(x)$	$+\infty$	1	0



Si $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'_a(x)$		$+$	
$\exp_a(x)$	0	1	$+\infty$

5/ Fonctions racines n-ièmes.

Définition

Soit n entier naturel non nul et soit f la **fonction puissance** définie sur **R** par : $f(x) = x^n$

f est dérivable sur **R** et pour tout x : $f'(x) = nx^{n-1}$

Donc, la dérivée de f est positive sur [0 ; $+\infty$ [et ne s'annule qu'en la valeur isolée 0.
Par conséquent, f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [.

f est continue et strictement monotone sur [0 ; $+\infty$ [, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de [0 ; $+\infty$ [sur son intervalle image.

Or quel que soit n entier naturel non nul : $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
donc : f([0 ; $+\infty$ [ ) = [0 ; $+\infty$ [

Par conséquent :

Quel que soit n entier naturel non nul :

La fonction f définie par $x \to x^n$ réalise une bijection de [0 ; $+\infty$ [sur [0 ; $+\infty$ [
Donc, quel que soit y élément de [0 ; $+\infty$ [, il existe un unique x élément de [0 ; $+\infty$ [tel que y = f(x).

On peut alors définir une fonction g qui à y associe x tel que y = f (x).

$$[\,0\,;\,+\infty\,[\xrightarrow{f} [\,0\,;\,+\infty\,[$$
$$g(y) = x \underset{g}{\longleftarrow} y$$

f possède donc une fonction réciproque g définie sur [0 ; $+\infty$ [et à valeurs dans [0 ; $+\infty$ [appelée **fonction racine n-ième** et notée : $y \to \sqrt[n]{y}$

$$[\,0\,;\,+\infty\,[\xrightarrow{f} [\,0\,;\,+\infty\,[$$
$$\sqrt[n]{y} = x \underset{g}{\longleftarrow} y = x^n$$

Pour x et y strictement positifs, on a donc : $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

Remarques :
1) Pour un nombre réel y > 0 donné,
le nombre $\sqrt[n]{y}$ est l'unique nombre positif qui mis à la puissance n est égal à y.

Dans le cas n = 2, on retrouve donc bien la définition de la racine carrée.

La **fonction** racine carrée s'appelle donc également **fonction racine deuxième.**

Pour tout x positif : $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est donc la **fonction réciproque** de la **fonction carré** sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [.

2) Dans le cas n = 3, on parlera de racine cubique plutôt que de racine troisième.

3) Pour tout n : $\sqrt[n]{1} = 1$

5 / Fonctions racines n-ièmes. *Propriétés*

Propriétés :

Pour tout $x \geq 0$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

Par définition, $\sqrt[n]{x}$ est le nombre positif qui mis à la puissance n vaut x.

donc : $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

Par définition : $\sqrt[n]{x^n} = x$ est le nombre positif qui mis à la puissance n vaut x^n

Comme x est positif, c'est donc x, d'où : $\sqrt[n]{x^n} = x$

Attention : $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ et non (-2) !

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0 : x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$$

Si x > 0 , d'après ce que nous avons vu plus tôt : $x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$

Donc : $x^{\frac{1}{n}} > 0$

Or, d'après les propriétés communes à toute puissance : $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{n \times \frac{1}{n}} = x$

$x^{\frac{1}{n}}$ est le nombre positif qui mis à la puissance n vaut x, il vaut donc : $\sqrt[n]{x}$

La fonction $x \to x^{\frac{1}{n}}$ n'est pas définie que sur] 0 ; $+\infty$ [en raison du logarithme.

Mais sachant que $\sqrt[n]{0} = 0$, on peut donc donner une nouvelle définition de la racine n-ième :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} \text{Si } x = 0 : & \sqrt[n]{x} = 0 \\ \text{Si } x > 0 : & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{cases}$

Comme $x \to x^n$ est continue et strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [, sa fonction réciproque possède les mêmes propriétés sur l'intervalle image [0 ; $+\infty$ [.

La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ ***est continue et strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [.***

La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur] 0 ; $+\infty$ [et pour tout x > 0 : $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

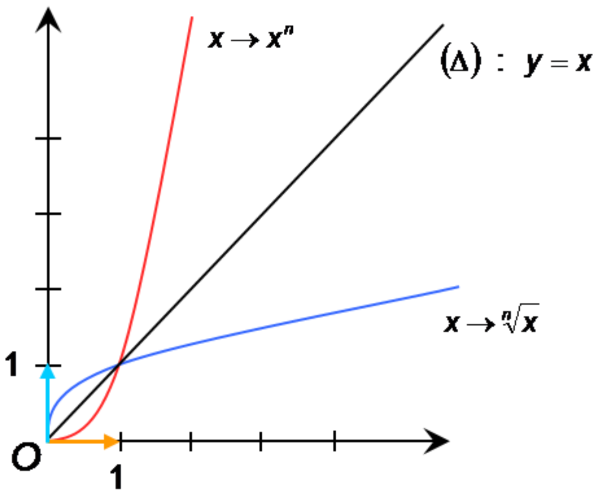
Remarque :
la fonction racine n-ième pouvant s'écrire pour x > 0 : $x^{\frac{1}{n}}$
on retrouve la formule de dérivation classique d'une puissance.

A l'instar de la fonction racine carré, toute **fonction racine n-ième** n'est pas dérivable en 0 mais sa courbe admet en ce point une tangente verticale.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty}$$

Ces dernières propriétés peuvent être résumées par le tableau de variations et la courbe de la fonction :

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)'$	$\|\qquad\qquad$ $+$
$\sqrt[n]{x}$	0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$ $+\infty$



Les fonctions $x \to x^n$ et $x \to \sqrt[n]{x}$

étant réciproques, leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Remarque :

par symétrie, la tangente horizontale en 0 devient une tangente verticale.

On retrouve ainsi que la **fonction racine n-ième** n'est pas dérivable en 0.