Chap 3: Optimisation d'une fonction à deux variables

2018-2019

Optimisation d'une fonction à deux variables

1. Optimisation sans contrainte :

Soient $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathcal{D}$.

Définition 1 : Notion maximum

1. On dit que f admet un maximum global en (a, b) si $f(a, b) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$.
2. On dit que f admet un maximum local en (a,b) s'il existe une boule B_r de centre (a,b) et de rayon $r > 0$ tel que $f(a, b) \geq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in B_r((a, b), r)$.

Définition 2 : Notion minimum

1. On dit que f admet un minimum global en (a, b) si $f(a, b) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$.
2. On dit que f admet un minimum local en (a,b) s'il existe une boule B_r de centre (a,b) et de rayon $r > 0$ tel que $f(a, b) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in B_r((a, b), r)$.

Définition 3 : Notion extremum

Si f admet un maximum local (Resp. global) ou un minimum local (Resp. global) en (a,b) sur $\mathcal{D}$, on dit que (a,b) est un **extremum local** (Resp. global).

1. Optimisation sans contrainte

Théorème : condition nécessaire d'optimalité

Si f admet un **extremum local** en (a,b) **et** si f est de classe C^1 au voisinage de (a,b), alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0. \tag{1}$$

Vocabulaires :

1. La condition (1) s'appelle **condition nécessaire d'optimalité** ou **condition de premier ordre d'optimalité**.
2. Le point (a,b) vérifiant la condition (1) s'appelle **point stationnaire** ou **point critique**.

Remarques :

1. Les relations (1) sont équivaut à dire que le gradient $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
2. La condition $\nabla f(x,y) = (0,0)$ est nécessaire mais n'est pas suffisante. c'est à dire que s'il y a un point (a,b) où les dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction f s'annulent, on ne peut pas dire que le point (a,b) est un extremum local.

1. Optimisation sans contrainte

Définition : Le **Hessien** d'une fonction à 2 variables

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 en un point (a, b). Le **Hessien** de f en (a, b) noté $H_f(a, b)$ est donné par :

$$H_f(a,b) = f''_{xx}(a,b) \times f''_{yy}(a,b) - \left(f''_{xy}(a,b)\right)^2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Exemple : Considérons la fonction $f(x, y) = x^3 + x^2y - 3y^2$.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = 3x^2 + 2xy \quad ; \qquad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y \quad ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$$

Donc le **Hessien** de f en un point (x, y) c'est :

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= f''_{xx}(x,y) \times f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 \\ &= (6x+2y) \times (-6) - (2x)^2 \\ &= -4x^2 - 36x - 12y \end{aligned}$$

1. Optimisation sans contrainte

Propriété : condition suffisante d'optimalité

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'**un point critique** (a, b) (i.e ; $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$)

1. Si $H_f(a, b) > 0$ **et** $f''_{xx}(a, b) < 0$, alors
   f admet un maximum local en (a, b).
2. Si $H_f(a, b) > 0$ **et** $f''_{xx}(a, b) > 0$, alors
   f admet un minimum local en (a, b).
3. Si $H_f(a, b) < 0$, alors f **n'admet pas** d'extremum local en (a, b).
   On dit que (a, b) est un point col ou un point selle.
4. Si $H_f(a, b) = 0$ alors on **ne peut rien conclure**.

1. Optimisation sans contrainte

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Cherchons les extremums de cette fonction.

Première étape : calculer le gradient de f ,
c'est-à-dire les dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y - 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 3y^2$$

Deuxième étape : On cherche les points critiques en résolvant les équations $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$\begin{cases} 3y - 3x^2 = 0, \\ 3x - 3y^2 = 0, \end{cases}$$

Exemple : A la recherche d'un extremum

Côté technique :
On isole y à partir de la première équation, nous obtenons :

$$3y - 3x^2 = 0 \implies 3(y - x^2) = 0 \implies y - x^2 = 0 \implies y = x^2.$$

On remplace y par x^2 dans la deuxième équation, nous obtenons :
$x - y^2 = x - (x^2)^2 = x - x^4 = 0 \implies x(1 - x^3) = 0 \implies x = 0$ ou $x = 1$.

Ainsi, si $x = 0$ alors $y = 0^2 = 0$ **et** si $x = 1$ alors $y = 1^2 = 1$
Conclusion : nous avons deux points critiques, (0 ;0) et (1 ;1).

Troisième étape : Calculer le Hessien de f aux points critiques

Rappelons que le **Hessien** de f en un point (x,y) c'est

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= f''_{xx}(x,y) \times f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 \\ &= (-6x) \times (-6y) - 3^2 = 36xy - 9. \end{aligned}$$

Exemple : A la recherche d'un extremum

Concernant le **premier point critique** $(0, 0)$

On calcule le Hessien au point $(0; 0)$: On a
$H_f(0, 0) = 36 \times 0 \times 0 - 9 = -9 < 0$
Donc f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$
Le point $(0; 0)$ est un point col de f.

Concernant le **deuxième point critique** $(1, 1)$

On calcule le Hessien au point $(1; 1)$: on a
$H_f(1, 1) = 36 \times 1 \times 1 - 9 = 36 - 9 = 27 > 0$.
De plus $f''_{xx}(1; 1) = -6 \times 1 = -6 < 0$
Donc f admet un maximum local en $(1, 1)$.

Conclusion : Le point $(0; 0)$ est un point col de f et f admet un maximum local en $(1, 1)$.

Exemple 2

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (somme de fonctions polynômiales).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (2x, 4y^3)$$

f n'admet donc qu'un seul point critique $(0, 0)$

$$f''_{xx}(0, 0) = 2, \quad f''_{xy}(0, 0) = 0, \quad f''_{yy}(0, 0) = 0 \Longrightarrow H_f(0, 0) = 0$$

On ne peut rien affirmer.

Cependant, on a clairement :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq f(0, 0) = 0,$ donc f admet en $(0, 0)$ un minimum global.

2. Optimisation avec contrainte

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Optimiser} & f(x,y); \\ \text{Sous la contrainte} & g(x,y) = 0. \end{array} \right.$$

Ceci revient à chercher un point $(x_0; y_0)$ vérifiant $g(x_0; y_0) = 0$ tel qu'on ait

$$f(x;y) \leq f(x_0;y_0) \qquad \text{pour un maximum}$$

ou

$$f(x;y) \geq f(x_0;y_0) \qquad \text{pour un minimum}$$

2. Optimisation avec contrainte

Première méthode : substitution :

A partir de la contrainte, on peut exprimer une variable en fonction de l'autre, par exemple y en fonction de x, et on se ramène à la recherche d'un extrêmum d'une fonction à une seule variable en remplaçant dans $f(x, y)$ la variables y par son expression en fonction de x. On utilisera par la suite les méthodes du chapitre 1 pour résoudre ce problème.

Exemple :

Étudier l'existence d'un extrêmum de la fonction $f(x, y) = xy$ sous la contrainte d'égalité $g(x, y) = x + y - 6 = 0$

2. Optimisation avec contrainte :Première méthode

De la relation $g(x, y) = x + y - 6 = 0$ on tire $\mathbf{y} = -\mathbf{x} + \mathbf{6}$
On remplace y par $-x + 6$ dans l'expression de $f(x, y)$ nous obtenons

$$f(x, y) = x(6 - x) := \varphi(x)$$

Donc il suffit de chercher un ou les extrêmum(s) de la fonction $\varphi(\cdot)$ qui dépend d'une seule variable x :
La fonction $\varphi(\cdot)$ est une fonction polynôme, donc elle est deux fois dérivables, ainsi

$$\varphi^{'}(x) = 6 - 2x \qquad\qquad \varphi^{''}(x) = -2 < 0$$

On a $\varphi^{'}(x) = 6 - 2x = 0$ pour $x = 3$; qui est **un point stationnaire.**
De plus $\varphi^{''}(3) = -2 < 0$ alors la fonction φ admet un maximum local pour $x = 3$
Conclusion : La fonction $f(x; y) = xy$ admet un maximum local sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 6 = 0$ au point $(3; -3 + 6) = (3; 3)$ qui vaut $f(3; 3) = 3 \times 3 = 9$

2. Optimisation avec contrainte

Une entreprise fabrique des emballages (cylindrique) en acier de concentré de tomate, elle reçoit des commandes pour des volumes bien déterminés. On s'intérèsse à minimiser les coûts en matière première, on suppose que le volume est fixé : $V = 2\pi^4$.

Modélisation : Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$V = \pi r^2 h.$$

Pour fabrique un cylindre on a besoin de deux disques : $2\pi r^2$, et d'une planche de surface $2\pi rh$. Donc la fonction à minimiser est :

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Résolution : Par substitution on a $V = 2\pi^4 \Leftrightarrow \pi r^2 h = 2\pi^4 \Leftrightarrow h = \frac{2\pi^3}{r^2}$
Donc

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 4\frac{\pi^4}{r} = \varphi(r)$$

2. Optimisation avec contrainte

Donc il suffit de chercher un ou les extrêmum(s) de la fonction $\varphi(\cdot)$ qui dépend d'une seule variable r :
La fonction $\varphi(\cdot)$ est une fonction deux fois dérivables, ainsi

$$\varphi^{'}(r) = 4\pi r - 4\frac{\pi^4}{r^2} \qquad \varphi^{''}(r) = 4\pi + 6\frac{\pi^4}{r^3} > 0$$

On a $\varphi^{'}(r) = 4\pi r - 4\frac{\pi^4}{r^2} = 0$ pour $r = \pi$; qui est **un point stationnaire.**
De plus $\varphi^{''}(\pi) = 4\pi + 6\pi = 10\pi > 0$ alors la fonction φ admet un minimum local pour $r = \pi$
Conclusion : La fonction $S(r;\pi) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ admet un minimum local sous la contrainte $V(r,h) = \pi r^2 h = 2\pi^4$ au point $(\pi; 2\pi)$ qui vaut $S(\pi; 2\pi) = 4\pi^3$.

2. Optimisation avec contrainte

Deuxième méthode : Méthode des multiplicateurs de Lagrange :

Pour résoudre le problème $\mathcal{P}$ on introduit une nouvelle fonction appelée lagrangien associé à $\mathcal{P}$:

Lagrangien

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Le lagrangien associé à f et g est la fonction $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

où λ est appelé multiplicateur de Lagrange ; qui est une inconnue.

2. Optimisation avec contrainte

Extremum du Lagrangien associé à *f* et *g* :

Pour que la fonction $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ passe par un extremum, il faut que les trois équations suivantes soient satisfaites simultanément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= g(x;y) = 0. \end{aligned}$$

Remarques :

- Notons que la troisième équation n'est autre que la contrainte. Ainsi, $L(x, y, \lambda)$ ne doit être dérivée partiellement **que** par rapport à x et à y.

2. Optimisation avec contrainte

- La résolution du système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= g(x; y) = 0. \end{aligned}$$

ne donne que des points candidats (ou susceptibles) d'être un extremum. Mais ça ne confirme pas si le point est un extremum ou pas. Pour cela, il faut faire appel au **HESSIEN** de la fonction L.

2. Optimisation avec contrainte

Définition (Le Hessien)

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *où* f *est de classe* C^2 *et* g *est de classe* C^1*. Le Hessien du Lagrangien associé à* f *et* g *au point* (x_0, y_0, λ_0) *est :*

$$H_L(x_0, y_0, \lambda_0) = g'_x(g'_y L''_{xy} - g'_x L''_{yy}) - g'_y(g'_y L''_{xx} - g'_x L''_{yx})$$

Théorème (Conditions suffisantes)

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *où* f *est de classe* C^2 *et* g *est de classe* C^1 *au voisinage de* (x_0, y_0)*, avec* (x_0, y_0, λ_0) *est un* ***point critique*** *du Lagrangien associé à* f *et* g *:*

1. *Si* $H_L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *alors* (x_0, y_0) *est un maximum local ;*
2. *Si* $H_L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ *alors* (x_0, y_0) *est un minimum local ;*
3. *Si* $H_L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ *alors on ne peut rien conclure.*

2.Optimisation avec contrainte

Exemple : Cherchons les minima et maxima de la fonction $f(x;y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sous la contrainte $x + 2y = 24$.
Tout d'abord, remarquons que la contrainte $x + 2y = 24$ est équivalente à $g(x;y) = x + 2y - 24 = 0$
Construisons la fonction de Lagrange :

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda g(x;y) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

Annulons les premières dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 10x - y + \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 12y - x + 2\lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y - 24 = 0. \end{aligned}$$

2.Optimisation avec contrainte

Éliminons λ des deux premières équations : On multiplie la première équation par (-2) puis on l'additionne avec la deuxième équation, nous obtenons : $-21x + 14y = 0$
et en résolvant cette équation nous avons $2y = 3x$, nous remplaçons dans la troisième équation nous obtenons $x = 6$

En remplaçant dans $x + 2y = 24$, on trouve $y = 9$.

En remplaçant dans $10x - y + \lambda = 0$, on trouve $\lambda = -51$.

Le point critique du Lagrangien est donc $(6, 9, -51)$.

On calcule **les dérivées partielles d'ordre 2** pour vérifier s'il s'agit d'un extremum ?

2.Optimisation avec contrainte

$$
\begin{aligned}
L''_{xx} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(6,9,-51) = 10;\\
L''_{yy} &= \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(6,9,-51) = 12;\\
L''_{xy} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x y}(6,9,-51) = -1.\\
g'_x &= \frac{\partial g}{\partial x}(6,9) = 1;\\
g'_y &= \frac{\partial g}{\partial y}(6,9) = 2;
\end{aligned}
$$

$$H_L(6,9,-51) = 1\times(2\times(-1)-1\times 12)-2\times(2\times 10-1\times(-1)) = -56 < 0$$

2.Optimisation avec contrainte

Comme $H_L(6, 9, -51) < 0$;, alors il s'agit d'un minimum.
Le minimum de la fonction f sous la contrainte $g(x; y) = 0$ est attient au point $(6; 9)$

Exercice : Un consommateur dépense son revenu de 48 dirhams pour l'achat de deux biens : x et y. Les prix de x et de y sont respectivement 2 dirhams et 3 dirhams. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule :

$$U = -x^2 - y^2 + 2xy.$$

Combien d'unités du bien x et du bien y doit-il consommer pour maximiser son utilité ?

2.Optimisation avec contrainte

La fonction objectif à maximiser est $-x^2 - y^2 + 2xy$.
La contrainte est $2x + 3y = 48$; ou $2x + 3y - 48 = 0$.
Formons la fonction auxiliaire (Le Lagrangien) :

$$L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 2xy + \lambda(2x + 3y - 48).$$

On checherche ensuite les dérivées partielles par rapport à x, y et λ :

$$\begin{aligned} L'_x = \frac{\partial L}{\partial x} &= -2x + 2y + 2\lambda; \\ L'_y = \frac{\partial L}{\partial y} &= -4y + 2x + 3\lambda; \\ L'_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2x + 3y - 48. \end{aligned}$$

Pour trouver un extremum, on annule ces 3 dérivées partielles :

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2\lambda &= 0 \\ -4y + 2x + 3\lambda &= 0 \\ 2x + 3y - 48 &= 0 \end{cases}$$

2.Optimisation avec contrainte

Éliminons λ des deux premières équations : On multiplie la première équation par (3) et la deuxième équation par (-2) puis on additionne les deux équations, nous obtenons : $-10x + 14y = 0$
et en résolvant cette équation nous avons $7y = 5x$, nous remplaçons dans la troisième équation nous obtenons $y = \frac{240}{29}$

En remplaçant dans $2x + 3y = 48$, on trouve $x = \frac{336}{29}$.

En remplaçant dans $-2x + 2y + 2\lambda = 0$, on trouve $\lambda = \frac{96}{29}$.

Le point critique du Lagrangien est donc $(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29})$.

On calcule **les dérivées partielles d'ordre 2** pour vérifier s'il s'agit d'un extremum ?

2.Optimisation avec contrainte

déterminons la nature de ce point critique :

$$
\begin{aligned}
L''_{xx} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = -2;\\
L''_{yy} &= \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = -4;\\
L''_{xy} &= \frac{\partial^2 L}{\partial xy}\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = 2.\\
g'_x &= \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = 2;\\
g'_y &= \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = 3;
\end{aligned}
$$

$$H_L\left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}, \frac{96}{29}\right) = 2\times(3\times2-2\times(-4))-3\times(3\times(-2)-2\times2) = 58 > 0$$

C'est un maximum