$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$f(x, y) = y^3 - 2xy + x^2 - 1.$$

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4.$$

$$f(x, y) = y^2 + xy \ln x.$$

Vous êtes le directeur financier de la firme Sanbon & Fils. Cette entreprise a investi 3 000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 ml. L'expert consulté par M. Sanbon père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $\left(300 + 6\sqrt{x} - 10y\right)$ pièces.
La firme Sanbon & Fils fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

- Revenu de la vente $= y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
- Coût de production $= 3(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
- Coût de développement et de publicité $= 3\,000 + x$.

Le profit de la firme à maximiser est donc : $\Pi(x, y) = (y-3)(300+6\sqrt{x}-10y)-x-3\,000$.

Énoncé

Dans les cas suivants, recherchez les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

a $f(x, y) = y^2 + (x - 1)^2$ et $g(x, y) = y^2 - 4x$.

b $f(x, y) = 2 \ln x$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

c $f(x, y) = y^3$ et $g(x, y) = x^2 - y^3 + y$.