

Chapitre 6

Calcul des sections rectangulaires en flexion simple

6.1 Introduction

Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsqu'elle est soumise à l'action de forces concentrées ou réparties disposées perpendiculairement à la fibre moyenne de la poutre.

La réduction de ces forces au centre de gravité d'une section se décompose en un **moment fléchissant** M et un **effort tranchant** V . Dans le cas où la section est sollicitée par un moment pur, on parle d'une flexion pure.

Dans ce chapitre, on traite le dimensionnement d'une section sollicitée par des contraintes normales dues à un moment fléchissant seul. Le traitement de l'effort tranchant est prévu dans un chapitre séparé dans la suite de ce cours.

Pour le dimensionnement pratique d'un élément en béton armé d'une structure, le calcul est mené d'abord à l'ELU et est vérifié dans la suite à l'ELS. Si la vérification n'est pas satisfaite à l'ELS, un redimensionnement à l'ELS doit être mené.

Une deuxième méthode consiste à réaliser les calculs pour une section donnée, à l'ELU et l'ELS et d'adopter en fin de compte la section d'armatures la plus grande.

Signalons, pour le dimensionnement, l'existence de logiciels de calcul au-

tomatique qui sont souvent des logiciels commercialisés mais aussi des feuilles Excel pour les débrouillards. Ces logiciels facilitent bien sûr la résolution du problème de dimensionnement économique comme on l'entend ici sans toutefois dissiper toutes les zones d'ombre. L'exploitant, doit donc être capable d'interpréter les résultats et savoir les exploiter de manière utile. Pour atteindre cet objectif, il n'y a pas mieux que de commencer par pratiquer le calcul manuel en s'aidant d'organigrammes précis.

6.2 Calcul à l'état limite ultime de résistance - ELUR

6.2.1 Récapitulatif des résultats obtenus

La règle des trois pivots et les diagrammes de calcul du béton et de l'acier à l'ELUR permettent d'écrire :

$$F_b = \psi B Y_u f_{bu} \quad (6.1)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (6.2)$$

$$Z_u = d - \theta Y_u \quad (6.3)$$

B étant la largeur de la poutre calculée.

Les données relatives à ψ et θ pour les différents cas traités sont présentées dans le tableau (6.1).

	Pivot A		Pivot B		Pivot C
α_u	$0 \leq \alpha_u \leq \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \leq \alpha_u \leq \frac{\tau}{27}$	$\frac{\tau}{27} \leq \alpha_u \leq \alpha_e$	$\alpha_e \leq \alpha_u \leq \frac{H}{d}$	$\alpha_u > \frac{H}{d}$
ϵ_b	$\epsilon_b \leq 2\%$	$2\% \leq \epsilon_b \leq 3,5\%$	$\epsilon_b = 3,5\%$	$\epsilon_b = 3,5\%$	
ψ	$\frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1-\alpha_u)^2}$	$\frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{17}{21}$	
θ	$\frac{4-9\alpha_u}{12-32\alpha_u}$	$\frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u}$	$\frac{99}{238}$	$\frac{99}{238}$	
ϵ_s	10%	10%	$\epsilon_e \leq \epsilon_s \leq 10\%$	$\epsilon_s \leq \epsilon_e$	
σ_s	f_{su}	f_{su}	f_{su}	$\sigma_s < f_{su}$	

TABLE 6.1 – Récapitulation des données pour une section en flexion simple

On note que lorsque le pivot est en A, on a :

$$\epsilon_b = 10 \frac{\alpha_u}{1 - \alpha_u} \quad (6.4)$$

et lorsqu'il est en B, on a :

$$\epsilon_s = 3,5 \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \quad (6.5)$$

6.2.2 Équations d'équilibre

En considérant qu'une section est chargée par un moment ultime M_u et en considérant qu'elle est en équilibre sous ce moment, on a les deux équations d'équilibre suivantes qui sont satisfaites :

* Équilibre des forces :

$$F_b - F_s = 0 \quad \rightarrow \quad \psi Y_u B f_{bu} = A_s \sigma_s \quad (6.6)$$

* Équilibre des moments :

$$M_u = F_b Z_u = \psi Y_u B f_{bu} (d - \theta Y_u) \quad (6.7)$$

Suivant qu'on est sur le pivot A ou sur le pivot B, la compatibilité des déformations nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} \epsilon_s = 10 \%_0 & \text{et } \epsilon_b = \frac{10 \alpha_u}{1 - \alpha_u} \quad (\text{pivot A}) \\ \text{ou} \\ \epsilon_s = 3,5 \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} & \text{et } \epsilon_b = 3,5 \%_0 \quad (\text{pivot B}) \end{cases} \quad (6.8)$$

Pour une bonne utilisation des armatures, le règlement exige que la contrainte développée respecte la condition suivante :

$$\epsilon_s \geq \epsilon_e \quad (\sigma_s = f_{su}) \quad (6.9)$$

Le problème posé consiste en la détermination des deux inconnues Y_u et A_s ou bien α_u et A_s . Cela est possible en utilisant les équations d'équilibre (6.6) et (6.7).

6.2.3 Section sans armatures comprimées

On définit le moment réduit par :

$$\mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} \quad (6.10)$$

Dans cette équation, $B d^2 f_{bu}$ représente deux fois le moment maximal que peut reprendre le béton seul. (En appliquant le diagramme rectangulaire

simplifié à toute la hauteur d , le moment repris par la section de béton est $\frac{1}{2}Bd^2f_{bu}$.

L'application de l'équation (6.7) entraîne :

$$M_u = \psi\alpha_u Bd^2f_{bu}(1 - \alpha_u\theta) \quad (6.11)$$

$$\rightarrow \mu = \psi\alpha_u(1 - \alpha_u\theta) \quad (6.12)$$

où α_u est la seule inconnue du problème.

6.2.3.1 Dimensionnement des armatures

En fonction de la valeur de α_u , la résolution du problème est effectuée par domaine.

Cas 1 : $\frac{7}{27} \approx 0,259 \leq \alpha_u \leq \alpha_e$ - Pivot B :

Le diagramme rectangulaire simplifié peut être utilisé avec $\psi = \frac{17}{21} \approx 0,8$ et $\theta = \frac{99}{238} \approx 0,4$.

L'équation (6.12) devient :

$$\frac{33}{98}\alpha_u^2 - \frac{17}{21}\alpha_u + \mu = 0 \quad (6.13)$$

$$\text{ou } 0,32\alpha_u^2 - 0,8\alpha_u + \mu = 0 \quad (6.14)$$

En dérivant l'équation par rapport à α_u , on trouve la dérivée de μ par rapport à α_u :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} = -\frac{33}{49}\alpha_u + \frac{17}{21} \quad (6.15)$$

$$= -0,64\alpha_u + 0,8 \quad (6.16)$$

$$= 0,64(1,25 - \alpha_u) \quad (6.17)$$

or d'après l'équation (3.6), on a :

$$\alpha_e = \frac{3,5}{\epsilon_e + 3,5} < 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_u < 1 \quad (6.18)$$

$$\rightarrow 1,25 - \alpha_u > 0 \quad (6.19)$$

$$\rightarrow \frac{d\mu}{d\alpha_u} > 0 \quad (6.20)$$

Le moment réduit μ est donc une fonction croissante de α_u , d'où :

$$\frac{7}{27} \leq \alpha_u \leq \alpha_e \quad \rightarrow \quad \mu\left(\frac{7}{27}\right) \leq \mu \leq \mu_e = 0,8\alpha_e - 0,32\alpha_e^2 \quad (6.21)$$

$$\rightarrow \quad 0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.22)$$

Le tableau (6.2) donne les valeurs de α_e et μ_e en fonction de la nuance de l'acier et de γ_s .

	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1$		
	α_e	μ_e	α_e	μ_e
FeE215	0,789	0,429	0,765	0,422
FeE235	0,774	0,425	0,749	0,418
FeE400	0,668	0,391	0,636	0,379
FeE500	0,617	0,371	0,583	0,358

TABLE 6.2 – Valeurs pratiques de α_e et μ_e

On peut en déduire à partir de ces données que :

$$\Delta = \frac{289}{441} - \frac{66}{49}\mu \quad (6.23)$$

$$\approx 0,66(1 - 2\mu) > 0 \quad (6.24)$$

L'équation (6.13) admet donc deux racines qui sont :

$$\begin{cases} \alpha_{u_1} = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \\ \alpha_{u_2} = 1,25(1 + \sqrt{1 - 2\mu}) \end{cases} \quad (6.25)$$

la solution α_{u_2} est à écarter car $\alpha_{u_2} \notin [\frac{7}{27}; \alpha_e]$.

Donc la seule racine qui a un sens physique est :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.26)$$

L'équation d'équilibre des forces (6.6) permet maintenant d'écrire :

$$A_s = \frac{\psi Y_u B f_{bu}}{\sigma_s} = \frac{0,8\alpha_u B d f_{bu}}{\sigma_s} \quad (6.27)$$

dans le domaine en cours de traitement, on a : $\sigma_s = f_{su}$, d'où :

$$A_s = A_{su} = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}}$$

(6.28)

avec $\beta_u = 0,8\alpha_u$.

✿ Cas 2 : $\frac{1}{6} \approx 0,167 \leqslant \alpha_u \leqslant \frac{7}{27} \approx 0,259$ - Pivot A :

On a les expressions de ψ et θ comme suit :

$$\psi = \frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \quad (6.29)$$

$$\theta = \frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u} \quad (6.30)$$

En insérant ces expressions dans l'équation (6.12) du moment réduit, on trouve :

$$\mu = \psi\alpha_u(1 - \alpha_u\theta) \quad (6.31)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \alpha_u \left(1 - \alpha_u \frac{171\alpha_u^2 - 22\alpha_u + 1}{320\alpha_u^2 - 20\alpha_u} \right) \quad (6.32)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15} \cdot \frac{320\alpha_u - 20 - 171\alpha_u + 22\alpha_u - 1}{320\alpha_u - 20} \quad (6.33)$$

$$= \frac{16\alpha_u - 1}{15} \cdot \frac{-171\alpha_u^2 + 342\alpha_u - 21}{20(16\alpha_u - 1)} \quad (6.34)$$

$$= \frac{1}{300}(-171\alpha_u^2 + 342\alpha_u - 21) \quad (6.35)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{100}(-57\alpha_u^2 + 114\alpha_u - 7) \quad (6.36)$$

En dérivant μ par rapport à α_u , on obtient :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} = \frac{1}{100}(-114\alpha_u + 114) \quad (6.37)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{d\alpha_u} = \frac{57}{50}(1 - \alpha_u) \quad (6.38)$$

En regardant les valeurs courantes de α_u dans le tableau (6.2), on constate que :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} > 0 \quad (6.39)$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{6} \leqslant \alpha_u \leqslant \frac{7}{27} \Rightarrow \mu\left(\frac{1}{6}\right) \leqslant \mu \leqslant \mu\left(\frac{7}{27}\right) \quad (6.40)$$

$$\rightarrow 0,1042 \leq \mu \leq 0,1872 \quad (6.41)$$

La résolution de l'équation (6.36) conduit à la racine utile :

$$\alpha_u = 1 - \sqrt{\frac{50}{57}(1-2\mu)} \approx 1 - 0,9366\sqrt{1-2\mu} \quad (6.42)$$

L'équation d'équilibre des forces (6.6) nous donne :

$$A_s = \frac{\psi Y_u B f_{bu}}{\sigma_s} = \frac{\psi \alpha_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.43)$$

en injectant la valeur de ψ , on trouve :

$$A_s = \frac{\frac{16\alpha_u - 1}{15\alpha_u} \alpha_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.44)$$

$$\rightarrow A_s = \boxed{\frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}}} \quad (6.45)$$

avec : $\beta_u = \frac{16\alpha_u - 1}{15}$.

Cas 3 : $0 \leq \alpha_u \leq \frac{1}{6} \approx 0,167$ - Pivot A :

On a les expressions de ψ et θ comme suit :

$$\psi = \frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1-\alpha_u)^2} \quad (6.46)$$

$$\theta = \frac{4 - 9\alpha_u}{12 - 32\alpha_u} \quad (6.47)$$

En insérant ces expressions dans l'équation (6.12) du moment réduit, on trouve :

$$\mu = \psi \alpha_u (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.48)$$

$$= \frac{15\alpha_u - 40\alpha_u^2}{3(1-\alpha_u)^2} \alpha_u \left(1 - \alpha_u \frac{4 - 9\alpha_u}{12 - 32\alpha_u} \right) \quad (6.49)$$

$$= \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3 - 6\alpha_u + 3\alpha_u^2} \cdot \frac{12 - 32\alpha_u - 4\alpha_u + 9\alpha_u^2}{12 - 32\alpha_u} \quad (6.50)$$

$$= \frac{5\alpha_u^2(3 - 8\alpha_u)}{3 - 6\alpha_u + 3\alpha_u^2} \cdot \frac{12 - 36\alpha_u + 9\alpha_u^2}{4(3 - 8\alpha_u)} \quad (6.51)$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{9\alpha_u^4 - 36\alpha_u^3 + 12\alpha_u^2}{3\alpha_u^2 - 6\alpha_u + 3} \quad (6.52)$$

$$(6.53)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{5}{4} \cdot \frac{3\alpha_u^4 - 12\alpha_u^3 + 4\alpha_u^2}{\alpha_u^2 - 2\alpha_u + 1} \quad (6.54)$$

On vérifie après un long calcul (mais facile) que :

$$\frac{d\mu}{d\alpha_u} > 0 \quad (6.55)$$

on en déduit que :

$$0 \leq \alpha_u \leq \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad \mu(0) \leq \mu \leq \mu\left(\frac{1}{6}\right) \quad (6.56)$$

$$\rightarrow 0 \leq \mu \leq \frac{5}{48} \approx 0,1042 \quad (6.57)$$

On peut réécrire l'équation (6.54) sous la forme suivante :

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (6.58)$$

L'équation (6.58) qui est de quatrième degré admet une solution unique dans l'intervalle $[0; \frac{1}{6}]$. Une fois cette solution α_u est calculée, l'équation (6.6) permet de trouver la section d'armatures suivante :

$$A_s = A_{su} = \frac{\beta_u B df_{bu}}{f_{su}}$$

(6.59)

avec :

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} \quad (6.60)$$

✿ Cas 4 : $\alpha_e \leq \alpha_u \leq \frac{H}{d}$ - Pivot B :

Ce cas est identique au premier cas. Comme on l'a déjà démontré, on peut adopter comme solution :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.61)$$

ou :

$$\alpha_u = \frac{119}{99} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{594}{289}\mu}\right) \quad (6.62)$$

Mais la condition d'utilisation économique des aciers n'est pas vérifiée (voir tableau 6.1) :

$$\epsilon_s = 3,5 \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \leq \epsilon_e \quad (6.63)$$

Remarques :

❖ Dans le quatrième cas. On a soit la solution qui n'est pas physiquement acceptable, soit lorsqu'elle est possible elle n'est pas économique. Il faut donc faire quelque chose pour réduire le moment réduit μ . On procède en général suivant les cas par effectuer :

- une augmentation de d ou ce qui revient au même H ;
- une augmentation de B ;
- une augmentation de f_{bu} ;
- une introduction d'une section en T ;
- une introduction des aciers comprimés.

❖ Lorsque $\mu \leq 0,1042$, le béton est mal utilisé. Il faut réduire la section de béton. Mais ceci n'est pas toujours possible dans le cas des dalles par exemple ou lorsque les conditions d'isolation thermique et acoustique imposent d'utiliser de fortes épaisseurs.

❖ Lorsque $\mu \geq \mu_e$, les aciers sont mal utilisés. Il faut modifier la section ou introduire des armatures comprimées.

6.2.3.2 Dimensionnement de la section du béton

Le moment de calcul M_u est donné. f_{c28} , f_e et B sont choisis et on prend $d = 0,9H$.

On suppose que le moment réduit vérifie :

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \quad (6.64)$$

$$\Rightarrow \mu_1 \leq \frac{M_u}{Bd^2f_{bu}} \leq \mu_2 \quad (6.65)$$

en tenant compte de $f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b}$ et $d = 0,9H$, on trouve :

$$\mu_1 \leq \frac{\theta\gamma_b M_u}{B(0,9)^2 H^2 \cdot 0,85 f_{c28}} \leq \mu_2 \quad (6.66)$$

$$\Rightarrow \mu_1 \leq \frac{\theta\gamma_b M_u}{0,6885 B H^2 f_{c28}} \leq \mu_2 \quad (6.67)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu_2} \leq \frac{0,6885Bf_{c28}}{\theta\gamma_bM_u} \cdot H^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \quad (6.68)$$

on pose $\varphi = \sqrt{\frac{M_u}{Bf_{c28}}}$, d'où :

$$\frac{1}{\mu_2} \leq \frac{0,6885}{\theta\gamma_b\varphi^2} \cdot H^2 \leq \frac{1}{\mu_1} \quad (6.69)$$

$$\rightarrow \frac{\theta\gamma_b\varphi^2}{0,6885\mu_2} \leq H^2 \leq \frac{\theta\gamma_b\varphi^2}{0,6885\mu_1} \quad (6.70)$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\theta\gamma_b}{0,6885}} \frac{\varphi}{\sqrt{\mu_2}} \leq H \leq \sqrt{\frac{\theta\gamma_b}{0,6885}} \frac{\varphi}{\sqrt{\mu_1}} \quad (6.71)$$

en prenant $\gamma_b = 1,5$ pour le cas des combinaisons fondamentales et $\theta = 1$, on trouve :

$$\boxed{\frac{1,476\varphi}{\sqrt{\mu_2}} \leq H \leq \frac{1,476\varphi}{\sqrt{\mu_1}}} \quad (6.72)$$

D'où le tableau suivant de prédimensionnement du béton :

	FeE400	FeE500
Pivot B avec aciers comprimés	$H \in [1,829\varphi; 2,360\varphi]$	$H \in [1,877\varphi; 2,423\varphi]$
Pivot B sans aciers comprimés	$H \in [2,360\varphi; 3,423\varphi]$	$H \in [2,423\varphi; 3,423\varphi]$
Pivot A : $\mu > 0,1042$	$H \in [3,423\varphi; 4,572\varphi]$	$H \in [3,423\varphi; 4,571\varphi]$

TABLE 6.3 – Tableau de prédimensionnement du béton

6.2.4 Section avec armatures comprimées

Ce cas, correspondant au pivot en B, n'est envisagé que lorsque :

$$\mu_e \leq \mu \leq 0,472 \quad (6.73)$$

le béton est insuffisant dans ce cas.

On pose dans ce cas :

$$\delta' = \frac{d'}{d} \quad (6.74)$$

avec d' représente l'enrobage des armatures comprimées (voir figure 6.1).

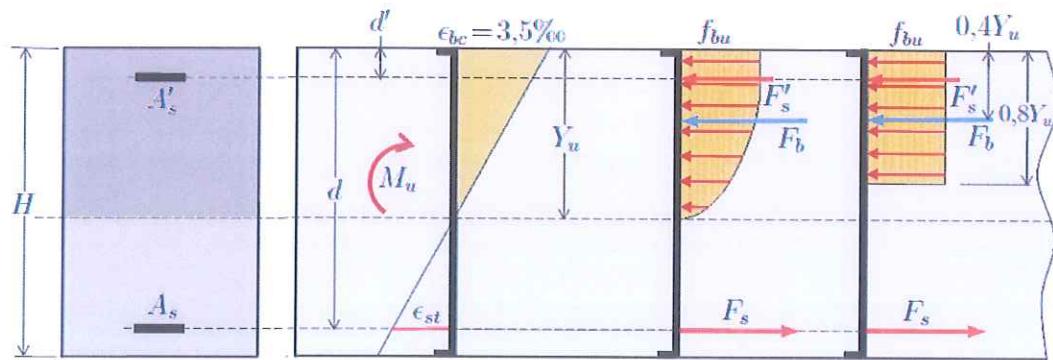


FIGURE 6.1 – Section avec armatures comprimées - pivot B

6.2.4.1 Équations d'équilibre

L'équation d'équilibre des forces est donnée par :

$$F_b + F'_s = F_s \quad \rightarrow \quad 0,8Y_u B f_{bu} + A'_s \sigma'_s = A_s \sigma_s \quad (6.75)$$

L'équation des moments est :

$$M_u = 0, 8Y_u B f_{bu}(d - 0, 4Y_u) + A'_s \sigma'_s(d - d') \quad (6.76)$$

La compatibilité des déformations est traduite par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon_{bc} & = & 3,5\% \\ \epsilon_s & = & 3,5 \frac{1-\alpha_u}{\alpha_u} \\ \epsilon'_s & = & 3,5 \frac{\alpha_u - \delta'}{\alpha_u} \end{array} \right. \quad (6.77)$$

L'utilisation économique des aciers impose de respecter :

$$\begin{cases} \epsilon_s \geq \epsilon_e \\ \epsilon'_s \geq \epsilon_e \end{cases} \quad (6.78)$$

on a

$$\epsilon_s \geq \epsilon_e \quad \Rightarrow \quad \frac{7(1-\alpha_u)}{2\alpha_u} \geq \epsilon_e \quad (6.79)$$

$$\rightarrow \quad 7 - 7\alpha_u \geqslant 2\alpha_u \epsilon_e \quad (6.80)$$

$$\Rightarrow 7 \geq (7 + 2\epsilon_e) \alpha_u \quad (6.81)$$

$$\rightarrow \alpha_u \leq \frac{7}{7+2\epsilon_e} = \alpha_e \quad (6.82)$$

et on a également :

$$\epsilon'_s \geq \epsilon_e \quad \rightarrow \quad \frac{7(\alpha_u - \delta')}{2\alpha_u} \geq \epsilon_e \quad (6.83)$$

$$\rightarrow 7\alpha_u - 7\delta' \geq 2\alpha_u \epsilon_e \quad (6.84)$$

$$\rightarrow (7 - 2\epsilon_e)\alpha_u \geq 7\delta' \quad (6.85)$$

$$\rightarrow \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7}\alpha_u \quad (6.86)$$

on a démontré que :

$$\alpha_u \leq \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} \quad \rightarrow \quad \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7} \cdot \frac{7}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.87)$$

$$\rightarrow \delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.88)$$

la condition d'utilisation économique des aciers implique donc la vérification de :

$$\begin{cases} \alpha_u \leq \alpha_e = \frac{7}{7+2\epsilon_e} \\ \delta' \leq \frac{7-2\epsilon_e}{7+2\epsilon_e} \end{cases} \quad (6.89)$$

Le règlement BAEL recommande de respecter la condition suivante :

$$A'_s \sigma'_s (d - d') \leq 0,4 M_u \quad (6.90)$$

ça veut dire que **les armatures comprimées ne doivent pas reprendre plus de 40% du moment ultime M_u** .

6.2.4.2 Méthode de calcul

Le respect des équations d'équilibre entraîne plusieurs valeurs possibles des sections d'armatures A_s et A'_s selon la valeur de Y_u (ou α_u). La valeur de α_u couramment utilisée et qui conduit à une section totale d'armatures $A_s + A'_s$ très proche du minimum est : $\alpha_u = \alpha_e$.

Dans le cas où la même nuance d'armatures est utilisée et en respectant la condition d'utilisation économique des armatures, on a :

$$\sigma_s = \sigma'_s = f_{su} \quad (6.91)$$

La condition suivante reste toujours à vérifier :

$$\delta' \leq \frac{7 - 2\epsilon_e}{7 + 2\epsilon_e} \quad (6.92)$$

dans la pratique, cette condition est facile à vérifier en effectuant un choix convenable de l'enrobage d'armatures comprimées d' .

Le moment réduit est exprimé par :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \psi \alpha_u (1 - \alpha_u \theta) \quad (6.93)$$

dans le cas du pivot B on a : $\psi = 0,8$ et $\theta = 0,4$. D'où :

$$\mu = 0,8\alpha_u (1 - 0,4\alpha_u) \quad (6.94)$$

dans notre cas, on a : $\alpha_u = \alpha_e$. on obtient donc :

$$\mu = \mu_e = 0,8\alpha_e (1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.95)$$

D'un autre coté, l'équation d'équilibre des moments (6.76) devient :

$$M_u = 0,8\alpha_e Bd^2 f_{bu} (1 - 0,4\alpha_e) + A'_s f_{su} (d - d') \quad (6.96)$$

$$(6.95) \text{ et } (6.96) \Rightarrow M_u = \mu_e Bd^2 f_{bu} + A'_s f_{su} (d - d') \quad (6.97)$$

on a pour le moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} \Rightarrow M_u = \mu Bd^2 f_{bu} \quad (6.98)$$

$$(6.97) \text{ et } (6.98) \Rightarrow \mu_e Bd^2 f_{bu} + A'_s f_{su} (d - d') = \mu Bd^2 f_{bu} \quad (6.99)$$

$$\Rightarrow A'_s f_{su} (d - d') = (\mu - \mu_e) Bd^2 f_{bu} \quad (6.100)$$

$$\Rightarrow A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) Bd^2 f_{bu}}{f_{su} (d - d')} \quad (6.101)$$

$$(6.75) \Rightarrow A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e Bd f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.102)$$

sachant que dans ce cas on a : $\sigma_s = \sigma'_s = f_{su}$ et $\alpha_u = \alpha_e$.

Remarques :

* On a intérêt à choisir δ' le plus petit possible mais avec un enrobage suffisant. En général, la valeur $\delta' = 0.11$ convient.

* La condition $\delta' \leq \frac{7-2\alpha_e}{7+2\alpha_e}$ correspond à $\delta' \leq 0.33$ pour FeE400 et $\delta' \leq 0.23$ pour FeE500. Cette condition est donc bien vérifiée pour la valeur particulière $\delta' = 0.11$.

6.3 Récapitulatif du calcul d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELUR

On détermine le moment réduit μ par la formule :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} \quad (6.103)$$

avec :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} \quad (6.104)$$

on détermine après la valeur particulière du moment réduit correspondant à la limite d'élasticité de l'acier par la formule :

$$\mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.105)$$

où on a :

$$\alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} \quad \text{et} \quad \epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \quad (6.106)$$

Selon la valeur du moment réduit μ trouvée, on calcule les sections d'armatures selon les cas suivants :

* Si $0 \leq \mu \leq 0,1042$: (pivot A)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.107)$$

avec :

$$\beta_u = \frac{15\alpha_u^2 - 40\alpha_u^3}{3(1 - \alpha_u)^2} \quad (6.108)$$

où α_u est la solution appartenant à l'intervalle $[0; 0,167]$ de l'équation :

$$15\alpha_u^4 - 60\alpha_u^3 + (20 - 4\mu)\alpha_u^2 + 8\mu\alpha_u - 4\mu = 0 \quad (6.109)$$

* Si $0,1042 \leq \mu \leq 0,1859$: (pivot A)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.110)$$

avec :

$$\beta_u = \frac{16\alpha_u - 1}{15} \quad (6.111)$$

$$\alpha_u = 1 - 0,9366\sqrt{1 - 2\mu} \quad (6.112)$$

* Si $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$: (pivot B)

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.113)$$

avec :

$$\beta_u = 0,8\alpha_u \quad (6.114)$$

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.115)$$

* Si $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$: (pivot B)

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) B d^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} \quad (6.116)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.117)$$

6.4 Exercices

⇒ Exercice 1 :

Soit une section ($25\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 0,153\text{ MN.m}$.

On prends un béton de $f_{c28} = 25\text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400. L'enrobage inférieur est pris égal à 5 cm .

Calculer la section d'armature à l'ELU fondamental ?

⇒ Solution 1 :

À l'ELU fondamental on a : $\gamma_b = 1,5$ et $\gamma_s = 1,15$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,1667\text{ MPa} \quad (6.118)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826\text{ MPa} \quad (6.119)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{B d^2 f_{bu}} = \frac{0,153}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667} = 0,21333 \quad (6.120)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200\,000} = 0,001739 = 1,739\% \quad (6.121)$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (6.122)$$

$$\Rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.123)$$

$$= 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.124)$$

$$= 0,391 \quad (6.125)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :

$$0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,391 \quad (\text{pivot B})$$

Dans ce cas les armatures comprimées ne sont pas à prévoir.

on a :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.126)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,21333}) \quad (6.127)$$

$$= 0,30351 \quad (6.128)$$

$$\Rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,30351 = 0,2428 \quad (6.129)$$

La section d'armatures tendues à disposer est donc :

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.130)$$

$$= \frac{0,2428 \cdot 0,25 \cdot 0,4514 \cdot 1667}{347,826} \quad (6.131)$$

$$= 0,001113 m^2 \quad (6.132)$$

$$\Rightarrow A_s = 11,13 cm^2 \quad (6.133)$$

6.4 Exercices

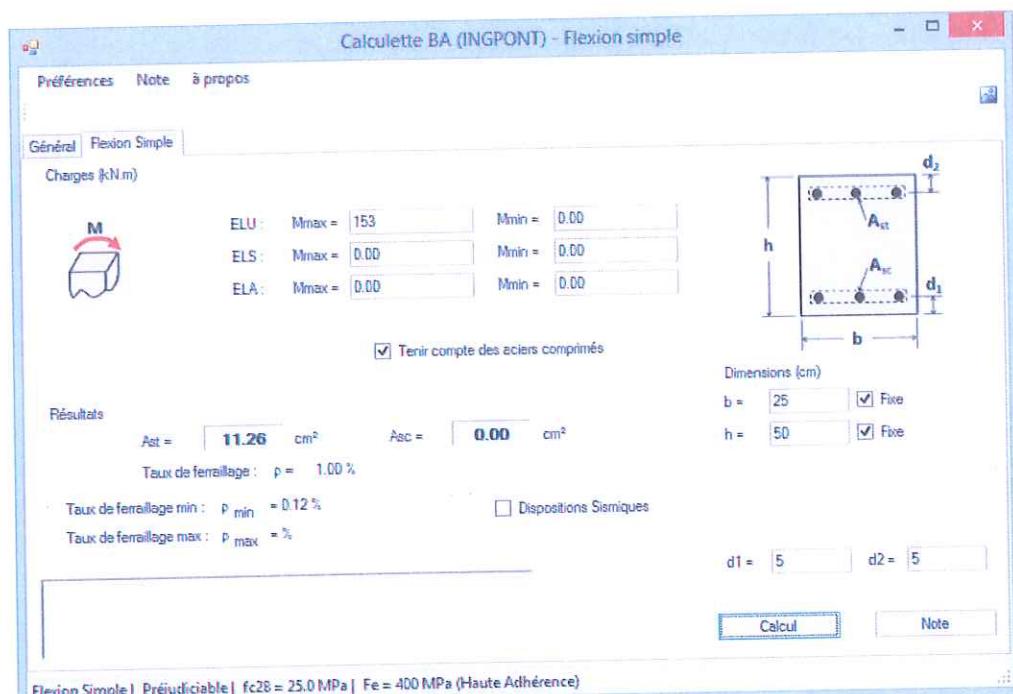


FIGURE 6.2 – Exercice 1 : Résultats de la calculette BA INGPONT

⇒ Exercice 2 :

Soit une section ($25\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 315\text{ kN.m}$.
 On prends un béton de $f_{c28} = 25\text{ MPa}$ et un acier de nuance FeE400.
 Les enrobages supérieur et inférieur sont égales à 5 cm : $d = 45\text{ cm}$ et $d' = 5\text{ cm}$.

1. Calculer la section d'armature à l'ELU fondamental ?
2. Calculer la section d'armature à l'ELU accidentel ?
3. proposer un principe de ferraillage de la section donnée ?

⇒ Solution 2 :

1. À l'ELU fondamental on a : $\gamma_b = 1,5$ et $\gamma_s = 1,15$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,1667 \text{ MPa} \quad (6.134)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1,15} = 347,826 \text{ MPa} \quad (6.135)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,315}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667} = 0,4392 \quad (6.136)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200000} = 0,001739 = 1,739\% \quad (6.137)$$

$$\rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,739} = 0,668 \quad (6.138)$$

$$\rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.139)$$

$$= 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.140)$$

$$= 0,391 \quad (6.141)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :

$$\mu_e \leq \mu \leq 0,472 \quad (\text{pivot B})$$

Dans ce cas les armatures comprimées sont à prévoir.

La section d'armatures comprimées à disposer est donc :

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e)Bd^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} \quad (6.142)$$

$$= \frac{(0,4392 - 0,391) \cdot 0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,1667}{347,826(0,45 - 0,05)} \quad (6.143)$$

$$= 0,000248 \text{ m}^2 \quad (6.144)$$

$$\Rightarrow A'_s = 2,48 \text{ cm}^2 \quad (6.145)$$

La section d'armatures tendues à disposer est :

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.146)$$

$$= 0,000248 + \frac{0,8 \cdot 0,668 \cdot 0,25 \cdot 0,45 \cdot 14,1667}{347,826} \quad (6.147)$$

$$= 0,002697 \text{ m}^2 \quad (6.148)$$

$$\rightarrow A_s = 26,97 \text{ cm}^2 \quad (6.149)$$

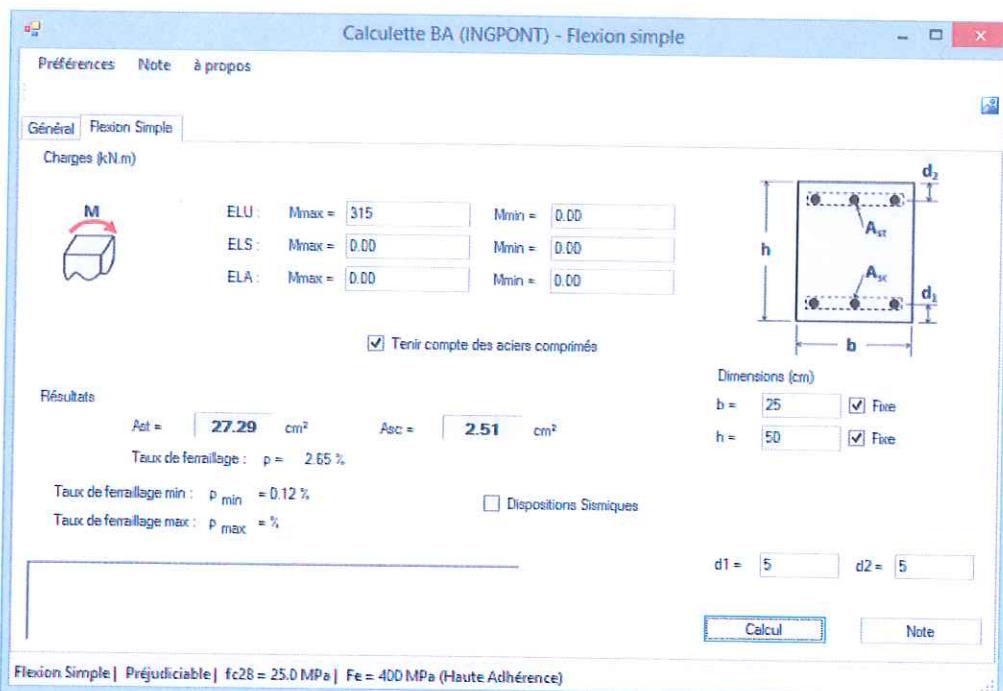


FIGURE 6.3 – Exercice 2 : Résultats de la calculette BA INGPONT

2. À l'ELU accidentel, on a : $\gamma_b = 1,15$ et $\gamma_s = 1$ et en prenant $\theta = 1$ on trouve :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,15} = 18,4783 \text{ MPa} \quad (6.150)$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1} = 400 \text{ MPa} \quad (6.151)$$

le moment réduit est donc :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,315}{0,25.0,45^2.18,4783} = 0,3367 \quad (6.152)$$

d'un autre coté, on a la déformation à la limite d'élasticité des armatures :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1.200\,000} = 0,002 = 2\% \quad (6.153)$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2} = 0,6364 \quad (6.154)$$

$$\Rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.155)$$

$$= 0,8 \cdot 0,6364(1 - 0,4 \cdot 0,6364) \quad (6.156)$$

$$= 0,379 \quad (6.157)$$

on constate donc qu'on est sur le cas suivant :

$$0,1859 \leq \mu \leq \mu_e = 0,379 \quad (\text{pivot B})$$

Dans ce cas les armatures comprimées ne sont pas à prévoir.

On a :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.158)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,3367}) \quad (6.159)$$

$$= 0,5356 \quad (6.160)$$

$$\Rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,5356 = 0,4285 \quad (6.161)$$

La section d'armatures tendues à disposer est donc :

$$A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.162)$$

$$= \frac{0,4285 \cdot 0,25 \cdot 0,45 \cdot 18,4783}{400} \quad (6.163)$$

$$= 0,002227 m^2 \quad (6.164)$$

$$\Rightarrow A_s = 22,27 cm^2 \quad (6.165)$$

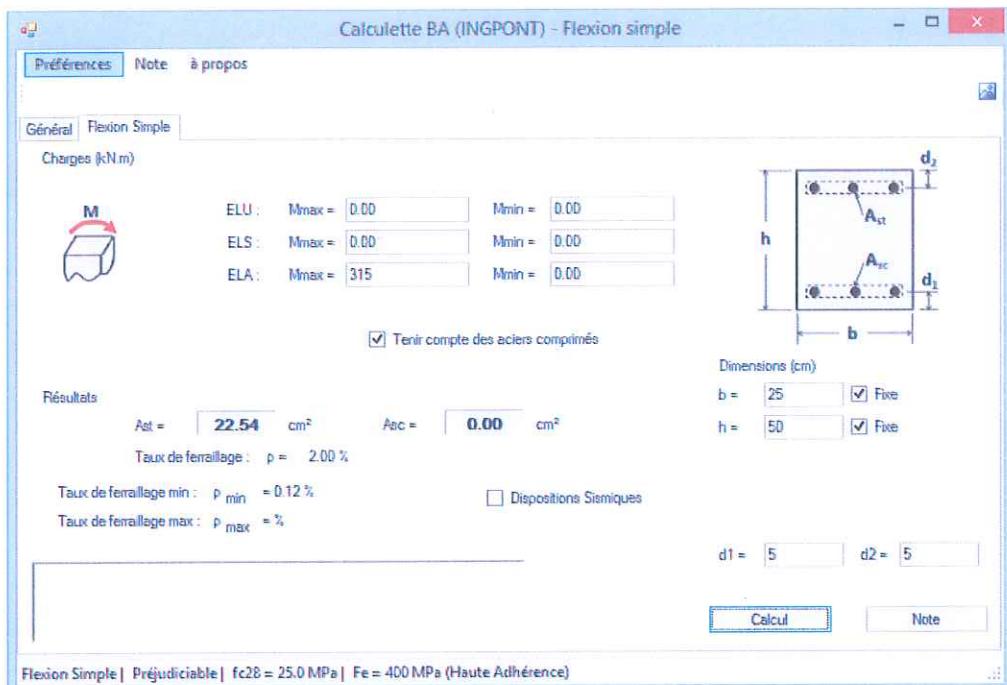


FIGURE 6.4 – Exercice 2 : Résultats de la calculette BA INGPONT

3. Si, dans un cas particulier, on a le même moment développé à l'ELU fondamental et l'ELU accidentel (communément connus sous les noms ELU et ELA) : $M_u = M_a = 315 \text{ kN.m}$. On obtient les sections suivantes de ferraillage :

- ★ ELU : $A_s = 26,97 \text{ cm}^2$ et $A'_s = 2,48 \text{ cm}^2$;
- ★ ELU : $A_s = 22,27 \text{ cm}^2$.

Il apparaît clairement que le résultat obtenu à l'ELU fondamental (ELU) est plus défavorable que celui obtenu à l'ELU accidentel (ELA).

Nous présentons dans la figure (6.5) un principe de ferraillage qui peut être proposé dans ce cas de figure.

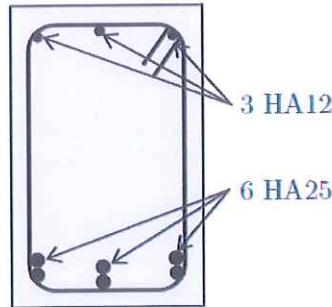


FIGURE 6.5 – Établissement d'un principe de ferraillage

6.5 Calcul à l'état limite de service - ELS

L'expérience a montré que la méthode de calcul suivante est efficace à l'ELS :

- Pour les cas où on a une fissuration **peu préjudiciable** ou une fissuration **préjudiciable**, le calcul se fait à l'ELU et une vérification se fait dans la suite à l'ELS.
- Pour le cas où la fissuration est **très préjudiciable**, le calcul se fait à l'ELS et une vérification se fait à l'ELU.

Les diagrammes de calcul à l'ELS sont présentés dans la figure (6.6).

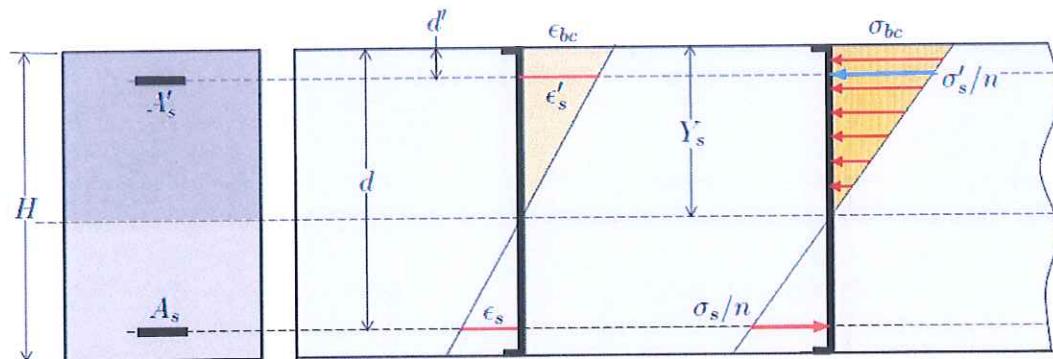


FIGURE 6.6 – Diagrammes des déformations et des contraintes à l'ELS

Les paramètres de la figure sont définis comme suit :

A_s	: section d'acier tendu ;
A'_s	: section d'acier comprimé ;
ϵ_{bc}	: déformation de la fibre supérieure comprimée du béton ;
ϵ_s	: déformation de l'acier tendu ;
ϵ'_s	: déformation de l'acier comprimé ;
σ_{bc}	: contrainte de la fibre supérieure du béton ;
σ_s	: contrainte de l'acier tendu ;
σ'_s	: contrainte de l'acier comprimé.

6.5.1 Contraintes limites de calcul

6.5.1.1 Contrainte limite de compression du béton

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la contrainte limite de compression du béton est définie par la règle BAEL comme suit :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{cj} \quad (f_{bu} = \frac{0,85f_{cj}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85f_{cj}}{1,5} \approx 0,57f_{cj}) \quad (6.166)$$

6.5.1.2 Contrainte limite de traction des aciers (ouverture des fissures)

Comme déjà défini, la limitation de la contrainte des armatures dépend de l'agressivité du milieu :

* Fissuration peu préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = f_e \quad (f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{f_e}{1,15} \approx 0,87) \quad (6.167)$$

* Fissuration préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = \inf \left\{ \frac{2}{3}f_e; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (6.168)$$

* Fissuration très préjudiciable :

$$\bar{\sigma}_s = \inf \left\{ \frac{1}{2}f_e; 90\sqrt{\eta f_{tj}} \right\} \quad (6.169)$$

η est le coefficient de fissuration. on a $\eta = 1$ pour les aciers RL et $\eta = 1,6$ pour les aciers HA.

6.5.2 Vérification d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

Nous présentons dans la figure (6.7) les résultantes des forces appliquées à une section donnée.

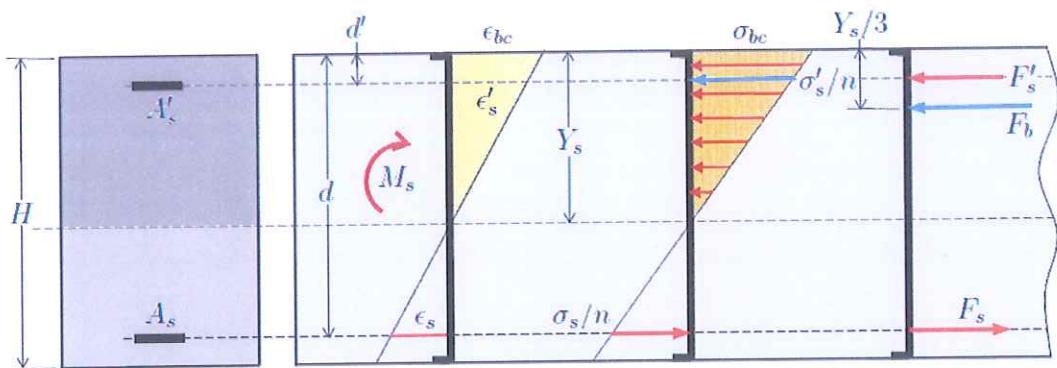


FIGURE 6.7 – Résultantes des diagrammes de contraintes à l'ELS

Ces résultantes sont définies par :

$$F_b = \frac{1}{2} BY_s \sigma_{bc} \quad (6.170)$$

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (6.171)$$

$$F'_s = A'_s \sigma'_s \quad (6.172)$$

6.5.2.1 Équations de base

L'équation d'équilibre des forces est écrite sous la forme :

$$F_b + F'_s = F_s \quad (6.173)$$

L'équation d'équilibre des moments par rapport au centre de gravité des armatures tendues est donnée par :

$$M_s = F_b \left(d - \frac{Y_s}{3} \right) + F'_s (d - d') \quad (6.174)$$

La compatibilité des déformations (théorème de THALES) est exprimée par :

$$\sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{n} \frac{Y_s}{d - Y_s} \quad (6.175)$$

$$\sigma_{bc} = \frac{\sigma'_s}{n} \frac{Y_s}{Y_s - d'} \quad (6.176)$$

On pose dans la suite :

$$K = \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} \quad (6.177)$$

On réalise dans la suite les démonstrations suivantes :

L'équilibre des forces nous donne :

$$(6.173) \rightarrow \frac{1}{2}BY_s\sigma_{bc} + A'_s\sigma'_s = A_s\sigma_s \quad (6.178)$$

$$(6.175) \rightarrow \sigma_s = n\sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \quad (6.179)$$

$$(6.176) \rightarrow \sigma'_s = n\sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s} \quad (6.180)$$

$$(6.178) \rightarrow \frac{1}{2}BY_s\sigma_{bc} + nA'_s\sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s} = nA_s\sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \quad (6.181)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}BY_s^2 + nA'_s(Y_s - d') = nA_s(d - Y_s) \quad (6.182)$$

$$\rightarrow BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.183)$$

cette dernière équation nous permet de déterminer Y_s .

L'équilibre des moments par rapport à la fibre neutre nous donne :

$$M_s = F_b \cdot \frac{2}{3}Y_s + F'_s(Y_s - d') + F_s(d - Y_s) \quad (6.184)$$

$$= \frac{1}{2}BY_s\sigma_{bc} \frac{2}{3}Y_s + A'_s\sigma'_s(Y_s - d') + A_s\sigma_s(d - Y_s) \quad (6.185)$$

$$= BY_s^2 \frac{\sigma_{bc}}{3} + nA'_s\sigma_{bc} \frac{Y_s - d'}{Y_s}(Y_s - d') \quad (6.186)$$

$$+ nA_s\sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s}(d - Y_s) \quad (6.187)$$

$$= \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \right] \quad (6.188)$$

$$\rightarrow M_s = K \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \right] = KI \quad (6.189)$$

le terme I représente le moment d'inertie de la section homogénéisée équivalente à la section étudiée.

les contraintes sont exprimées par :

$$(6.179) \rightarrow \sigma_s = nK(d - Y_s) \quad (6.190)$$

$$(6.180) \rightarrow \sigma'_s = nK(Y_s - d') \quad (6.191)$$

$$(6.177) \rightarrow \sigma_{bc} = KY_s \quad (6.192)$$

6.5.2.2 Récapitulatif pour la vérification à l'ELS

En tenant compte des sections d'armatures A_s et A'_s calculées à l'ELU, On peut réaliser une vérification à l'ELS en suivant les étapes suivantes :

On commence par calculer Y_s en résolvant l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.193)$$

le moment d'inertie de la section homogénéisée est déterminé par :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.194)$$

puis on cherche le coefficient K par :

$$K = \frac{M_s}{I} \quad (6.195)$$

les contraintes développées sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_s &= nK(d - Y_s) \\ \sigma'_s &= nK(Y_s - d') \\ \sigma_{bc} &= KY_s \end{cases} \quad (6.196)$$

On procède dans la suite à l'examen des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_s &\leq \bar{\sigma}_s \\ \sigma'_s &\leq \bar{\sigma}'_s \\ \sigma_{bc} &\leq \bar{\sigma}_{bc} \end{cases} \quad (6.197)$$

Si ces inégalités sont satisfaites simultanément, la section satisfait les conditions de l'ELS et les résultats trouvés à l'ELU sont à adopter.

Si au moins l'une des trois conditions n'est pas vérifiée, il faudra redimensionner la section à l'ELS.

6.5.3 Dimensionnement d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

On pose dans la suite :

$$\alpha_s = \frac{Y_s}{d} \quad (6.198)$$

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} \quad (6.199)$$

$$\delta = \frac{d'}{d} \quad (6.200)$$

On suppose que $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ pour que les armatures tendues travaillent dans des conditions économiques. Deux cas sont possibles : $A'_s = 0$ ou $A'_s \neq 0$. Ces cas sont traités dans les parties suivantes.

6.5.3.1 Cas où $A'_s = 0$

L'expression du moment de service (6.189) devient :

$$M_s = K \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right] \quad (6.201)$$

$$(6.190) \rightarrow K = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \quad (6.202)$$

$$\rightarrow M_s = \frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \left[\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right] \quad (6.203)$$

En développant l'expression du moment réduit, on trouve :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\sigma_s} \quad (6.204)$$

$$= \frac{\frac{\sigma_s}{n(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right)}{Bd^2\sigma_s} \quad (6.205)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d - Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + nA_s(d - Y_s)^2 \right) \quad (6.206)$$

$$(6.193) \rightarrow BY_s^2 + 2nA_sY_s - 2nA_sd = 0 \quad (6.207)$$

$$\rightarrow BY_s^2 + 2nA_s(Y_s - d) = 0 \quad (6.208)$$

$$\rightarrow nA_s(d - Y_s) = \frac{BY_s^2}{2} \quad (6.209)$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{1}{nBd^2(d-Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + \frac{BY_s^2}{2}(d-Y_s) \right) \quad (6.210)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d-Y_s)} \left(\frac{BY_s^3}{3} + \frac{BdY_s^2}{2} - \frac{BY_s^3}{2} \right) \quad (6.211)$$

$$= \frac{1}{nBd^2(d-Y_s)} \left(-\frac{BY_s^3}{6} + \frac{BdY_s^2}{2} \right) \quad (6.212)$$

$$= \frac{1}{nBd^3(1-\alpha_s)} \left(\frac{Bd^3}{2}\alpha_s^2 - \frac{Bd^3}{6}\alpha_s^3 \right) \quad (6.213)$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{\alpha_s^2(1-\alpha_s/3)}{2n(1-\alpha_s)} \quad (6.214)$$

On peut donc avoir une équation qui nous permettra d'avoir l'expression de α_s en fonction de μ_s comme suit :

$$(6.214) \rightarrow 2n\mu_s - 2n\mu_s\alpha_s = \alpha_s^2 - \frac{1}{3}\alpha_s^3 \quad (6.215)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 6n\mu_s\alpha_s + 6n\mu_s = 0 \quad (6.216)$$

$$n = 15 \rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.217)$$

cette équation admet une solution unique dans l'intervalle $]0; 1[$.

On a dans la suite :

$$K = \frac{\sigma_{bc}}{Y_s} = \frac{\sigma_{st}}{n(d-Y_s)} \quad (6.218)$$

$$\rightarrow K = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{nd(1-\alpha_s)} \quad (6.219)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = KY_s = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{nd(1-\alpha_s)}\alpha_sd \quad (6.220)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)}\bar{\sigma}_{st} \quad (6.221)$$

Si la valeur trouvée de σ_{bc} vérifie la condition : $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ on a donc $A'_s = 0$ et la section d'armature tendue est donnée par :

$$(6.209) \rightarrow A_s = \frac{BY_s^2}{2n(d-Y_s)} = \frac{Bd^2\alpha_s^2}{2nd(1-\alpha_s)} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} \quad (6.222)$$

$$(6.214) \rightarrow \frac{\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{\mu_s}{1-\alpha_s/3} \quad (6.223)$$

$$\rightarrow \boxed{A_s = \frac{Bd\mu_s}{1-\alpha_s/3} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)}} \quad (6.224)$$

6.5.3.2 Cas où $A'_s \neq 0$

Si la valeur de σ_{bc} trouvée dans la phase précédente vérifie : $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, on a alors : $A'_s \neq 0$.

On pose dans ce cas : $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$ et $\alpha_s = \alpha_l$.

On a trouvé dans le cas précédent que :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s \bar{\sigma}_s}{n(1 - \alpha_s)} \quad (6.225)$$

pour la limite de ce domaine où on a $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc}$ et $\alpha_s = \alpha_l$ on trouve :

$$\bar{\sigma}_{bc} = \frac{\alpha_l \bar{\sigma}_s}{n(1 - \alpha_l)} \quad (6.226)$$

$$\Rightarrow \alpha_l \bar{\sigma}_s = n \bar{\sigma}_{bc} - n \alpha_l \bar{\sigma}_{bc} \quad (6.227)$$

$$\Rightarrow \alpha_l (\bar{\sigma}_s + n \bar{\sigma}_{bc}) = n \bar{\sigma}_{bc} \quad (6.228)$$

$$\Rightarrow \alpha_l = \frac{n \bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n \bar{\sigma}_{bc}} \quad (6.229)$$

et on a d'un autre coté en reprenant (6.214) :

$$\mu_s = \mu_l = \frac{\alpha_l^2 (1 - \alpha_l/3)}{2n(1 - \alpha_l)} \quad (6.230)$$

D'un autre coté, on a :

$$(6.178) \Rightarrow A_s = \frac{BY_s \sigma_{bc}/2 + A'_s \sigma'_s}{\sigma_s} \quad (6.231)$$

$$\sigma_s = \bar{\sigma}_s \quad \text{et} \quad \sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc} \quad \Rightarrow \quad A_s = \frac{BY_l \bar{\sigma}_{bc}/2 + A'_s \sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} \quad (6.232)$$

$$(6.174) \Rightarrow M_s = \frac{1}{2} BY_s \sigma_{bc} \left(d - \frac{Y_s}{3} \right) + A'_s \sigma'_s (d - d') \quad (6.233)$$

$$\Rightarrow A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2} BY_s \sigma_{bc} \left(d - \frac{Y_s}{3} \right)}{\sigma'_s (d - d')} \quad (6.234)$$

$$\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc} \quad \text{et} \quad Y_s = Y_l \quad \Rightarrow \quad A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2} BY_l \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{Y_l}{3} \right)}{\sigma'_s (d - d')} \quad (6.235)$$

le moment réduit est défini par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{B d^2 \bar{\sigma}_s} \quad \Rightarrow \quad M_s = \mu_s B d^2 \bar{\sigma}_s \quad (6.236)$$

on a démontré que :

$$\sigma_s = n\sigma_{bc} \frac{d - Y_s}{Y_s} \rightarrow \bar{\sigma}_s = n\bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_l}{Y_l} \quad (6.237)$$

$$\rightarrow M_s = \mu_s Bd^2 n\bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_l}{Y_l} \quad (6.238)$$

$$(6.180) \rightarrow \sigma'_s = n\bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_l - d'}{Y_l} \quad (6.239)$$

en injectant les deux dernières équations dans l'expression de A'_s , on trouve :

$$A'_s = \frac{\mu_s Bd^2 n\bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_l}{Y_l} - \frac{1}{2} BY_l \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{Y_l}{3}\right)}{n\bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_l - d'}{Y_l} (d - d')} \quad (6.240)$$

$$= \frac{n\mu_s Bd^3 (1 - \alpha_l) - \frac{1}{2} Bd^3 \alpha_l^2 \left(1 - \frac{\alpha_l}{3}\right)}{nd^2 (\alpha_l - \delta) (1 - \delta)} \quad (6.241)$$

$$(6.230) \rightarrow \alpha_l^2 \left(1 - \frac{\alpha_l}{3}\right) = 2n\mu_l (1 - \alpha_l) \quad (6.242)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{n\mu_s Bd (1 - \alpha_l) - \frac{1}{2} Bd \cdot 2n\mu_l (1 - \alpha_l)}{n(\alpha_l - \delta) (1 - \delta)} \quad (6.243)$$

$$= \frac{\mu_s (1 - \alpha_l) - \mu_l (1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta) (1 - \delta)} Bd \quad (6.244)$$

$$\rightarrow A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} Bd \quad (6.245)$$

En remplaçant $\bar{\sigma}_s$ et σ'_s (6.237 et 6.239) dans l'expression de A_s (6.232), on trouve :

$$A_s = \frac{BY_l \bar{\sigma}_{bc}/2 + A'_s \cdot n\bar{\sigma}_{bc} \frac{Y_l - d'}{Y_l}}{n\bar{\sigma}_{bc} \frac{d - Y_l}{Y_l}} \quad (6.246)$$

$$= \frac{BY_l^2 + 2nA'_s(Y_l - d')}{2n(d - Y_l)} \quad (6.247)$$

$$= \frac{Bd^2 \alpha_l^2 + 2ndA'_s(\alpha_l - \delta)}{2nd(1 - \alpha_l)} \quad (6.248)$$

$$= \frac{Bd\alpha_l^2}{2n(1 - \alpha_l)} + A'_s \frac{\alpha_l - \delta}{1 - \alpha_l} \quad (6.249)$$

$$= \frac{Bd\alpha_l^2}{2n(1 - \alpha_l)} + \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} Bd \cdot \frac{\alpha_l - \delta}{1 - \alpha_l} \quad (6.250)$$

$$= \frac{Bd\alpha_l^2}{2n(1 - \alpha_l)} + \frac{\mu_s - \mu_l}{1 - \delta} Bd \quad (6.251)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd \quad (6.252)$$

Les sections d'armatures sont donc calculées par les formules suivantes :

* Les armatures comprimées sont calculées par (6.235) ou (6.245), soit :

$$\boxed{A'_s = \frac{M_s - \frac{1}{2}BY_l\bar{\sigma}_{bc}(d - \frac{Y_l}{3})}{\sigma'_s(d - d')} = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} Bd} \quad (6.253)$$

* Les armatures tendues sont calculées par (6.232) ou (6.252), soit :

$$\boxed{A_s = \frac{BY_l\bar{\sigma}_{bc}/2 + A'_s\sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd} \quad (6.254)$$

6.5.4 Récapitulatif du calcul d'une section rectangulaire en flexion simple à l'ELS

On calcule le moment réduit par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} \quad (6.255)$$

La résolution de l'équation suivante nous permet d'avoir la valeur de α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.256)$$

on retient la valeur de α_s comprise dans l'intervalle $]0; 1[$.

Cela nous permet après de calculer la contrainte σ_{bc} du béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)} \bar{\sigma}_{st} \quad (6.257)$$

❖ Si $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$: $A'_s = 0$

La section tendue est calculée par :

$$A_s = \frac{Bd\mu_s}{1 - \alpha_s/3} = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1 - \alpha_s)} \quad (6.258)$$

❖ Si $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$: $A'_s \neq 0$

Les sections d'acier sont calculées par :

$$A_s = \frac{\alpha_l^2(1-\delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{2n(1-\alpha_l)(1-\delta)} Bd \quad (6.259)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1-\alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1-\delta)} Bd \quad (6.260)$$

où on a :

$$\delta = \frac{d'}{d} \quad (6.261)$$

$$\alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n\bar{\sigma}_{bc}} \quad (6.262)$$

$$\mu_l = \frac{\alpha_l^2(1-\alpha_l/3)}{2n(1-\alpha_l)} \quad (6.263)$$

Remarque :

Le calcul de α_s peut être effectué par :

- * *La lecture d'un tableau qui donne α_s en fonction de μ_s (voir littérature) ;*
- * *La lecture d'un graphique qui donne α_s en fonction de μ_s ;*
- * *Un calcul automatique en utilisant MATLAB (ou autre programme) ou simplement en utilisant les itérations de NEWTON-RAPHSON suivantes :*

$$\alpha_s^0 = \frac{1}{2} \quad (6.264)$$

$$\alpha_s^{(i+1)} = \alpha_s^{(i)} - \frac{f(\alpha_s^{(i)})}{f'(\alpha_s^{(i)})} \quad (6.265)$$

où on a :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 90\mu_s x + 90\mu_s \quad (6.266)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 90\mu_s \quad (6.267)$$



6.6 Ferraillage minimal

Une section de béton armé en flexion simple doit contenir une section d'armatures minimale capable de reprendre la contrainte de fissuration du béton (f_{tj}) sans dépasser leur limite d'élasticité f_e .

Le moment fléchissant M provoquant la fissuration du béton satisfait l'équation :

$$f_{tj} = \frac{Mv}{I} \quad (6.268)$$

v étant la distance entre le centre de gravité de la section et la fibre tendue extrême ($v = \frac{H}{2}$).

$$I = \frac{BH^3}{12} \quad \Rightarrow \quad f_{tj} = \frac{M \frac{H}{2}}{\frac{BH^3}{12}} = \frac{6M}{BH^2} \quad (6.269)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{6} f_{tj} BH^2 \quad (6.270)$$

A l'ELS, le moment réduit est donné par :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{M}{Bd^2f_e} = \frac{f_{tj}BH^2}{6Bd^2f_e} = \frac{f_{tj}}{6 \cdot 0,9^2 f_e} = \frac{f_{tj}}{4,86 f_e} \quad (6.271)$$

d'après (6.258), le ferraillage minimal est donné par :

$$A_{\min} = \frac{Bd\mu_s}{1 - \alpha_s/3} \quad (6.272)$$

En pratique, dans les circonstances du ferraillage minimal, on peut considérer que : $1 - \alpha_s/3 \approx 0,9$.

$$\Rightarrow \quad A_{\min} = \frac{Bd}{0,9} \frac{f_{tj}}{4,86 f_e} = \frac{Bdf_{tj}}{4,374 f_e} \quad (6.273)$$

$$\Rightarrow \quad A_{\min} = 0,23 Bd \frac{f_{tj}}{f_e} \quad (6.274)$$

6.7 Exercices

⇒ **Exercice 3 :**

Soit une poutre isostatique sur deux appuis simples de longueur de 7 m et de section (20 cm × 45 cm). Cette poutre est soumise à l'action de :

- Superstructures : $G_s = 2,5 \text{ kN/m}$;
- Charge d'exploitation : $Q = 12 \text{ kN/m}$.

Le poids volumique du béton est pris égal à $\rho_b = 25 \text{ kN/m}^3$ et les enrobages sont de 5 cm.

1. Calculer le moment ultime maximal sollicitant la poutre (en combinant les actions) ?
2. Cette poutre est à réaliser avec un béton de résistance $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et un acier HA de nuance FeE400.
 - (a) Calculer le moment réduit limite μ_e ?
 - (b) Déterminer la position du diagramme de déformation de la section considérée ?
 - (c) Calculer la section d'armature nécessaire pour reprendre, avec le béton, le moment ultime calculé ?
 - (d) Proposer une disposition des armatures (principe de ferraillage) ?
3. Chercher le moment à l'ELS et réaliser le dimensionnement nécessaire sachant qu'on a une fissuration préjudiciable ?

⇒ **Solution 3 :**

1. Nous présentons dans la figure (6.8) une représentation de la surcharge des superstructures G_s et la charge variable d'exploitation Q .

Le poids de la poutre par mètre linéaire est donné par :

$$G_0 = \rho B H = 25 \times 0,20 \times 0,45 \quad (6.275)$$

$$\rightarrow G_0 = 2,25 \text{ kN/ml} \quad (6.276)$$

on sait d'un autre côté qu'on a une charge permanente des superstructures donnée par :

$$G_s = 2,5 \text{ kN/ml} \quad (6.277)$$

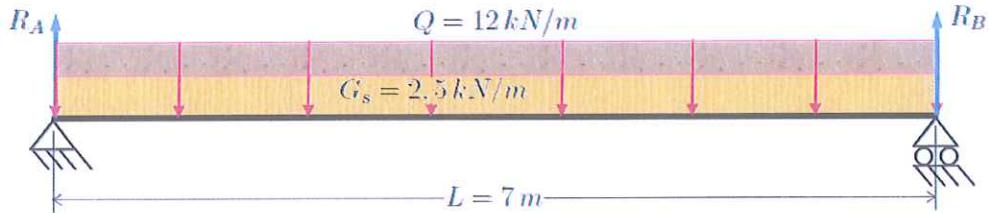


FIGURE 6.8 – Schéma de la poutre isostatique

Pour une poutre isostatique uniformément chargée par une densité de charge q , on peut démontrer que le moment maximal développé à mi-travée est exprimé par :

$$M = \frac{qL^2}{8} \quad (6.278)$$

Les charges permanentes regroupées G_0 et G_s créent donc un moment maximal à mi-travée de la poutre égal à :

$$M_G = (G_0 + G_s) \frac{L^2}{8} = 29,094 \text{ kN.m} \quad (6.279)$$

La charge d'exploitation Q crée un moment qui vaut :

$$M_Q = \frac{QL^2}{8} = 73,5 \text{ kN.m} \quad (6.280)$$

En tenant compte des combinaisons réglementaires de calcul, on trouve :

$$M_u = 1,35M_G + 1,5M_Q = 1,35 \cdot 29,094 + 1,5 \cdot 73,5 \quad (6.281)$$

$$\Rightarrow M_u = 149,5 \text{ kN.m} = 0,1495 \text{ MN.m} \quad (6.282)$$

2. En tenant compte de la classe de béton et de la nuance d'acier proposée à savoir $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et FeE400, on trouve :

- (a) La déformation des aciers à la limite d'élasticité est :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{400}{1,15 \cdot 200 \cdot 000} = 1,74 \% \quad (6.283)$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 1,74} = 0,668 \quad (6.284)$$

d'où le moment réduit limite :

$$\mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,668(1 - 0,4 \cdot 0,668) \quad (6.285)$$

$$\Rightarrow \mu_e = 0,392 \quad (6.286)$$

(b) On prend $\theta = 1$ et $\gamma_b = 1,5$, d'où :

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (6.287)$$

l'enrobage inférieur étant égal à 5 cm, d'où : $d \approx 0,4 \text{ m}$.

Le moment réduit est égal donc à :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,1495}{0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 14,17} \quad (6.288)$$

$$\Rightarrow \mu = 0,33 \quad (6.289)$$

le moment réduit calculé appartient donc au domaine suivant : $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (pivot B).

(c) Dans le sous-domaine trouvé, la section d'armatures se calcule comme suit :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) \quad (6.290)$$

$$= 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,33}) \quad (6.291)$$

$$= 0,52 \quad (6.292)$$

$$\Rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,52 = 0,416 \quad (6.293)$$

on a :

$$f_{su} = \frac{f_e}{1,15} = \frac{400}{1,15} = 347,83 \text{ MPa} \quad (6.294)$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.295)$$

$$= \frac{0,416 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 14,17}{347,83} \quad (6.296)$$

$$= 0,001356 \text{ m}^2 \quad (6.297)$$

$$\Rightarrow A_s = 13,56 \text{ cm}^2 \quad (6.298)$$

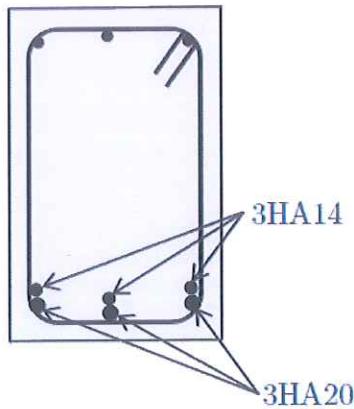


FIGURE 6.9 – Schéma du principe de ferraillage proposé

(d) D'après le tableau des sections des armatures commerciales, on peut proposer le principe de ferraillage présenté dans la figure (6.9).

3. Le moment à l'ELS est calculé par la combinaison suivante :

$$M_s = M_G + M_Q = 29,094 + 73,5 \quad (6.299)$$

$$\Rightarrow M_s = 102,594 \text{ kN.m} = 0,102594 \text{ MN.m} \quad (6.300)$$

✿ On procède après à la vérification à l'ELS de la section $A_s = 13,56 \text{ cm}^2$ calculée à l'ELU comme suit :

Calculons l'ordonnée de la fibre neutre Y_s par l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_sd' + A_sd) = 0 \quad (6.301)$$

$$\Rightarrow 0,2Y_s^2 + 2.15.0,001356Y_s - 2.15.0,001356.0,4 = 0 \quad (6.302)$$

$$\Rightarrow 0,2Y_s^2 + 0,04068Y_s - 0,016272 = 0 \quad (6.303)$$

on a les deux racines : $Y_s = -0,4045 \text{ m}$ ou $Y_s = 0,2011 \text{ m}$
la racine physique est : $Y_s = 0,2011 \text{ m} = 20,11 \text{ cm}$

Le moment quadratique de la section homogénéisé est :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.304)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0,2 \cdot 20,11^3 + 15 \cdot 0,001356 \cdot (0,4 - 0,2011)^2 \quad (6.305)$$

$$\rightarrow I = 0,001347 \text{ m}^4 \quad (6.306)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,102594}{0,001347} = 76,1648 \quad (6.307)$$

Les contraintes dans les armatures et le béton sont :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.76,1648.(0,4 - 0,2011) \quad (6.308)$$

$$\rightarrow \sigma_s = 227,24 \text{ MPa} \quad (6.309)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 76,1648.0,2011 = 15,32 \text{ MPa} \quad (6.310)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.25 = 15 \text{ MPa} \quad (6.311)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.312)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.400; \max \left(\frac{400}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (6.313)$$

$$= \min [266,67; \max (200; 201,63)] \quad (6.314)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 201,63 \text{ MPa} \quad (6.315)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 15,32 \text{ MPa} & > \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 227,24 \text{ MPa} & > \bar{\sigma}_s = 201,63 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.316)$$

les contraintes admissibles ne sont pas vérifiées et on doit donc redimensionner la section considérée à l'ELS.

✿ Dimensionnement à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,102594}{0,2.0,4^2.201,63} = 0,0159 \quad (6.317)$$

on cherche ensuite le paramètre α_s en passant par l'équation :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.318)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 1,431\alpha_s + 1,431 = 0 \quad (6.319)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,5243 \quad (\text{on retient } \alpha_s \in]0;1[) \quad (6.320)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,5243}{15(1-0,5243)} 201,63 \quad (6.321)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = 14,815 \text{ MPa} \quad (6.322)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 14,815 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (6.323)$$

Une section d'armatures tendue est suffisante :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{0,2.0,4.0,5243^2}{2.15.(1-0,5243)} \quad (6.324)$$

$$\rightarrow A_s = 0,001541 \text{ m}^2 = 15,41 \text{ cm}^2 \quad (6.325)$$

Ferraillage minimal :

$$A_{\min} = 0,23Bd \frac{f_{tj}}{f_e} = 0,23.0,2.0,9.0,45 \frac{2,1}{400} = 0,000098 \text{ m}^2 \quad (6.326)$$

$$\rightarrow A_{\min} = 0,98 \text{ cm}^2 \quad (6.327)$$

on peut donc adopter la section :

$$A_s = 15,41 \text{ cm}^2 \quad (6.328)$$

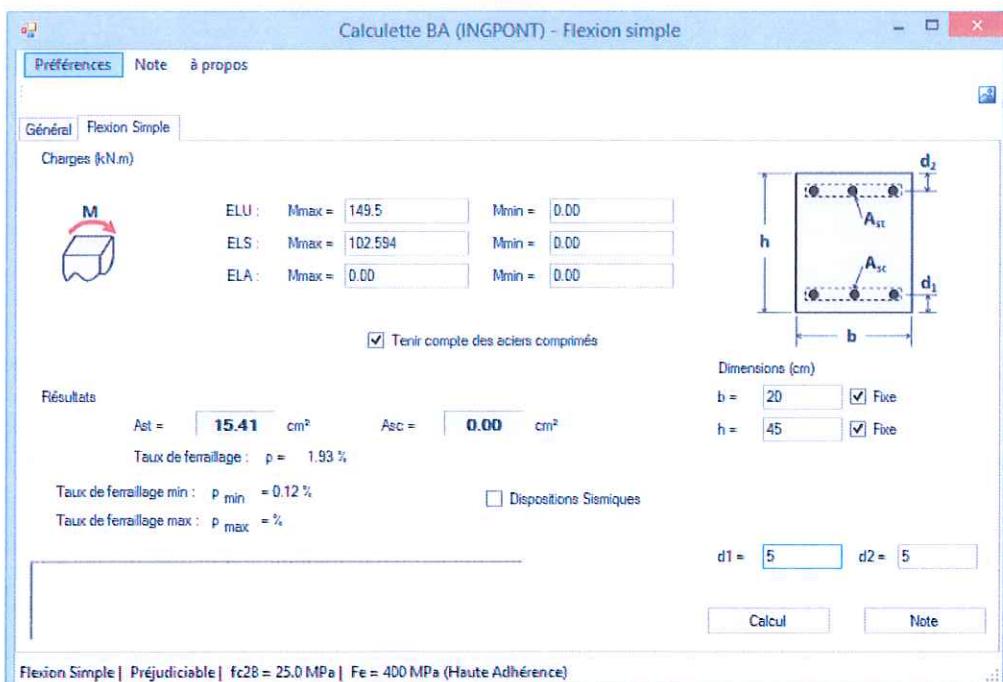


FIGURE 6.10 – Exercice 3 : Résultats de la calculette BA INGPONT

⇒ **Exercice 4 :**

Mêmes données que l'exercice précédent à part la résistance caractéristique en compression du béton qui devient $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

Mêmes questions à traiter.

⇒ **Solution 4 :**

- Le moment ultime maximal reste le même que l'exercice précédent, soit :

$$M_u = 149,5 \text{ kN.m} = 0,1495 \text{ MN.m} \quad (6.329)$$

- La résistance caractéristique du béton devient : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

- Le moment réduit limite reste également le même :

$$\mu_e = 0,392 \quad (6.330)$$

- on a :

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{\theta \gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 20}{1,5} = 11,33 \text{ MPa} \quad (6.331)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,1495}{0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 11,33} = 0,412 \quad (6.332)$$

Le moment réduit calculé appartient donc au domaine suivant : $\mu_e \leq \mu \leq 0,472$ (pivot B).

- Dans le domaine actif, on a besoin d'une section comprimée en plus d'une section tendue, soit :

$$A'_s = \frac{(\mu - \mu_e) Bd^2 f_{bu}}{f_{su}(d - d')} \quad (6.333)$$

$$= \frac{(0,412 - 0,392) \cdot 0,2 \cdot 0,4^2 \cdot 11,33}{347,83 \cdot 0,35} \quad (6.334)$$

$$= 0,58 \text{ cm}^2 \quad (6.335)$$

$$A_s = A'_s + \frac{0,8\alpha_e Bd f_{bu}}{f_{su}} \quad (6.336)$$

$$= 0,000058 + \frac{0,8 \cdot 0,668 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 11,33}{347,83} \quad (6.337)$$

$$= 14,5 \text{ cm}^2 \quad (6.338)$$

(d) Un principe de ferraillage possible est présenté dans la figure (6.11).

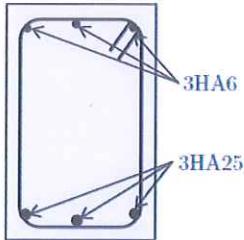


FIGURE 6.11 – Schéma du principe de ferraillage

3. Le moment à l'ELS reste aussi le même :

$$M_s = 102,594 \text{ kN.m} = 0,102594 \text{ MN.m} \quad (6.339)$$

✿ On procède après à la vérification à l'ELS des sections $A_s = 14,5 \text{ cm}^2$ et $A'_s = 0,58 \text{ cm}^2$ calculées à l'ELU :

Calculons l'ordonnée de la fibre neutre Y_s par l'équation :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.340)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 0,2Y_s^2 + 2.15.(0,00145 + 0,000058)Y_s \\ & - 2.15.(0,000058.0,05 + 0,00145.0,4) = 0 \end{aligned} \quad (6.341)$$

$$\Rightarrow 0,2Y_s^2 + 0,04524Y_s - 0,017487 = 0 \quad (6.342)$$

on a les deux racines : $Y_s = -0,4297 \text{ m}$ ou $Y_s = 0,2035 \text{ m}$
la racine physique est : $Y_s = 0,2035 \text{ m} = 20,35 \text{ cm}$

Le moment quadratique de la section homogénéisé est :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.343)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{3}.0,2.0,2035^3 + 15.0,000058.(0,2035 - 0,05)^2 \\ & + 15.0,00145.(0,4 - 0,2035)^2 \end{aligned} \quad (6.344)$$

$$\Rightarrow I = 0,001422 \text{ m}^4 \quad (6.345)$$

$$\rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,102594}{0,001422} = 72,1477 \quad (6.346)$$

Les contraintes dans les armatures et le béton sont :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.72,1477.(0,4 - 0,2035) \quad (6.347)$$

$$\rightarrow \sigma_s = 212,655 \text{ MPa} \quad (6.348)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 72,1477.0,2035 = 14,68 \text{ MPa} \quad (6.349)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.20 = 12 \text{ MPa} \quad (6.350)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.351)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.400; \max \left(\frac{400}{2}; 110\sqrt{1,6.1,8} \right) \right] \quad (6.352)$$

$$= \min [266,67; \max (200; 186,68)] \quad (6.353)$$

$$\rightarrow \bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa} \quad (6.354)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 14,68 \text{ MPa} & > \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa} \\ \sigma_s = 212,655 \text{ MPa} & > \bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa} \end{cases} \quad (6.355)$$

les contraintes admissibles ne sont pas vérifiées et on doit donc redimensionner la section considérée à l'ELS.

✿ Dimensionnement à l'ELS :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,102594}{0,2.0,4^2.200} = 0,01603 \quad (6.356)$$

on cherche ensuite le paramètre α_s en passant par l'équation :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.357)$$

$$\rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 1,4427\alpha_s + 1,4427 = 0 \quad (6.358)$$

$$\rightarrow \alpha_s = 0,5258 \quad (\text{on retient } \alpha_s \in]0; 1[) \quad (6.359)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1 - \alpha_s)}\bar{\sigma}_s = \frac{0,5258}{15.(1 - 0,5258)}.200 \quad (6.360)$$

$$\rightarrow \sigma_{bc} = 14,784 \text{ MPa} \quad (6.361)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 14,784 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa} \quad (6.362)$$

On a besoin d'une section tendue et une section comprimée :

$$\delta = \frac{d'}{d} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125 \quad (6.363)$$

$$\alpha_l = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + n\bar{\sigma}_{bc}} = \frac{15.12}{200 + 15.12} = 0,4737 \quad (6.364)$$

$$\rightarrow \mu_l = \frac{\alpha_l^2(1 - \alpha_l/3)}{2n(1 - \alpha_l)} = \frac{0,4737^2.(1 - 0,4737/3)}{2.15.(1 - 0,4737)} = 0,01197 \quad (6.365)$$

la section tendue est donnée par :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{\alpha_l^2(1 - \delta) + 2n(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{2n(1 - \alpha_l)(1 - \delta)} Bd \\ &= \frac{0,4737^2(1 - 0,125) + 2.15.(0,01603 - 0,01197)(1 - 0,4737)}{2.15.(1 - 0,4737)(1 - 0,125)}.0,2.0,4 \end{aligned} \quad (6.366)$$

$$\rightarrow A_s = 0,001508 \text{ m}^2 = 15,08 \text{ cm}^2 \quad (6.367)$$

$$A'_s = \frac{(\mu_s - \mu_l)(1 - \alpha_l)}{(\alpha_l - \delta)(1 - \delta)} Bd \quad (6.368)$$

$$= \frac{(0,01603 - 0,01197).(1 - 0,4737)}{(0,4737 - 0,125).(1 - 0,125)}.0,2.0,4 \quad (6.369)$$

$$\rightarrow A'_s = 0,00056 \text{ m}^2 = 5,6 \text{ cm}^2 \quad (6.370)$$

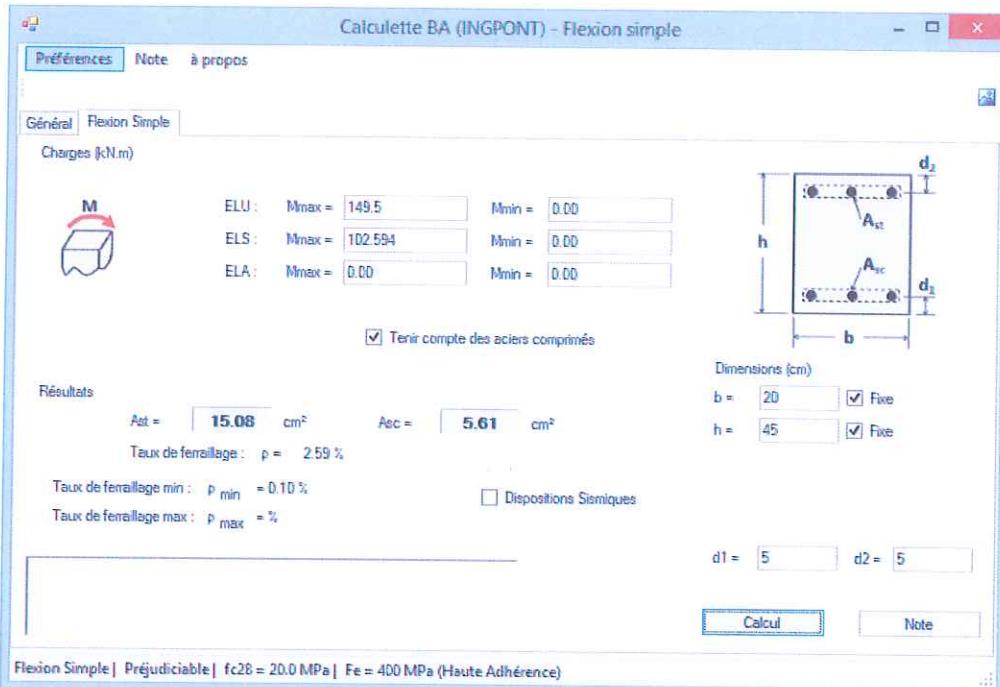


FIGURE 6.12 – Exercice 4 : Résultats de la calculette BA INGPONT

Exercice 5 :

Soit une poutre rectangulaire de largeur $B = 25 \text{ cm}$ soumise à un moment ultime : $M_u = 400 \text{ kNm}$.

La classe de béton est de $f_{c28} = 27 \text{ MPa}$ et la nuance d'acier est FeE500.

1. Supposant que nous visons l'atteinte de l'ELU de compression du béton sans présence d'armatures comprimées, calculer la hauteur de la poutre ?
2. Calculer les sections d'armatures de la poutre à l'ELU ?

Solution 5 :

1. L'atteinte de l'ELU de compression du béton nous oblige de dimensionner la hauteur de la poutre sous le pivot B. Nous allons en plus considérer l'absence des armatures comprimées. Pour cela, nous allons utiliser le tableau (6.3). Donc on a :

$$H \in [2,423 \varphi; 3,423 \varphi] \quad (6.371)$$

on peut proposer la valeur minimale, soit :

$$H = 2,423 \varphi \quad (6.372)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{M_u}{Bf_{c28}}} = \sqrt{\frac{0,4}{0,25.27}} = 0,2434 \quad (6.373)$$

$$\Rightarrow H = 2,423.0,2434 = 0,58 m \quad (6.374)$$

on peut donc adopter la hauteur :

$$H = 60 cm \quad (6.375)$$

2. on a :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 MPa \quad (6.376)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85.27}{1,5} = 15,3 MPa \quad (6.377)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,4}{0,25.(0,9.0,6)^2.15,3} = 0,3586 \quad (6.378)$$

calculons le moment réduit limite μ_e :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15.200.000} = 0,002174 \quad (6.379)$$

$$\Rightarrow \epsilon_e = 2,174 \% \quad (6.380)$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,174} = 0,617 \quad (6.381)$$

$$\Rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) \quad (6.382)$$

$$= 0,8.0,617.(1 - 0,4.0,617) \quad (6.383)$$

$$= 0,372 \quad (6.384)$$

On est bien sur :

$$0,1859 \leq \mu \leq \mu_e : \quad (\text{Pivot B})$$

$$\alpha_u = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu} \right) \quad (6.385)$$

$$= 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2.0,3586} \right) \quad (6.386)$$

$$= 0,585 \quad (6.387)$$

$$\rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,585 = 0,468 \quad (6.388)$$

$$\rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,468 \cdot 0,25 \cdot 0,9 \cdot 0,615,3}{434,78} = 0,002223 m^2 \quad (6.389)$$

La section théorique d'armatures à adopter est donc :

$$A_s = 22,23 cm^2 \quad (6.390)$$

La section réelle à disposer doit être supérieure ou égale à cette section théorique calculée et cela en respectant les diamètres d'armatures normalisés disponibles dans le marché.

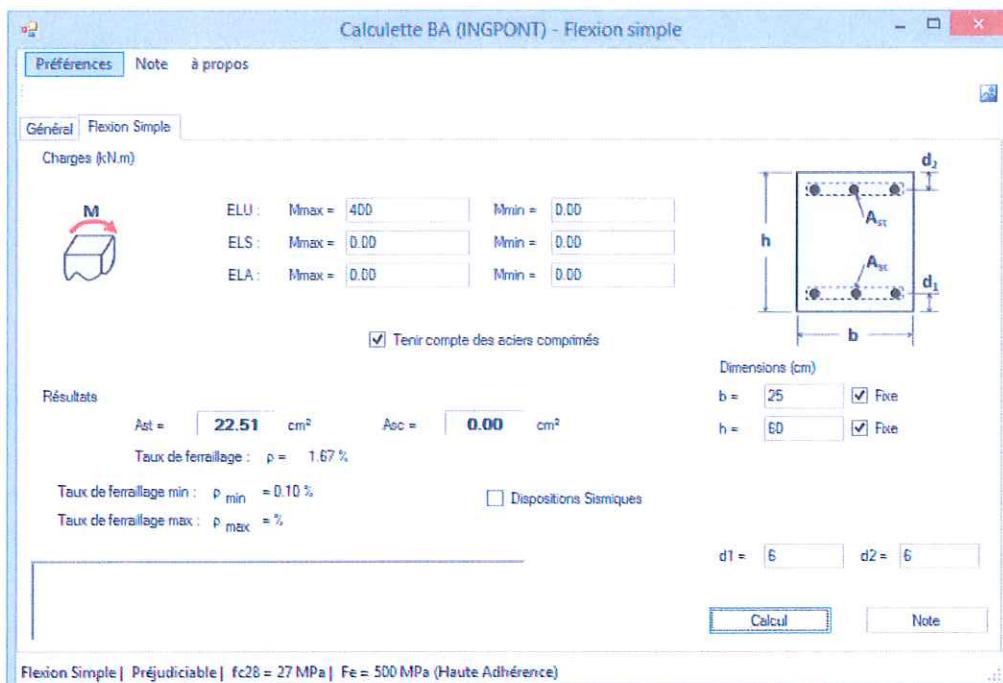


FIGURE 6.13 – Exercice 5 : Résultats de la calculette BA INGPONT

Exercice 6 :

Soit une poutre rectangulaire de dimensions ($22\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) soumise à un moment ultime $M_u = 160\text{ kN.m}$ et un moment de service $M_s = 120\text{ kN.m}$.

La classe de béton est de $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et la nuance d'acier est FeE500. On prend des enrobages égales à 5 cm .

Dimensionner la section considérée sachant qu'on est en fissuration pré-judiciaire ?

⇒ **Solution 6 :**

* Dimensionnement à l'ELU :

Les contraintes limites dans l'acier et le béton sont :

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \text{ MPa} \quad (6.391)$$

$$f_{bu} = \frac{0,85f_{c28}}{\theta\gamma_b} = \frac{0,85 \cdot 25}{1,5} = 14,17 \text{ MPa} \quad (6.392)$$

moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{Bd^2 f_{bu}} = \frac{0,16}{0,22 \cdot 0,45^2 \cdot 14,17} = 0,253 \quad (6.393)$$

moment réduit limite :

$$\epsilon_e = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} = \frac{500}{1,15 \cdot 200000} = 0,00217 = 2,17\% \quad (6.394)$$

$$\Rightarrow \alpha_e = \frac{3,5}{3,5 + \epsilon_e} = \frac{3,5}{3,5 + 2,17} = 0,617 \quad (6.395)$$

$$\Rightarrow \mu_e = 0,8\alpha_e(1 - 0,4\alpha_e) = 0,8 \cdot 0,617(1 - 0,4 \cdot 0,617) = 0,372 \quad (6.396)$$

on est sur le domaine : $0,1859 \leq \mu \leq \mu_e$ (Pivot B)

Calcul de la section d'armature :

$$\alpha_u = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,253}) = 0,371 \quad (6.397)$$

$$\Rightarrow \beta_u = 0,8\alpha_u = 0,8 \cdot 0,371 = 0,297 \quad (6.398)$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{\beta_u B d f_{bu}}{f_{su}} = \frac{0,297 \cdot 0,22 \cdot 0,45 \cdot 14,17}{434,78} = 0,000958 \text{ m}^2 \quad (6.399)$$

$$\Rightarrow A_s = 9,58 \text{ cm}^2 \quad (6.400)$$

* Vérification à l'ELS :

Ordonnée de la fibre neutre Y_s :

$$BY_s^2 + 2n(A_s + A'_s)Y_s - 2n(A'_s d' + A_s d) = 0 \quad (6.401)$$

$$\Rightarrow 0,22Y_s^2 + 2.15.0,000958Y_s - 2.15.0,000958.0,45 = 0 \quad (6.402)$$

$$\Rightarrow 0,22Y_s^2 + 0,02874Y_s - 0,01293 = 0 \quad (6.403)$$

$$\Rightarrow Y_s = -0,32\text{ m} \quad \text{ou} \quad Y_s = 0,1858\text{ m} \quad (6.404)$$

la solution physique est :

$$Y_s = 0,1858\text{ m} \quad (6.405)$$

moment quadratique de la section homogénéisée :

$$I = \frac{BY_s^3}{3} + nA'_s(Y_s - d')^2 + nA_s(d - Y_s)^2 \quad (6.406)$$

$$= \frac{1}{3}.0,22.0,1858^3 + 15.0,000958.(0,45 - 0,1858)^2 \quad (6.407)$$

$$= 0,001473 \quad (6.408)$$

$$\Rightarrow K = \frac{M_s}{I} = \frac{0,12}{0,001473} = 81,4664 \quad (6.409)$$

contraintes dans l'acier et le béton :

$$\sigma_s = nK(d - Y_s) = 15.81,4664.(0,45 - 0,1858) = 322,85\text{ MPa} \quad (6.410)$$

$$\sigma_{bc} = KY_s = 81,4664.0,1858 = 15,14\text{ MPa} \quad (6.411)$$

Contraintes admissibles :

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0,6f_{c28} = 0,6.25 = 15\text{ MPa} \quad (6.412)$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3}f_e; \max \left(\frac{f_e}{2}; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \right) \right] \quad (6.413)$$

$$= \min \left[\frac{2}{3}.500; \max \left(\frac{500}{2}; 110\sqrt{1,6.2,1} \right) \right] \quad (6.414)$$

$$= \min [333,33; \max (250; 201,63)] \quad (6.415)$$

$$= 250\text{ MPa} \quad (6.416)$$

d'où les inégalités :

$$\begin{cases} \sigma_{bc} = 15,14\text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 15\text{ MPa} \\ \sigma_s = 322,85\text{ MPa} > \bar{\sigma}_s = 250\text{ MPa} \end{cases} \quad (6.417)$$

les contraintes admissibles ne sont donc pas vérifiées à l'ELS. Il faudra redimensionner les armatures à l'ELS.

* Dimensionnement à l'ELS :

Moment réduit :

$$\mu_s = \frac{M_s}{Bd^2\bar{\sigma}_s} = \frac{0,12}{0,22,0,45^2,250} = 0,01077 \quad (6.418)$$

déterminons le paramètre α_s :

$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90\mu_s\alpha_s + 90\mu_s = 0 \quad (6.419)$$

$$\Rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 90,0,01077\alpha_s + 90,0,01077 = 0 \quad (6.420)$$

$$\Rightarrow \alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 0,9693\alpha_s + 0,9693 = 0 \quad (6.421)$$

la solution appartenant à l'intervalle $]0;1[$ est :

$$\alpha_s = 0,4555 \quad (6.422)$$

la contrainte dans le béton est :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_s}{n(1-\alpha_s)} \bar{\sigma}_s = \frac{0,4555}{15(1-0,4555)} 250 = 13,943 \text{ MPa} \quad (6.423)$$

on a donc :

$$\sigma_{bc} = 13,94 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad (6.424)$$

On a besoin d'une section tendue seule :

$$A_s = \frac{Bd\alpha_s^2}{2n(1-\alpha_s)} = \frac{0,22,0,45,0,4555^2}{2,15.(1-0,4555)} = 0,001257 \text{ m}^2 \quad (6.425)$$

$$\Rightarrow A_s = 12,57 \text{ cm}^2 \quad (6.426)$$

Ferraillage minimal :

$$A_{\min} = 0,23Bd \frac{f_{tj}}{f_e} = 0,23,0,22,0,9,0,5 \frac{2,1}{500} = 0,000096 \text{ m}^2 \quad (6.427)$$

$$\Rightarrow A_{\min} = 0,96 \text{ cm}^2 \quad (6.428)$$

on peut donc adopter la section :

$$A_s = 12,57 \text{ cm}^2 \quad (6.429)$$

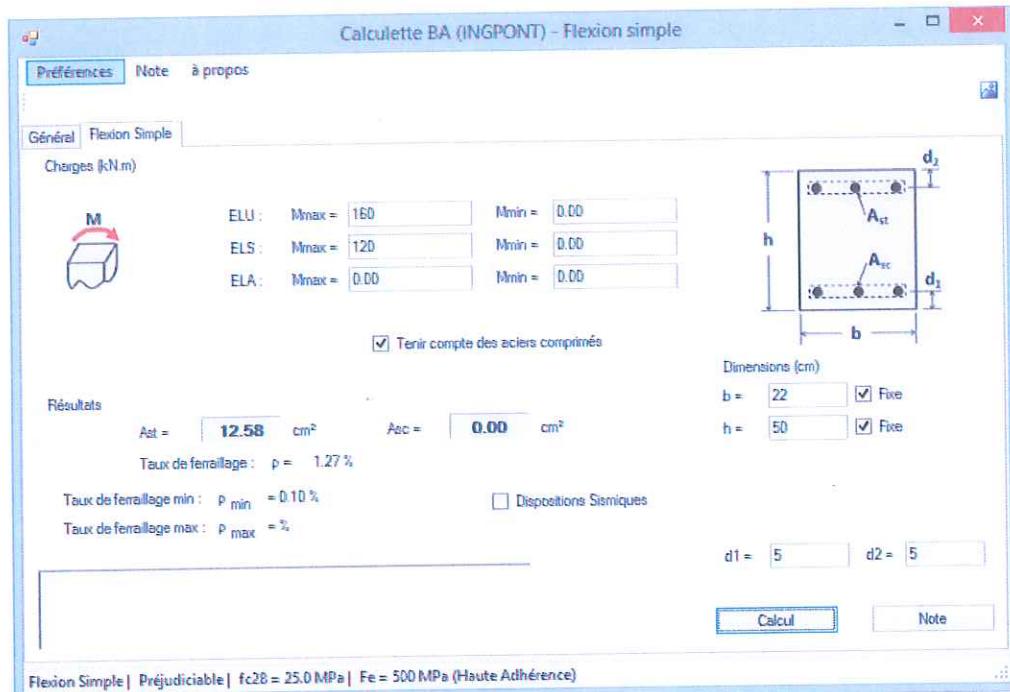


FIGURE 6.14 – Exercice 6 : Résultats de la calculette BA INGPONT