



Mathématiques Financières

Professeur: A. DOUARI

Année universitaire: 2018/2019

1

Objectif du cours :

Ce cours vise à présenter les différents éléments du calcul financier et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement cinq préoccupations :

1. La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé).
2. La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation.
3. La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités.
4. Les grands domaines d'application du calcul financier.
5. Les tableaux d'amortissement des emprunts.

2

Introduction

Définition et justification de l'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent.

C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.

Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- la somme prêtée,
- la durée du prêt,
- et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé

3

-
- Il ne faut surtout pas confondre finance et économie, les mathématiques financières sont un jeu formel qui n'a, fondamentalement, rien à voir avec l'économie.
 - Le jeu financier est défini par quelques règles, presque des axiomes, dont voici une idée :
 - La seule finalité d'un capital est de rapporter de l'argent, on parle de rémunération du capital.
 - L'univers est divisé en deux classes: ceux qui ont de l'argent et qui le placent pour en gagner plus et ceux qui n'en ont pas et qui payent pour en emprunter.
 - La masse financière globale est supposée infinie.
 - Le temps c'est de l'argent, ou plutôt le temps apporte de l'argent à l'argent.

4

Justification de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer:

- ✓ La privation de consommation: Lorsqu'une personne (le prêteur) prête une somme d'argent à une autre (l'emprunteur), elle se prive d'une consommation immédiate.
- ✓ La prise en compte du risque: Une personne qui prête de l'argent, le fait pour une durée étalée dans le temps. Elle court, dès lors, un risque inhérent au futur.

5

Chapitre 1: L'intérêt simple

L'intérêt est la rémunération due par l'emprunteur ou prêteur, en contrepartie de la mise en disposition d'un capital pendant une durée déterminée.

- L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal.
- Il ne s'ajoute pas au capital pour porter lui même intérêt.
- L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté.
- Il est versé en une seule fois au début de l'opération, c'est-à-dire lors de la remise du prêt, ou à la fin de l'opération c'est à dire lors du remboursement.
- L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).

6

1. Formule générale :

on note par :

- C : le capital placé.
- t : le taux.
- n : la durée de placement.
- I: le montant de l'intérêt à calculer en dh

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100}$$

7

Remarque:

Si la durée n est annuelle: $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100}$

Si la durée n est mensuelle: $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{1200}$

Si la durée n est semestrielle: $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{200}$

Si la durée n est par jours: $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{36000}$

Exemple1 : Un capital de 4 000 Dh placé pendant 3 ans au taux de 10%
Calculer l'intérêt simple I.

Exemple2 : Un capital de 50 000 est placé 10 mai et remboursé au 14 septembre au
taux de 6%. Que est l'intérêt dégagé par ce placement ?

8

Applications

1. Calculer l'intérêt produit par un capital de 35 850 dh placé pendant 3 ans à un
taux de 11%.
2. Quel est l'intérêt produit à intérêt simple, par un placement d'une somme
d'argent de 12 500 dh au taux de 10,5% pendant 96 jours?
3. Quel est l'intérêt produit par un placement de 15 500 dh au taux de 9,5%
pendant 7 mois?

9

Applications

4. Soit un capital de 30 000 dh placer à intérêt simple du 17 mars au 27 juillet de la même année, au taux annuel de 12,5%. Calculer l'intérêt produit par ce placement.
5. Un capital de 5200 DH à intérêt simple a produit 52 DH d'intérêts pendant 36 jours . Déterminer le taux de placement.
6. A quel taux semestriel a été placé un capital de 5000 dh qui, en 102j, a rapporté 85 dh d'intérêts ?

10

2. Valeur acquise :

La valeur acquise notée V est la somme du capital et l'intérêt.

Calcul pratique:

Soit,

C: le montant du capital prêté ou emprunté en dh (valeur nominale)

t: le taux d'intérêt annuel

n: la durée de placement

I: le montant de l'intérêt à calculer en dh

V: la valeur acquise par le capital en dh (valeur future)

$$\text{on a: } I = C \cdot t\% \cdot n \Rightarrow I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100}$$

$$\text{et } V = C + I \Rightarrow V = C + \frac{C \cdot t \cdot n}{100}$$

$$V = C \left(1 + \frac{t \cdot n}{100} \right)$$

11

Remarque:

Si la durée n du placement est exprimée en années, on aura :	$V = c \left(1 + \frac{t \cdot n}{100} \right)$
Si la durée n du placement est exprimée en mois, on aura:	$V = c \left(1 + \frac{t \cdot n}{1200} \right)$
Si la durée n du placement est exprimée en jours, on aura:	$V = c \left(1 + \frac{t \cdot n}{36000} \right)$

N.B

Lorsque la durée est exprimée en jours, les mois sont comptés à leur nombre exact de jours, et on ne tient compte que de l'une des deux dates extrêmes.

Exemple: Calculer l'intérêt et la valeur acquise d'un placement à intérêts simple de 15 000 dh pendant 50 jours au taux de 9% l'année.

12

Applications:

Application1 : *M. HALIM* a placé à la banque 15 200 dh à intérêts simples au taux de 8 % l'an. La date de placement est le 05/03/2006.

T.A.F :

Calculer les intérêts produits au 10/04/2006.

Calculer la valeur acquise.

Application2 : Un capital de 19 800 dh placé à intérêts simples a produit un intérêt de 222,75 dh. Le taux de placement est de 9 % l'an. Quelle est la durée de placement en jours ?

Application3 :

Un capital placé à intérêts simples à 9,6 % l'an pendant 81 jours a produit un intérêt de 540 dh. Quel était le capital placé ?

13

Application 4 :

Un capital de 40 000 placé à intérêts simples à t % l'an pendant 73 jours a réalisé une valeur acquise de 40 730 dh

Calculer les intérêts produits par ce capital.

Déterminer le taux de placement.

Application 5 :

Dans le but de doter le service comptable et financier d'un micro-ordinateur au prix de 24 60 dh à la date du 31/12/2006, l'entreprise STAR a décidé de placer à intérêts simples une somme d'argent C le 25/10/2006 au taux de 4,5 % l'an. Calculer la somme C à placer ?

Application 6: Une somme de 10 000 dh est placée sur un compte du 23 Avril au 9 Août au taux simple de 7%.

Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.

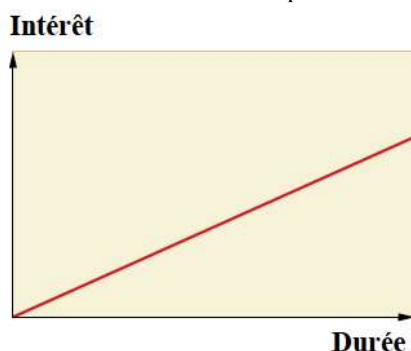
Calculer la valeur acquise par ce capital.

Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dh.

14

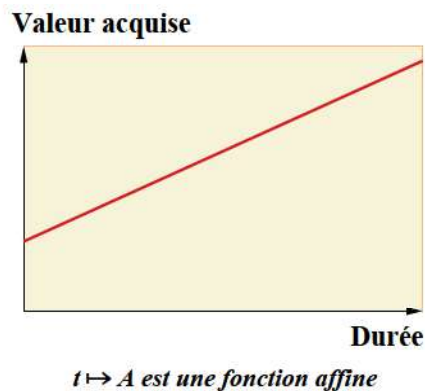
3. Représentation graphique:

- L'intérêt simple :
 - La représentation graphique de la fonction qui donne l'intérêt en fonction du temps est une droite passant par l'origine. La fonction est croissante.
 - L'intérêt est une fonction linéaire du temps.



$t \mapsto I$ est une fonction linéaire

- La valeur acquise :
 - La représentation graphique de la fonction qui donne la valeur acquise en fonction du temps est une droite ne passant pas par l'origine. La fonction est croissante.
 - La valeur acquise est une fonction affine du temps.



4. Taux moyen d'une série de placements simultanés:

Soit J opérations de placement simultanées à intérêt simple de sommes C_j , aux taux t_j , sur n_j jours.

Opération de placement	1	2	J
Capital	C_1	C_2	C_J
Taux	t_1	t_2	t_J
Durée	n_1	n_2	n_J

Le taux moyen de cette série de placement est un taux unique T qui permet d'obtenir le même intérêt total.

L'intérêt total de cette série est égal à :

$$I = \frac{C_1 \cdot t_1 \cdot n_1}{36000} + \frac{C_2 \cdot t_2 \cdot n_2}{36000} + \dots + \frac{C_J \cdot t_J \cdot n_J}{36000}$$

17

Le taux moyen de placement sera calculé par la résolution de l'égalité suivante :

$$\frac{C_1 \cdot t_1 \cdot n_1}{36000} + \frac{C_2 \cdot t_2 \cdot n_2}{36000} + \dots + \frac{C_J \cdot t_J \cdot n_J}{36000} = \frac{C_1 \cdot T \cdot n_1}{36000} + \frac{C_2 \cdot T \cdot n_2}{36000} + \dots + \frac{C_J \cdot T \cdot n_J}{36000}$$

$$\sum_{i=1}^J C_i \cdot t_i \cdot n_i = T \cdot \sum_{i=1}^J C_i \cdot n_i$$

$$T = \frac{\sum_{i=1}^J C_i \cdot t_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^J C_i \cdot n_i}$$

18

Exemple 1 :

Calculer l'intérêt global produit par les 3 capitaux suivants placé à intérêts simples au taux unique de 9%

$$C_1 = 16.000\text{dh pendant } 36\text{j}$$

$$C_2 = 20.000\text{dh pendant } 60\text{j}$$

$$C_3 = 30.000\text{dh pendant } 90\text{j}$$

Exemple 2 :

Placement A : 3.800 Dh ; taux : 7.5% ; 25 mai15 juillet.

Placement B : 3.420 Dh ; taux : 8.2% ; 25 mai31 juillet.

Placement C : 780 Dh ; taux : 8.5% ; 25 mai31 août.

Calculer le taux moyen de placement.

19

Exercice 3:

Trois capitaux de montants respectifs 10 000 DH, 20 000 DH et 40 000 DH ont été placés à intérêt simple au taux respectifs: 8%, 6% et 10% pendant les durées respectives de 8 mois, 9 mois et 6 mois.

Calculer le taux moyen de placement de ces trois capitaux

Exercice 4:

Trois capitaux de montants respectifs 15 000 DH, 31 500 DH et 5 000 DH ont été placés à intérêt simple pendant les durées respectives de 30 jours, 50 jours et 45 jours. Les taux d'intérêt annuels auxquels ont été placés les deux premiers capitaux sont respectivement 7% et 5%.

Quel doit être le taux d'intérêt de placement du 3^{ème} capital pour que le taux moyen de placement annuel des 3 capitaux soit 6%?

20

Exercice 5:

Trois capitaux de montants respectifs 7 000 DH, 20 000 DH et C_3 ont été placés aux taux d'intérêt simple annuels respectifs 9%, 5% et 10%, pendant les durées respectives de 100 jours, 55 jours et 36 jours.

Quel est le montant du 3^{ème} capital C_3 pour que le taux moyen de placement annuel des 3 capitaux soit 7%?

Exercice 6:

Trois capitaux de montants respectifs 6 000 DH, 9 000 DH et 4 000 DH ont été placés aux taux d'intérêt simple annuels respectifs 5%, 9% et 8%, pendant les durées respectives de 4 mois, 3 mois et n_3 mois pour le 3^{ème} capital.

Quel est la durée n_3 de placement du 3^{ème} capital pour que le taux moyen de placement annuel des 3 capitaux soit 7,5%?

21

5. Escompte commercial

- Un effet de commerce (lettre d'échange, etc.) constate l'engagement pris par un débiteur de payer à son créancier à une date déterminée une somme d'argent, montant de la dette qu'il a contracté.
- L'escompte commercial est l'intérêt de la valeur nominale de l'offre, calculé au taux d'escompte en fonction de la durée qui sépare le jour de la négociation (remise de l'effet à la banque) du jour de l'échéance, l'année financière étant comptée pour 360 jours.

22

a. Formule :

on note par :

C : la valeur nominale de l'effet.

n : le nombre de jours (durée de l'escompte).

T : le taux d'escompte.

E : le montant de l'escompte.

a : la valeur escomptée n jours avant l'échéance (valeur actuelle de l'effet).

On a :

$$E = \frac{C.t.n}{36.000} ; \quad a = C - E$$

23

Applications:

1. Un commerçant négocie une traite de 8.240Dh, payable dans 55 jours. Le taux d'escompte 12%. Calculer le montant de l'escompte et la valeur actuelle (a).
2. Un technicien négocie le 5 mai une traite d'un montant de 10 000Dh dont l'échéance est de 20 juillet de la même année. La banque escompte la traite à un taux de 13%. Quel est le montant de l'escompte et de la valeur actuelle ?
3. Un fournisseurs négocie le 9 mai une traite d'un montant de 15 000 dh dont l'échéance est le 15 août de la même année. La banque escompte la traite à un taux de 12 %. Quel est le montant de l'escompte ?

24

b. Les agios de l'escompte :

D'une manière générale, l'agio se compose :

- L'escompte.
- Diverses commissions.
- Et la TVA.

- Les commissions sont proportionnelles aux fixes.
- au Maroc la TVA est de 10%. Elle est appliquée directement sur l'ensemble des agios (H.T) qui se compose le plus suivant de : « l'escompte et les commissions ».
- la durée réelle de l'escompte est parfois négociée d'un ou plusieurs jours appelés « le jours de banque »

$$\text{Valeur nette} = \text{valeur nominal} - \text{Agio (TTC)}$$

25

Exemple 1 :

Soit un effet de commerce de 50 000 Dh échéant le 22 juillet et escompté le 5 avril de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte 13%.
- Commissions de manipulation 2Dh/effet.
- TVA : 10%.
- Tenu compte d'un jour de banque.

Calculer la valeur nette :

Exemple 2:

Soit un effet de commerce d'un montant de 25 000 DH, échéant le 24 juin 2016 et escompté le 15 avril de la même année aux conditions suivantes :

- Taux d'escompte 11%
- Commissions de manipulation 2,5 dh par effet
- T.V.A 10%
- Tenir compte de deux jours de banque

Quel est le montant de l'escompte ?

26

c. Taux réel de l'agio (taux effectif de l'escompte) :

Définition : le taux réel de l'agio est le taux unique qui, par la seule utilisation, permettrait d'obtenir le montant de l'agio.

Formule :

Si tr est le taux réel alors:

$$tr = \frac{\text{Agio} \times 36000}{\text{Valeur nominale} \times \text{Durée réelle}}$$

Exemple:

Reprenons les éléments de l'exemple 1 précédent et calculons le taux réel.

27

d. Equivalence de deux effets :

Définition : deux effets sont équivalentes à une date déterminée, si escompte au même taux, ils ont la même valeur escomptée (valeur actuelle). Cette date est la date d'équivalence.

Formule : on note par :

C_1 et C_2 : les valeurs nominales.

J_1 et J_2 : la durée de l'escompte.

t : taux de l'escompte.

V_1 et V_2 : valeurs actuelles.

On a $V_1 = V_2$

$$C_1 - \frac{C_1 t J_1}{36\,000} = C_2 - \frac{C_2 t J_2}{36\,000}$$

28

Exemples:

1. Une personne souhaite remplacer le 10 juin un effet de 50.000 et à échéance le 20 juillet un autre échéance le 10 septembre. Déterminer la valeur de l'effet de remplacement, le taux annuelle d'escompte est de 10%.
2. Un commerçant souhaite remplacer le 15 mai un effet de 10 000 DH arrivant à échéance le 24 juin, par un autre échéant le 14 juillet. Déterminer la valeur de l'effet de remplacement, le taux annuelle d'intérêt est de 13%.
3. Le débiteur désire remplacer un effet de valeur nominale de 75.000dh qu'il doit payer dans 60 j par un autre effet de valeur nominale 74.600dh. Quelle serait l'échéance de cette nouvelle dette (taux d'escompte 13%).
4. A quelle date un effet de valeur nominale 20.000dh à échéance du 15 Avril est-il équivalent à un effet de 20.435,86dh à échéance du 14 juin et la même année ? taux d'escompte 12,60%.

29

Exercices

Exercice 1:

Calculer la valeur nominale d'un effet qui, escompté au taux de 12% pendant 69 jours, a une valeur actuelle commerciale de 15 045,80 dh.

Exercice 2:

Un effet de 31200 a été escompté à 9 % et a donné une valeur actuelle commerciale de 30888 dh au 16 avril. Combien de jours l'effet avait-il à courir ? En déduire son échéance.

Exercice 3 :

Quel est le taux d'escompte d'un effet de 14960 dh, échéant le 28 juin et ayant donné une valeur actuelle, au 2 avril, de 14526,16 dh ?

Exercice 4 :

Deux effets, dont l'un est payable dans 120 jours, l'autre dans 90 jours, sont escomptés au taux de 12%.

Le total des montants des deux effets est de 34000 dh et le total des escomptes de 1200 dh .

Quelle est la valeur nominale de chaque effet sachant que le premier est supérieur au second ?

Exercice 5 :

Un commerçant est en relation avec 2 banques qui lui font les conditions d'escompte suivantes :

B.M.C.I : escompte 12% ; commission 1%

B.C.M : escompte 10% ; commission 2%.

Sachant qu'il désire négocier un effet de 14400 dh, on demande à partir de quelle durée (nombre de jours restant à courir), il aura intérêt à s'adresser à la B.M.C.I.

31

Exercice 6:

Une personne dispose d'un capital .Elle en place :

- $\frac{1}{4}$ à 7% pendant 18 mois
- $\frac{5}{6}$ du reste à 9% pendant 16 mois
- Le reste soit 5000 à 8% pendant un certain temps

Ces différents placements ont rapporté un intérêt total de 4150 DH

Calculer le capital total et la durée de placement des 5000 DH

Exercice 7:

Un effet de 6210 DH est négocié le 12 juillet au taux de 9.5 % l'an, par un commerçant qui reçoit en contrepartie une somme de 6151 DH.

Quelle est la date d'échéance de cet effet ?

Exercice 8:

On remplace un effet de 13000 DH au 31 janvier par un effet au 02 avril.

Date d'équivalence : 1^{er} janvier (février compte 28 jours).Taux d'escompte 10.50 % .

Quelle est la valeur nominale du nouvel effet ?

32

Exercice 9:

UN commerçant vend une marchandise au comptant au prix de 1 750 DH ou à crédit, de la façon suivante

- 350 DH au comptant,
- Le reste par acceptation de 5 traites de même valeur de 285 DH échéant de 30 en 30 jours.

À quel taux les calculs devront-ils être faits pour que les 2 règlements soient équivalents le jour de la vente ?

Exercice 10:

Un commerçant doit à son créancier les 5 effets suivants :

- 3 888 DH au 10 septembre N
- 5 790 DH au 25 septembre N
- 7 280 DH au 30 Septembre N
- 9 436 DH au 15 Octobre N
- 5 400 DH au 30 Octobre N.

Il veut se libérer en une seule fois en payant un effet de 31 794 DH.

Quelle devra être l'échéance de cet effet ?

Exercice 11:

Le 15 Mars N, un commerçant présente 3 effets à l'escompte. La banque lui remet la même somme pour chacun d'eux. Sachant que le premier s'élève à 8 460 DH au 13 Juillet, le deuxième et de 8 400 DH au 1^{er} Juin, le troisième est de 8 310 DH ; on demande de calculer :

- 1°) Le taux d'escompte appliqué par la banque;
- 2°) L'échéance du troisième effet;
- 3°) La date à laquelle on pourrait remplacer les trois effets par un effet de 25 170 DH.

33