Statistique Descriptive

4ème Chapitre : Les caractéristiques de dispersion (étendue, quantiles, variance et écart type).

Introduction

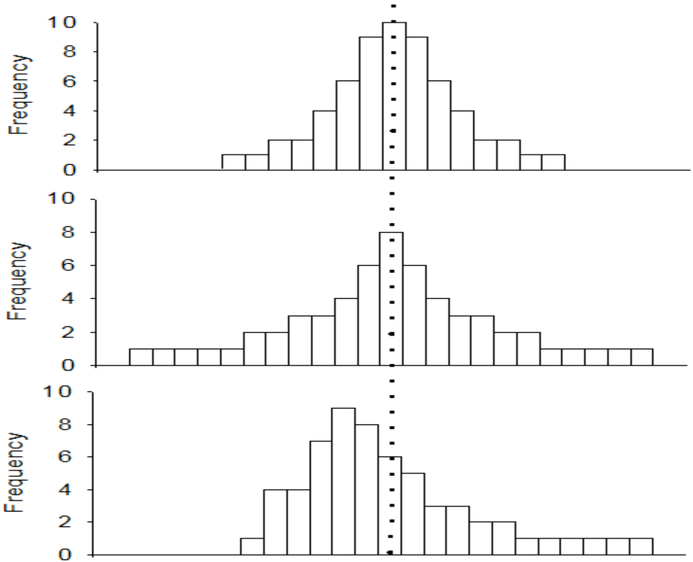
Introduction

QUEL EST L'INTERÊT DES PARAMÈTRES DE POSITION ?

Les paramètres de position (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils permettent de situer la position de plusieurs séries comparables.

Cependant, comme le montre le schéma qui suit, ces paramètres ne suffisent pas pour « résumer », pour « décrire » (de façon synthétique) une distribution. En effet, ces paramètres permettent de **situer** la gamme de valeur où la série se situe, mais, pour des paramètres de position très proches, on peut rencontrer des courbes dont la dispersion (l'étalement) est très différente. C'est ici qu'interviennent les paramètres de dispersion.

Introduction



Introduction

Une information supplémentaire à la tendance centrale est alors nécessaire pour pouvoir distinguer entre ces différentes formes de distribution.

Les Mesures de dispersion : Ces paramètres permettent de mesurer l'étalement de la série statistique autour de sa tendance centrale, et de comparer les étendues des distributions entre elles.

Une autre signification de la mesure de dispersion est l'information qu'elle fournit visant à préciser la position relative d'une observation par rapport aux autres.

La dispersion d'une série statistique peut être mesurée par les fluctuations des valeurs de la série autour de la moyenne, c'est-à-dire par les différences $x_i - \overline{x}$.

Quelques situations concrètes

Qu'arriverait-il, par exemple, si certaines de nos décisions quotidiennes n'étaient basées que sur la moyenne ?

- Les grands immeubles seraient construits pour résister à la force moyenne du vent, avec les conséquences que cela comporterait en cas de tempête ;
- La connaissance d'un revenu moyen par habitant dans un pays donné conduirait à ignorer la pauvreté d'une frange de la population ;
- En termes de contrôle de qualité, au cours d'un processus de production, tout écart à la norme moyenne conduirait à un taux de rejet excessif ou poserait des problèmes insolubles de "remboursements".

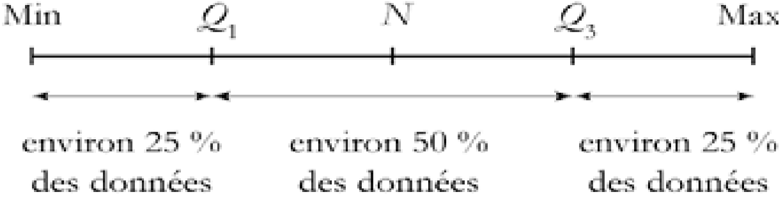
Pour éviter ce genre de problèmes, il est nécessaire de prendre en compte non seulement la tendance centrale du phénomène considéré mais aussi les variations possibles autour de cette tendance centrale.

L’Écart interquartile & L’Étendue

L'Écart interquartile & L'Étendue

Rappelons que :

- **Le premier quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_1 telle qu'au moins 25% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1.
- **Le deuxième quartile** d'une série statistique c'est la **médiane**.
- **Le troisième quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_3 telle qu'au moins 75% des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3.



L'Écart interquartile & L'ÉTENDUE

Définitions

- L'intervalle $[Q_1; Q_3]$ est appelé intervalle interquartile.
- Le réel $Q_3 - Q_1$ est appelé écart interquartile.
- On appelle étendue d'une série statistique la **différence** entre la plus grande valeur de la série et la plus petite :

$$E = V_{max} - V_{min}.$$

Remarque : La connaissance de l'étendue permet de mieux cerner la dispersion autour des valeurs de position. Ainsi, une étendue élevée par rapport à la moyenne arithmétique renseigne sur une importante dispersion.

L’Écart interquartile & L’ÉTENDUE

Remarques :

1- L’ écart interquartile mesure la **dispersion** des valeurs autour de la médiane ; plus l’écart est petit, plus les valeurs de la série appartenant à l’intervalle interquartile sont concentrées autour de la médiane.

2- Contrairement à l’étendue qui mesure l’écart entre la plus grande et la plus petite valeur, **l’écart interquartile élimine les valeurs extrêmes** qui peuvent être douteuses, cependant il ne tient compte que de 50% de l’effectif.

L'Écart interquartile & L'ÉTENDUE

Exemple 1 : Cas Discret

Le tableau suivant donne la répartition des notes de 31 élèves.

Notes	Effectif	Eff cumulé Croissant
5	1	1
8	2	3
9	6	9
10	7	**16**
11	5	21
12	4	25
14	3	28
16	2	30
18	1	31

On a N= 31 ⟹ N/2 = **15.5**

Donc Médiane = Me = 10

On a N/4 = 7.75 et 3N/4 = 23.25

Donc $Q_1 = 9$ et $Q_3 = 12$ Intervalle interquartile = [9 , 12]

L'écart interquartile = IQ = 12- 9 = 3

L'**étendue** de la série = E = 18-5 =13

Moyenne arithmétique simple = $\bar{x} = \frac{1\times5+2\times8+6\times9+\cdots+1\times18}{31} = 11$

Le **mode** de la série = Mo = 10(c'est la modalité ayant l'effectif le plus élevé)

L'Écart interquartile & L'ÉTENDUE

Exemple 2 : Variable Continue

Une enquête est effectuée pour étudier le temps (en minutes) consacré au sport, semaine, par les 1312 employés d'une usine. Les résultats, regroupés en classes, indiqués dans le tableau suivant :

Temps (min)	C_i	Effectifs	Fréquence $100\, f_i$ %	Fréq cumul croissante %	$c_i f_i$
[0 ; 30[	15	175	13	13	1,95
[30 ; 60[	45	392	30	43	13,5
[60 ; 90[	75	267	21	64	15,75
[90 ; 120[	105	127	9	73	9,45
[120 ; 150[	135	168	13	86	17,55
[150 ; 180[	165	120	9	95	14,85
[180 ; 240[	210	63	5	100	10,5
				Total	83,55

Moyenne arithmétique $= \bar{x} = (13\times15 + 30\times45 + \ldots\ldots + 5\times210)/100 = 83{,}55$

Mode $= Mo = 30 + \dfrac{(30-13)}{(30-13)+(30-21)} \times (60-30) = 49.6$

Premier Quartile $= Q_1 = 30 + \dfrac{100\times0.25-13}{30} \times (60-30) = \mathbf{42}$

Mediane $= Me = Q_2 = 60 + \dfrac{100\times0.5-43}{21} \times (90-60) = 70$

Troisième Quartile $= Q_3 = 120 + \dfrac{100\times0.75-73}{13} \times (150-120) = 124{,}62$

L'étendue = 240 − 0 = 240

Variance & Écart type

Variance & l'Écart type

La variance est un indicateur de la dispersion d'une série par rapport à sa moyenne. Elle représente la somme des carrés des écarts à la moyenne divisée par le nombre d'observations.

Définition

La variance d'une série statistiques est donnée par la formule :

$$V(x) \overset{def}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \tag{1}$$

Avec

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sont les observations ;
- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ est la moyenne arithmétique simple de la série.

Remarque : Il existe une formule plus simple que (1) , qui nécessite moins de calcul ; surtout quand $\bar{x}$ est un décimal.

Variance & l'Écart type

Théorème de Koenig :

La variance peut aussi s'écrire

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (2)$$

Démonstration :

$$V(x) \overset{def}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \overset{id.rem}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$\overset{distr}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\bar{x} + \bar{x}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \quad \text{car } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - x^2$$

Variance & l'Écart type

Exemple : Considérons la série suivante

$$\{11; 14; 24; 8; 32; 9; 10; 17\}$$

On a

$$\overline{x} = \frac{11 + 14 + 24 + 8 + 32 + 9 + 10 + 17}{8} = 15.625$$

En appliquant la définition :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{(11 - 15.625)^2 + (14 - 15.625)^2 + \ldots + (17 - 15.625)^2}{8} \\ &\approx 62.225 \end{aligned}$$

En appliquant la propriété :

$$V(x) = \frac{11^2 + 14^2 + \ldots + 17^2}{8} - 15.625^2 = \frac{2451}{8} - 244.15 \approx 62.225$$

Variance & l'Écart type

Remarques :

* Dans l'expression (2), la moyenne n'intervient qu'une seule fois.

* Si une variable quantitative discrète X, pouvant prendre k valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_k$ avec des effectifs $n_1, \ldots, n_k$ alors

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2$$

i.e ; k est le nombre de répétition d'une valeur de la modalité.

Variance & l'Écart type

Exemple : Calcul de la variance à partir de la définition

Répartition de 10 notes obtenues par un élève en MATHS :

Note= x_i	Effectif n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
6	1	-5.5	30.25	30.25
9	1	-2.5	6.25	6.25
10	2	-1.5	2.25	4.5
11	1	-0.5	0.25	0.25
12	2	0.5	0.25	0.5
13	1	1.5	2.25	2.25
16	2	4.5	20.25	40.50
Total	10			**84.50**

D'abord, on calcul **la moyenne arithmétique** de cette série :

$$\bar{x} = \frac{1\times6+1\times9+2\times10+\cdots+2\times16}{10} = 11.5$$

La variance $V = \dfrac{\sum n_i(x_i - \bar{x})^2}{10} = 8.45$

Variance & l'Écart type

Exemple : Calcul de la variance à partir de la propriété

Répartition de 10 notes obtenues par un élève en MATHS :

Note = x_i	Effectif n_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
6	1	36	36
9	1	81	81
10	2	100	200
11	1	121	121
12	2	144	288
13	1	169	169
16	2	256	512
Total	10		1407

La moyenne arithmétique de cette série c'est :

$$\bar{x} = \frac{1\times6+1\times9+2\times10+\cdots+2\times16}{10} = 11.5$$

La variance est donnée par :

$$V(x) = \frac{1407}{10} - 11.5^2 = 140.7 - 132.25 = 8.45$$

Variance & l'Écart type

Cas de variable continue

Dans le cas continu, nous remplaçons x_i dans (1) par c_i le centre de la classe afin de calculer la variance.

Exemple : On a relevé les salaires mensuels, en euros, dans une entreprise.

Salaire	Effectif	centre	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
[800 ;1000[	20	900	18 000	16 200 000
[1000 ;1200[	15	1100	16 500	18 150 000
[1200 ;1500[	10	1350	13 500	18 225 000
[1500 ;2000[	5	1750	8 750	15 312 500
Total	50		56 750	67 887 500

$$\overline{x} = \frac{56750}{50} = 1135 \text{ et } V(x) = \frac{67887500}{50} - 1135^2 = 69525$$

Variance & l'Écart type

Définition :

L' Écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma_x = \sqrt{v(x)}$$

<u>Remarques :</u>

1- L'écart type est un paramètre plus fin que l'étendue, car il tient compte de la répartition des valeurs.

2- L'écart type est exprimé dans la même unité que la variable.

3- L'écart type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Plus la variance est grande, plus les valeurs du caractère étudié sont dispersées autour de la moyenne.

4- On peut correctement résumer une série statistique par le couple (moyenne ; écart type).

L’indice de dispersion : coefficient de variation

L'indice de dispersion : coefficient de variation

coefficient de variation

Le coefficient de variation est égal au **rapport** de l'écart type par la moyenne de la distribution :

$$C_X = \frac{\sigma_X}{\overline{X}}$$

Intérêt de l'utilisation du coefficient de variation (ou de dispersion)

Lorsque deux séries (ou plusieurs) sont exprimées en unités différentes, l'analyse de la dispersion doit se faire par le biais du coefficient de variation plutôt que part le seul écart type ou écart absolu moyen (à voir plus loin).

L'indice de dispersion : coefficient de variation

Exemple :

Les deux séries suivantes correspondent aux salaires mensuels perçus par les ouvriers d'une entreprise exprimés une première fois en **DH** et une seconde fois en **centimes**.

Série 1 : 1 150, 1 200, 1 600, 1 850, 2 150, 2 200, 2 350, 2 400, 3 000.
Série 2 : 115 000, 120 000, 160 000, 185 000, 215 000, 220 000, 235 000, 240 000, 300 000.

La variance des deux séries est obtenue à partir de la formule:

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{9} x_i^2 - \bar{x}^2$$

L'écart type pour chacune des deux séries est obtenu à partir de la formule:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Nous trouvons **σ_1=566,55** et **σ_2=56 655.**

Le fait que σ_2 est plus élevée que σ_1 ne révèle pas une grande dispersion de la second par rapport à la première : c'est seulement **l'effet des unités de mesure** (1 dh = 100 centimes).

Les **coefficients de variation** (CV) associés à chaque série :

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{566{,}55}{1988{,}88} = 0{,}28 \quad \textbf{et} \quad CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{56655}{198888} = 0{,}28.$$

Conclusion : Les deux séries sont bien de même dispersion.

L'écart moyen absolu

L'écart moyen absolu

L' écart moyen absolu est la somme des valeurs absolues des écarts à la **moyenne** divisée par le nombre d'observations :

$$E_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

1) Cas d' une série discrète :

$$E_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \, |x_i - \bar{x}|$$

2) Cas d' une série continue :

$$E_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \, |c_i - \bar{x}|$$

avec c_i le centre de la classe

L'écart moyen absolu

Exemple 1.

Les dépenses par mois (en dirhams) d'électricité de l'atelier « Finition » de la société « Tarek et Frères », pour l'exercice 1996, s'établissent ainsi :

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Consommations(dh)	1200	900	800	1400	2000	600	1800	2600	2800	1100	900	700

a. La **consommation moyenne** mensuelle c'est

$$\bar{x} = \frac{1200 + 900 + 800 + \ldots + 900 + 700}{12} = \frac{16800}{12} = 1400.$$

b.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Consommations(dhs)	1200	900	800	1400	2000	600	1800	2600	2800	1100	900	700
$e_i = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	200	500	600	0	600	800	400	1200	1400	300	500	700

L'**écart moyen absolu** est donné par : $E_{moy} = \frac{7200}{12} = 600.$

Conclusion : On peut dire que la consommation d'électricité s'écarte, en moyenne, de la consommation moyenne (1 400 dh) de 600 dh.

L'écart moyen absolu

Exemple 2.

Une enquête réalisée par la société « Soleil », spécialisée dans la vente de produits de beauté, sur la répartition de ses clients en fonction de leur salaire a donné les résultats suivants :

Salaires	Centres x_i	n_i	$n_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
[0 – 1 000[	500	30	15 000	1 085	32 550
[1 000 – 1 500[	1250	25	31 250	335	8 375
[1 500 – 2 000[	1750	14	24 500	165	2 310
[2 000 – 2 500[	2250	9	20 250	665	5 985
[2 500 – 3 000[	2750	12	33 000	1 165	13 980
[3 000 – 3 500[	3250	6	19 500	1665	9 990
[3 500 – 4 000[	3750	4	15 000	2 165	8 660
Totaux		**100**	**158 500**		**81 850**

Le **salaire moyen** des clients de la société : $\bar{x} = \frac{158500}{100} = 1585$ dh

L'**écart moyen absolu** $E_{moy} = \frac{81850}{100} = 818{,}50.$

Conclusion : Les salaires des clients s'écartent en moyenne du salaire moyen 1 585 dh de 818,50 dh.

L'écart médian absolu

L'écart médian absolu

L' écart médian absolu est la somme des valeurs absolues des écarts à la **médiane** divisée par le nombre d'observations :

$$E_{med} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|$$

L'écart médian absolu se calcul de la même façon que l'écart moyen absolu, à différence, au lieu de calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ il faut calculer la médiane de la série *M.*

Les Moments

Définition : Moments

On appelle moments à l'origine d'ordre $r \in \mathbb{N}$ le paramètre :

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$$

1- Cas d' une série discrète :

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r$$

2- Cas d' une série continue :

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^r$$

avec c_i le centre de la classe

Les Moments

Définition : Moments centrés

On appelle moments centrés d'ordre $r \in \mathbb{N}$ le paramètre

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$$

1- Cas d' une série discrète :

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^r$$

2-Cas d' une série continue :

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i - \bar{x})^r$$

avec c_i le centre de la classe

Les Moments

Les moments généralisent la plupart des paramètres.

Cas particuliers :

$$m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \;\Rightarrow\; \text{Moyenne arithmétique}$$

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} = 0$$

$$m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = V_x^2 + \bar{x}^2 \;\Rightarrow\; \text{d'après théorème Koenig}$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = V_x \;\Rightarrow\; \text{Variance}$$

Robustesse

Données : 3 ; 5 ; 6 ; 4 ; 7 ; 4 ; 60 ; 7 ; 3 ; 6 ; 5

Ordonnées : 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 60

	sans 60	avec 60
n	10	11
$\sum x$	50	110
m	5	10
(x-m)	-2 -2 -1 -1 0 0 1 1 2 3	-7 -7 -6 -6 -5 -5 -4 -4 -3 -3 50
$\sum(x-m)^2$	20	2770
s^2	2	251,8
s	1,41	15,87
M	5	5
Q1	4	4
Q3	6	7
IQ	2	3
w	4	57