Pr. M. LAKHSSASSI TC - ING UIC 2018 - 2019

Mathématiques Appliquées

G1

Quizz 1 :

Q 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y' + xy = e^{-x^2/2}$$

Q 2 : Résoudre :

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0 \quad \text{via : } t := \arctan x$$

CORRIGÉ

Q 1 :

(SH) : $y_h' + xy_h = 0$

$$y_h = \lambda e^{-\int^x x\,dx} = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \; ; \lambda \in \mathbb{K} \; (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

$$\boxed{y_h = \lambda e^{-x^2/2} \; , \; \lambda \in \mathbb{K}}$$

(SP) : Méthode de Variation de Constante : EDL 1 à coeff non constants

$y_p = \lambda(x) . e^{-x^2/2}$ où $\lambda'(x) = e^{-x^2/2} \, e^{+x}$

$$= e^{-x^2/2} . e^{+x^2/2}$$

$$= e^{-x^2/2 + x^2/2} = e^0 = 1.$$

d'où $\lambda(x) = x + c$, $c \in \mathbb{K}$

on cherche $\underline{\underline{\text{une}}}$ SP, on prend donc $c := 0$.

d'où $\boxed{y_p = x e^{-x^2/2}}$

d'où (S_h) : $\boxed{y = (x+\lambda)\, e^{-x^2/2}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{et } I = \mathbb{R}}$ (y définie et dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$.)

Ex 2 :

$t := \arctan x$ (d'où $x \in \mathbb{R}$)

$$y(x) = y(\tan t) = y \circ \tan(t) = z(t) = z(\arctan x)$$

$$\boxed{y(x) = z(\arctan x)}$$

d'où : $y'(x) = \arctan'(x) \cdot z'(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot z'(\arctan x)$

et $y''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \cdot z'(\arctan x) + \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot z''(\arctan x)$

d'où $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + y = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{-2x\, z'(\arctan x)} + z''(\arctan x) + \cancel{2x\, z'(\arctan x)} + z(\arctan x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{z''(t) + z(t) = 0}$

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

Cadre Complexe :

d'où $\boxed{z(t) = \lambda e^{-it} + \mu e^{it} \;;\; \lambda, \mu \in \mathbb{C}}$

d'où $\boxed{y(x) = z(\arctan x) = \lambda e^{-i \arctan x} + \mu e^{i \arctan x} \;;\; \lambda, \mu \in \mathbb{C}}$ Cadre complexe

Cadre réel :

$r = \pm i = 0 \pm i = \alpha \pm i\omega$ avec $\alpha = 0$ et $\omega = 1$

d'où $z(t) = (\lambda \cos t + \mu \sin t)\, e^{0t} = \lambda \cos t + \mu \sin t \;;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

d'où $y(x) = z(\arctan x) = \lambda \cos(\arctan x) + \mu \sin(\arctan x)$

$\boxed{y(x) = \lambda \cos(\arctan x) + \mu \sin(\arctan x) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

et $\boxed{I = \mathbb{R}}$ car y est définie et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Remarque: on peut simplifier $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

d'où $\cos(\arctan x) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$

or $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et cos est positive sur cet intervalle, donc ;

$$\cos(\arctan x) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

et $\sin^2(\arctan x) = 1 - \cos^2(\arctan x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$
$= \dfrac{x^2}{1+x^2}$

si $x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où le sinus est ≥ 0

si $x \in \mathbb{R}-$, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ d'où le sinus est ≤ 0.

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= \lambda\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} + \mu\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}+ \\ \text{et } y(x) &= \lambda\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} - \mu\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}- \\ &\lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Cadre réel