Pr. M. LAKHSSASSI TC - ING UIC 2018-2019 1

Mathématiques Appliquées

G2

QUIZZ 1 :

Ex 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$:

(E) : $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

Ex 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(1+e^x)y'' + (2e^x+1)y' + e^x y = 0$

via le changement de la fonction inconnue : $z = y' + y$

CORRIGÉ

Ex 1 : $(E) \iff y' - \frac{1}{x} y = x^2 + 3x - 2$ si $x \in \mathbb{R}^*$

⚠ EDL1 à coeff. non constants

(SH) : $y_h = \lambda \cdot e^{-\int^x -\frac{1}{u} du}$

$= \lambda \cdot e^{\ln x} = \lambda x$

$\boxed{y_h = \lambda x} \; ; \; \lambda \in \mathbb{K}$

(SP) : $y_p = \lambda(x) \cdot x$ ($\Rightarrow y_p' = \lambda'(x) \cdot x + \lambda(x) \ldots$)

où $\lambda'(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot e^{+\int^x -\frac{1}{u} du} = (x^2 + 3x - 2) \cdot e^{-\ln x}$

d'où $\lambda'(x) = x + 3 - \frac{2}{x}$

d'où $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + c$; $c \in \mathbb{K}$

on veut <u>une</u> SP, on prend $c := 0$.

d'où $\boxed{y_p = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x}$

$S(h)$: $\boxed{y = y_h + y_p = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x + \lambda x \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}}$

et $\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$ y définie et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Ex 2 : $(E) : (1+e^x)y'' + (2e^x+1)y' + e^x y = 0$

$$z := y' + y$$

d'où $z' = y'' + y'$

$(E) \iff y'' + y' + e^x(y'' + y') + e^x(y' + y) = 0$

$\iff (y'' + y')(1 + e^x) + e^x(y' + y) = 0$

$\iff (1+e^x) z' + e^x z = 0$

$\iff \boxed{z' + \frac{e^x}{1+e^x} z = 0}$

d'où : $z = \lambda \cdot e^{-\int^x \frac{e^u}{1+e^u} du} = \lambda e^{-\ln(1+e^x)}$

d'où $\boxed{z = \lambda / (1+e^x), \ \lambda \in \mathbb{K}}$

d'où $\boxed{y' + y = \lambda / (1+e^x)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

d'où $\overset{(SH)}{\boxed{y_h = \mu e^{-x}}}$, $\mu \in \mathbb{K}$

(SP) : $y_P = \mu(x) \cdot e^{-x}$ où $\mu'(x) = \dfrac{\lambda}{1+e^x} \cdot e^x$

$= (\lambda \ln(1+e^x))'$

d'où $\mu(x) = \lambda \ln(1+e^x) + c$ on pose $c := 0$
car on cherche $\underline{\underline{une}}$ SP.

d'où : $\boxed{y_P = \lambda \ln(1+e^{+x}) \cdot e^{-x}}$

d'où : (SG) $y = \lambda \cdot \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \mu e^{-x}$

$$\boxed{y = (\lambda \ln(1+e^x) + \mu) \cdot e^{-x} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$$

et $\boxed{I = \mathbb{R}}$ car y est définie et 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.