Exercice 1
Expliciter le terme général des suites suivantes en fonction de l'indice.

$\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{k+1} = -2a_k$ avec $a_1 = 7$ $\quad \forall n \geqslant 2, \quad 2b_n = b_{n-1}$ avec $b_1 = 3$.

$\forall p \geqslant 0, \quad c_{p+1} - c_p = 3$ et $c_0 = 10$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad d_n = \dfrac{d_{n-1}}{3} + 4$ avec $d_0 = 1$.

$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 4e_{i+1} + 1 = e_i$ avec $e_0 = 0$. $\quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad 3f_{j+1} - 2f_j = 1$ avec $f_0 = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2h_{n+2} + h_{n+1} - h_n = 0$ avec $h_0 = h_1 = 1$.

$\forall m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad l_{m+1} = l_m + l_{m-1}$ avec $l_0 = 1$ et $l_1 = 2$.

Exercice 2
Soit u une suite vérifiant $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer qu'il existe un couple (a, b) de réels tel que la suite $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = an + b$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = 2w_n + n$.
2. Montrer que la suite $z_n = u_n + n + 1$ vérifie $z_{n+1} = 2z_n$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n puis celle de u_n.

Exercice 3
Soient α et β deux suites satisfaisant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\alpha_k + \beta_k \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_k + 4\beta_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \beta_0 = -1 \end{cases}$$

On introduit deux suites auxiliaires z et t en posant $z_k = \alpha_k + \beta_k$ et $t_k = 2\alpha_k - \beta_k$.

1. Montrer que les deux suites z et t sont géométriques.
2. Donner l'expression de z_k et t_k en fonction de k, puis celle de α_k et β_k.

Exercice 4
Soit $(u_p)_{p \geqslant 0}$ une suite satisfaisant à la relation $\forall p \geqslant 0, \quad u_{p+1} = 2u_p + 5^p$.
Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p = \dfrac{u_p}{5^p}$.

1. Vérifier que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{p+1} = \dfrac{2}{5}\alpha_p + \dfrac{1}{5}$.
2. En déduire l'expression de α_p en fonction de p puis celle de u_p.

Exercice 5
On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

1. On considère la suite p définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 6
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}_+$.
   On introduit alors la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.
2. Montrer que la suite t est géométrique.
3. Expliciter alors t_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
   En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Exercice 7
Soit la suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ avec $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
   On introduit la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \ln u_n$.
2. Justifier que la suite t est arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de t_n en fonction de n, t_0 puis de u_n en fonction de n, u_0.
   En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Exercice 8
Soit u la suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ avec $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$
   (on posera comme hypothèse de récurrence "$u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$").
   On considère alors la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \ln u_n$.
2. Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Expliciter w_n en fonction de n, w_1, w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.
4. Calculer alors la limite de u en $+\infty$ en fonction de u_0, u_1.