



**Université Internationale
de Casablanca**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Formation Initiale
1ère année Cycle Ingénieur

Notes de Cours

Matière: Mécanique des Milieux Continus

Prof . B.KISSI

Enseignant Chercheur en Génie Civil

ENSAM-Casablanca

Benaissa.kissi@gmail.com

Année Universitaire: 2017-2018

UIC

UNIVERSITÉ INTERNATIONALE DE CASABLANCA CASA GREEN TOWN - ROUTE PROVINCIALE 3020, CASABLANCA BP 50169 CASA GHANDI

+ 212 522 367 688 / <http://www.uic.ac.ma/> Casablanca, Maroc

Plan du cours

Chapitre 1 : Description cinématique des Milieux Continus

Chapitre 2 : Déformations

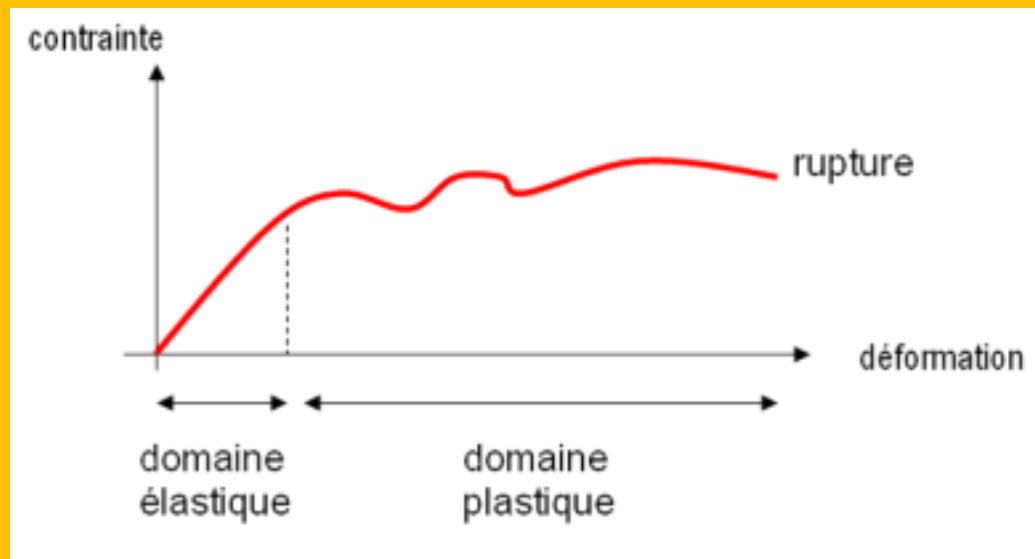
Chapitre 3 : Contraintes

Chapitre 4 : Lois de comportement rhéologique

Chapitre 5 : Elasticité

Objectifs

- Donner les bases nécessaires à la compréhension des principes généraux qui régissent la mécanique des milieux continus.
- Par milieu continu, il faudra donc entendre qu'à chaque instant, il existe dans le voisinage de chaque point M une **distribution de matière dont les propriétés physiques sont des fonctions continues et dérivables** des coordonnées de l'espace.
- La relation entre contrainte et déformation permet alors de caractériser deux domaines d'étude des solides déformables :



Pourquoi la mécanique des milieux continus?

- De la mécanique du point matériel à la Mécanique des Milieux Continues

1- Mécanique du point matériel :

- Permet de prédire le mouvement d'un point soumis à un ensemble de forces.
- Description de la cinématique : position, vitesse et accélération du point, et la “dynamique” : relation entre force et mouvement
- On ne peut décrire les rotations d'un corps sur lui même. Cette théorie n'est donc pas adaptée pour étudier le trajet d'une boule de billard ou pour étudier la rotation d'une planète ou d'un satellite sur lui-même lors de son orbite.

Pourquoi la mécanique des milieux continus?

- De la mécanique du point matériel à la Mécanique des Milieux Continues

2- Mécanique des solides indéformables

- Intègre la notion de rotation, d'inertie et de moment.
- permet de résoudre des problèmes importants de l'ingénieur comme ceux issus de la robotique (chaîne cinématique).

En revanche, cette mécanique ne peut traiter les problèmes suivants :

- Déterminer la force nécessaire pour emboutir une canette à partir d'un tôle mince ;
- Calculer la pression nécessaire pour souffler les bouteilles plastiques ;
- Étudier la stabilité des talus ;
- L'étude de la résistance d'une coque ;



MMC

Notion de milieu continu et d'échelle d'observation

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel *continu* si à chaque instant et en chaque point de ce domaine on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel.

La grandeur physique peut être représentée mathématiquement par :

- un scalaire (masse volumique, température, concentration d'un polluant, . . .) ;
- un vecteur (vitesse, accélération, forces volumiques, . . .) ;
- un tenseur d'ordre 2 (déformations, contraintes, . . .) ;
- un tenseur d'ordre supérieur à 2 comme par exemple le tenseur d'élasticité qui est d'ordre 4.

Savoir si pour un domaine matériel donné, on a affaire à un milieu continu ou non dépend de l'échelle d'observation.

Chapitre 1 : Description cinématique des Milieux Continus

Section 1 : Notion de particule matérielle

Section 2 : Description matérielle (Lagrangienne) et spatiale (Eulérienne)

Section 3 : Dérivée particulière, notion de trajectoire et de ligne de courant

Section 4 : Éléments de calcul tensoriel

Chapitre 1

La mécanique des milieux continus (en abrégée M.M.C), est une branche de la mécanique qui à pour objectifs l'étude des mouvements, des déformations, des champs de contraintes au sein de milieux continus (solide ou fluides). Cette branche qui peut être considérée comme étant la science de l'ingénieur par excellence, permet de comprendre et de décrire le monde matériel qui nous entoure et les phénomènes courants qui s'y déroulent.

MMC = Frontière entre un solide plus ou moins mou et un liquide plus ou moins visqueux

(Pression, Température, Temps ...)

Chapitre 1

Les applications de la Mécanique des milieux continus sont extrêmement nombreuses et très diversifiées. A titre d'exemples, on peut citer les domaines de la science suivants, qui se basent sur les concepts et résultats que nous allons présenter dans ce cours :

- Géophysique (géodésie, étude de la croûte terrestre, étude des mouvements des plaques tectoniques, séismologie)
- Étude de l'environnement (pollution de l'air ou de l'eau, écoulement des eaux à la surface de la terre)
- Physique des matériaux (comportements des matériaux granulaires, mousses, gels, polymères)
- Résistance des matériaux : dimensionnement de structures solides telles que ponts, bâtiments, voitures, navires, avions, navettes spatiales...
- Aérodynamique : vols d'avions, fusées ou navettes, traînée (frottement) des véhicules automobiles dans l'air,...
- Transport de fluide

Chapitre 1

I- Notion de particule matérielle

- L'étude de ces différents comportements est appelée la Rhéologie.
- Notion de référentiel est essentielle.
 - Connaître les évolutions cinématiques d'un domaine matériel
 - Le Principe Fondamental de la Mécanique s'appuie sur l'existence d'un repère privilégié appelé " Repère Galiléen".

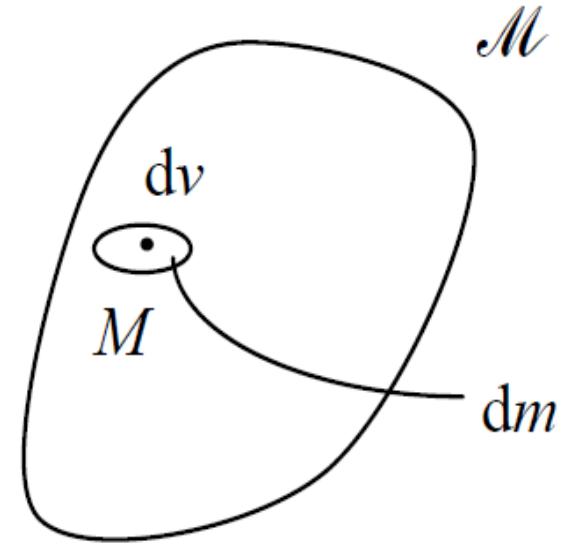
Chapitre 1

Soit M un corps matériel

On appelle particule de M un élément matériel de masse dm occupant au point M de l'espace physique le volume élémentaire dv .

Le volume élémentaire dv est d'un point de vue macroscopique, "suffisamment petit" pour pouvoir être assimilé à un infiniment petit, tout en restant représentatif de la matière.

- Cristaux constituant un métal (nm).
- Paillettes dont se compose une argile (μm).
- Grains d'un sable (mm).
- Granulats entrant dans la composition d'un béton (cm).
- Bloc d'un barrage en enrochement.



$$dm = \rho dv$$

Chapitre 1

Hypothèse de continuité :

- Les fonctions caractéristiques du domaine sont des fonctions continues

Grandeurs physiques telles que la masse volumique, la température, la pression, on doit pouvoir les représenter par des fonctions continues.

Limites

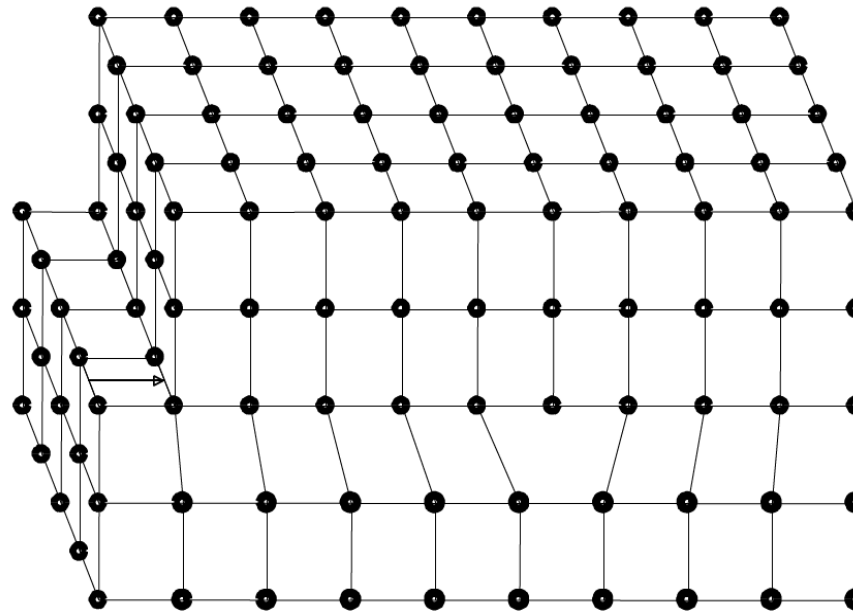
Milieu diphasique

- Considération de n domaines continus.

L'hypothèse de continuité de la transformation va se traduire par le fait que les fonctions scalaires du champ vectoriel doivent être des fonctions continues des variables d'espaces et de temps.

Chapitre 1

Dislocation coin

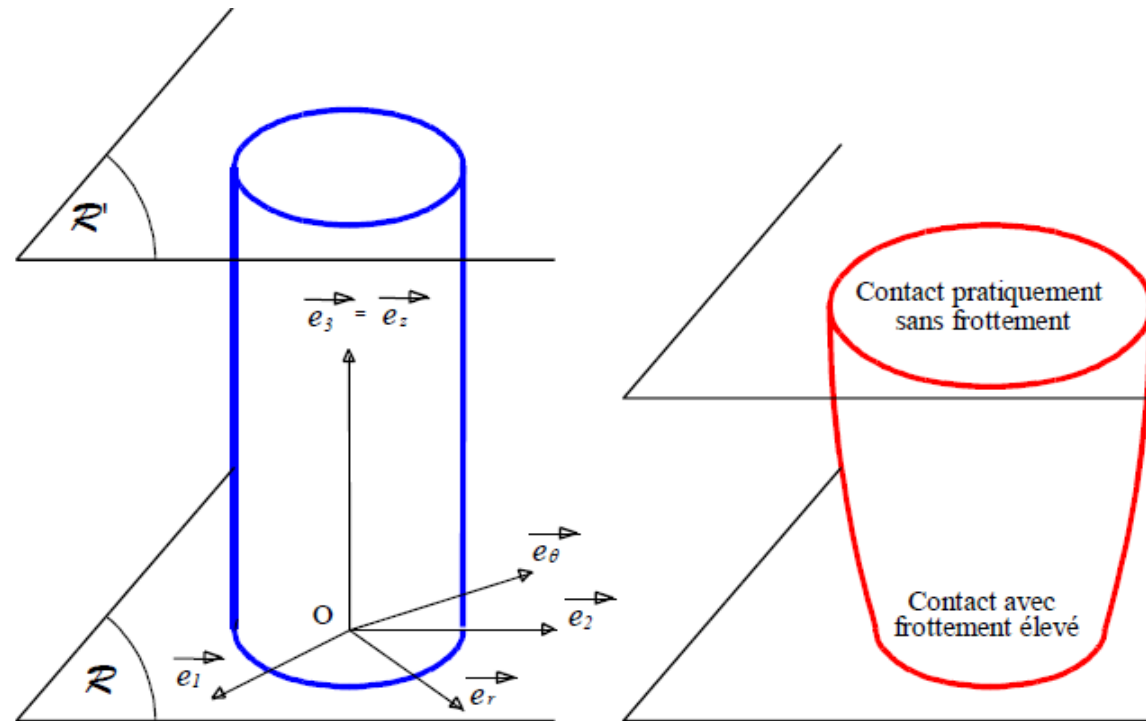


Soit M un corps matériel continu ou milieu continu. L'ensemble des particules de M occupe, à chaque instant t un domaine Ω_t ouvert et connexe de l'espace physique. A tout point de Ω_t correspond une et une seule particule.

Chapitre 1

II- Repérage des milieux continus

- Repérage d'un domaine matériel tout au long de son évolution au cours du temps.
- On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , munie d'un repère orthonormé $R = (O, e_i)$, direct d'origine O supposé fixe.



Chapitre 1

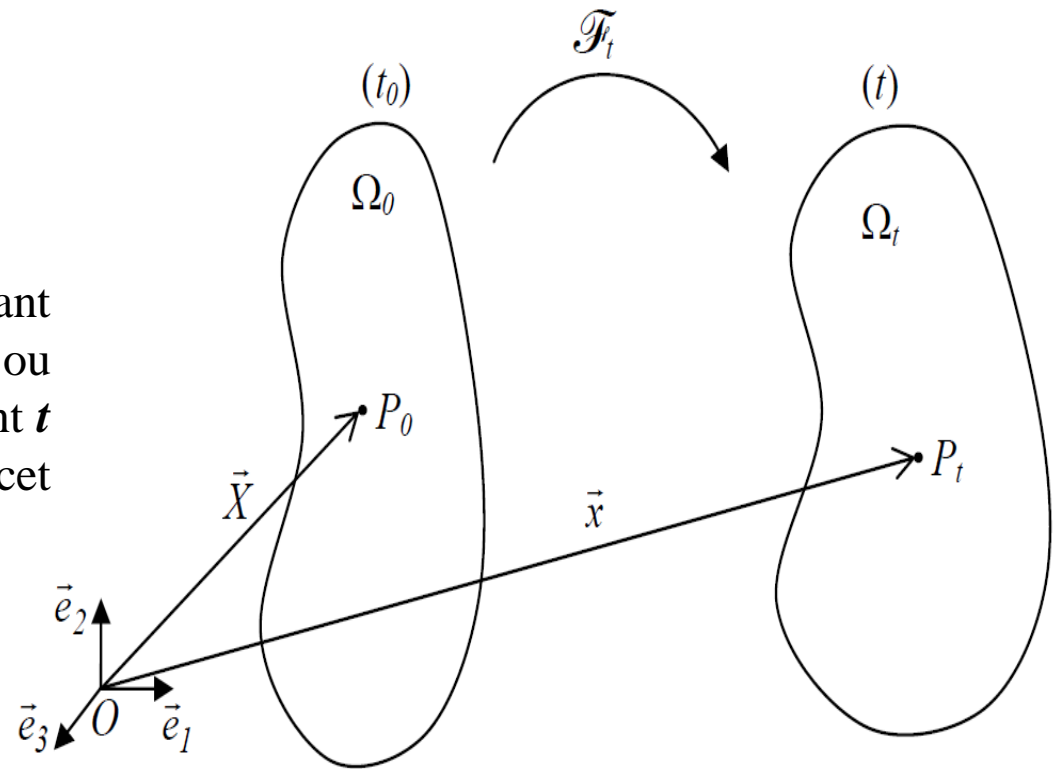
On appelle configuration de référence, ou configuration non déformée de M l'ensemble Ω_0 des positions de ses particules à un instant de référence t_0 quelconque mais fixé.

$$\vec{X} = \overrightarrow{OP_0} = X_k \vec{e}_k$$

Soit t l'instant actuel (on dit aussi l'instant courant). On appelle configuration actuelle, ou encore configuration déformée, de M à l'instant t l'ensemble Ω_t des positions de ses particules à cet instant.

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP_t} = X_i \vec{e}_i$$

Soit M un milieu continu



Chapitre 1

III- Description Lagrangienne

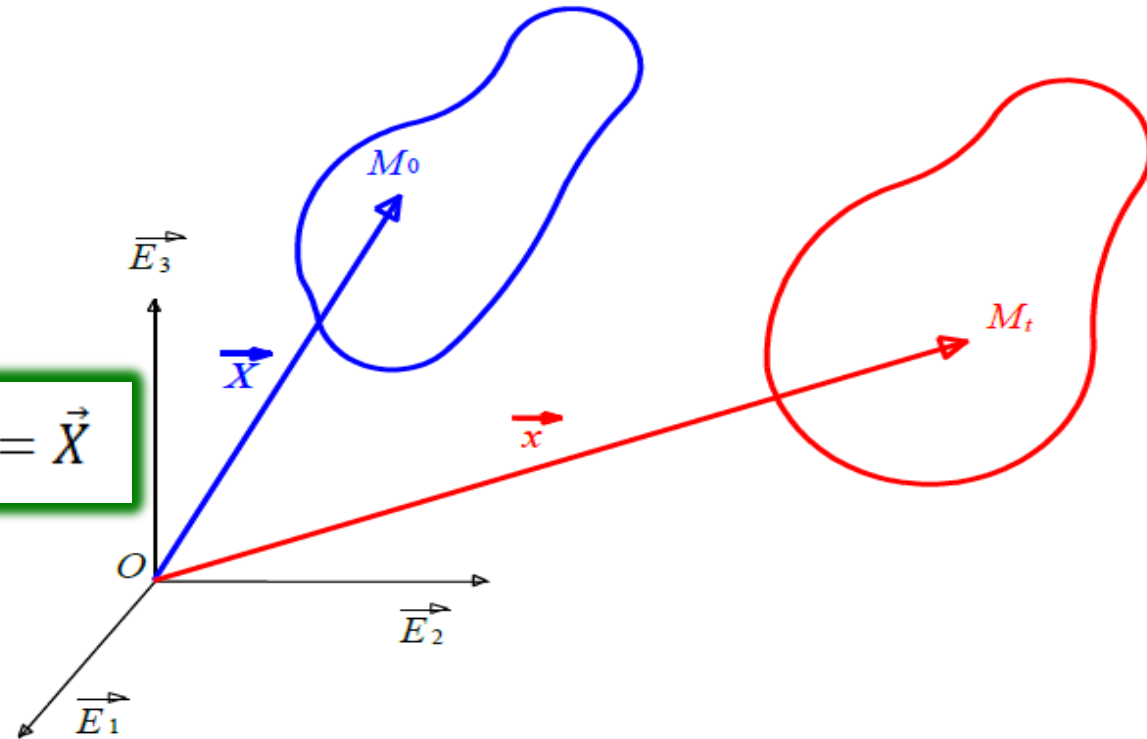
$$\overrightarrow{OM_o} = X_1 \vec{E}_1 + X_2 \vec{E}_2 + X_3 \vec{E}_3 = X_i \vec{E}_i = \vec{X}$$

Les fonctions scalaires suivantes

$$x_i = \phi_i(x_J, t)$$

les variables indépendantes (X_1, X_2, X_3) et t sont dites variables ou coordonnées de **Lagrange**.

Les fonctions ϕ_i représentent la description **lagrangienne** du mouvement de notre domaine par rapport au référentiel \mathbf{R} .



Chapitre 1

Vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M, t) = \frac{d\overrightarrow{OM}_t}{dt}$$

Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont :

$$v_i = \frac{d\phi_i}{dt}(X_J, t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X_J, t)$$

Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M, t) = \frac{d\vec{V}(M, t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}_t}{dt^2}$$

Dans une base cartésienne orthonormée, ses composantes sont :

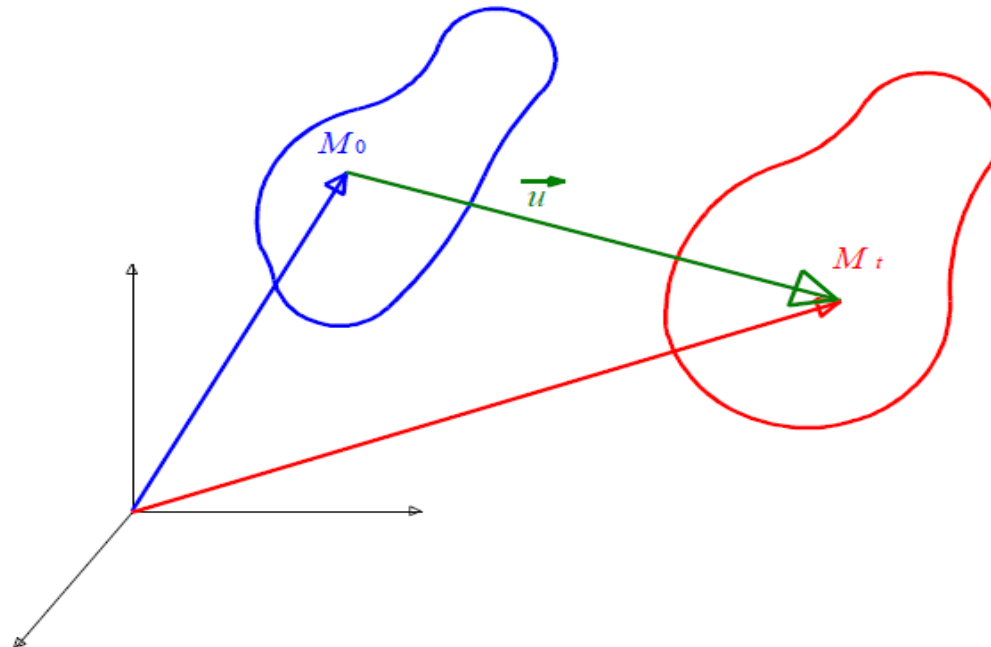
$$\gamma_i = \frac{d^2\phi_i}{dt^2}(X_J, t) = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(X_J, t)$$

Chapitre 1

Vecteur déplacement :

Souvent on préfère employer le vecteur déplacement au lieu du vecteur position :

$$\vec{u}(X_J, t) = \overrightarrow{OM_t} - \overrightarrow{OM_o} = \vec{x} - \vec{X}$$



Chapitre 1

IV- Description Eulérienne

Les hypothèses de continuité (milieu et transformation) imposent que les fonctions F_i soient des bijections de la configuration de référence C_0 sur la configuration actuelle C_t .

Cette bijectivité impose l'existence d'une relation inverse entre les variables de position de référence et les variables de position actuelle. On a donc :

$$X_I = \Psi_I(x_j, t)$$

La description dite eulérienne consiste à considérer les variables (x_1, x_2, x_3) et t comme indépendantes et à les utiliser sous forme de variables ou coordonnées d'Euler.

Chapitre 1

Vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M, t) = \frac{d\overrightarrow{OM}_t}{dt} \text{ avec } v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X_J, t) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\Psi_J(x_k, t), t)$$

Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M, t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}_t}{dt^2} \text{ avec } \gamma_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(X_J, t) = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}(\Psi_J(x_k, t), t)$$

Chapitre 1

V- Dérivée particulière

Souvent nous aurons à considérer les variations d'une grandeur physique, que nous noterons, au cours du temps. Cette grandeur peut être une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle. Nous avons donc :

$A = a(x_i, t)$ pour une détermination vis à vis des variables eulériennes.

$A = A(X_i, t)$ pour une détermination vis à vis des variables lagrangiennes.

Chapitre 1

V- Dérivée particulière

En représentation lagrangienne, puisque les grandeurs physiques sont repérées vis à vis de l'élément de matière, il y a identification entre la dérivée particulière et la dérivée locale :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}(X_I, t) = \frac{\partial A}{\partial t}(X_I, t) = \dot{A}$$

Par contre, pour la représentation eulérienne, le calcul de la dérivée particulière nécessite de prendre en compte la variation du domaine délimité par des variables qui sont fonctions du temps :

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{da}{dt}(x_i, t) = \frac{\partial a}{\partial t}(x_i, t) + \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t}$$

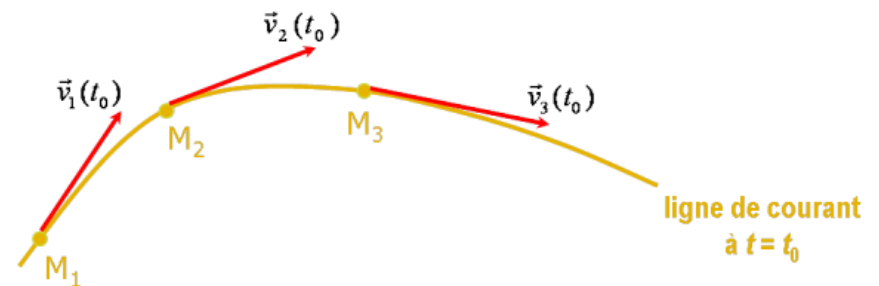
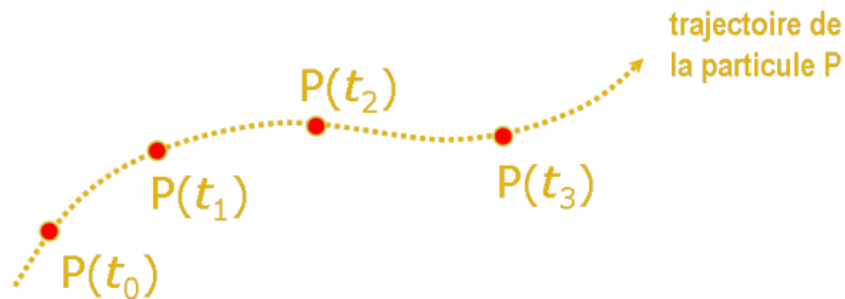
la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur vitesse

Chapitre 1

VI- Notion de trajectoire et Lignes de courant

Soit P une particule quelconque mais fixée du milieu continu M .

On appelle trajectoire de P le lieu des positions successives de cette particule au cours du temps.



On appelle ligne de courant a un instant donné T une courbe tangente en tout point au champ de vitesse.

Chapitre 1

APPLICATION 1

On considère l'écoulement défini en variables d'Euler par :

$$u = \omega x, \quad v = \alpha \omega y + \omega^2 y t, \quad w = \varpi x \quad (\varpi \neq 0, \alpha \neq 0) \quad \text{C'est un écoulement instationnaire.}$$

Déterminer les lignes de courant à l'instant t_1 .

APPLICATION 2

Soit le mouvement décrit par les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1}{1 + tX_1} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Calculer les composantes du vecteur de vitesse en termes des variables lagrangiennes puis eulériennes.

Chapitre 1

APPLICATION 3

Dans un repère cartésien (O, e_i) , on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est:

$$v_1 = ax_2 \quad a, b \text{ et } c \text{ étant des constantes de dimensions physiques appropriées}$$

$$v_2 = bx_1$$

$$v_3 = c$$

Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées $(x_{10}; x_{20}; x_{30})$ à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du

mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée à $t = 0$.

Chapitre 1

VII- Éléments de calcul tensoriel

Un scalaire (T) est un tenseur d'ordre 0 et comporte 3^0 composantes.

Un vecteur \vec{T} est un tenseur d'ordre 1 et comporte 3^1 composantes $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$

Un tenseur (T_{ij}) est un tenseur d'ordre 2 qui comporte 3^2 composantes.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Type	Scalaire	Vecteur	Tenseur
Ordre	0	1	2
Exemple	masse	déplacement	contrainte
Notation	ρ	$U = (U_1, U_2, U_3)$	$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$
Notation Matricielle	ρ	U_i	σ_{ij}
Nombre de composantes	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
Valeur indépendantes	1	3	9

Chapitre 2 : Déformations

Section 1 : Notion de déformation, vecteur déplacement

Section 2 : Introduction de tenseur de déformations

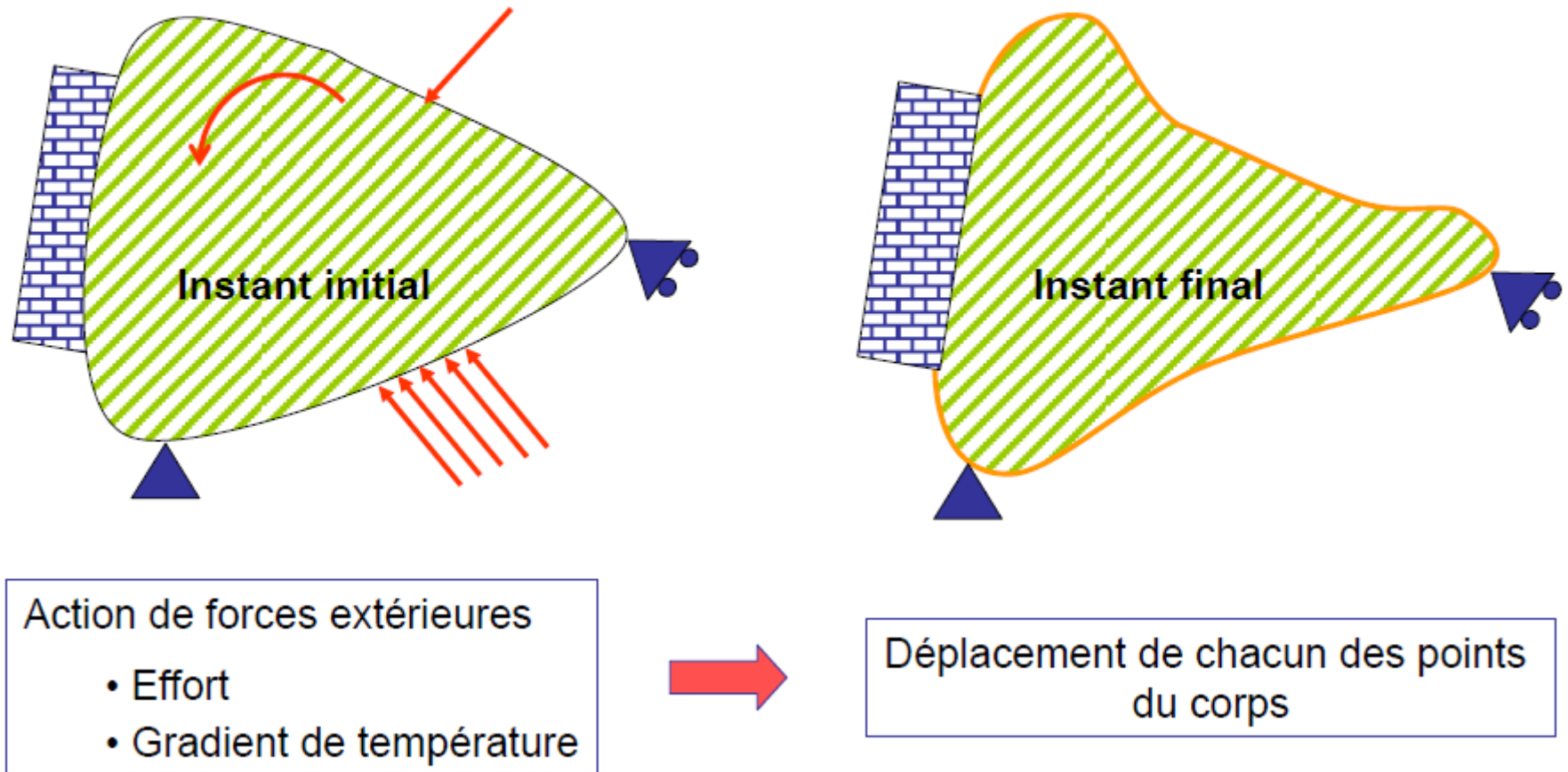
Section 3 : Exemples particuliers (dilatation uniforme, glissement simple, extension)

Section 4 : Compatibilité des déformations

Chapitre 2

I- Notion de déformation et vecteur déplacement

- Comparaison d'une configuration « initiale » et d'une configuration « finale »



Chapitre 2

I- Notion de déformation et vecteur déplacement

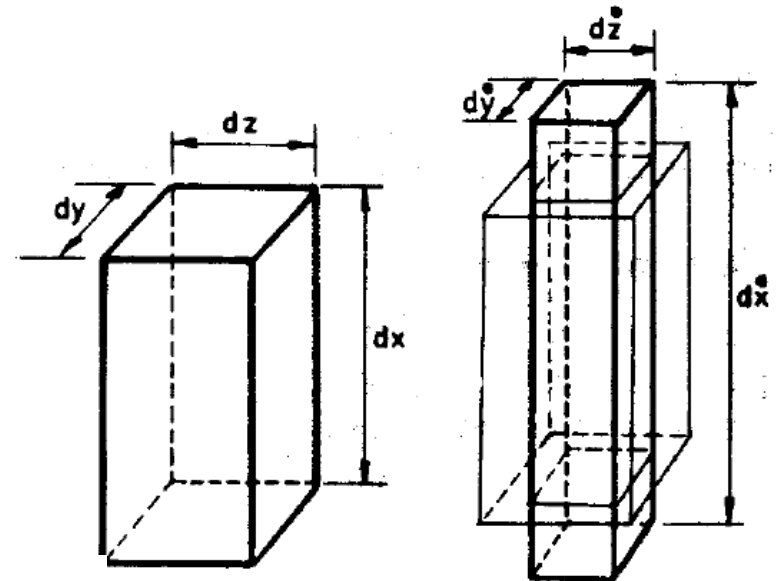
La base de la mécanique des milieux continus est l'étude des déformations et des phénomènes associés à une transformation d'un milieu.

La notion de déformation sert à quantifier de quelle manière les longueurs ont été dilatées et les angles ont changé dans le milieu.

Pour l'allongement relatif ε encore appelé déformation :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

l_0 étant la longueur initiale ; Δl l'allongement ; ε est sans unité.



Allongement

HYPOTHESES :

- Hypothèses des petits déplacements

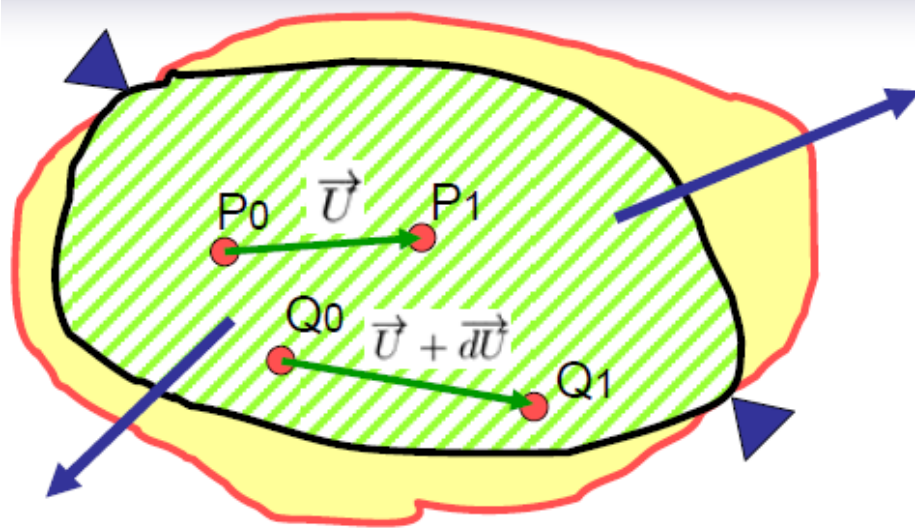
- ➡ Le déplacement est petit : 1% de la plus grande dimension du solide
- ➡ Le vecteur déplacement du point P est tangent à la trajectoire

- Hypothèses des petites déformations

- ➡ Les dérivées partielles du déplacement par rapport aux variables x,y et z sont faibles :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll \ll 1$$

Chapitre 2



RAPPEL

$$U = U(x, y, z)$$

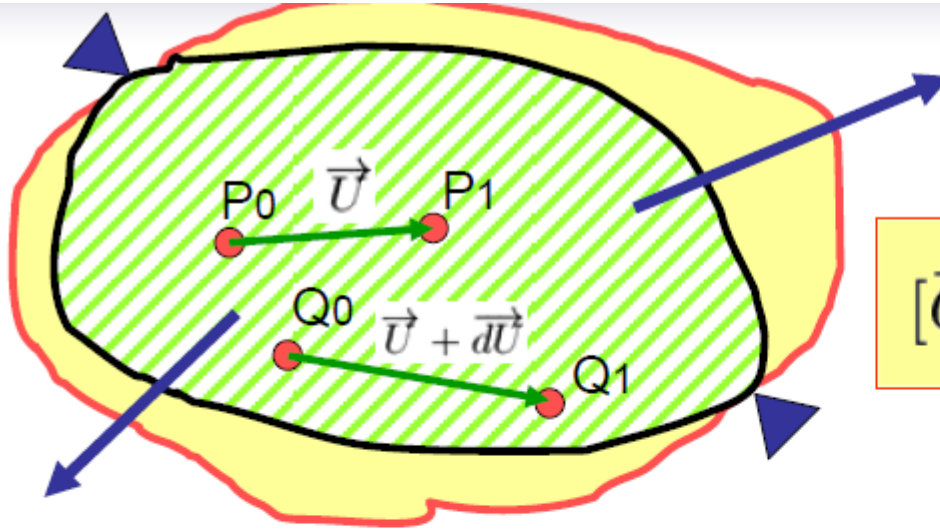


$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

- Les composantes du vecteur déplacement $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ sont :

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{cases} u(x, y, z) + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v(x, y, z) + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w(x, y, z) + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

Chapitre 2

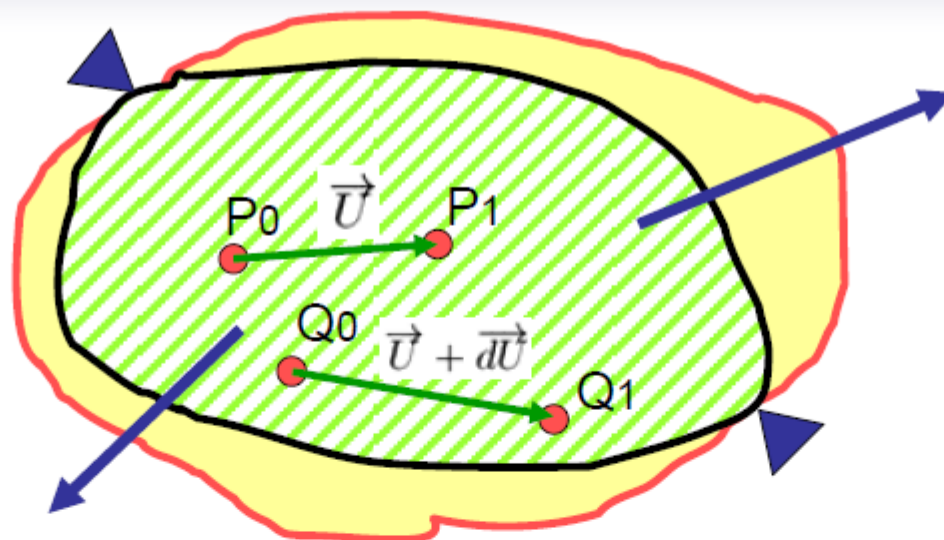


$$[\overrightarrow{Q_0 Q_1}] = [\overrightarrow{P_0 P_1}] + [T] \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}]$$

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

MATRICE DE
TRANSFORMATION

Chapitre 2



$$[\overrightarrow{Q_0 Q_1}] = [\overrightarrow{P_0 P_1}] + [T] \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}]$$

$$[\overrightarrow{Q_0 Q_1}] = [\overrightarrow{P_0 P_1}] + \frac{[T + T^t]}{2} \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}] + \frac{[T - T^t]}{2} \cdot [\overrightarrow{P_0 Q_0}]$$

1

2

3

Chapitre 2

II- Introduction de tenseur de déformations

Tenseur de déformations = l'état de tension et de déformation en tout point d'une structure.

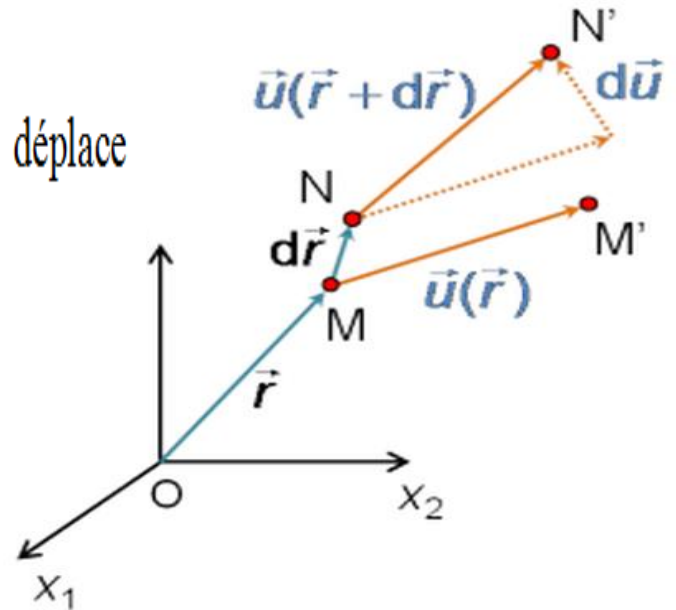
Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résultant de contraintes (efforts internes).

L'état de déformation d'un solide est décrit par un champ de tenseur, c'est-à-dire que le tenseur des déformations est défini en tout point du solide. On parle de ce fait de champ de déformation.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes par la loi de Hooke généralisée.

Chapitre 2

Au sein d'un solide sollicité mécaniquement, considérons un point $M(\vec{r})$ qui se déplace en M' et un point $N(\vec{r} + d\vec{r})$, voisin de M , qui se déplace en N' .



On a donc : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{NN'} = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = \begin{pmatrix} u_1 + du_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix} = \vec{u} + d\vec{u}$$

Chapitre 2

Par identification, on peut formuler l'accroissement de déplacement comme :

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d\vec{u} = \sum_{i,j} \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_j} dx_j \vec{e}_i$$

ce même résultat pouvant s'obtenir en introduisant un tenseur :

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow d\vec{u} = \bar{\bar{D}} \cdot d\vec{r}$$

où $\bar{\bar{D}}$ est appelé **tenseur des déformations**.

Chapitre 2

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{E}} + \bar{\bar{G}} \text{ où : } \bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{D}} + {}^t\bar{\bar{D}}) \text{ et } \bar{\bar{G}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{D}} - {}^t\bar{\bar{D}})$$

${}^t\bar{\bar{D}}$ étant le transposé de $\bar{\bar{D}}$.

$${}^t\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

on a ainsi défini le tenseur des déformations pures :

$$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et le tenseur des rotations pures :

$$\bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

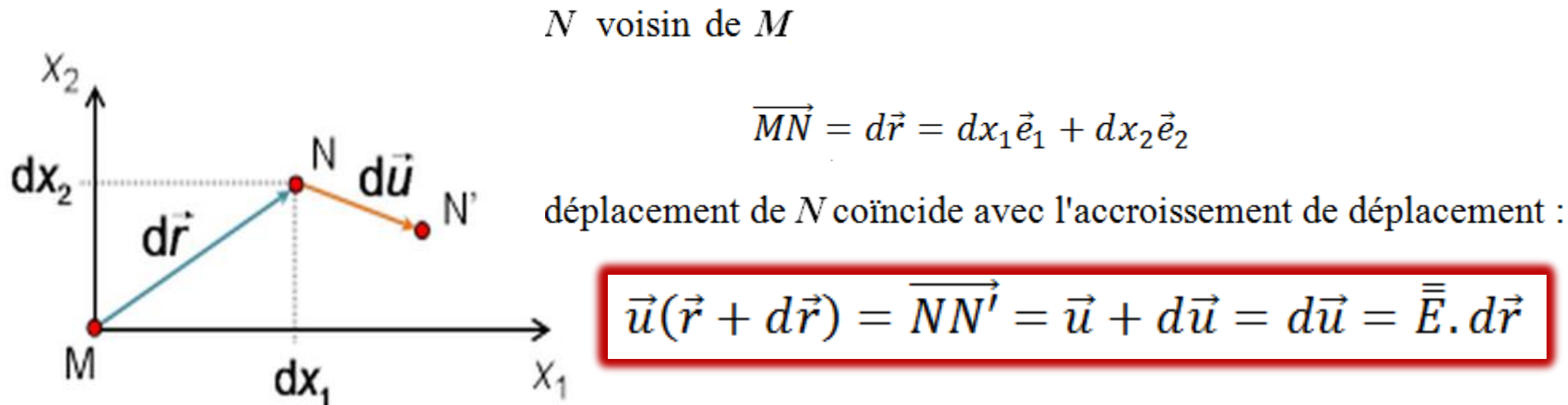
Chapitre 2

III- Action du tenseur des déformations pures

Isolons cette action en considérant que $\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{u} + \bar{\bar{E}} \cdot d\vec{r}$.

Supposons ensuite que le repère soit choisi de telle sorte que $M = 0$

En première approche, un raisonnement à deux dimensions suffira à analyser une déformation pure ; l'extrapolation à trois dimensions permettra ensuite de généraliser l'analyse.



Chapitre 2

Étudions spécifiquement les termes diagonaux du tenseur des déformations pures, en considérant que $\bar{\bar{E}}$ est purement diagonal :

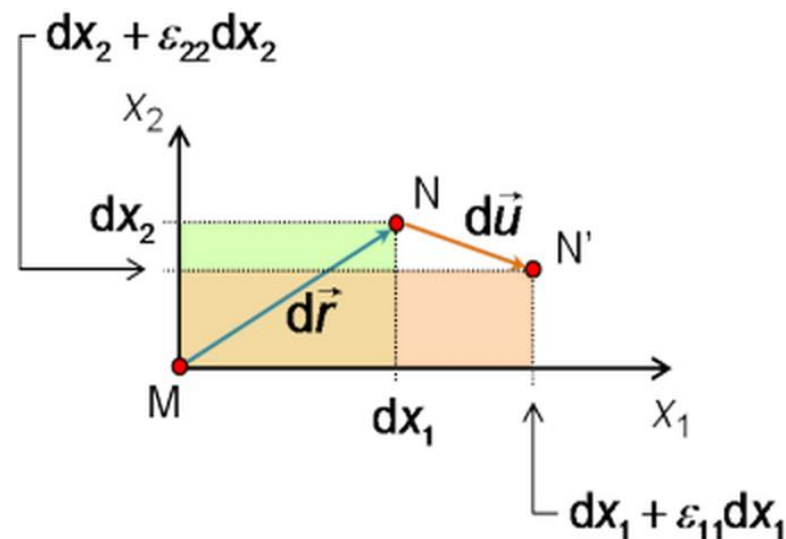
$$d\vec{u} = \bar{\bar{E}} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} dx_1 \\ \varepsilon_{22} dx_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui engendre la déformation explicitée sur la figure qui suit :

allongement relatif suivant \vec{e}_1 : $\frac{\varepsilon_{11}}{dx_1} dx_1 = \varepsilon_{11} = \varepsilon(M, \vec{e}_1)$

allongement relatif suivant \vec{e}_2 : $\frac{\varepsilon_{22}}{dx_2} dx_2 = \varepsilon_{22} = \varepsilon(M, \vec{e}_2)$

selon la direction \vec{e}_3 on aurait : $\varepsilon(M, \vec{e}_3) = \varepsilon_{33}$



Chapitre 2

IV- Exemples particuliers (dilatation uniforme, glissement simple, extension)

IV-1 Dilatation uniforme

Revenons à la configuration simplifiée d'une déformation à deux dimensions et évaluons la variation relative de surface. Avant déformation, la surface est définie comme $S = dx_1 dx_2$; après déformation, elle s'explicite : $S' = (dx_1 + \varepsilon_{11} dx_1) \cdot (dx_2 + \varepsilon_{22} dx_2)$.

La variation relative de surface se formule alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{S} &= \frac{S' - S}{S} = \frac{(dx_1 + \varepsilon_{11} dx_1) \cdot (dx_2 + \varepsilon_{22} dx_2) - dx_1 dx_2}{dx_1 dx_2} \\ &= \frac{\varepsilon_{11} dx_1 dx_2 + \varepsilon_{22} dx_1 dx_2 + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} dx_1 dx_2}{dx_1 dx_2} \end{aligned}$$

Chapitre 2

soit, après simplification :

$$\frac{\Delta S}{S} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$$

En généralisant à trois dimensions, on peut donc formuler la variation relative de volume comme :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Remarque :

On appelle *dilatation cubique* la variation relative de volume due aux déformations. Elle se note θ et correspond à la somme des éléments diagonaux du tenseur des déformations pures, autrement dit la trace de ce tenseur :

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = Tr[\bar{\bar{E}}] = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

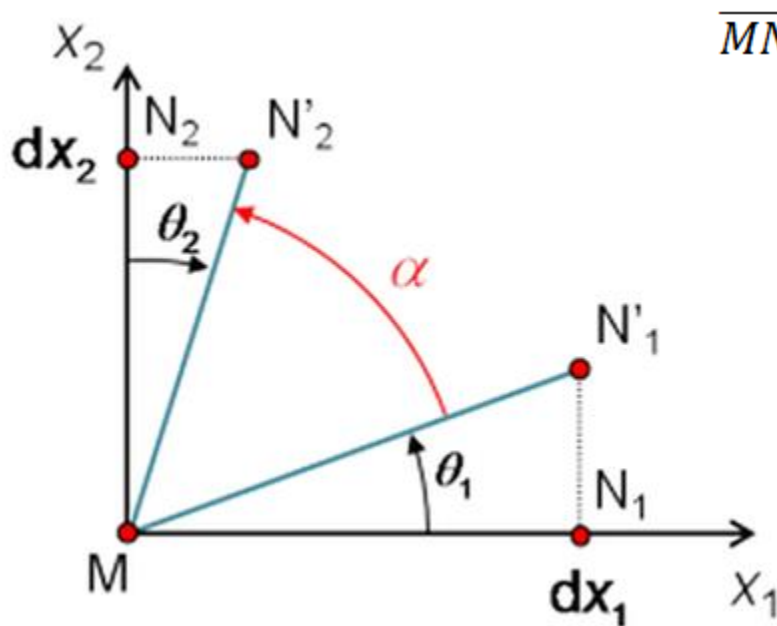
Cette dilatation cubique, comme la trace d'un tenseur quelconque, est invariante par changement de repère.

Chapitre 2

IV- Exemples particuliers (dilatation uniforme, glissement simple, extension)

IV-2 Glissement simple ou distorsion angulaire

Étudions à présent l'action des termes non-diagonaux du tenseur $\bar{\bar{E}}$ et choisissons deux points N_1 et N_2 voisins de M et définissant deux directions orthogonales de telle sorte que :



$$\overrightarrow{MN_1} = dx_1 \vec{e}_1 \text{ et } \overrightarrow{MN_2} = dx_2 \vec{e}_2$$

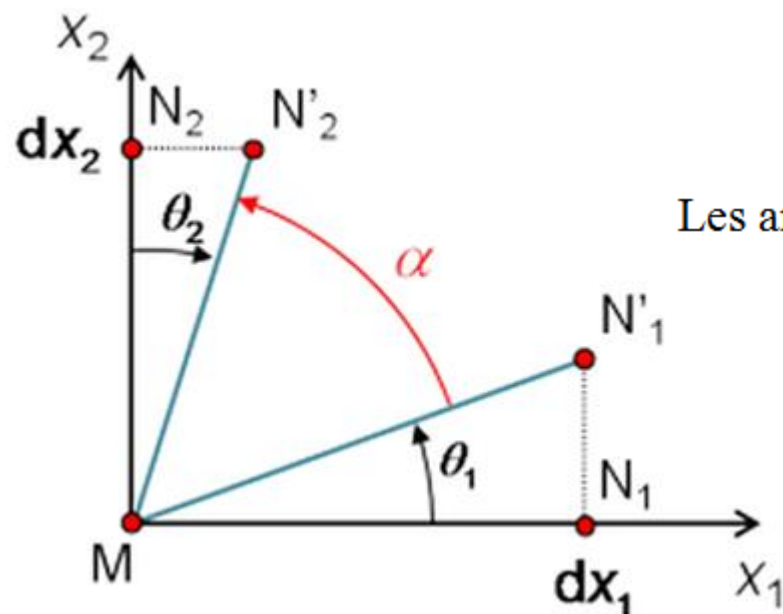
Sous l'action du tenseur des déformations pures, les déplacements de N_1 et N_2 peuvent respectivement se définir comme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_1 N'_1} &= d\vec{u} = \bar{\bar{E}} \cdot d\vec{r} = \bar{\bar{E}} \overrightarrow{MN_1} \text{ et } \overrightarrow{N_2 N'_2} \\ &= d\vec{u} = \bar{\bar{E}} \cdot d\vec{r} = \bar{\bar{E}} \overrightarrow{MN_2} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{N_1 N'_1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{12} dx_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{N_2 N'_2} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dx_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} dx_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

les déplacements qui en résultent génère une distorsion angulaire puisque les deux directions orthogonales définies par MN_1 et MN_2 viennent à former un angle α tel que :



$$\gamma(\widehat{M, \vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow M} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \theta_1 + \theta_2$$

Les angles θ_1 et θ_2 étant par définition petits, on peut estimer que :

$$\theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{\varepsilon_{12} dx_1}{dx_1} = \varepsilon_{12} \text{ et } \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{\varepsilon_{12} dx_2}{dx_2} = \varepsilon_{12}$$

$$\gamma(\widehat{M, \vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \theta_1 + \theta_2 = 2 \varepsilon_{12}$$

Chapitre 2

Exercice:

Soit le mouvement défini dans le repère orthonormé $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par les équations :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \alpha > 0$$

1. Calculer la dilatation dans la direction \vec{e}_1 .
2. Calculer l'angle de glissement γ_{12} entre les directions \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .
3. Calculer la valeur de cet angle γ_{12} pour $t = \frac{1}{\alpha}$. Commenter ce résultat.
4. Ecrire la représentation Eulérienne du champ de vitesse de ce mouvement pour $t \neq \frac{1}{\alpha}$.

Chapitre 2

V- Compatibilité des déformations

V-1 Intégration des déplacements

Les déformations s'obtiennent par dérivation des déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Réciproquement, on peut calculer les déplacements à partir des déformations. En effet, partant d'un champ de déformation $\varepsilon_{ij}(x)$, il faut, pour calculer le déplacement $u_i(x)$, intégrer ce système d'équations aux dérivées partielles.

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un système linéaire non homogène. Sa solution générale est donc la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène :

$$u_i(x) = u_i^o(x) + u_i^R(x)$$

u_i^o : une solution particulière,

u_i^R : la solution générale de l'équation homogène.

Chapitre 2

V- Compatibilité des déformations

V-2 Solution de l'équation homogène

Partant de la décomposition du gradient de déplacement en parties symétrique et antisymétrique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

et en utilisant la définition de ε_{ij} , on obtient facilement

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_l} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jl}}{\partial x_i}$$

Chapitre 2

Cette dérivée est donc nulle pour le problème homogène ($\varepsilon_{ij} = 0$). La rotation est donc constante :

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^R \quad \frac{\partial u_i^R}{\partial x_j} = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij} = \omega_{ij}^R$$
$$u_i^R = a_i^R + \omega_{ij}^R x_j \quad u^R = a^R - \omega^R \wedge x$$

en introduisant le vecteur ω^R adjoint de ω_{ij}^R . On retrouve bien le mouvement de solide rigide que l'on attendait. L'intégration des déplacements à partir des déformations définira le champ de déplacement à un déplacement de solide rigide près.

Chapitre 2

V- Compatibilité des déformations

V-3 Equations de compatibilité

Théorème

Une condition pour que l'on puisse intégrer les déplacements est que soient vérifiées 6 équations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

Ce sont *les équations de compatibilité*.

Si elles ne sont pas vérifiées, il n'existe pas de champ de déplacement compatible avec ces déformations (d'où la terminologie « compatibilité des déformations »).

Si elles sont vérifiées alors on peut déterminer ce champ, à un déplacement de solide rigide près.

Chapitre 2

Comme pour le champ des déplacements, le tenseur des déformations doit vérifier certaines conditions pour être valide, que sont les équations de compatibilité. Elles sont au nombre de six, mais peuvent facilement être ramené à deux, par permutation circulaire :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

Chapitre 3 : Contraintes

Section 1 : Notion de contrainte, tenseur des contraintes

Section 2 : Etat de contrainte en un point

Section 3 : Equation de mouvement ou d'équilibre

Section 4 : Conditions aux limites

Section 5 : Exemples particuliers : traction-compression simple, cisaillement, contraintes planes, cercle de Mohr

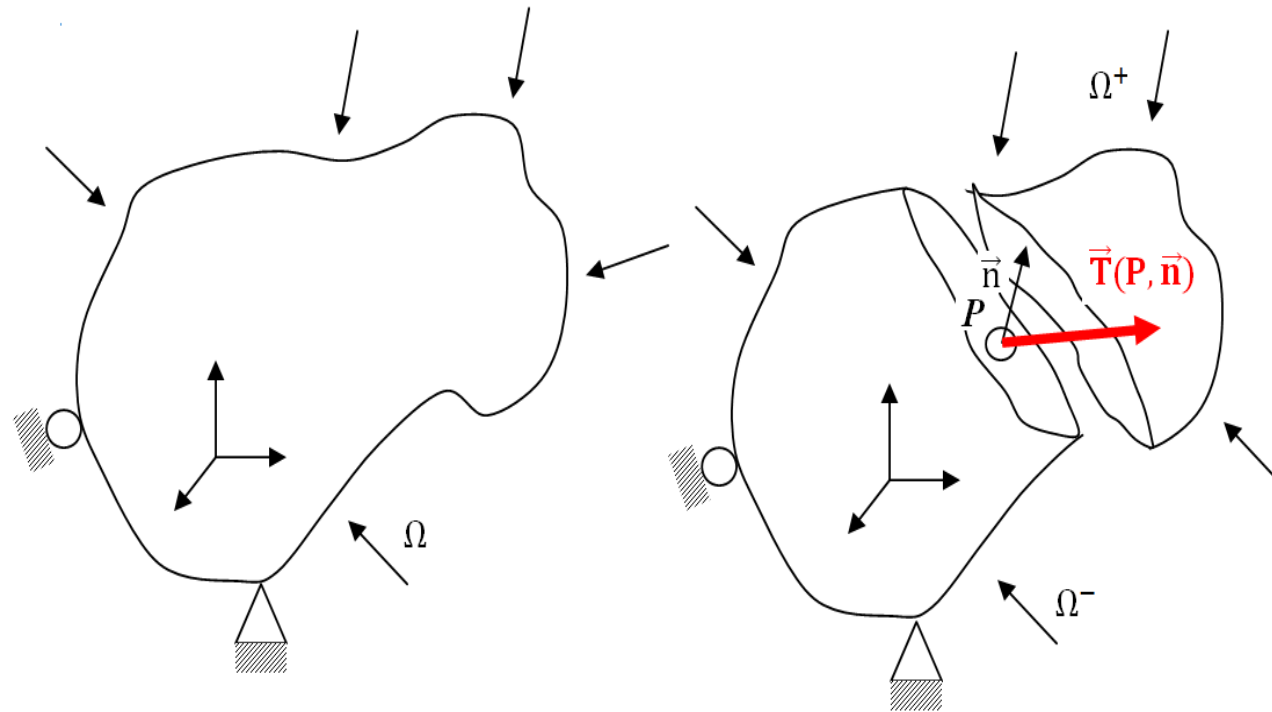
I- Notion de contrainte, tenseur des contraintes

Les contraintes représentent les efforts de cohésion dans un solide qui permettent à la matière à résister aux sollicitations. Les contraintes sont issues d'interaction entre des petites parties de la matière (cristaux, molécules ...). L'équivalent de la contrainte pour un fluide parfait est la pression.

Définition:

Soit un corps Ω sollicité par un ensemble d'actions mécaniques et en équilibre dans un référentiel. Toute partie de Ω est en équilibre. Si on coupe Ω par un plan normale \vec{n} passant par le point P , les deux parties Ω^+ située du côté de la normale et Ω^- située du côté opposé, sont en équilibre.

Chapitre 3



Ω^+ est en équilibre sous l'effet:

- Des efforts qui lui sont exercés.
- De la contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ exercée en tout point P du plan de coupure.

$\vec{T}(P, \vec{n})$ est la densité surfacique des efforts exercés par Ω^+ sur Ω^- .

Remarques:

Le vecteur contrainte est homogène à un effort par unité de surface ou une pression, il s'exprime en Pascals.

Si en un point P on effectue deux plans de coupure de normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , on obtient deux vecteurs contraintes $\vec{T}(P, \vec{n}_1)$ et $\vec{T}(P, \vec{n}_2)$ qui sont à priori différents.

En deux points P et Q d'un même plan de coupure de normale \vec{n} on obtient deux vecteurs contraintes $\vec{T}(P, \vec{n})$ et $\vec{T}(Q, \vec{n})$ qui sont à priori différents.

Chapitre 3

Le torseur résultant des actions de Ω^+ sur Ω^- pour un plan de coupure Π de normale \vec{n} est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\Omega^+/\Omega^-} = \iint_{\Pi} \vec{T}(P, \vec{n}) \cdot dS \\ \vec{M}_{A, \Omega^+/\Omega^-} = \iint_{\Pi} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{T}(P, \vec{n}) \cdot dS \end{array} \right\}_A$$

Tenseur des contraintes:

Soit $\bar{\bar{\sigma}}_P$, l'application définie au point P qui à une normale \vec{n} associe le vecteur des contraintes $\vec{T}(P, \vec{n})$.

$$\vec{T}(P, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}_P$$

$\bar{\bar{\sigma}}_P$ est une application linéaire représenté par une matrice dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\bar{\bar{\sigma}}_P: \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On montre que $\bar{\bar{\sigma}}_P$ est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres de $\bar{\bar{\sigma}}_P$ sont les contraintes principales, les vecteurs propres forment le repère principal des contraintes.

II- Etat de contrainte en un point

Modélisation des efforts intérieurs \Rightarrow Exploitation du postulat de Cauchy \Rightarrow Représentation la plus fréquente de l'état de contrainte en un point matériel.

Postulat de Cauchy

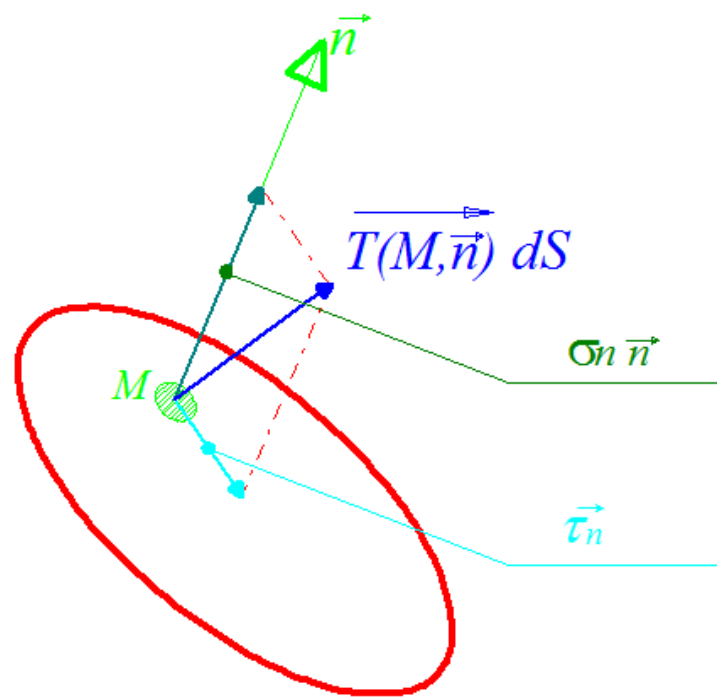
- Les efforts exercés sur une partie D d'un milieu continu par le complémentaire de D dans le système S peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces.
- Cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par la normale extérieure au domaine pour le point d'étude.

On peut considérer que chaque élément de matière est en effet soumis à des forces de liaison provenant soit d'une frontière si celle-ci est contiguë, soit du reste du système.

Avec l'hypothèse de densité surfacique de forces, nous pouvons dire que sur chaque surface élémentaire dS autour du point M et de normale \vec{n} , les éléments du système Σ situés dans la région de M et n'appartenant pas à la partie D exercent sur les éléments du système Σ appartenant à la partie D une force élémentaire $d\vec{F}$ déterminée par :

$$d\vec{F} = \vec{T}(M, \vec{n}) dS$$

Chapitre 3



Généralement, on appelle facette le plan tangent en M au domaine étudié. La normale \vec{n} définit l'orientation de cette facette.

On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale \vec{n} du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.

De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (encore appelé cisail ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

On a :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \vec{\tau}_n &= \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}\end{aligned}$$

III- Equation de mouvement ou d'équilibre

On considère ici un milieu continu M en équilibre statique. Soit m une masse de ce milieu occupant un volume V limitée par la surface S . Les efforts agissants sur cette masse sont les forces de contact induites par le tenseur des contraintes σ et les forces à distance par unité de masse représentées par le vecteur \vec{b} . L'équilibre de cette masse s'exprime ainsi :

$$\iint_S \sigma \vec{dS} + \iiint_V \rho \vec{b} dV = \vec{0}$$

ou en coordonnée cartésienne par :

$$\iint_S \sigma_{ij} n_j dS + \iiint_V \rho b_i dV = 0 \quad , \quad i \in \{1,2,3\}$$

Chapitre 3

L'intégrale de surface peut se transformer en intégrale de volume en utilisant le théorème de la divergence (théorème d'Ostrogradski) et l'équilibre prend la forme suivante et ce pour un volume arbitraire V :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0 , \quad i \in \{1,2,3\}$$

Par conséquent, en tout point du milieu M , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 , \quad i \in \{1,2,3\}$$

qui expriment les équations indéfinies de l'équilibre.

La forme générale de ces équations d'équilibre est :

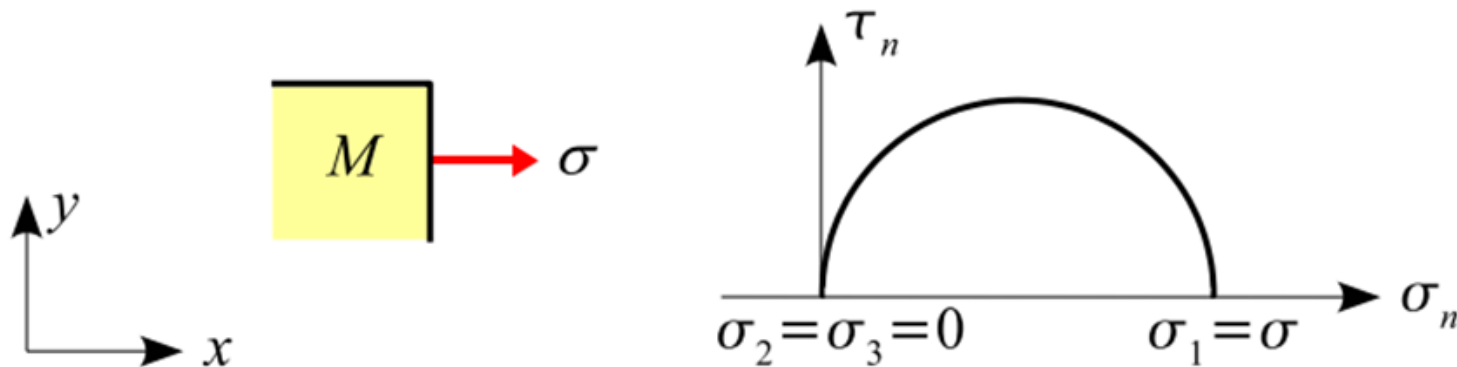
$$\operatorname{div}(\sigma) + \rho \vec{b} = \vec{0}$$

IV- Etats de contrainte particuliers

IV-1 Etat de contrainte Uniaxial : Traction ou Compression simple

L'état de contrainte en un point M est uniaxial par rapport à la direction \vec{i} (figure ci dessous), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

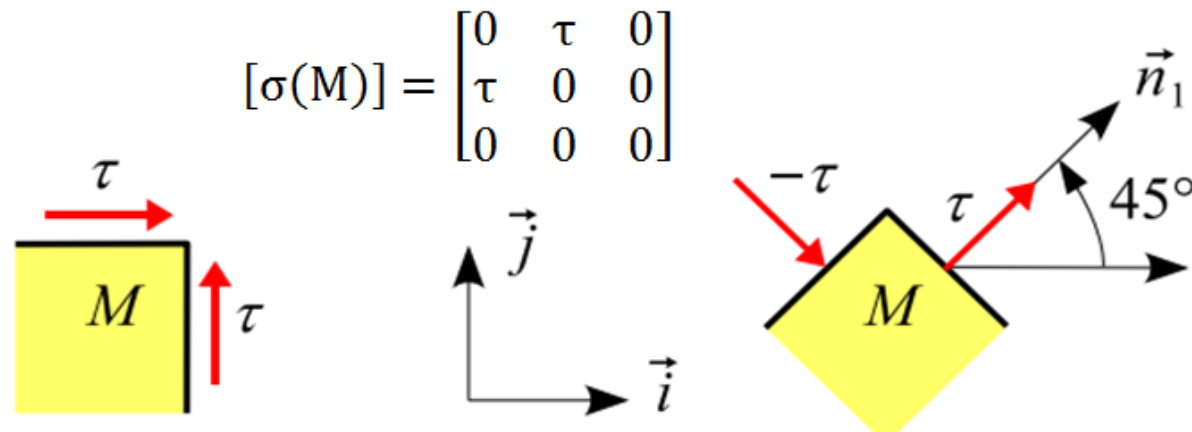


Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif. Le repère $\{M, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est le repère principal.

IV- Etats de contrainte particuliers

IV-2 Etat de cisaillement simple

L'état de contrainte en M est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions \vec{i} et \vec{j} (figure ci-dessous), si le tenseur des contraintes se réduit à :



Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = \tau ; \sigma_2 = -\tau ; \sigma_3 = 0$$

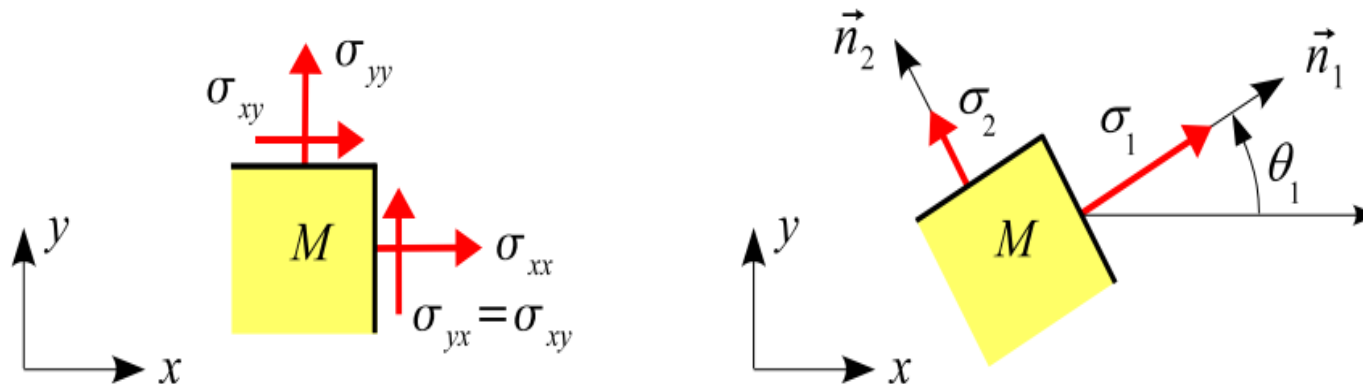
$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \{n_3\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV- Etats de contrainte particuliers

IV-3 Etat de contrainte plan

En un point M, l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions \vec{i} et \vec{j} (figure ci-dessous), si le tenseur des contraintes se réduit à:

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Chapitre 3

Le vecteur contrainte sur la facette \vec{k} est nul : $\vec{T}(M, \vec{k}) = \vec{0}$

La direction \vec{k} est donc direction principale et la contrainte principale associée est nulle :
 $\vec{n}_3 = \vec{k}$; $\sigma_3 = 0$

Les deux autres directions principales sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec } n_x^2 + n_y^2 = 1$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $n_x = n_y = 0$ que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

d'où l'équation polynomiale en σ_n :

$$\sigma_n^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_n + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 = 0$$

les contraintes principales :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

et les directions principales associées :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} ; \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ avec } \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}}$$

où θ_1 est la position angulaire de la direction principale \vec{n}_1 par rapport à l'axe x.

Chapitre 3

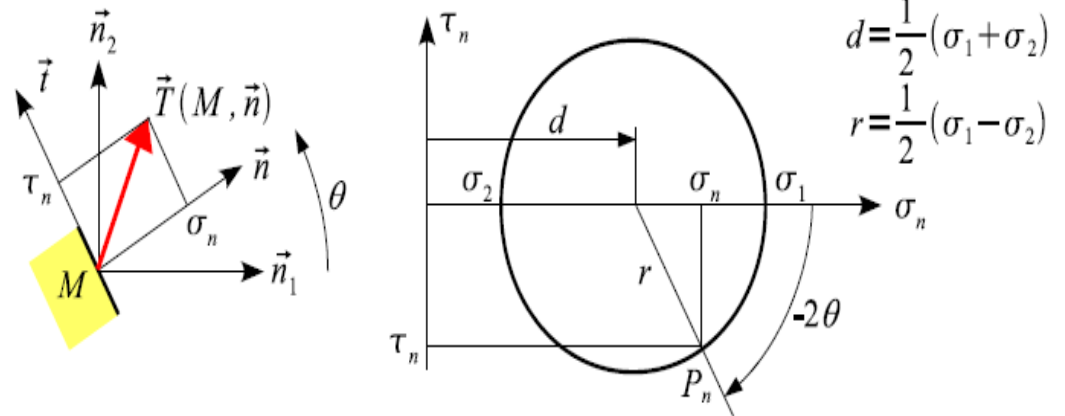
IV- Etats de contrainte particuliers

IV-4 Cercle de Mohr

En M , prenons comme repère celui principal $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$. Considérons la famille de facettes passant par la direction principale \vec{n}_3 (figure ci-dessous). Soit $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, une de ces facettes. Sur cette facette, les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cercle de Mohr des contraintes



Chapitre 3

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ est donc situé dans le plan $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$.

Soit \vec{t} le vecteur unitaire, situé dans le plan $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$ et faisant avec \vec{n} un angle égal à $\pi/2$:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Projetons le vecteur contrainte sur les axes \vec{n} et \vec{t} :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(M)] \{n\} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(M)] \{n\} = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ et } r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

A chaque facette \vec{n} , nous pouvons donc associer un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère $\{\sigma_n, \tau_n\}$ orthonormé. Lorsque l'angle θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r .

Chapitre 3

Exercice (Cercle de Mohr) :

On donne :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \sigma \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

avec $\sigma = -3 \text{ MPa}$ et $\sigma = 2 \text{ MPa}$

1- Tracer le cercle de Mohr.

2- Calculer les contraintes principales et indiquer les orientations des directions principales de la contrainte.

3- Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale et l'orientation de la facette correspondante.

4- Trouver la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour une facette orientée par le

vecteur $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y}$

Chapitre 4 : Lois de comportement rhéologique

Section 1 : Introduction aux divers types de comportement des matériaux

Section 2 : Comportement linéaire élastique

Section 3 : Comportement élasto-plastique

I- Introduction aux divers types de comportement des matériaux

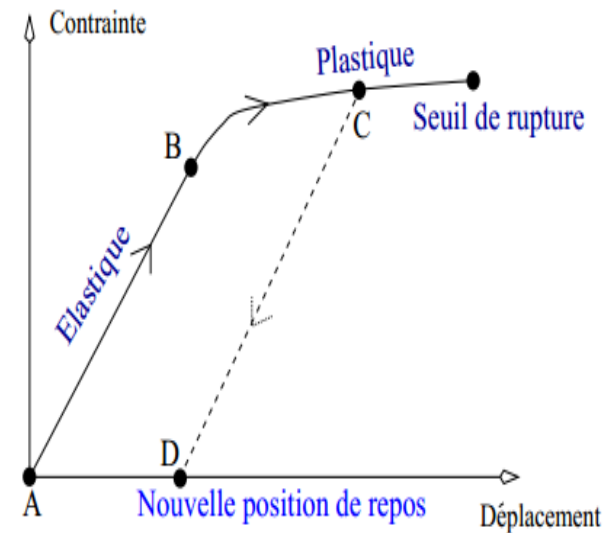
La loi de comportement va relier contraintes et déformation, en introduisant des propriétés propres au matériau considéré.

Ces lois peuvent encore une fois être bien plus complexes que celle présentée ici, en faisant par exemple intervenir la température du matériau.

Nous présentons la loi de comportement que nous utiliserons, ainsi que l'équation de Navier qui en résulte dans le cadre des petits déplacements et son interprétation comme la superposition de deux phénomènes simples.

Chapitre 4

La loi de comportement va relier les deux tenseurs définis précédemment (déformations et contraintes). Comme cela se passe dans un ressort, on va généralement imposer que la contrainte soit linéairement liée à la déformation. On pourrait, mais c'est très rare, introduire des termes de plus haut degré. Pour simuler des comportements plus complexes et en particulier non linéaires, on préfère utiliser une fonction linéaire par morceaux pour approximer la courbe non linéaire qui relie contraintes et déformation. On voit sur la Figure ci-dessous une illustration de ce qui se passe au delà du comportement élastique : entre les états A et B, le matériau est élastique ; il devient ensuite plastique si l'on augmente la déformation jusqu'en C. Relâcher la contrainte en C fera revenir le matériau dans une nouvelle position d'équilibre D, selon une pente égale à celle de son comportement élastique.



Type de comportement d'un matériau au delà des hypothèses de linéarité.

II- Comportement linéaire élastique

La loi linéaire que nous allons considérer est de la forme $\sigma = K \varepsilon$ où K est une fonction linéaire.

Les deux tenseurs σ et ε sont des matrices 3×3 symétriques et ont donc chacun 6 coefficients indépendants.

K comporte donc 36 coefficients indépendants qui lient linéairement ceux des deux tenseurs (K est en fait un tenseur d'ordre 4).

Un matériau, dans le cadre des approximations linéaires qui ont été faites depuis le début de ce chapitre, va donc être représenté par 36 coefficients qui vont entièrement définir son comportement et peuvent être mesurés sur des matériaux réels par des séries de tests, qui sont dits rhéologiques.

Chapitre 4

En pratique, la loi linéaire introduite précédemment est souvent trop générale et peut être simplifiée.

Si l'on considère que le matériau est isotrope, c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions (c'est très souvent le cas, sauf pour des matériaux fibreux à direction privilégiée, comme le bois ou les muscles), alors des raisons de symétrie font que parmi les 36 coefficients, deux seulement sont indépendants.

La loi de comportement se simplifie alors grandement et peut s'écrire :

$$\sigma = \lambda . tr(\epsilon) . I_3 + 2 . \mu . \epsilon$$

où I_3 est la matrice identité et tr la trace de la matrice.

λ et μ sont les deux coefficients indépendants et s'appellent les constantes de Lamé.

Elles sont homogènes à des pressions.

Chapitre 4

Des tests rhéologiques permettent de déterminer ces constantes, spécifiques à un matériau donné.

Ces tests mesurent en fait directement deux autres valeurs : le module d'Young E (homogène à une pression) et le coefficient de Poisson ν (sans unité).

Ces valeurs sont liées aux coefficients de Lamé par les équations :

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

III- Comportement élasto-plastique

La figure ci-dessous représente la courbe-type d'un essai de traction simple d'une éprouvette d'acier, donnant l'évolution de l'effort de traction F (rapporté à la section initiale de l'éprouvette S_0) en fonction de l'allongement relatif $\Delta l/l_0$, mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette.

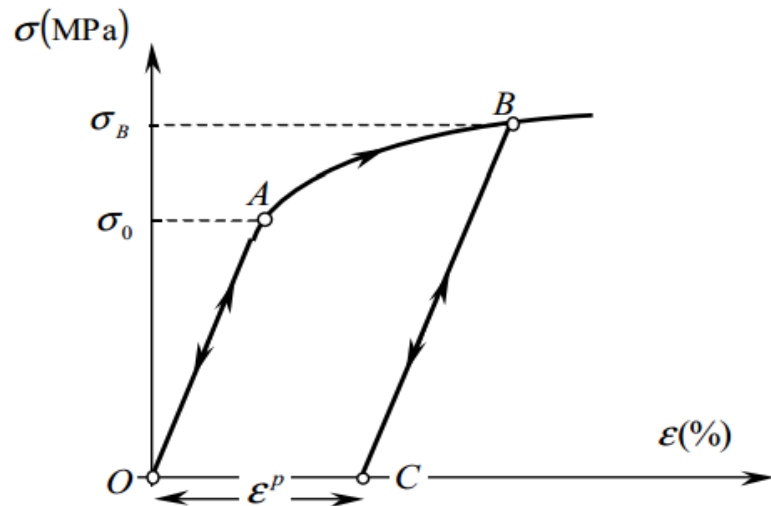
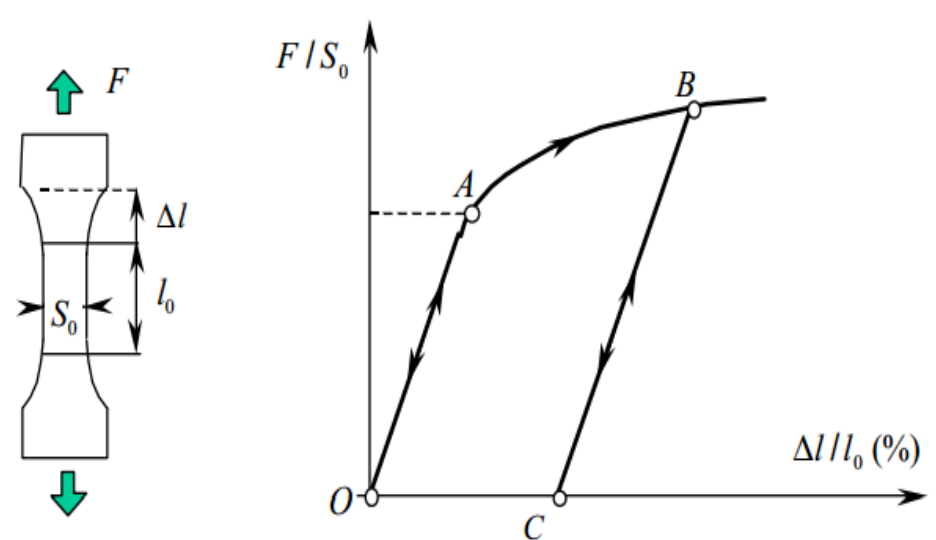


Diagramme σ - ε pour un matériau élastoplastique avec écrouissage.



Courbe expérimentale de traction d'une éprouvette d'acier.

Chapitre 4

L'analyse d'une telle expérience fait apparaître les caractéristiques suivantes :

- La réversibilité de la réponse en allongement de l'éprouvette dans la partie OA du diagramme, c'est-à-dire tant que l'effort F demeure inférieur à un seuil correspondant à l'ordonnée du point A, appelé seuil d'élasticité initial. Cette réversibilité se traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort et l'allongement, caractéristique du comportement élastique (linéaire) du matériau constitutif.
- L'irréversibilité de la réponse de l'éprouvette apparaît dès lors que l'on poursuit le chargement au-delà du seuil d'élasticité initial jusqu'à un point B, puis que l'on effectue une décharge complète ($F=0$) jusqu'au point C. La courbe BC de décharge est différente de la courbe OAB de première charge, de sorte qu'au point C subsiste un allongement rémanent. C'est la manifestation du comportement plastique du matériau constitutif.
- Rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on constate que le point représentatif dans le diagramme parcourt en sens inverse le segment BC de décharge. L'ordonnée du point B représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé seuil d'élasticité actuel, au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité.

Chapitre 4

L'augmentation du seuil d'élasticité constitue le phénomène d'écrouissage.

Ces observations expérimentales appellent un certain nombre de commentaires :

a) Les champs de contrainte et de déformation dans la partie médiane de l'éprouvette étant homogènes (ce qui suppose notamment l'homogénéité du matériau constitutif à l'échelle de l'éprouvette), F/S_0 et $\Delta l/l_0$ peuvent s'interpréter respectivement comme la contrainte uniaxiale de traction σ subie localement par le matériau, et la déformation linéarisée correspondante ε selon l'axe de l'éprouvette, supposée en transformation infinitésimale ($\Delta l/l_0 \ll 1$).

On obtient ainsi le diagramme ***contrainte-déformation*** de la figure ci-après, caractérisant cette fois-ci le comportement local du matériau sous sollicitation uniaxiale de traction.

La valeur de la déformation correspondant à l'allongement résiduel consécutif au cycle charge-décharge, s'appelle la déformation plastique, notée ε^p .

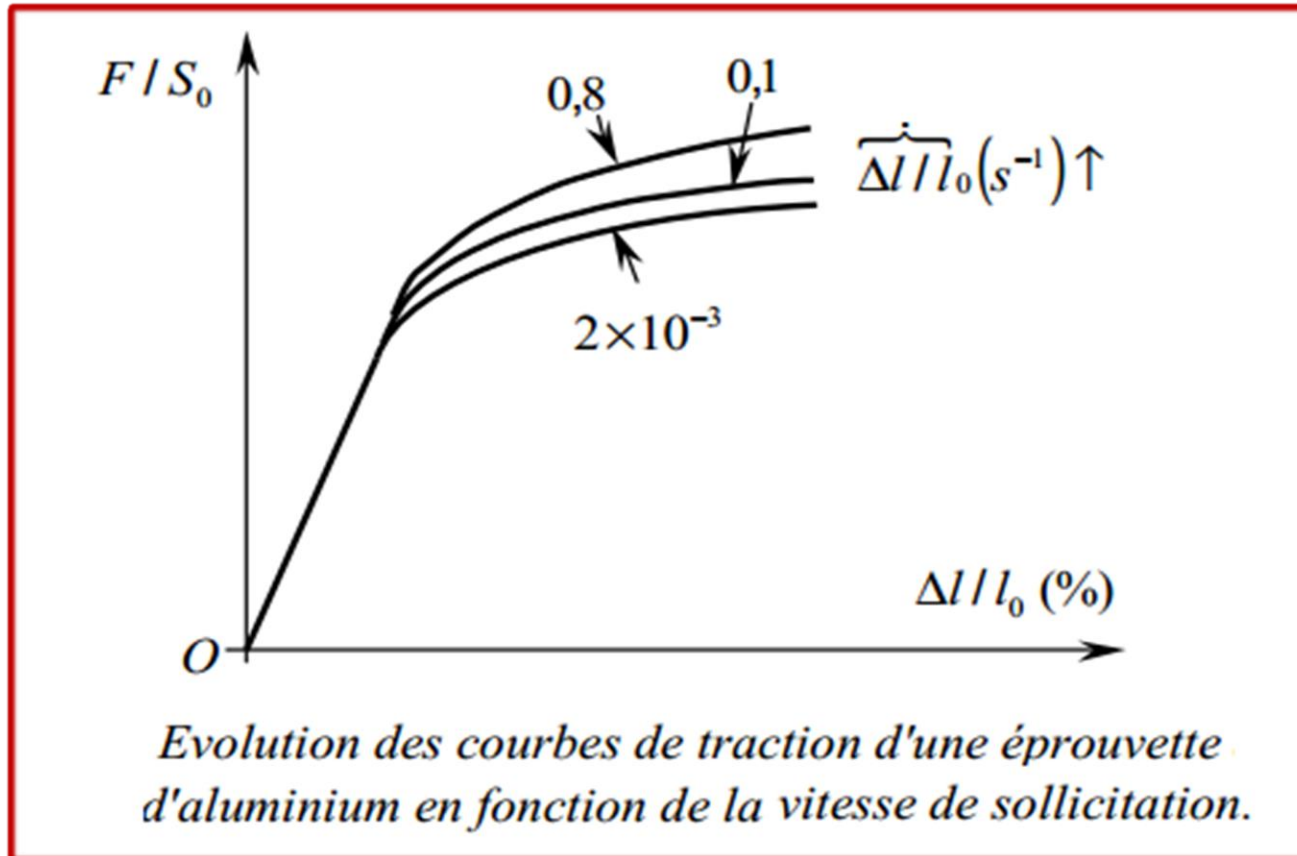
b) Une caractéristique importante du modèle de comportement élastoplastique mis en évidence par des expériences telles que celle décrite ci-dessus, est l'indépendance par rapport au temps physique.

C'est-à-dire que les diagrammes précédents ne dépendent pas de la vitesse à laquelle sont effectuées les phases de charge-décharge successives, ce qui revient à négliger les effets de vieillissement et de viscosité du matériau.

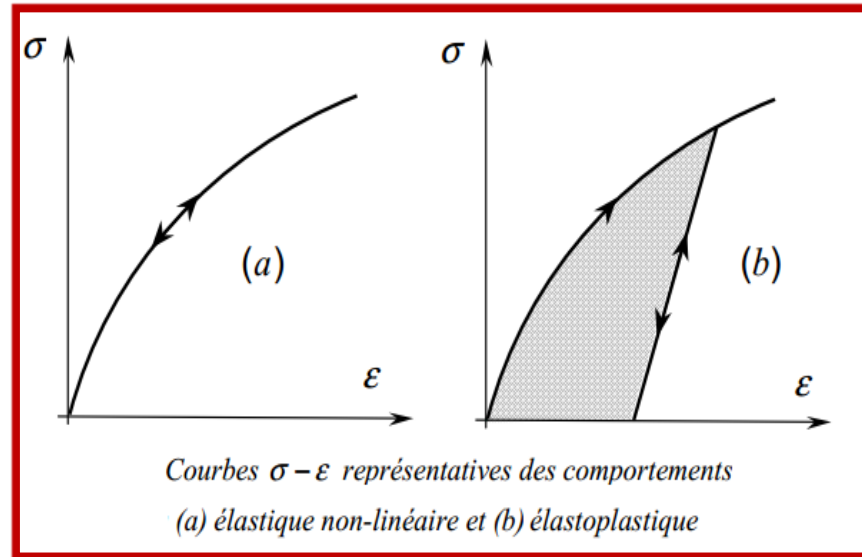
Cette propriété est bien vérifiée par exemple pour des métaux à température ordinaire, comme l'illustre la figure ci-dessous qui représente différentes courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium, montrant qu'un effet de viscosité n'apparaît que pour des sollicitations très rapides.

Il convient en revanche de prendre en compte un tel effet, à travers un modèle viscoplastique, dès que la température s'élève (enceintes de réacteurs nucléaires, procédés de formage «à chaud», dégagements thermiques dans les massifs rocheux etc.).

Chapitre 4



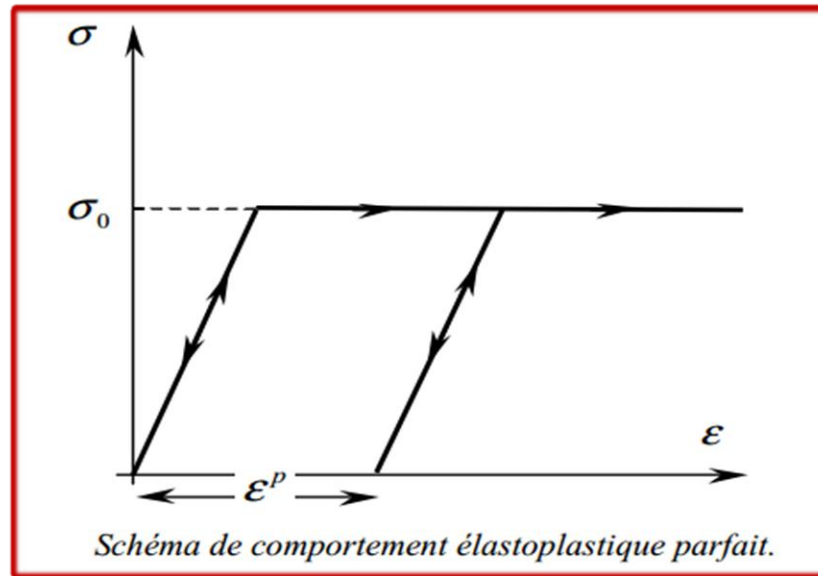
Chapitre 4



c) La notion centrale caractérisant le comportement plastique d'un matériau est celle d'irréversibilité et non pas celle de non-linéarité, même si les deux notions coïncident dans le cas où l'élasticité du matériau est linéaire dans le cadre de la transformation infinitésimale.

La mise en évidence de cette irréversibilité nécessite l'application d'un cycle charge-décharge, seul à même de faire apparaître une déformation plastique au terme de ce cycle.

La figure ci-après montre la différence essentielle existant entre un modèle élastique non linéaire et un modèle élastoplastique, en dépit de la similitude des courbes de première charge.



d) Un cas particulier important de comportement élastoplastique est celui du matériau élastique parfaitement plastique pour lequel la courbe contrainte-déformation comporte un palier horizontal.

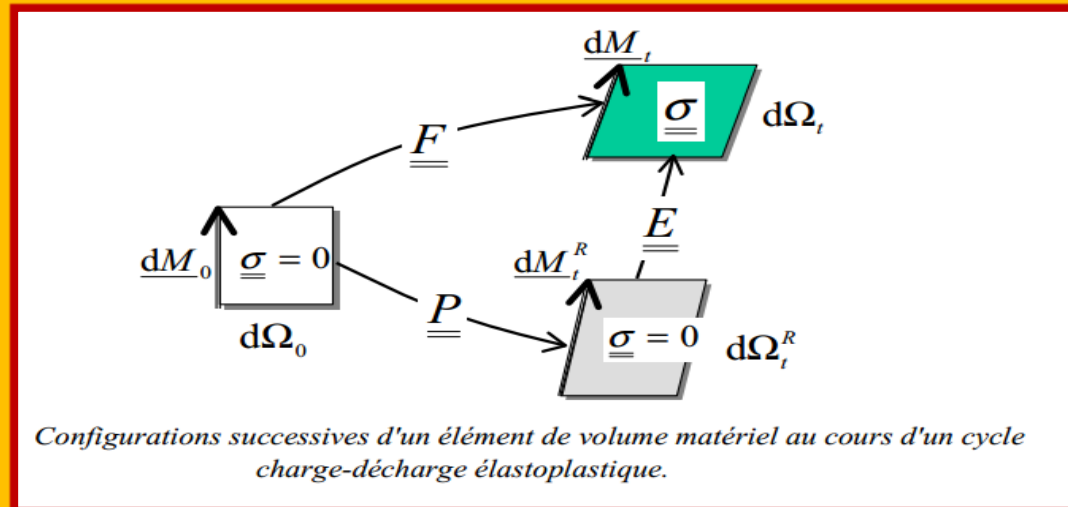
La figure ci-dessous donne une représentation schématique d'un tel comportement pour lequel le seuil d'élasticité σ_0 demeure constant, c'est-à-dire que l'écrouissage du matériau disparaît.

Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de ductilité, par opposition à celle de fragilité qui évoque l'idée de rupture brutale de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

Chapitre 4

Examinons plus précisément les transformations successives subies par l'élément de matière $d\Omega$ au cours d'un cycle charge-décharge dans les expériences décrites précédemment.

La figure ci-dessous représente schématiquement la séquence des transformations subies par un élément de volume lors d'une telle expérience de charge-décharge.



On désigne ainsi respectivement par :

- $d\Omega_0$: l'élément de volume dans la configuration initiale (état non chargé);
- $d\Omega_t$: le même élément au terme de la phase de chargement (configuration actuelle);
- $d\Omega_t^R$: la configuration atteinte par ce même élément après déchargement complet.

Chapitre 4

$\bar{\bar{F}}$ désigne le gradient de la transformation (homogène tangente) faisant passer de $d\Omega_0$ à $d\Omega_t^R$. Il permet de calculer le transporté \bar{dM}_t dans la configuration actuelle d'un vecteur matériel élémentaire quelconque \bar{dM}_0 attaché à $d\Omega_0$:

$$\bar{dM}_t = \bar{\bar{F}} \cdot \bar{dM}_0$$

$\bar{\bar{E}}$ et $\bar{\bar{P}}$ représentent respectivement les gradients des transformations faisant passer de $d\Omega_t^R$ à $d\Omega_t$ et de $d\Omega_t$ à $d\Omega_t^R$. Ils sont définis par les relations :

$$\bar{dM}_t = \bar{\bar{E}} \cdot \bar{dM}_t^R \quad \text{et} \quad \bar{dM}_t^R = \bar{\bar{P}} \cdot \bar{dM}_0$$

D'où la décomposition multiplicative suivante du gradient total de la transformation en parties élastique et plastique :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{E}} \cdot \bar{\bar{P}}$$

IV- Equation de Navier

En mécanique des milieux continus, l'équation de Navier est l'équation qui relie la déformation d'un solide élastique linéaire isotrope aux forces appliquées.

On note $u(x,t)$ le champ des déformations et f_v la force volumique qui s'exerce.

On a :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_v$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du solide et ρ_0 sa masse volumique.

On peut écrire cette équation en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad} (\text{div } \mathbf{u}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_v$$

Chapitre 5 : ELASTICITE

OBJECTIFS

- ❖ Définir les **Déplacements et déformations**
- ❖ Définir les **Contraintes**
- ❖ Définir les **critères de Tresca, Von Mises, Rankine**
- ❖ Loi de **comportement ou loi constitutive**

Déplacements et Déformations

- ❖ Les déplacements et les déformations sont petits.
- ❖ Déplacements et déformations
- ❖ Vecteur déplacement :

- ❖ Vecteur déplacement :

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_0 M} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

- ❖ Tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad , \quad [\varepsilon]^T = [\varepsilon]$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- ❖ Allongement unitaire en M dans la direction $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\}$$

$$= n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} + n_z^2 \varepsilon_{zz} + n_x n_y \gamma_{xy} + n_x n_z \gamma_{xz} + n_y n_z \gamma_{yz}$$

Déplacements et Déformations

-Glissement en M dans les directions orthogonales \vec{n}_a et \vec{n}_b :

$$\gamma(M, \vec{n}_a, \vec{n}_b) = 2 \{n_b\}^T [\varepsilon(M)] \{n_a\} \quad , \quad \{n_b\}^T \{n_a\} = 0$$

– Variation relative de volume :

$$\varepsilon_V(M) = \text{tr} [\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Contraintes

– Vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad , \quad \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2$$

Soit $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$ un vecteur unitaire en M . Le vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M est donné par la formule de **Cauchy** :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad , \quad \{T\} = [\sigma(M)] \{n\}$$

ou $[\sigma(M)]$ est le tenseur des contraintes en M .

Le tenseur des contraintes est **symétrique** :

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

Soit $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

Contraintes

La contrainte normale sur la facette \vec{n} est :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \{n\}^T [\sigma] \{n\} \\ &= n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + n_z^2 \sigma_{zz} + 2 n_x n_y \sigma_{xy} + 2 n_x n_z \sigma_{xz} + 2 n_y n_z \sigma_{yz}\end{aligned}$$

– Soient σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales en un point M d'un solide. Les critères de Rankine, Von Mises et de Tresca s'écrivent :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E$$

$$\sigma_T = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

Loi de comportement ou loi constitutive

Si le matériau est isotrope, la loi de comportement s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}))$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Loi de comportement ou loi constitutive

❖ Cas particulier : état de contraintes planes:

Le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où l'expression du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

et de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad , \quad \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

Loi de comportement ou loi constitutive

Les contraintes et les déformations principales sont :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = 0$$
$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}$$

Les directions principales sont :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}$$

Les critères de Rankine, Von Mises et de Tresca se réduisent à :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E$$
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_E$$
$$\sigma_T = 2\tau_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E$$

Déplacements et Déformations

L'allongement unitaire en M dans la direction $\{n\}$ se réduit à :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} + n_x n_y \gamma_{xy}$$

Avec :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

APPLICATIONS

Vecteur contrainte sur une facette

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Soit le vecteur unitaire \vec{n} de composantes :

$$\{n\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Sur la facette \vec{n} :

- (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
- (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
- (c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement

APPLICATIONS

Déformations autour d'un point

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des déformations est égal à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Un tel état de déformation est dit état de déformation plane par rapport à l'axe \vec{k} .

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des déformations.

2. Soient les deux directions orthogonales \vec{n}_a et \vec{n}_b :

$$\{n_a\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{n_b\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 0$$

(a) Calculer l'allongement unitaire dans les directions \vec{n}_a et \vec{n}_b et le glissement dans ces deux directions.

(b) Faire un dessin qui montre la signification physique de ces déformations.

(c) Expression du tenseur des déformations dans le repère $\{\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{k}\}$.

3. Calculer les déformations et les directions principales. Faire un dessin qui montre la signification physique des déformations principales.

4. Calculer la variation relative de volume εV .