Savoir démontrer qu'une fonction admet un extrémum :

Exercice n °1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = -x^2 + 8x - 1$

1. *Utiliser la le menu graph, et fonction trace de la calculatrice pour visualiser l'allure de la courbe et l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x = 4. S'agit-il d'un maximum , ou d'un minimum ?*
2. *Par le calcul, montrer que la fonction f admet un extremum sur* $\mathbb{R}$*, donner* ***la nature et la valeur de cet extremum .***

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 + 2x + 3$

Montrer que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ *pour x = -1, donner la nature et la valeur de cet extremum .*

Exercice n °3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 2(x - \frac{5}{2})^2 + 5$

Montrer que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ *pour x =* $\frac{5}{2}$ *, donner la nature et la valeur de cet extremum .*

Exercice n °4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 2x^2 - 10x + \frac{45}{4}$

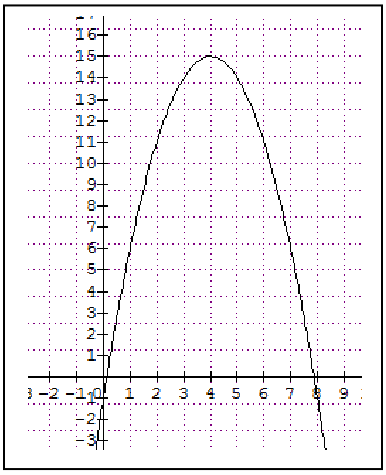
Montrer que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$ *pour x =* $\frac{5}{2}$ *, et donner la nature et la valeur de cet extremum .*

A.Cacciapalle

Exercice n °1 : Correction

15 semble être le maximum de cette fonction , et il est atteint pour x=4

Par le calcul, montrons que : $f(4)=15$ ***et que pour tout réel x on a*** $f(x)\leq 15$



1. $f(4)=-4^2+8\times 4-1=-16+32-1=15$
2. ***Montrer que pour tout réel x on a*** $f(x)\leq 15$

est équivalent à montrer que pour tout réel x on a $f(x)-15\leq 0$

$f(x)-15=-x^2+8x-1-15$
$f(x)-15=-x^2+8x-16$

$f(x)-15=-(x^2-8x+16)=-(x-4)^2$ ***or un carré est toujours positif donc***

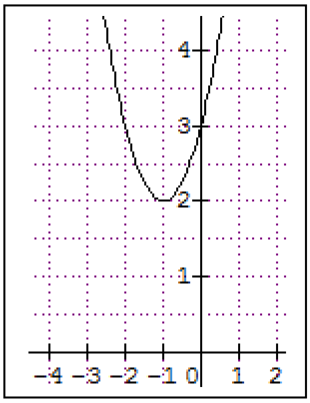
pour tout réel x , $f(x)-15\leq 0$ ***.De plus*** $f(4)=15$

donc 15 est le maximum de f sur ℝ, et il est atteint pour x=4

Exercice n °2 : Correction

Par le calcul, montrons que : $f(-1)=2$ ***et que pour tout réel x on a*** $f(x)\geq 2$

$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+3=1-2+3=2$



Montrer que pour tout réel x on a $f(x)\geq 2$

équivaut à montrer que pour tout réel x on a $f(x)-2\geq 0$

$f(x)-2=x^2+2x+3-2=x^2+2x+1=(x+1)^2$ ***or un carré est toujours positif donc***

pour tout réel x on a $f(x)-2\geq 0$ ***donc pour tout réel x on a*** $f(x)\geq 2$

Conclusion :f admet 2 pour minimum sur ℝ, et il est atteint pour x= -1 .

Exercice n ° 3 : Correction

Par le calcul, montrons que : $f\left(\frac{5}{2}\right)=5$ ***et que pour tout réel x on a*** $f(x)\geq 5$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=2\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+5=5$

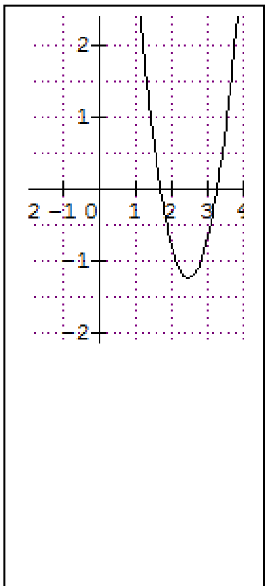
Montrer que pour tout réel x on a $f(x)\geq 5$

équivaut à montrer que pour tout réel x on a $f(x)-5\geq 0$

$f(x)-5=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+5-5=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ***or un carré est toujours positif donc***

pour tout réel x on a $f(x)-5\geq 0$ ***donc pour tout réel x on a*** $f(x)\geq 5$

Conclusion :f admet 5 pour minimum sur ℝ, et il est atteint pour x = $\frac{5}{2}$.



Exercice n °4: ***Correction***

Montrons que $-\frac{5}{4}$ *est le minimum de f sur R , et qu'il est atteint pour* $x=\frac{5}{2}$

montrons que : $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{4}$ ***et que pour tout réel x on a*** $f(x)\geq -\frac{5}{4}$ ***(ou encore que*** $f(x)+\frac{5}{4}\geq 0$ ***)***

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{45}{4} = 2\times\frac{25}{4} - 10\times\frac{5}{2} + \frac{45}{4} = \frac{50}{4} - \frac{100}{4} + \frac{45}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$f(x) + \frac{5}{4} = 2x^2 - 10x + \frac{45}{4} + \frac{5}{4} = 2x^2 - 10x + \frac{50}{4} = 2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

Or un carré est toujours positif donc pour tout réel x on a $f(x) + \frac{5}{4} \geq 0$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel x on a $f(x) \geq -\frac{5}{4}$ ***et :*** $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ ***donc*** $-\frac{5}{4}$ *est le minimum de f sur R , et qu'il est atteint pour* $x = \frac{5}{2}$