Les variables quantitatives

1. Variable quantitative discrète

Pour représenter des variables quantitatives discrètes graphiquement, on procède de deux manières :

* Soit on construit le diagramme en bâtons associé aux effectifs ou aux fréquences.

* Soit on construit le diagramme cumulatif associé aux effectifs cumulés ou aux fréquences cumulées.

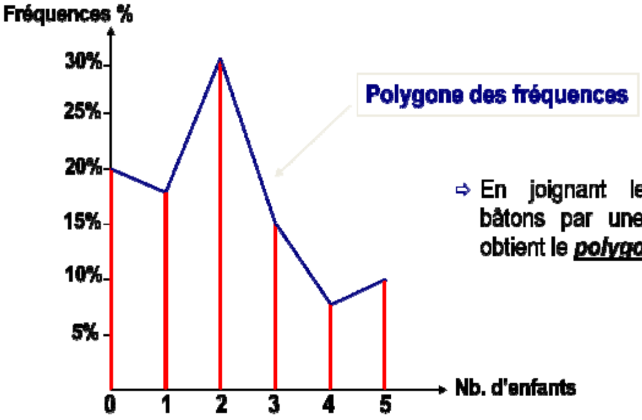
1. Variable quantitative discrète

a. <u>Représentation d'une distribution de fréquences (ou d'effectifs)</u> :

<u>Exemple :</u> Nombre d'enfants des 40 salariés d'une entreprise

Nb. d'enfants	Effectifs	Fréquences %
0	8	20%
1	7	17,5%
2	12	30%
3	6	15%
4	3	7,5%
5	4	10%
Total	***40***	***100%***

1. Variable quantitative discrète



⇨ En joignant les sommets des bâtons par une ligne brisée, on obtient le ***polygone de fréquences***

On peut également définir le polygone des effectifs

1. Variable quantitative discrète

b. Diagrammes cumulatifs :

On rappelle que les fréquences cumulées croissantes sont définies seulement pour les variables qualitatives ordinales et les variables quantitatives. Elles représentent le nombre ou la proportion d'individus de la population ayant au plus la modalité x_i .

D'une manière générale, un tableau statistique qui regroupe les fréquences cumulées (n individus, k modalités) a la forme suivante :

1. Variable quantitative a discrète

Modalités	Effectif	f_i	f_{cc}	f_{cd}
x_1	n_1	f_1	$F_1 = f_1$	1
x_2	n_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$1 - f_1$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_i	n_i	f_i	$F_i = f_1 + \ldots + f_i$	$1 - (f_1 + \cdots + f_{i-1})$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	n_k	f_k	1	f_k
Total	n	1		

Quand **la variable est discrète** :

❖On peut représenter les effectifs (ou les fréquences) à l'aide du diagramme en bâtons.

❖Les fréquences cumulées sont représentées graphiquement moyennant la fonction de répartition.

1. Variable quantitative discrète

Définition :

Considérons une population statistique décrite selon un caractère quantitatif **discret** X dont les k -modalités x_k sont $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_k$. On dit que $F(\cdot)$ est la fonction de répartition associée à X la fonction définie de R vers [0, 1] par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1, \\ F_i & \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1}, \quad (\text{avec } i = 1, \ldots, k-1) \\ 1 & \text{si} \quad x \geq x_k, \end{cases}$$

Vocabulaire :

La représentation graphique de la fonction de répartition (ou fréquence cumulée) est dite diagramme cumulatif.

1. Variable quantitative discrète

Exemple : Reprenons l'exemple des Nombres d'enfants des 40 salariés d'une entreprise.

Nb. d'enfants	**Effectifs**	**Fréq. %**	**F(x) « *moins de* »**	**F(x) « *plus de* »**
0	8	20%	**20%**	**100%**
1	7	17,5%	**37,5%**	**80%**
2	12	30%	**67,5%**	**62,5%**
3	6	15%	**82,5%**	**32,5%**
4	3	7,5%	**90%**	**17,5%**
5	4	10%	**100%**	**10%**
Total	***40***	***100%***	**-**	**-**

1. Variable quantitative discrète

Représentation graphique de la courbe cumulative croissante

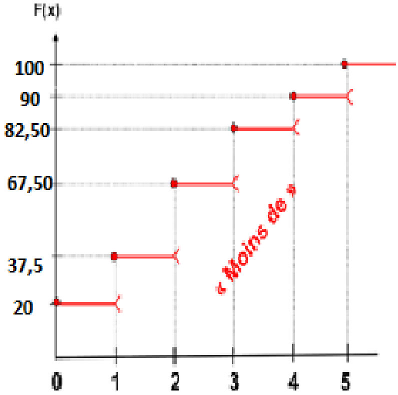
* La fonction F(x) étant définie sur { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }, on commence par représenter les points dont on connaît les coordonnées

*Entre chaque modalité du caractère, F(x) est contante

$F(x) = 20\%$ $\quad \forall\ X < 1$

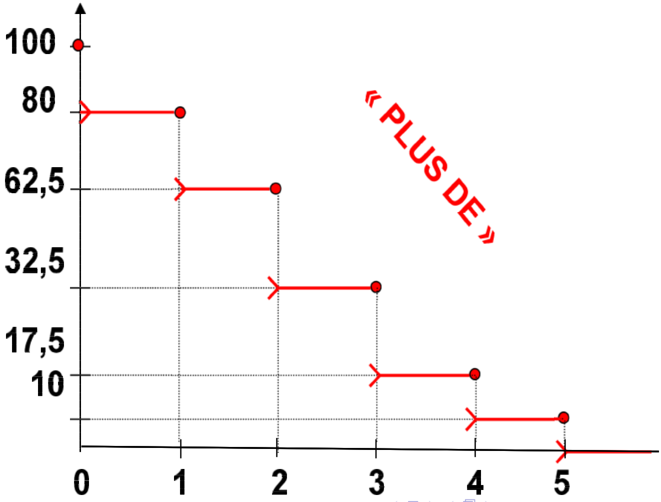
$F(x) = 37{,}5\ \%$ $\quad \forall\ 1 \leq X < 2$

$F(X) = 67{,}5\ \%$ $\quad \forall\ 2 \leq X < 3$



1. Variable quantitative discrète

Représentation graphique de la courbe cumulative décroissante



2. Variable quantitative continue

On rappelle qu'une variable quantitative continue peut prendre une infinité de valeurs possibles, que le domaine de la variable est alors R ou un intervalle de R, et qu'il est souvent intéressant de procéder à des regroupements en classes pour faire des représentations graphiques.

Quand **la variable est continue** :

* On peut représenter les effectifs (ou les fréquences) à l'aide des histogrammes, et on distingue deux cas :

❑Cas de classes d'amplitudes égales

❑Cas de classes d'amplitudes inégales

* Construire des polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

2. Variable quantitative continue

Définition :[histogramme]

Un histogramme est un diagramme composé de rectangles contigus dont les aires sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences) et dont les bases sont déterminées par les intervalles de classes.

Remarque :

Lorsque l'on regroupe les données en classes, il existe une formule dite de « Sturges» permettant de déterminer le nombre (k) de classes en fonction du nombre (N) d'unités statistique. Son expression est donnée par

$$k = 1 + \frac{10}{3}\log_{10}(\mathrm{N})$$

(On arrondira à l'entier le plus proche)

2. Variable quantitative continue

2.1. Cas de classes d'amplitudes égales :

❖Sur l'axe des abscisses, sont portées les limites des classes.

❖ Sur l'axe des ordonnées, sont portées les fréquences (ou les effectifs) correspondant à chaque classe.

❖Chaque fréquence (ou effectif) est représentée par un rectangle dont la base représente l'amplitude de classe et dont la hauteur est proportionnelle à la fréquence (ou effectif), dans ce cas la

surface du rectangle correspondant à la classe *i* est donné par

$S_i = f_i \times a_i$ ou $S_i = n_i \times a_i$

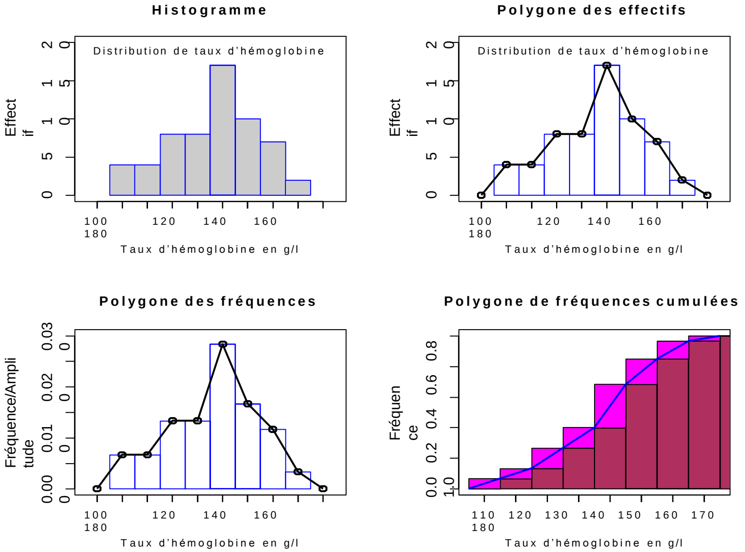
2.1. Cas de classes d'amplitudes égales :

Exemple

On a relevé le taux d'hémoglobine (mesuré en *g/A* de sang) chez 60 personnes adultes présumées en bonne santé. On obtient le tableau suivant :

Classe	n_i	Amplitude
[105,115[	4	10
[115,125[	4	10
[125,135[	8	10
[135,145[	8	10
[145,155[	16	10
[155,165[	10	10
[165,175[	7	10
[175,185]	3	10

2.1. Cas de classes d'amplitudes égales :



2.1. Cas de classes d'amplitudes égales :

construction d'un polygone de fréquences :

On construit le polygone de fréquences (ou des effectifs) en joignant les milieux des segments supérieures de chaque rectangle de l'histogramme par droite segmentée .

Remarques importantes :

-Le Polygone de effectifs doit toujours commencer par 0 et se terminer par 0.

-Le polygone des fréquences conserve l'aire ou la surface de l'histogramme.

-L'aire totale situé entre le polygone des fréquences et l'axe des abscisses est le même que l'aire des rectangles de l'histogramme.

2. Variable quantitative continue

2.2. Cas de classes d’amplitudes inégales :

- Les fréquences (ou les effectifs) se rapportant à des classes d’amplitudes inégales ne sont plus comparables.

$\Rightarrow$ Il faut effectuer une correction pour tenir compte des différences d’amplitudes.

2.2. Cas de classes d'amplitudes inégales :

On note n_i l'effectif de la $i^{\grave{e}me}$ classe dont l'amplitude est a_i .

Définition :

Dans le cas d'une variable quantitative continue, on définit la densité d'effectif, notée d_i , d'une classe d'effectif n_i et d'amplitude a_i par

$$d_i = \frac{n_i}{a_i} \qquad \text{(ou, dans le cas des fréquences } d_i = \frac{f_i}{a_i}\text{).}$$

Synonymes :

Densité de fréquence = Fréquence relative = Fréquence corrigée .

2.2. Cas de classes d'amplitudes inégales :

Méthode de construction :

1-Sur l'axe des abscisses, on met **les limites des classes**.

2-Sur l'axe des ordonnées, on met **les fréquences (ou effectifs) corrigées** correspondant à chaque classe.

3-La **longueur de la base** de chaque rectangle de l'histogramme c'est **l'amplitude** de classe.

3-La **hauteur** de chaque rectangle de l'histogramme est **proportionnelle** à la **fréquence (ou effectif) corrigée** égale à

$$d_i = \frac{f_i}{a_i}$$

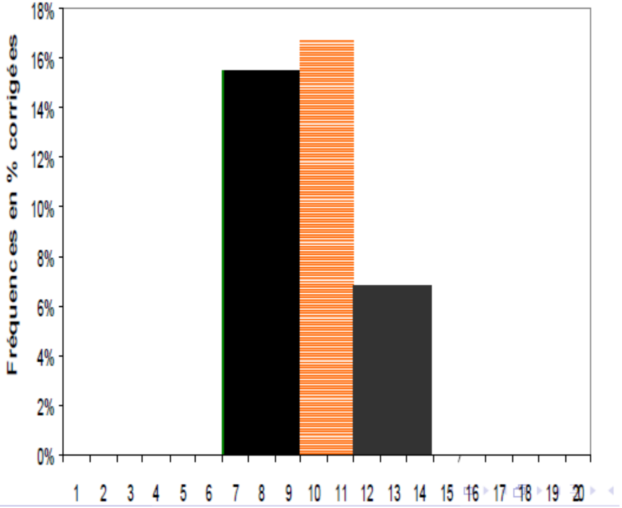
2.2. Cas de classes d’amplitudes inégales :

Exemple 1 : Le tableau statistique suivant regroupe les notes de certains élèves en maths :

Classes	**Effectifs n_i**	**Fréquences f_i en %**	**Amplitude a_i**	**Effectifs corrigés n_i'**	**Fréquences corrigées d_i en %**
[6 - 9[	7	46,70	3	2,33	15,60
[9 - 11[	5	33,30	2	2,50	16,70
[11 - 14[	3	20,00	3	1,00	6,70
Total	**15**	**100,00**			

2.2. Cas de classes d’amplitudes inégales :

Histogramme des notes obtenues en Math



2.3. Diagrammes cumulatifs :

Méthode de construction d'un polygone de fréquences cumulées croissantes :

- On trace un repère dont les graduations sont choisies par rapport aux données de l'énoncé.
- On place le point $(x_1; 0)$. (x_1 est la valeur de la première modalité)
- Pour chaque classe $[x_i, x_{i+1}[$ ayant une fréquence cumulée croissante F_i, on place les points de coordonnées $(x_{i+1}; F_i)$
- On relie ces points

2.3. Diagrammes cumulatifs :

Exemple : Soit les données suivantes issues d'une enquête

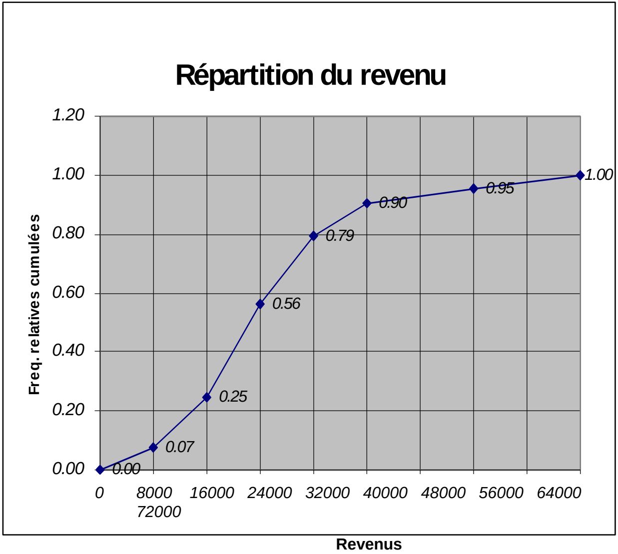
Revenus en $	*Nombre de personnes*	*Fréquence*	*Fréq cumulée croissante*
[0 ; 8000[	***24***	***0.07***	***0.07***
[8000 ; 16000[	***56***	***0.18***	***0.25***
[16000 ; 24000 [	***102***	***0.31***	***0.56***
[24000 ; 32000[	***74***	***0.24***	***0.79***
[32000 ; 40000[	***36***	***0.11***	***0.90***
[40000 ; 56000[	***16***	***0.05***	***0.95***
[56000 ; 72000[	***15***	***0.05***	***1***
Total	**323**	**1**	

Pour construire le polygone des fréquences cumulées croissantes, on place les points de coordonnées :

(0 ; 0) – (8000 ; 0.07) – (16000 ; 0.25) – (24000 ; 0.56) – (32000 ; 0.79) – (40000 ; 0.90) – (56000 ; 0.95) – (72000 ; 1)

Puis on les relie, on obtient le graphique suivant :

2.3. Diagrammes cumulatifs :



2.3. Diagrammes cumulatifs :

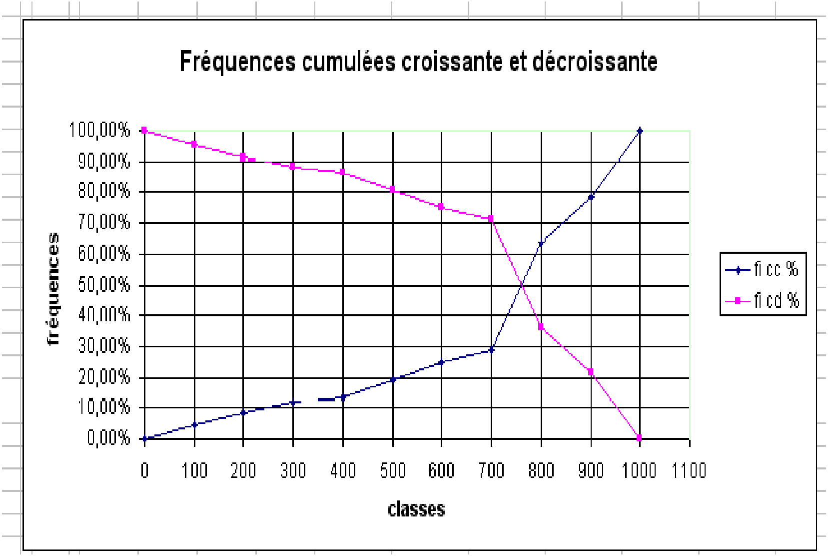
Méthode de construction d'un polygone de fréquences cumulées décroissantes :

- On trace un repère dont les graduations sont choisies par rapport aux données de l'énoncé.
- Pour chaque classe $[x_i\,, x_{i+1}[$ ayant une fréquence cumulée décroissante F_i, on place les points de coordonnées $(x_i\,; F_i)$
- On place le point $(x_k\,; 0)$. (x_k est la valeur de la dernière modalité)
- On relie ces points

2.3. Diagrammes cumulatifs :

classes					centre Xi	ni	fi	fi en %	ni cc	fi cc %	ni cd	fi cd%
[	0	;	100	[	50	6	0,04	4,29%	6	4,29%	140	100,00%
[	100	;	200	[	150	6	0,04	4,29%	12	8,57%	134	95,71%
[	200	;	300	[	250	5	0,04	3,57%	17	12,14%	128	91,43%
[	300	;	400	[	350	2	0,01	1,43%	19	13,57%	123	87,86%
[	400	;	500	[	450	8	0,06	5,71%	27	19,29%	121	86,43%
[	500	;	600	[	550	8	0,06	5,71%	35	25,00%	113	80,71%
[	600	;	700	[	650	5	0,04	3,57%	40	28,57%	105	75,00%
[	700	;	800	[	750	49	0,35	35,00%	89	63,57%	100	71,43%
[	800	;	900	[	850	21	0,15	15,00%	110	78,57%	51	36,43%
[	900	;	1000	[	950	30	0,21	21,43%	140	100,00%	30	21,43%
					totaux :	140	1,00	100%				

2.3. Diagrammes cumulatifs :



2.3. Diagrammes cumulatifs :

Pour la construction de ce diagramme, on a placé les points suivant :

Points du polygone f_{cc} ƒ	Points du polygone f_{cc} ¥
(0 ;0)	(0 ; 100)
(100 ; 4.29)	(100 ; 95.71)
(200 ; 8.75)	(200 ; 91.43)
(300 ; 12.14)	(300 ; 87.86)
(400 ; 13.57)	(400 ; 86.43)
(500 ; 19.29)	(500 ; 80.71)
(600 ; 25)	(600 ; 75)
(700 ; 28.57)	(700 ; 71.43)
(800 ; 63.57	(800 ; 36.43)
(900 ; 78.57)	(900 ; 21.43)
(1000 ; 100)	(1000 ; 0)

Remarques :

1- Le même raisonnement effectué sur les fréquences cumulées reste valable pour les effectifs cumulés, et la méthode de construction du diagramme ne change pas, sauf exception : il faut considérer la colonne de l'effectif cumulé.

2- Pour construire le diagramme de fréquences cumulées croissantes, lorsque les amplitudes sont inégales, nous plaçons les points issus de la colonne fréquences cumulées croissantes.

3- Pour construire l'histogramme, lorsque les amplitudes sont inégales, il faut corriger les effectifs ou les fréquences.

Merci