1 | 1

2018 - 2019

Pr. M. LAKHSASSI

TC-ING

UIC

Mathématiques Appliqués

G3

Quizz 1 - Corrigé :

Ex 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 3y' = (-12x+1)\cdot e^{-3x}$$

Ex 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$x^2 y'' - 2y = x \quad \text{via } t := \ln x$$

Ex 1 :

équation caractéristique :

$$r^2 + 3r = 0 \iff r = 0 \text{ ou } r = -3$$

d'où la solution de l'éq. homogène :

3 (SH) : $\boxed{y_h = \lambda e^{0x} + \mu e^{-3x} = \lambda + \mu e^{-3x}}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(SP) : -3 est racine $\left(e^{-3x}\right)$

2 d'où $y_p = x(ax+b)e^{-3x} = (ax^2+bx)e^{-3x}$

d'où $y'_p = \left[2ax+b-3(ax^2+bx)\right]e^{-3x}$
$= \left(-3ax^2+(2a-3b)x+b\right)e^{-3x}$

et $y''_p = (-6ax+2a-3b)e^{-3x} - 3\left(-3ax^2+(2a-3b)x+b\right)e^{-3x}$
$= \left[9ax^2+(-6a-6a+9b)x+(2a-3b-3b)\right]e^{-3x}$
$= \left[9ax^2+(9b-12a)x+(2a-6b)\right]e^{-3x}$

2)

or $y_p'' + 3y_p' = (-12x+1)e^{-3x}$ $\forall x \in I$ (I ensemble où la solution est valable)

donc $\left[\cancel{9a}x^2 + (\cancel{9b}-12a)x + 2a - 6b + \left(-\cancel{9a}x^2 + (6a-\cancel{9b})x + 3b\right)\right]e^{-3x}$

$= (-12x+1)e^{-3x}$, $\forall x \in I$

$\boxed{2}$

d'où $-6ax + 2a - 3b = -12x + 1$, $\forall x \in I$

d'où $\begin{cases} -6a = -12 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

3 d'où $\boxed{y_p = x(2x+1)e^{-3x}}$

d'où la SG :

$y = y_h + y_p = \lambda + \mu e^{-3x} + (2x^2 + x)e^{-3x}$; λ, μ

2 d'où $\boxed{y = (2x^2 + x + \mu)e^{-3x} + \lambda \text{ ; } \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$

$\boxed{\text{et } I = \mathbb{R}}$ (Définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Ex 2 :}}$

$x^2 y'' - 2y = x$ via $t := \ln x$

$y = y(x) = y(e^t) = \underbrace{y \circ \exp}_{z}(t) = z(t) = z(\ln x)$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = z(\ln x)}$

d'où $y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$ et $y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x} z''(\ln x)$

d'où $x^2 y'' - 2y = x \iff -z'(\ln x) + z''(\ln x) - 2z(\ln x) = x$

3 $\iff \boxed{z''(t) - z'(t) - 2z(t) = e^t}$

$\hookrightarrow$ EDL 2 à coeff. constants

3) (SH): z_h :

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \text{ ou } -1$$

1 d'où $\boxed{z_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$

(SP): dans e^t, 1 n'est pas racine de $r^2 - r - 2 = 0$

d'où $z_p = a \cdot e^t \quad (P_0(x) \cdot e^t)$

$\Rightarrow z''_p = a e^t$ et z'_p aussi

or $z''_p - z'_p - 2z_p = e^t$,

donc $-2a e^t = e^t$, $\forall t \in I_z$ (I_z ensemble de validité de la solution)

d'où $\underline{a = -\frac{1}{2}}$

2 d'où $\boxed{z_p = \frac{-e^t}{2}}$ $\in \mathbb{K}$

(SG): Enfin : $z = z_h + z_p = \frac{-e^t}{2} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

et $y(x) = z(\ln x)$ d'où :

$$y(x) = -\frac{e^{\ln x}}{2} + \lambda e^{-\ln x} + \mu e^{2\ln x}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{x} + \mu x^2 \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$$

3 $\boxed{\text{définie sur } I = \mathbb{R}^*}$ et dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}^*$.