Notions de bases

I-1 Les Ensembles

I-1-1 Définitions

Ensemble **:** un ensemble est une collection d'éléments. On dit qu'un élément x appartient à un ensemble A et on écrit $x \in A$, si non $x \notin A$.

Ensemble vide **:** c'est l'ensemble qui ne contient pas d'élément. On note un ensemble vide par : { } ou $\emptyset$.

Singleton **:** est un ensemble qui est composé d'un seul élément. Si $x \in A$, alors on a toujours $x \in \{x\}$. $\{x, y\}$ est un ensemble à deux éléments appelé une paire et on a $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Cardinal **:** soit A un ensemble, le nombre d'éléments de A est appelé cardinal de A et on note $card(A)$ ou $|A|$.

Exemple I-1 :

Soient A et B deux ensembles tels que $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{a, c, x, z\}$, alors $card(A) = 3$ et $card(B) = 4$.

Inclusion **:** Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si tous les éléments de A appartiennent à l'ensemble B. On écrit $A \subset B$, c.à.d. $\forall\, x \in A$, alors $x \in B$. Si $A \subset B$ on dit aussi que A est un sous ensemble de B ou A est une partie de B.

Exemple I-2 :

$\{1,3,7\} \subset \{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 5,6, \mathbf{7}, 10\}$;
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Egalité **:** Soient A et B deux ensembles, $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$.

I-1-2 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles :

Réunion **:** L'ensemble de tous les éléments appartenant au moins à un des deux ensembles A ou B est la réunion de ces deux ensembles et on note $A \cup B$.
On écrit $A \cup B = \{x \backslash x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
On a les résultats suivants :
a- $A \cup A = A$.
b- $A \cup \emptyset = A$.

c- $A \cup B = B \cup A$.
d- Si $A \subset E$ alors $A \cup E = E$.

Exemple I-3 :

Soient A et B deux ensembles tels que : $A = \{a, c, e, g\}$ et $B = \{b, d, e, g, f\}$, alors
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

<u>Intersection</u> **:** On appelle intersection de deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments communs de A et B et on note $A \cap B$.
On écrit $A \cap B = \{x / x \in A \ et \ x \in B \}$.
On a les résultats suivants :
a- $A \cap A = A$.
b- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
c- $A \cap B = B \cap A$.
d- Si $A \subset E$ alors $A \cap E = A$.

Exemple I-4 :

Soient A et B deux ensembles tels que : $F = \{1,3,7\}$ et $G = \{0,2,3,5,6,8,10\}$, alors
$F \cap G = \{3\}$

<u>Complémentaire</u> **:** Soient E un ensemble et A une partie de E c.à.d. A $\subset$ E. On appelle complémentaire de A par rapport à E ou de A dans E, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A. On note $\bar{A}$ ou C_E^A ou $E \backslash A$.
On écrit $C_E^A = \{x / x \in E \ et \ x \notin A \}$.
On a les résultats suivants :
a- $C_A^A = \emptyset$.
b- $C_A^\emptyset =$ A.

Exemple I-5 :

Soient A et B deux ensembles tels que :
$A =$ "$les\ lettres\ de\ l'Alphabet$" et $B =$ "$les\ consonnes$", alors $C_A^B =$ "$les\ voyelles$".

<u>Différence</u> **:** Soient A et B deux ensembles. La différence de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas a B. On écrit $A \backslash B = \{x / x \in A \ et \ x \notin B \}$.

Exemple I-6 :

Soient E et F deux ensembles tels que : $E = \{1,3,7\}$ et $F = \{1,2,3,5,6,7,10\}$, alors
$C_F^E = \{2,5,6,10\}$,

<u>Produit cartésien</u> **:** Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est :
$A\text{x}B = \{(x, y) / x \in A \ et \ x \in B \}$

Exemple I-7 :

Soient A et B deux ensembles tels que : $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{P, F\}$;
$A\text{x}B = \{(1, P); (1, F); (2, P); (2, F); (3, P); (3, F)\}$ et $\text{card}(A\text{x}B) = \text{card}(A) * \text{card}(B) = 2 * 3 = 6$

I-1-3 Ensembles des nombres :

I-1-3-1 Ensemble des nombres entiers naturels :

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\ldots\}$: ensemble des nombres entiers (**des nombres sans virgule**) **positifs**. Cet ensemble est souvent utilisé pour traiter des problèmes tels que le calcul d'un capital ou autre après une période donnée.
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\} = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$

Exemple I-8 :

$0 \in \mathbb{N}$; $E[1{,}4] \in \mathbb{N}$ ($E[x]$ désigne la partie entière du nombre x);
Mais -40 $\notin \mathbb{N}$

I-1-3-2 Ensemble des nombres entiers relatifs :

$\mathbb{Z}$ = {…….,-2,-1,**0**,2,3,…………… } : ensemble des nombres entiers relatifs **positifs** et **négatifs**.
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ = {…….,-2,-1,,1,2,3,…………… }. On a besoin d'un nombre relatif, pour présenter une température très basse ou par exemple pour exprimer si un client d'une banque est un créditeur ou un débiteur. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemple I-9 :

$378 \in \mathbb{Z}$; $-1005 \in \mathbb{Z}$; $0 \in \mathbb{Z}$
Mais -1,5 $\notin \mathbb{Z}$ et aussi $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{11}} \notin \mathbb{Z}$

I-1-3-3 Ensemble des nombres rationnels :

L'équation suivante : $\mathbf{3x = 2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, néanmoins elle possède la solution $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$ qui appartient à **l'ensemble des nombres rationnels,** noté par : $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*\}$. Alors $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple I-10 :

$\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$; $-1{,}4 \in \mathbb{Q}$; $1{,}\overline{3}$ = 1,333333…$\in \mathbb{Q}$
Mais $\sqrt{\mathbf{2}} \notin \mathbb{Q}$ et aussi -$\sqrt{\mathbf{3}} = \mathbf{-1{,}7320508756887729352744634150 59}\ldots\ldots \notin \mathbb{Q}$

I-1-3-4 Ensemble des nombres irrationnels :

Problème : résoudre l'équation $x^2 = 2$
La solution de cette l'équation est $\boldsymbol{x} = \mp\sqrt{\mathbf{2}}$

$$= \mp\mathbf{1{,}4142135623730954880106887242097}\ldots.$$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres irrationnels, c.à.d. l'ensemble des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) **plus les nombres qui ont le nombre des chiffres après la virgule infini**.
On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Cet ensemble est appelé aussi l'ensemble des nombres réels.

I-1-4 Propriétés dans $\mathbb{R}$:

I-1-4-1 Valeurs absolues :

Définition :

Etant donné un nombre réel $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$**,** on appelle valeur absolue de $\boldsymbol{x}$ le nombre réel positif, noté $|\boldsymbol{x}|$ qui vérifie :

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si\,non} \end{cases}$$

Propriétés :

Soient $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}$ deux nombres réels, alors on a les résultats suivants :

a. $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$

b. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

c. $\sqrt{x^2} = |x|$

d. $|\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| * |\boldsymbol{y}|$

Exemple I-11

On veut Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 = 3$

$$\begin{aligned} x^2 = 3 &\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{3} \\ &\Rightarrow |x| = \sqrt{3} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

I-1-4-2 Inégalité triangulaire :

Soient $\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}$ deux nombres réels, l'inégalité suivante est souvent utilisée pour démontrer beaucoup de résultats intéressants, elle est connue sous le nom d'**inégalité triangulaire** :

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

I-1-4-3 Les intervalles dans $\mathbb{R}$:

Dans $\mathbb{R}$**,** on distingue deux types d'intervalles : intervalles **bornés** et d'autres **non bornés**.

Soient a et b deux nombres réels tels que $b \geq a$:

Intervalles bornés :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a \leq x \leq b\}$ est un intervalle **borné** et **fermé**.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a < x < b\}$ est un intervalle **borné** et **ouvert**.

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a < x \leq b\}$ et $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a \leq x < b\}$ sont des intervalles **bornés** et **semi-fermés/ semi-ouverts**.

<u>**Intervalles non bornés**</u> **:**

Les intervalles non bornés et fermés sont de la forme : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a \leq x\}$ ou $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \backslash \ x \leq a\}$

Les intervalles non bornés et ouverts sont de la forme : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \backslash \ a < x\}$ ou $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \backslash \ x < a\}$

Exemple I-12

On veut Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\boldsymbol{|x-1| > 3}$ **:**

Tout d'abord il faut discuter l'inégalité selon le signe de $|x - 1|$.

En effet, on a $|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \end{cases}$

c.à.d. $= \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ -x+1 & si \; x < 1 \end{cases}$

<u>1er cas</u> : $\boldsymbol{x \geq 1}$:

On a $x - 1 > 3 \quad \Leftrightarrow \ x > 4$

$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \in]4, +\infty[$

Donc la première solution est : $\boldsymbol{x} \in]4, +\infty[\cap [1, +\infty[=]\mathbf{4}, +\infty[$

<u>2ème cas</u> : $\boldsymbol{x < 1}$:

On a $-x + 1 > 3 \quad \Leftrightarrow \ -2 > x$

$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \in]-\infty, -2[$

Donc la deuxième solution est : $\boldsymbol{x} \in]-\infty, -2[\cap]-\infty, 1[=]-\infty, -2[$

Conclusion la solution de l'inégalité est l'union des deux solutions, c.à.d. :

$$\boldsymbol{S} =]-\infty, -\mathbf{2}[\cup]\mathbf{4}, +\infty[$$

I-1-5 <u>Equation de second degré</u>

Avant de commencer à résoudre une équation de second degré, nous considérons l'équation linéaire suivante :

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = 0, \text{ avec } a \neq 0 \qquad (1)$$

La solution de cette équation est évidente et elle est de la forme : $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}$

Pour résoudre une équation de second degré, il existe différentes méthodes qui généralement la simplifient.
Maintenant considérons l'équation de seconde degré suivante :

$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c} = 0 \qquad (2)$$

avec $\boldsymbol{x}$ un nombre **réel** inconnu qu'on cherche et $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Le paramètre $\boldsymbol{a}$ doit être non nul, sinon on parle d'une équation linéaire comme l'équation (1). On dit que la forme l'équation (2) est une forme **développée** d'une équation de second degré. La partie à gauche de l'équation (2) est appelée le trinôme $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$.

I-1-5-1 Résolution de la forme développée :

Nous avons besoin de définir quelques notions comme les racines et le discriminant afin de pouvoir discuter l'existence de la solution de l'équation (2).
Racines : Les racines d'une équation de second degré de type (2) sont **les solutions réelles** : $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$.
Discriminant : de l'équation (2) est un nombre réel, notant Δ tel que :

$$\Delta = \boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{ac} \qquad (3)$$

La résolution de l'équation (2) dépend du **signe** du son discriminant Δ et on peut distinguer trois cas différents :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (2) n'a pas de solution dans l'ensemble ℝ.
- Si $\Delta = 0$ alors elle admet une racine double de la forme : $\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b}^2}{2\boldsymbol{a}}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation possède deux racines différentes $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ avec:

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{2\boldsymbol{a}}$$

Exemple I-13 :

Résoudre les équations suivantes :

- $2\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 5 = 0$:

  Le discriminant qui correspond à cette équation est : $\Delta = 2^2 - 4 * 2 * 5 = -36 < 0$ ce discriminant est négatif donc l'équation ***A* n'admet pas de solution dans** ℝ.

- $\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x} + 1 = 0$ **:**

  Cette équation a le discriminant suivant : $\Delta = (-2)^2 - 4 * 1 * 1 = 0$

  donc l'équation ***B* possède une racine double** dans ℝ : $\boldsymbol{x} = \frac{-(-2)^2}{2*1} = -2$.

- $\frac{1}{5}\boldsymbol{x}^2 - 0{,}5\boldsymbol{x} + 0{,}2 = 0$ **:**

  Le discriminant de l'équation ***C*** est $\Delta = (\mathbf{-0.5})^2 - 4 * 0{,}2 * \frac{1}{5} = 0.09 > 0$

  donc cette équation admet deux racines différentes $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ avec :

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{-(-0{,}5)-\sqrt{0{,}09}}{2*\frac{1}{5}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{-(-0{,}5)+\sqrt{0{,}09}}{2*\frac{1}{5}}$$

c.à.d. $\boldsymbol{x}_1 = 0{,}2$ et $\boldsymbol{x}_2 = 2$

I-1-5-2 <u>Forme canonique</u> :

Le trinôme de l'équation (2) représente graphiquement la courbe d'une parabole. Souvent on s'intéresse aux extremums de cette courbe, à son ouverture vers le haut ou vers le bas et aussi au degré de son ouverture : large ou étroite. Pour connaître ces caractéristiques nous devons transformer la forme développée de l'équation (2) à une autre forme appelée **forme canonique**. Considérons à nouveau le trinôme de l'équation (2) :

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^2 + \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{a}}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{a}})$$

$$= \boldsymbol{a}[\underbrace{\boldsymbol{x}^2 + 2*\frac{\boldsymbol{b}}{2*\mathbf{a}}\boldsymbol{x} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{2*\mathbf{a}}\right)^2} - \left(\frac{\boldsymbol{b}}{2*\mathbf{a}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{a}}]$$

$$= \boldsymbol{a}[\ (\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}})^2 - \left(\frac{\boldsymbol{b}}{2*\mathbf{a}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{a}}]$$

$$= \boldsymbol{a}[\ (\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}})^2 - \frac{\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}^2} + \frac{4\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}}{4\boldsymbol{a}^2}]$$

$$= \boldsymbol{a}[\ \left(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\boldsymbol{a}^2}] \qquad (3)$$

$$= \boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4\mathbf{a}} \qquad (4)$$

Soit $\alpha = \frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}}$ et $\beta = \frac{-\Delta}{4\mathbf{a}}$ alors L'expression (4) s'écrit comme suit : $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \alpha)^2 + \beta$. Cette forme est la forme canonique du trinome de l'equation (2)**.** Si a> 0 donc le point **(**$-\alpha|\beta$**)** est un minimum et l'ouverture de la parabole vers le haut, sinon le point **(**$\alpha|\beta$**)** est un maximum et l'ouverture de la parabole vers le bas. Pour illustration, considérons la forme canonique suivante de la parabole normale (voir figure 1):

Exemple I-14

Soit $\boldsymbol{f}$ le trinôme suivant : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + 2)^2 + 1$, Puisque $\mathrm{a} = 1 > 0$, donc l'ouverture est vers le haut et le graphe a le point **(**$2|1$**)** comme minimum.

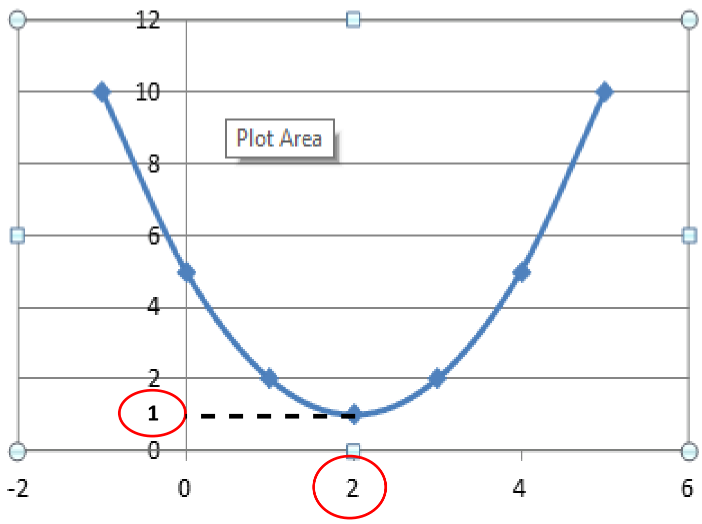

Figure 1 : représentation graphique de la forme canonique de l'équation (2).

Remarque : Le passage de la forme développée vers la forme canonique nécessite la connaissance de l'identité remarquable suivante : $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$. On utilise aussi souvent les deux autres identitées remarquables suivantes :

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$ et $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

Exemple I-15

- $\boldsymbol{x}^2 + 6\boldsymbol{x} + 9 = \boldsymbol{x}^2 + 2*3*\boldsymbol{x} + 3^2$

  $= (\boldsymbol{x}+3)^2$

- $\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} + 1 = (\frac{1}{2}\boldsymbol{x})^2 - 2*\frac{1}{2}*\boldsymbol{x} + 1^2$

  $= (\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2 - 1)$

- $\mathbf{0{,}25}\boldsymbol{x}^2 - 1 = (0{,}5\boldsymbol{x})^2$- $1^2 = (0{,}5\boldsymbol{x} - 1)(0{,}5\boldsymbol{x} + 1)$

I-1-5-3 <u>Forme factorisée</u> :

Le but de cette forme est de simplifier le problème du second degré au problème linéaire c.à.d. au premier degré. Considérons l'expression (3) de la démonstration précédente :

$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\left[\left(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\boldsymbol{a}^2}\right] \quad \text{(sous la condition que : } \Delta > 0)$$

$$= \boldsymbol{a}\left[\left(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \quad \text{(3ème identité remarquable)}$$

$$= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2)$$

avec $\boldsymbol{x}_1 = \frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\boldsymbol{x}_2 = \frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors la solution du $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c} = 0$ est les deux racines $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$.

Si $\Delta = 0$, la factorisation est comme suit : $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2a})(\boldsymbol{x} - \frac{-\boldsymbol{b}}{2a})$

Donc dans ce cas la solution du $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}=0$ est la racine double $\boldsymbol{x}=\frac{-\boldsymbol{b}}{2\mathbf{a}}$

Exemple I-16

- **Factoriser** $\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}+1-\frac{1}{5}(\boldsymbol{x}-1)$?

  $\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}+1-\frac{1}{5}(\boldsymbol{x}-1)=(\boldsymbol{x}-1)^2-\frac{1}{5}(\boldsymbol{x}-1)$ $\quad$ **(**$\Delta=0$)

  $=(\boldsymbol{x}-1)[(\boldsymbol{x}-1)-\frac{1}{5}]$

  $=(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}-\frac{6}{5})$

- **Factoriser** $\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}+1$?

  $\Delta=4^2-4*1*1=12>0$

  $\boldsymbol{x}_1=\frac{-4-\sqrt{12}}{2*1}$ **et** $\boldsymbol{x}_2=\frac{-4+\sqrt{12}}{2*1}$

  c.à.d. $\boldsymbol{x}_1=2-\sqrt{3}$ **et** $\boldsymbol{x}_2=2+\sqrt{3}$

  donc $\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}+1=\left(\boldsymbol{x}-2+\sqrt{3}\right)\left(\boldsymbol{x}-2-\sqrt{3}\right)$

I-1-5-4 Choix de la forme optimale :

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ la forme **développée** d'un polynôme f, sa forme **canonique** est :
$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, et sa forme **factorisée** est $f(x)=a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)$.
Le choix de la forme optimale dépend du problème qu'on veut résoudre :
Par exemple :

- Pour résoudre $f(x)=0$, nous choisissons la forme factorisée, alors $f(x)=0$ est équivalent à $x=x_1$ ou $x=x_2$.
- Pour calculer $f(0)$ la première forme est la plus appropriée : $f(0)=c$
- Pour discuter les caractéristiques d'une parabole il faut utiliser la forme canonique etc...

I-1-6 Division euclidienne des polynômes

Dans le paragraphe précèdent, nous avons présenté comment on peut résoudre la solution des équations du second dégrée. Mais dans la pratique on peut rencontrer aussi des équations de dégrée plus grand que deux. Pour résoudre ces équations de ce type on doit factoriser le polynôme sous forme des facteurs de polynômes de premier et second dégrée et pour cette factorisation on a besoin de la division euclidienne. Pour l'illustration nous allons présenter l'exemple suivant :

Nous considérons l'équation suivante :

$$3x^3+x^2+x+3=0 \qquad (5)$$

La première étape nous remplaçons x par un des nombres qui sont généralement autour de 0 tels que $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \ldots$ dans notre cas $x = -1$ est une solution de l'équation (5). La deuxième étape nous allons effectuer la division euclidienne de ce polynôme pour voir s'ils existent autres racines.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 + x^2 + x + 3 & x+1 \\ \cline{3-3}
- & 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2}
= & -2x^2 + x + 3 & \\
- & -2x^2 - 2x & \\ \cline{2-2}
= & 3x + 3 & \\
- & 3x + 3 & \\ \cline{2-2}
= & 0 &
\end{array}
$$

Donc $3x^3 + x^2 + x + 3 = (3x^2 - 2x + 3)(x + 1)$, il suffit d'appliquer les techniques qu'on a vu avant pour trouver les autres racines. Cependant le discriminant de $3x^2 - 2x + 3$ est négatif, donc l'équation (5) a une seule solution : $x = -1$.

I-1-7 Les règles de la Puissance – la Racine, - et le Logarithme

I-1-7-1 Les règles de la puissance :

Nous allons présenter les règles de base de calcul de la puissance

Règles de base de la puissance :

- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n : b^n = (\frac{a}{b})^n$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^0 = 1$ (quel que soit la valeur de a)
- $a^1 = a$
- $1^n = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Attention ! 1) $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

2) $(a - b)^n \neq a^n - b^n$

Exemple I-18 :

- $3^2 \cdot 4^2 = (3 \cdot 4)^2 = 144$
- $6^2 : 4^2 = (\frac{6}{4})^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

- $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$
- $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$
- $(5^2)^3 = (5^3)^2 = 5^{2\cdot 3} = 5^6 = 15625$
- $1256390^0 = 1$
- $5^1 = 5$
- $1^{12000} = 1$
- $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Mais: 1) $(2+1)^2 = 3^2 = 9 \neq 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$

2) $(2-1)^2 = 1 \neq 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

I-1-7-2 <u>Les Règles de la racine</u> :

Les règles importantes de la racine sont :

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Attention ! 1) $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

Exemple I-19 :

- $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$
- $\sqrt[3]{2^6} = (\sqrt[3]{2})^6 = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
- $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$
- $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$

Mais : 1) $\sqrt[2]{16+9} = \sqrt[2]{25} = 5 \neq \sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9} = 4 + 3 = 7$

2) $\sqrt[2]{25-9} = \sqrt[2]{16} = 4 \neq \sqrt[2]{25} - \sqrt[2]{9} = 5 - 3 = 2$

I-1-7-3 <u>Les Règles du logarithme</u> :

Les règles importantes de la racine sont :

- $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

- $ln(\mathrm{a}^{\mathrm{n}}) = n.\,ln(a)$
- $ln\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) = ln(\mathrm{a}) - ln(\mathrm{b})$
- $ln\left(\frac{1}{\mathrm{b}}\right) = -ln(\mathrm{b})$
- $ln(1) = 0$
- $ln(e) = 1$

Exemple I-20 :

- $ln(64) = ln(2^5) = 5ln(2)$
- $ln(\sqrt{18}) = ln\left((2 * 3^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}ln(2) + \frac{2}{2}ln(3) = \frac{1}{2}ln(2) + ln(3)$
- $ln\left(\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right) = \frac{1}{3}ln\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{3}\big(ln(4) - ln(7)\big) = \frac{2}{3}ln(2) - \frac{1}{3}ln(7)$