

# Simulation de Chaîne Correcteur PID - Moteur CC pour la stabilisation des constantes de GA-optimisateur des constantes PID

Timo Demos-Tacos

March 5, 2021

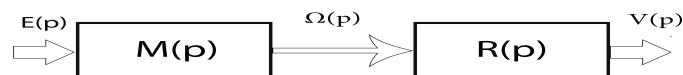
## 1 Introduction

Après avoir implémenté un algorithme génétique capable de corriger de manière automatique des coefficients PID, on s'intéresse à un autre problème avant de l'utiliser pour faire un asservissement réel : Comment choisir certaines constantes utilisées dans GA, afin d'augmenter la vitesse de convergence et assurer la convergence vers un équilibre maximale? Pour ça, il faut pouvoir tester un algorithme. On doit, donc, simuler la sortie temporelle du système numériquement. On modélise notre système par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace (Section 2). On passe ensuite dans le domaine temporelle, en utilisant le fait que le nombre de points est fini et les points sont assez proches.

P. S. : Ce document fait partie de répertoire GitHub. Le code associé se trouve dans le dossier "simulator".

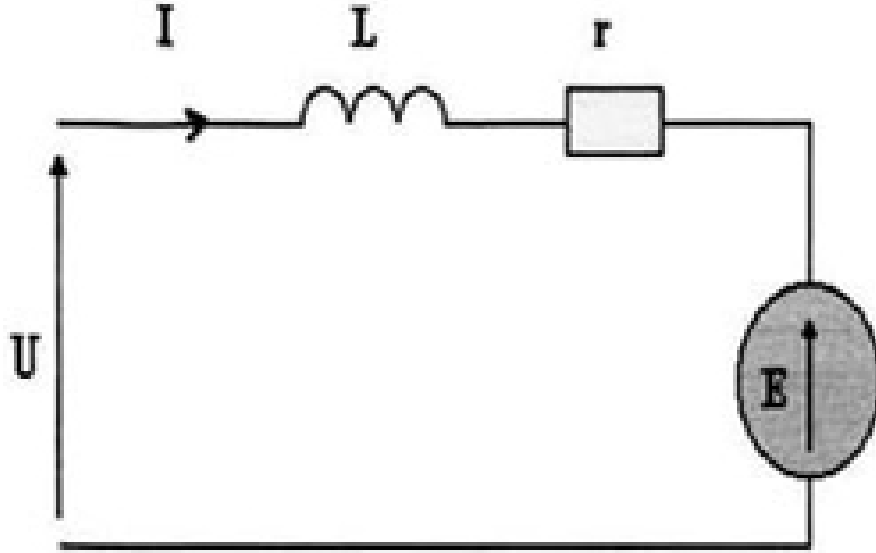
## 2 Fonction de Transfert

Calculons d'abord la fonction de transfert du système qu'on veut asservir en vitesse. Comme système on choisit le robot qui se déplace grâce à un moteur de courant continu. On a, donc un schéma bloc suivant, qui décrit une partie de la chaîne du système :



## 2.1 Fonction de transfert du moteur à courant continu (M(p))

On peut modéliser le moteur CC par une approche classique. On obtient un modèle équivalent en régime dynamique :



Il est facile de démontrer qu'en appliquant le principe fondamental de la dynamique, il est facile d'obtenir la fonction de transfert :

$$M(p) = \frac{K_0}{1 + (\tau + \tau e)p + \tau^2 e p^2} \quad (1)$$

où  $\tau = \frac{RJ}{K^2 + Rf}$ , et  $\tau e = \frac{L}{R}$ , et  $K_0 = \frac{K}{K^2 + Rf}$

Pour plus d'informations, voir ici, par exemple

On les ordres de grandeur de moteurs utilisés (nom du moteur) :

$$R = 10\Omega, J = 10^{-3}kg \cdot m^2, f = 0.45, L = 20mH, K = 0.19SI \quad (2)$$

$$\text{D'où } \tau e = 20 \cdot 10^{-4}, \tau = 2.2 \cdot 10^{-3}, K_0 = 4.2 \cdot 10^{-2}$$

## 2.2 Fonction de transfert du système mécanique (R(p))

On modélise la courbure du sol par une simple sinusoïde

$$r(t) = A \cdot \sin(\omega_v t) \quad (3)$$

où  $\omega_v = \frac{2\pi v}{s_0}$

Comme l'angle d'inclinaison est très petite on a :

$$N = mg, \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \quad (4)$$

La liaison moteur-roue est un pivot idéal.

La force des frottements fluides (projection en x, en supposant la vitesse faible) :

$$-K_f \cdot v \quad (5)$$

La force motrice :

$$F_m = \frac{J}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (6)$$

La force des frottements solides (en supposant système à l'équilibre dynamique, se déplaçant depuis longtemps à une vitesse de consigne) :

$$-K_s \sigma m g \quad (7)$$

On a  $\sigma = \frac{A\omega_v r \epsilon}{2\langle v \rangle} = \pi \cdot \frac{Av}{s_0 \langle v \rangle} \cdot r \epsilon$

Les ordres de grandeurs et la description des constantes utilisées :

$A = 0.001m$  est une amplitude de la courbure,  $m = 5kg$  la masse de robot, l'angle moyen de surface avec l'horizontal,  $r = 0.03m$  rayon de la roue,  $s_0 = 0.04m$  longueur caractéristique de la courbure,  $J = 10^{-3}kg \cdot m^2$  moment d'inertie de la roue,  $\epsilon = 0.008m$  l'épaisseur de la roue,  $\langle v \rangle = 1 \frac{m}{s}$  la vitesse moyenne,  $K_f = 1.7 \cdot 10^{-4}SI$  (loi de Stokes) la constante des frottements fluides, la constante des frottements solides et  $K_s = 0.45SI$  la constante de frottements solide par unité de surface.

On obtient une équation différentielle (PFD) :

$$\frac{J}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt} - K_f \cdot v - K_s \cdot \frac{A\pi r \epsilon m g}{s_0 \langle v \rangle} \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

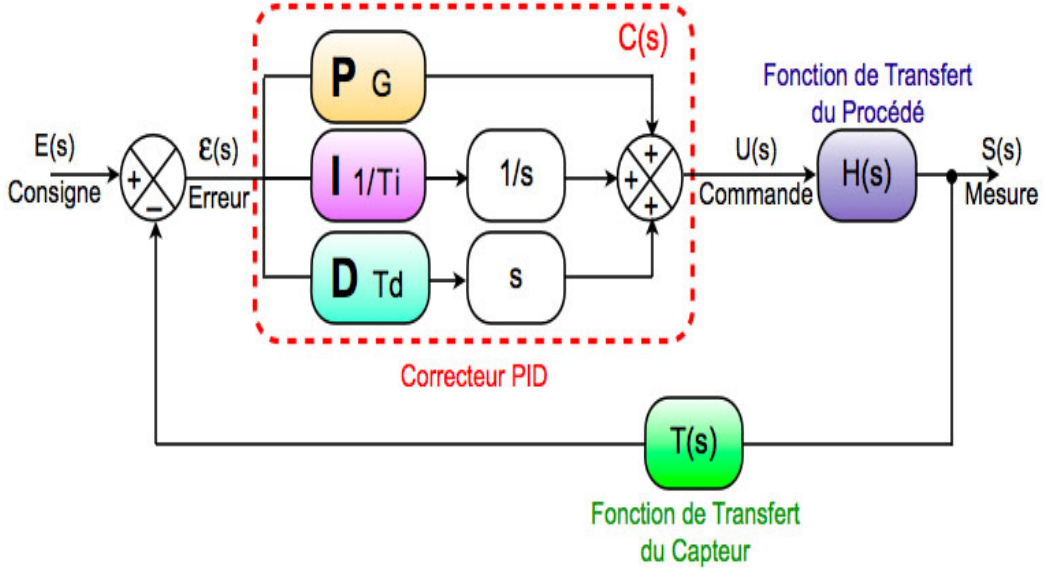
Alors

$$R(p) = \frac{\frac{J}{rK_1}p}{\frac{m}{K_1}p + 1}, K_1 = K_f + K_s \cdot \frac{A\pi r \epsilon m g}{s_0 \langle v \rangle} \quad (9)$$

On  $K_1 \approx 5.86 \cdot 10^{-4}SI$

### 2.3 Chaîne directe

Rajoutons maintenant un correcteur PID et calculons la fonction de transfert de la chaîne directe. Le schéma bloc général est ci-dessous, avec  $T(s) = 1$  et  $H(s) = M(s)R(s)$  :



Dans notre cas la consigne est constante  $v_c(t) = v_0$ , soit dans le domaine de Laplace  $V_c(p) = \frac{V_0}{p}$

On pose  $C(p) = \frac{1+K_p K_i p + K_d K_i p^2}{K_i p}$  la fonction de transfert de correcteur PID Alors, on obtient :

$$V(p) = \frac{V_0}{p + \frac{p}{C(p)R(p)M(p)}} \quad (10)$$

### 3 Extraction de sortie temporelle

#### 3.1 Méthode d'inversion discrète de la transformée de Laplace (ne marche pas pour le moment : voir les commits)

Prenons un cas général, quand on a  $n$  valeurs réelles de  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On obtient un vecteur de sortie dans le domaine de Laplace colonne  $S_p, \forall i \in [1, n], [S_p]_{i,1} = S(p_i)$ .

On définit aussi  $(t_i)_{0 \leq i \leq n} t_i = i \cdot \delta t$  et un vecteur colonne  $S_t, \forall i \in [1, n], [S_t]_{i,1} = s(t_i)$ .

On a, d'après la définition de la transformée de Laplace,  $S(p_i) = \int_0^\infty s(t) \cdot e^{-p_i t} dt$ . Comme seule représentation discrète de  $s(t)$  nous intéresse, on applique le méthode des rectangles pour le calcul de cet intégral (qui existe, car la fonction  $t \mapsto C \cdot e^{-p_i t}$  est intégrable). On a, en supposant le système est à l'équilibre à l'instant  $t_n$  :

$$\int_0^\infty s(t) \cdot e^{-p_i t} dt = \sum_{k=1}^n s(t_k) e^{-p_i t_k} \cdot (t_k - t_{k-1}) + \int_{t_n}^\infty s(t_n) e^{-p_i t} dt \quad (11)$$

En simplifiant et en calculant la valeur d'intégrale, on obtient :

$$S(p_i) = \sum_{k=1}^{n-1} s(t_k) \cdot \delta t e^{-p_i k \delta t} + s(t_n) \cdot e^{-p_i n \delta t} \left( \delta t + \frac{1}{p_i} \right) \quad (12)$$

On a, donc :

$$S_p = A \cdot S_t \quad (13)$$

$$A = \begin{cases} A_{i,j} = \delta t \cdot e^{-p_i j \delta t} & \text{si } i, j \in [1, n] \times [1, n-1]; \\ A_{i,n} = \left( \delta t + \frac{1}{p_i} \right) \cdot e^{-p_i n \delta t} & \text{si } i \in [1, n]. \end{cases}$$

Comme on voit, la matrice ne dépend pas de la sortie, mais uniquement des points choisis. Il suffit, donc, d'inverser la matrice (à condition que les  $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont disjoints et la matrice est inversible)

### 3.2 Modélisation par une résolution d'équation différentielle par le méthode d'Euler

### 3.3 Equation différentielle

### 3.4 Résolution

Soit une équation

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot y^{(k)}(t) = f(t) \quad (14)$$

On pose, donc  $Y(t) = (y^{(k)}(t))_{0 \leq k \leq n-1}^T$ , alors  $Y^{(1)}(t) = (y^{(k)}(t))_{1 \leq k \leq n}^T$ . Comme on dispose d'une équation différentielle, on peut trouver la relation entre  $Y(t)$  et  $Y^{(1)}(t)$ . En effet il existe une matrice  $A(t)$  tq  $Y^{(1)}(t) = A(t)Y(t)$ .

Supposons qu'on dispose d'un vecteur  $t = (t_i)_{0 \leq i \leq p}$ , tq  $t_0 = 0$  et  $\forall i \in [1, n] \ t_i - t_{i-1} = dt$  et de vecteur  $Y_0 = (y^{(k)}(0))_{0 \leq k \leq n-1}^T$ . On obtient, donc un problème de Cauchy, qu'on peut résoudre numériquement à temps discret:  $Y(t_i + 1) = Y(t_i) + dt \cdot A(t_i)Y(t_i)$