

Cálculo vetorial com formas diferenciais

S. C. Coutinho

Conteúdo

Capítulo 1. Preliminares	1
1. Subconjuntos do \mathbb{R}^n	1
2. Parametrização de curvas e superfícies	3
3. Integrais duplas e triplas	3
4. Mudança de variáveis	3
5. Campos escalares e vetoriais	3
6. Exercícios	9
Capítulo 2. 1-formas	13
1. Trabalho	13
2. O caso geral	24
3. Integração de 1-formas	33
4. Teorema do gradiente	42
5. Aplicações	43
6. Recapitulando	51
7. Exercícios	53
8. Problemas	57
Capítulo 3. 2-formas	59
1. Fluxo	59
2. O caso geral	72
3. Integração de 2-formas	87
4. Teorema de Stokes	104
5. Aplicações	107
6. Recapitulando	119
7. Exercícios	122
8. Problemas	125
Capítulo 4. 3-formas	127
1. 3-formas	127
2. Integração de 3-formas	137
3. Teorema de Stokes	141
4. Aplicações	146
5. Exercícios	156
6. Problemas	158
Capítulo 5. n-formas	161

Apêndice	163
1. Determinantes	163
Bibliografia	165
Índice	167

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos algumas das noções básicas que serão utilizadas ao longo de todo o livro, como campos escalares e vetoriais, e integrais duplas e triplas.

1. Subconjuntos do \mathbb{R}^n

Nesta seção revisamos a nomenclatura básica utilizada na descrição dos conjuntos que servem como domínio e imagem das funções do cálculo.

Para começar, se v é um vetor do \mathbb{R}^n , então podemos escrevê-lo na forma

$$(1.1) \quad v = (a_1, \dots, a_n).$$

Isto corresponde à decomposição de v em termos de suas coordenadas na base canônica ε de \mathbb{R}^n . Os vetores de ε são

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

onde o 1 aparece na j -ésima posição, e todas as demais entradas são nulas. Com frequência escreveremos

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n,$$

em vez de (1.1). A *norma* de v é

$$\|v\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Se $n = 1$, então $v = a \in \mathbb{R}$ e $\|v\| = |a|$ é o módulo do número real a .

Seja, agora, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$ um número real. A *bola aberta* de raio ϵ e centro em p_0 é o conjunto

$$B_\epsilon(p_0) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p_0\| < \epsilon\}.$$

Note que, no caso da bola aberta, usamos o sinal $<$. Já a *bola fechada* de mesmo centro e raio é definida da mesma maneira, exceto pela troca de $<$ por \leq . Assim, a bola fechada corresponde ao conjunto

$$\overline{B}_\epsilon(p_0) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p_0\| \leq \epsilon\}.$$

Os pontos que estão na bola fechada, mas não na bola aberta, constituem a fronteira de $\overline{B}_\epsilon(p_0)$, que será denotada por $\partial \overline{B}_\epsilon(p_0)$. Temos, assim, que

$$\partial \overline{B}_\epsilon(p_0) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p_0\| = \epsilon\}.$$

Outra tipo de subconjunto especial, e igualmente importante de \mathbb{R}^n , são os retângulos. Um n -retângulo é um subconjunto de \mathbb{R}^n que pode ser escrito como um produto cartesiano de n intervalos. Se todos os intervalos são abertos, então temos um retângulo aberto; se fechados, temos um *retângulo fechado*. Note que, por esta definição, um intervalo é um 1-retângulo da reta, e um paralelepípedo um 3-retângulo do espaço. Um n -retângulo que é igual ao produto cartesiano de n intervalos iguais, digamos $[a, b]$, será denotado por $[a, b]^n$.

A partir da noção de bola aberta definimos o conceito de conjunto aberto de \mathbb{R}^n . Dizemos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é *aberto* se, dado $p \in U$, existe um número real $\epsilon > 0$ (que depende de p) tal que

$$B_\epsilon(p) \subseteq U.$$

Isto é, cada ponto de U pertence a uma pequena bola aberta, que está inteiramente contida em U . São exemplos de conjuntos abertos de \mathbb{R}^n , as bolas abertas (veja exercício 1), o conjunto \mathbb{R}^n inteiro, e o conjunto vazio. É fácil entender porque \mathbb{R}^n é aberto; mas e o conjunto vazio? O fato é que \emptyset satisfaz a condição para aberto por vacuidade. Em outras palavras, a condição para aberto é satisfeita por *todos os pontos* de \emptyset justamente porque este conjunto *não tem nenhum ponto* para satisfazer a condição.

Poderíamos ter definido conjuntos abertos partindo da noção de retângulo aberto, em vez de bola aberta. Neste caso, um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seria definido como aberto se, dado um ponto qualquer de p de U , existe um n -retângulo aberto R tal que $p \in R \subseteq U$. Os conjuntos abertos assim definidos coincidem com aqueles definidos em termos de bolas. Isto decorre do fato de que todo n -retângulo aberto não vazio contém uma bola aberta e, reciprocamente, toda bola aberta não vazia contém um retângulo aberto. Para mais detalhes veja o exercício 2.

Por outro lado, um conjunto é *fechado* se seu complementar é aberto. Um ponto p de um conjunto fechado F pertence à *fronteira* ∂F de F se, qualquer que seja $\epsilon > 0$, temos que

$$B_\epsilon(p) \cap F \neq \emptyset \text{ e } B_\epsilon(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus F) \neq \emptyset.$$

Os pontos de F que não pertencem à sua fronteira são chamados de pontos interiores. Note, contudo, que um fechado pode não ter nenhum ponto interior, como é o caso de um ponto isolado. Neste caso, o conjunto fechado inteiro é sua própria fronteira. Além dos pontos isolados e das bolas fechadas, os conjuntos \emptyset e \mathbb{R}^n são fechados. Mas \emptyset e \mathbb{R}^n não eram abertos? Eram; mas também são fechados, já que

$$\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n,$$

que é aberto, e

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset,$$

que também é aberto. A bem da verdade, os únicos subconjuntos de \mathbb{R}^n que são simultaneamente abertos e fechados são exatamente estes dois; veja exercício 3.

Um subconjunto V de \mathbb{R}^n é *conexo*, se dados dois pontos $p, q \in V$, existe uma curva contínua parametrizável C que liga p a q . Uma tal curva é definida por uma aplicação

$$C : [0, 1] \rightarrow V,$$

tal que

$$C(0) = p \text{ e } C(1) = q.$$

Na prática, isto significa que V é formado por apenas “um pedaço”. Por exemplo, se $p, q \in \mathbb{R}^n$ e

$$d = \|p - q\| > 0$$

é a distância entre p e q , então a união das bolas

$$B_{d/3}(p) \cup B_{d/3}(q)$$

não é conexa. De fato, como as bolas não se tocam, não é possível desenhar uma curva contínua que liga o ponto de uma bola, a um ponto da outra.

Finalmente, um subconjunto U de \mathbb{R}^n é *convexo* se, dados dois pontos quaisquer p e q de U , o segmento de reta que une p a q está totalmente contido em U . Mais precisamente, o conjunto

$$\{(1 - t)p + tq : 0 \leq t \leq 1\} \subset U.$$

Bolas e retângulos, tanto abertos, quanto fechados são conjuntos convexos.

Como convexo e conexo são palavras muito parecidas, é fácil confundir as e, com isso, trocar um conceito pelo outro. Para complicar os conjuntos abertos e conexos aparecerão com frequência neste livro. Levando isto em conta, e também para evitar que nossa linguagem se torne prolixa, usaremos a palavra *região* como abreviação de aberto e conexo.

2. Parametrização de curvas e superfícies

3. Integrais duplas e triplas

Revisão de integração de funções de uma, duas e três variáveis. Ainda não tive tempo de escrever.

4. Mudança de variáveis

Revisão de mudança de variáveis em integrais duplas e triplas e jacobiano. Também não tive tempo de escrever.

5. Campos escalares e vetoriais

O conceito mais importante deste livro é a noção de campo, cujo estudo iniciamos nesta seção.

5.1. Definição e exemplos. Dada uma região U de \mathbb{R}^n , consideraremos dois tipos de campos neste livro. Um *campo escalar* é uma função de U em \mathbb{R} ; já um *campo vetorial* é uma aplicação de U em \mathbb{R}^n . A importância destes conceitos está relacionada às suas aplicações em matemática, física, engenharia, meteorologia e ciências afins. De agora em diante a palavra *campo*, usada sem nenhuma qualificação adicional, significará sempre campo vetorial.

Considere, por exemplo, a região A da atmosfera, abaixo de uma certa altitude, e sobre uma dada área da superfície terrestre. A função que relaciona a cada ponto de A a temperatura da atmosfera naquele ponto é um exemplo de campo escalar. Outro exemplo, é a função que a cada ponto de A associa sua pressão atmosférica. Podemos representar campos escalares geometricamente usando curvas que passam por todos os pontos em que o campo tem um mesmo valor. No caso da temperatura, estas curvas são chamadas de *isotermas*, e foram introduzidas pelo naturalista alemão Alexander von Humboldt como parte de sua observação de que espécies de plantas com características semelhantes habitam áreas montanhosas de mesma temperatura; veja [7, p. 93-94].

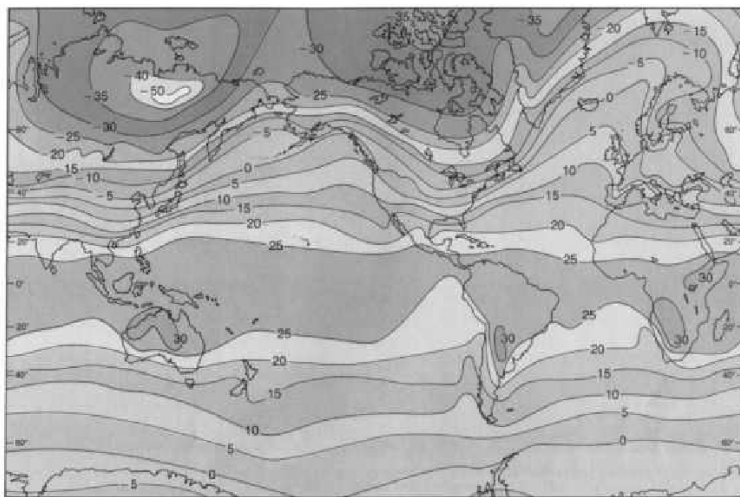


FIGURA 1. Isotermas

A representação geométrica de um campo vetorial

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

é feita associando-se a cada ponto $p \in U$ o vetor $F(p)$, que imaginaremos como tendo sua origem em p . Considerando a mesma região A da atmosfera mencionada acima, imagine que a cada um de seus pontos associamos o vetor que corresponde à velocidade com que uma partícula se moveria se fosse solta naquele ponto. Isto nos daria um campo de velocidades, que é um exemplo de campo vetorial.

Esta definição de campo vetorial não exclui a possibilidade do campo se anular em um ponto. Se isto ocorre, dizemos que o ponto é uma *singularidade* do campo. Contudo, o movimento de uma partícula sob a ação de um campo pode se tornar bastante complicado se o campo tiver singularidades.

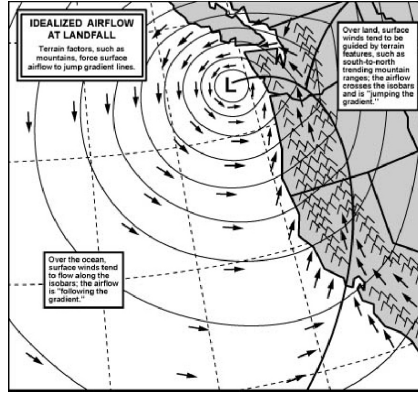


FIGURA 2. Velocidade dos ventos

Outros exemplos de campos vetoriais incluem os campos de força usais da física, como o campo gravitacional, o campo elétrico e o campo magnético. Por exemplo, a lei de Coulomb nos diz que o campo elétrico de uma carga positiva isolada, situada na origem, é dado por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

onde k é uma constante. Portanto, os vetores deste campo são radiais e apontam para fora. Observe que a região de definição de \mathbf{E} é

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

já que, na origem, estaríamos efetuando uma divisão por zero. Os campos (escalares e vetoriais) que estudaremos não variam com o tempo. Isto é, o valor do campo, em um dado ponto, é sempre o mesmo, embora possa assumir valores distintos em pontos diferentes.

Ao longo de todo o livro consideraremos apenas campos escalares e vetoriais que sejam diferenciáveis. Como um campo escalar em U é uma função de U em \mathbb{R} , não há dificuldade em definir diferenciabilidade neste caso. No caso de um campo vetorial, temos uma função de U em \mathbb{R}^n . Assim, podemos escrever F , em termos de coordenadas, na forma

$$F(p) = (F_1(p), \dots, F_n(p)),$$

onde $p \in U$ e

$$F_j : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

são as *funções coordenadas* de F . Diremos que F é diferenciável, se cada uma de suas funções coordenadas o for.

O conjunto dos campos escalares (isto é, funções) diferenciáveis em U será denotado por $\mathcal{O}(U)$. Podemos munir este conjunto de duas operações. A soma de $f, g \in \mathcal{O}(U)$ é definida em cada ponto $p \in U$ por

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p);$$

já a multiplicação é definida por

$$(fg)(p) = f(p)g(p).$$

Um escalar $k \in \mathbb{R}$ pode ser identificado com a função constante de $\mathcal{O}(U)$, que a cada ponto de U associa o valor k . Usando a definição de multiplicação de funções podemos, então, definir o produto de uma função $f \in \mathcal{O}(U)$ por um escalar $k \in \mathbb{R}$ como

$$(kf)(p) = kf(p) \text{ para todo } p \in U.$$

Cálculos de rotina mostram que o conjunto $\mathcal{O}(U)$ é um espaço vetorial real relativamente às operações de soma e multiplicação por escalar definidas acima.

O conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em U será denotado por $\mathcal{X}(U)$. Este conjunto pode ser provido de operações de soma e multiplicação por um campo escalar. A soma de $F, G \in \mathcal{X}(U)$ é definida em cada ponto $p \in U$ por

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p).$$

Se

$$F = (F_1, \dots, F_n) \text{ e } G = (G_1, \dots, G_n),$$

são as expressões de F e G em termos de coordenadas, então a definição acima nos dá

$$F + G = (F_1 + G_1, \dots, F_n + G_n).$$

Já a multiplicação de F por uma função $g \in \mathcal{O}(U)$ é definida por

$$(gF) = (gF_1, \dots, gF_n).$$

Usando a definição de multiplicação de funções por campos podemos definir o produto de um campo vetorial $F \in \mathcal{X}(U)$ por um escalar $k \in \mathbb{R}$ por

$$(kF) = (kF_1, \dots, kF_n).$$

Cálculos de rotina mostram que o conjunto $\mathcal{X}(U)$ é um espaço vetorial relativamente às operações de soma e multiplicação por escalar definidas acima.

5.2. Campos gradientes. Uma classe especial de campos vetoriais, muito importante nas aplicações, são os campos gradientes. Um campo F definido em uma região U de \mathbb{R}^n é *gradiente* se existe uma função $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $F = \nabla f$. Dizemos, também, que f é uma *função potencial* para o campo F .

O nome potencial foi empregado, neste sentido, pela primeira vez, na introdução da monografia de 1828 de George Green. Em suas palavras

No que segue, teremos ocasião de falar freqüentemente sobre esta função e, portanto, para abreviar, vamos chamá-la de função potencial do sistema \mathbf{S} .¹

Veja [6, p. 1].

Exemplos de campos gradientes incluem os campos gravitacionais e os campos elétricos. Considere, por exemplo, o campo elétrico de uma carga pontual q . Como vimos no parágrafo anterior, este campo é definido em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ por

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{kq}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}(x_1, x_2, x_3).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = \frac{-x_i}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

vemos que a função

$$f = \frac{-kq}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

é uma função potencial para o campo \mathbf{E} .

O campo de uma esfera (sólida) de raio 1, que foi uniformemente eletrizada também é gradiente. Para calcular o potencial explicitamente neste caso, basta imaginar cada “volume infinitesimal” da esfera como representando uma carga pontual, e integrar sobre a contribuição de cada um destes pequenos volumes. Para facilitar os cálculos digamos que o sistema de eixos foi escolhido de modo que a esfera tem centro na origem, e o ponto no qual queremos calcular o potencial tem coordenadas $(0, 0, a)$, onde $a > 1$. A contribuição do ponto (x_1, x_2, x_3) , de carga q , para o potencial em $(0, 0, a)$ depende apenas da distância entre os dois pontos, e é igual a

$$\frac{-kq}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2}}.$$

Integrando esta função sobre toda a esfera, obtemos

$$(5.1h) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{-kq}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2}} dz dy dx.$$

Para simplificar a integração usaremos coordenadas esféricas. Neste caso,

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 + a^2,$$

é igual a

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos(\phi);$$

ao passo que o jacobiano é $r^2 \sin(\phi)$. Portanto, a integral (5.1) é igual a

$$h = \frac{-kq}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(\phi)}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\phi)}} d\phi dr d\theta.$$

¹“In the sequel, we shall often have occasion to speak of this function, and will therefore, for abridgment, call it the potential function arising from the system \mathbf{S} .”

Calculando a primeira integral integral,

$$h = \frac{kq}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[r \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\phi)} \right]_0^\pi dr d\theta = \frac{kq}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[r \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar} - \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar} \right] dr d\theta.$$

Por sorte as expressões dentro das raízes são quadrados perfeitos. Há, contudo, um detalhe importante ao qual precisamos estar alerta. A expressão $\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar}$ corresponde à raiz quadrada *positiva* de $(r - a)^2$. Como $a > 1 \geq r$, devemos ter $\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar} = a - r > 0$; e não $r - a$, que é um número negativo. Assim,

$$h = \frac{kq}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r(r + a) - r(a - r)]_0^\pi dr d\theta = \frac{2kq}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta.$$

Continuando a integração, obtemos

$$h = \frac{4\pi kq}{3a}.$$

Note que a é a distância entre a origem da esfera e o ponto no qual estamos calculando o potencial. Levando em conta a simetria da esfera e a distribuição uniforme de carga, vemos que, o potencial no ponto, exterior à esfera, cujas coordenadas são (x_1, x_2, x_3) , é

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{4\pi kq}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right).$$

Derivando o potencial, obtemos o campo elétrico de uma esfera carregada no ponto (x_1, x_2, x_3) , que é

$$-\frac{4\pi kq}{3} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} (x_1, x_2, x_3).$$

Portanto, o campo elétrico de uma esfera carregada é o mesmo de uma partícula posicionada no centro da esfera, e cuja carga é igual à carga total da esfera; isto é

$$(\text{volume da esfera}) \times q = \frac{4}{3}\pi \cdot q.$$

Um resultado análogo foi provado por Newton no PRINCÍPIA, relativamente ao campo gravitacional; [10, Proposition LXX, Theorem XXXI, p. 193]. Como os campos elétrico e gravitacional variam com o inverso do quadrado da distância, o argumento é essencialmente o mesmo nos dois casos. Entretanto, Newton não possuía a noção de potencial, nem ferramentas de cálculo tão avançadas quanto as nossas. Não admira, portanto, que a demonstração deste fato tenha sido um dos grandes obstáculos que enfrentou ao escrever o PRINCÍPIA. Uma discussão detalhada da contribuição de Newton pode ser encontrada em [3, p. 269-275] e [15, p. 427].

6. Exercícios

1. Mostre que uma bola aberta é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n .
2. Mostre que todo retângulo aberto de \mathbb{R}^n contém uma bola fechada e que toda bola aberta contém um retângulo fechado.
3. Mostre que os únicos subconjuntos de \mathbb{R}^n que são simultaneamente abertos e fechados são \mathbb{R}^n e \emptyset .
4. Mostre que, se um conjunto fechado de \mathbb{R}^n não tem fronteira, então é igual a \mathbb{R}^n e \emptyset .
5. Mostre que uma região de \mathbb{R} é convexa se, e somente se, é um intervalo.
6. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, e qual é falsa:
 - (a) Todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n é conexo.
 - (b) Todo subconjunto conexo de \mathbb{R}^n é convexo.
 Justifique cuidadosamente a sua resposta.

7. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O laplaciano de f é definido por

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j{}^2}.$$

Dizemos que f satisfaz a *equação de Laplace* se seu laplaciano é nulo. Mostre que as seguintes funções satisfazem a equação de Laplace:

- (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$;
- (b) $f(x, y, z) = \cos(5z) \exp(3x + 4y)$

8. Sejam f e g funções diferenciáveis, definidas em uma região aberta $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Mostre que, se

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

então, $\Delta(f) = 0$.

9. Mostre que a função $f(x, y) = \arctan(y/x)$ definida em $x > 0$, satisfaz $\Delta f = 0$.
10. Seja U uma região aberta de \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere uma curva diferenciável parametrizada

$$C : (0, 1) \rightarrow U,$$

com parâmetro t . Use a regra da cadeia em mais de uma variável para calcular a derivada de $g(t) = f(C(t))$, em função das derivadas parciais de f .

11. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função diferenciável. O laplaciano de f é definido pela fórmula

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Calcule o laplaciano das funções $\cos(x_1 x_2)$, $\tan(x_1 + x_2)$ e $\exp(x_1^2 + x_2^2)$.

12. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Uma função $f \in \mathcal{O}(U)$ satisfaz a equação de Laplace se $\Delta(f) = 0$ em U . Mostre que cada uma das funções abaixo satisfaz a equação de Laplace:
- (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$;
 - (b) $f(x, y, z) = \cos(5z) \exp(3x + 4y)$

13. Sejam f e g funções diferenciáveis, definidas em uma região aberta $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Mostre que, se

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

então, $\Delta(f) = 0$.

14. Mostre que a função $f(x, y) = \arctan(y/x)$ definida em $x > 0$, satisfaz $\Delta f = 0$.

15. Seja $r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.
- (a) Calcule $\partial r / \partial x_i$.
 - (b) Calcule ∇r .

16. Seja f uma função diferenciável em apenas uma variável e

$$r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Defina

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(r).$$

- (a) Calcule o gradiente de g .
 - (b) Calcule Δg .
17. Seja f uma função diferenciável definida em um aberto de \mathbb{R}^n que contém a origem. Use o exercício anterior para mostrar que:
- o valor de f em $p \in U$ depende apenas da distância de p à origem
 - se, e somente se, ∇f é nulo ou paralelo ao vetor \overrightarrow{Op} .
18. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Prove que $\mathcal{O}(U)$ e $\mathbb{X}(U)$ são espaços vetoriais sobre \mathbb{R} .
19. Esboce cada um dos campos de velocidade descritos abaixo.
- (a) $F(x, y, z) = (y, 0)$;
 - (b) $F(x, y, z) = (2/r^2, 0)$;

- (c) $F(x, y, z) = (4y, 0)$;
 (d) $F(x, y, z) = (0, 3r^3)$;
 onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

20. Seja f um polinômio nas variáveis x e y e coeficientes reais. A curva algébrica C_f é o conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 que são zeros de f ; isto é,

$$C_f = \{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = 0\}.$$

Esboce $C(f)$ em cada um dos casos abaixo:

- (a) $f(x, y) = y - x^2$.
 (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
 (c) $f(x, y) = y^2 - x^3$.
 (d) $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$.
21. Seja f um polinômio nas variáveis x e y e coeficientes reais.
 (a) Dê uma fórmula para o vetor tangente a C_f em um ponto $p \in C_f$, em função das derivadas parciais de f .
 (b) Um ponto onde o vetor tangente se anula é conhecido como *ponto singular* de C_f . Determine os pontos singulares de C_f para cada uma das funções f do exercício ??.
22. Seja g um polinômio em x . Mostre que se $f(x, y) = y^m - g(x)$, onde $k > 0$ é um número inteiro, então o número de pontos singulares de f é finito.
23. Sejam p e q pontos do \mathbb{R}^n . Escreva uma equação paramétrica para o segmento de reta que vai de p a q .
24. Sejam p e q pontos da esfera de raio 1 e centro na origem do \mathbb{R}^n . Escreva uma equação paramétrica para a curva que vai de p a q e *está totalmente contida na esfera*.
25. Seja F um campo vetorial definido em uma região U do \mathbb{R}^3 e defina o operador

$$D_F = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde F_1 , F_2 e F_3 são as funções coordenadas de F . Mostre que se $g \in \mathcal{O}(U)$, então

$$D_F(g) = \nabla g \cdot F.$$

26. Sejam F e G campo vetoriais definidos em uma região U do \mathbb{R}^3 . Defina o comutador de F e G como sendo

$$[D_F, D_G] = D_F \cdot D_G - D_G \cdot D_F,$$

onde o ponto indica a composta de operadores. Mostre que $[D_F, D_G] = D_H$ para algum campo H definido em U e calcule as funções coordenadas de H .

Capítulo 2

1-formas

Usando a noção de trabalho como ponto de partida, introduzimos neste capítulo as 1-formas e aprendemos a integrá-las.

1. Trabalho

Como explicamos na introdução, começamos nosso tratamento de 1-formas utilizando como motivação a noção de trabalho.

1.1. Trabalho de um campo constante. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de forças constante definido em todo o plano. Como o campo é constante, temos que $F(u) = F_0$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$. No ensino médio, aprendemos a calcular o trabalho realizado por uma força em um deslocamento em linha reta. No nosso caso, a força é dada pelo campo. Como estamos supondo que o campo F é constante, podemos definir o trabalho realizado por F de maneira análoga ao do trabalho de uma força constante. Mais precisamente, o *trabalho* realizado por F no deslocamento em linha reta que vai de p a q em \mathbb{R}^2 é dado pelo produto interno

$$F_0 \cdot (q - p),$$

onde a diferença $q - p$ deve ser interpretada como o vetor que vai de p a q .

Aumentando um pouco a generalidade de nosso problema, suponhamos que o campo F é constante, mas que o deslocamento já não seja ao longo de uma reta. Começaremos tratando o caso mais simples em que o deslocamento se dá ao longo do gráfico de uma função.

Digamos que x e y são as coordenadas usuais do plano, determinadas pela base canônica. A curva que queremos considerar corresponde ao gráfico da função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Em outras palavras, os pontos desta curva são da forma $(t, f(t))$, onde $t \in [0, 1]$. Note que assumimos f contínua, para que a curva correspondente não dê pulos; do contrário, nosso modelo não seria fisicamente defensável. Desejamos definir o trabalho realizado pelo campo constante $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao longo desta curva. Nosso ponto de partida, será a única definição de trabalho que conhecemos; a que supõe que o deslocamento seja ao longo de uma reta.

A idéia é óbvia, basta aproximar a curva por uma sucessão de segmentos de reta. Somamos, então, o trabalho realizado sobre cada segmento. Reduzindo o tamanho dos segmentos, podemos obter uma aproximação tão boa quanto

desejarmos. Para executar esta estratégia, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n partes. Obtendo, assim, n subintervalos da forma $[i/n, (i+1)/n]$, onde $0 \leq i \leq n-1$. Nas extremidades do intervalo $[i/n, (i+1)/n]$ a função f assume os valores $f(i/n)$ e $f((i+1)/n)$. Portanto, o segmento

$$\left(\frac{i+1}{n}\right)t + (1-t)\frac{i}{n} \text{ com } 0 \leq t \leq 1$$

nos dá uma aproximação de f entre i/n e $(i+1)/n$. Naturalmente, a aproximação será tanto melhor, quanto menores forem os intervalos; isto é, quanto maior for n . A bem da verdade, esta afirmação só é verdadeira se a curva correspondente ao gráfico de f for diferenciável, e não apenas contínua. Por isso assumiremos, de agora em diante, que f é uma função diferenciável.

Passando, agora, ao cálculo do trabalho em $[i/n, (i+1)/n]$, temos que o deslocamento em linha reta vai de $(i/n, f(i/n))$ a $((i+1)/n, f((i+1)/n))$. Desta forma, o vetor que descreve o deslocamento é

$$((i+1)/n, f((i+1)/n)) - (i/n, f(i/n)) = (1/n, f((i+1)/n) - f(i/n)),$$

de modo que o trabalho correspondente será

$$(1/n, f((i+1)/n) - f(i/n)) \cdot F_0$$

onde F_0 é o vetor constante que define F . Para obter uma aproximação do trabalho sobre toda a curva, somamos o trabalho ao longo dos pequenos segmentos, obtendo

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_0 \cdot (1/n, f((i+1)/n) - f(i/n)).$$

Pelas propriedades do produto interno, esta soma é igual a

$$(1.1) \quad F_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} 1/n, \sum_{i=0}^{n-1} f((i+1)/n) - f(i/n) \right).$$

Expandindo o somatório

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right),$$

temos

$$\begin{aligned} & \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) + \left(f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \dots \\ & + \left(f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

que é uma soma telescópica. Em outras palavras, os termos intermediários se cancelam, de modo que sobram, apenas, o termo final e o inicial; com isso

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = f(n) - f(0).$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1/n = 1,$$

verificamos que (1.1) é igual a

$$F_0 \cdot (1, f(1) - f(0)).$$

Este resultado é extremamente surpreendente, porque o cômputo final do trabalho acabou não dependendo nem do gráfico da função, nem de quantas partes dividimos o segmento $[0, 1]$. Em particular, o resultado é exato, já que o número de divisões do segmento não influencia o valor obtido. Mais surpreendente ainda é o fato do resultado não depender da forma do gráfico da função: dá no mesmo se o gráfico é uma reta ou uma curva cheia de altos e baixos.

Antes que você fique por demais entusiasmado com a simplicidade do resultado que obtivemos, convém lembrar que estamos fazendo duas hipóteses substanciais. A primeira é que o campo é constante; a outra, que a curva ao longo da qual o trabalho está sendo calculado é o gráfico de uma função. Vamos remover estas suposições uma a uma, começando pela segunda.

Seja, então, C uma curva em \mathbb{R}^2 . Queremos dividir a curva em pequenos segmentos para calcular uma aproximação do trabalho. O caso anterior foi fácil, porque bastou dividir o segmento $[0, 1]$ e usar isto para dividir a curva. Como proceder no caso de uma curva mais geral? A saída é não considerar uma curva geral demais; mais precisamente, queremos que C seja uma curva contínua parametrizável. Isto significa que o conjunto C de pontos da curva é igual à imagem de uma função contínua

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Assim, para cada ponto p_0 da curva C existe um $t_0 \in [0, 1]$ tal que $p_0 = \psi(t_0)$. Em §3.3 veremos como considerar curvas um pouco mais gerais.

Assumiremos, portanto, de agora em diante, que todas as curvas com as quais estamos trabalhando são, de fato, parametrizáveis. Por causa disto, e para facilitar a notação, usaremos a mesma letra para designar a curva e a função de $[0, 1]$ em \mathbb{R}^2 que corresponde à sua parametrização.

Seja, então, $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, e seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo de vetores constantes já considerado acima. Como no caso do gráfico de uma função, subdividimos o intervalo em que C está definida em n partes que, por sua vez, usamos para subdividir a curva C . Portanto, o trabalho realizado pelo campo no deslocamento ao longo de C pode ser aproximado por

$$F_0 \cdot \left(C \left(\frac{i+1}{n} \right) - C \left(\frac{i}{n} \right) \right).$$

Somando sobre cada intervalo, e apelando para as propriedades do produto interno, obtemos

$$F_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} C \left(\frac{i+1}{n} \right) - C \left(\frac{i}{n} \right) \right).$$

Mais uma vez, trata-se de uma soma telescópica. Efetuando o cancelamento dos termos intermediários, descobrimos que o trabalho total é igual a

$$F_0 \cdot (C(1)) - F_0 \cdot (C(0)).$$

Novamente o resultado depende apenas do início e do fim da curva, e não de como a curva evolui entre estes dois pontos. Podemos, com isso, enunciar nosso primeiro teorema.

TEOREMA. *O trabalho de um campo constante entre dois pontos independe de como é feito o deslocamento entre estes pontos.*

Resta-nos remover a hipótese do campo ser constante, faremos isto no próximo parágrafo.

1.2. Trabalho de um campo variável. Chegou a hora de enfrentar o caso geral, em que o campo não é constante e o deslocamento se dá ao longo de uma curva qualquer. Lembre-se, porém, que em nossa nomenclatura a expressão “curva qualquer” é uma abreviação de “curva parametrizável contínua qualquer”. Outro ponto a ser notado é que, como o campo era constante, estivemos supondo que estava definido em todo o plano. Contudo, já que vamos permitir um campo variável, esta hipótese se torna inconveniente. Por exemplo, o campo gravitacional definido por uma massa pontual não está definido no ponto onde a massa está situada, já que o valor do campo neste ponto seria infinito. Por isso, assumiremos, a partir de agora, que nossos campos e curvas estão contidos em regiões do plano.

Antes de pôr mãos à obra, convém fazer algumas ressalvas sobre o tratamento que daremos ao problema de definir trabalho de um campo variável neste parágrafo. Nosso objetivo é justificar o porquê da definição utilizada em física, tomando por base apenas a definição de trabalho de um campo constante. Note o uso da palavra “justificar”. Não podemos “provar” que a definição utilizada em física está correta, simplesmente porque isto não faz sentido. Afinal, posso, em princípio, definir qualquer coisa que eu deseje. Se minha definição é ou não útil na descrição de algum fenômeno físico, é outro problema. Portanto, o que queremos é um argumento mais ou menos convincente que nos permita entender porque os físicos julgam adequada a definição geral de trabalho que utilizam.

Tendo em mente as considerações acima, utilizaremos um argumento que remonta aos PRINCÍPIA de Newton. O argumento propõe uma maneira de aproximar um campo de força variável a partir de uma força constante.

Seja U uma região do plano. Digamos que $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo contínuo (não constante), e que $C : [0, 1] \rightarrow U$ é uma curva contínua parametrizada. Como no §1.1 dividiremos o intervalo em n partes iguais, e usamos isto para dividir a curva C . O argumento à la Newton consiste em supor que o campo F pode ser aproximado por um campo descontínuo, que é igual a $F(i/n)$ no intervalo $[i/n, (i+1)/n)$. Assim, de 0 até chegar a $1/n$, suporemos que o campo vale $F(0)$. Em $1/n$, o campo aumenta instantaneamente para $F(1/n)$, e continua assim até chegar em $2/n$. Em $2/n$ há mais um aumento

instantâneo, desta vez para $F(2/n)$, e o campo fica constante até chegar a $3/n$. E assim por diante.

Newton usou este tipo de argumento, por exemplo, na Proposição I, Teorema I, da seção II, Livro I, do PRINCIPIA, onde prova que a terceira lei de Kepler segue do fato de que a gravitação é uma força centrípeta. Neste caso Newton imagina que a força centrípeta, que deveria ser contínua, é aplicada instantaneamente a intervalos regulares ao longo da trajetória do objeto. Vale a pena ler o argumento diretamente no PRINCIPIA; veja [10, p. 40].

Voltando ao nosso problema, vejamos como aplicar o que já sabemos sobre campos constantes à situação atual. Tomando o intervalo $[i/n, (i+1)/n]$ como base, estamos supondo, em nossa aproximação, que o campo vale $F(C(i/n))$ ao longo de todo este intervalo. Nosso primeiro impulso seria utilizar o teorema 1.1. Fazendo isto, concluiríamos que o trabalho executado, sob estas circunstâncias, para ir de $C(i/n)$ a $C((i+1)/n)$ deveria ser

$$F(C(i/n)) \cdot (C((i+1)/n) - C(i/n)).$$

Contudo, isto não está correto, já que estamos assumindo que o campo aumenta, instantaneamente, para $F(C((i+1)/n))$ em $(i+1)/n$; ao passo que o teorema pressupõe o campo constante em todo o *intervalo fechado*. Resolvemos esta dificuldade chegando muito perto de $(i+1)/n$, mas sem atingi-lo. Por exemplo, avançamos ao longo da curva C de i/n até

$$\frac{(i+1)}{n} - \frac{1}{2^n}.$$

Se n for grande, este número está bem perto, mas aparece um pouco antes, de $(i+1)/n$, de modo que o campo ainda vale $F(C(i/n))$ em

$$C\left(\frac{(i+1)}{n} - \frac{1}{2^n}\right).$$

Portanto, sob estas hipóteses, o trabalho realizado por F no intervalo $[i/n, (i+1)/n]$ é aproximadamente igual a

$$F(C(i/n)) \cdot \left(C\left(\frac{(i+1)}{n} - \frac{1}{2^n}\right) - C(i/n)\right).$$

Para descomplicar um pouco a notação, escreveremos

$$t_i = i/n \text{ e } \Delta t = \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n},$$

de modo que

$$\frac{(i+1)}{n} - \frac{1}{2^n} = t_i + \Delta t.$$

Com isto a aproximação para o trabalho no intervalo $[i/n, (i+1)/n]$ se reescreve como

$$F(C(t_i)) \cdot (C(t_i + \Delta t) - C(t_i)).$$

Somando todos estes valores para $0 \leq i \leq n-1$, obtemos

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(C(t_i)) \cdot (C(t_i + \Delta t) - C(t_i)),$$

como uma aproximação do trabalho realizado por F ao longo de C . Porém, ao contrário do que ocorria no caso de um campo constante, esta *não* é uma soma telescópica. Para que isto fosse verdade precisaríamos poder cancelar

$$F(C(t_i)) \cdot (C(t_i + \Delta t)) \text{ com } F(C(t_{i+1})) \cdot (C(t_{i+1}));$$

o que não é possível, já que não são iguais. Contornamos esta dificuldade fazendo uma coisa bem mais sofisticada.

Pelas propriedades do produto interno, temos que

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} F(C(t_i)) \cdot \left(\frac{C(t_i + \Delta t) - C(t_i)}{\Delta t} \right) \Delta t.$$

Contudo, esta soma é uma soma de Riemann (ou quase isto...); de forma que fazendo n tender a infinito, esperamos encontrar uma integral. Antes, porém, devemos decidir o que acontece ao integrando quando passamos a este limite. Mas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \right) = 0,$$

de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \right) = C'(t),$$

que é derivada de C em relação a t , sua única variável. É claro que, para que isto faça sentido, C tem que ser diferenciável, e não apenas contínua, como função de t . Assumindo isto, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_0^1 F(C(t)) \cdot (C'(t)) dt.$$

Portanto, o trabalho $T_C(F)$ do campo F ao longo da curva C deve ser definido como

$$(1.2) \quad T_C(F) = \int_0^1 F(C(t)) \cdot (C'(t)) dt.$$

que é conhecida como a *integral de linha* de F ao longo de C , e denotada por

$$\int_C F.$$

1.3. Exemplos. Antes de sistematizar a definição obtida no §1.2, determinaremos o trabalho de alguns campos não constantes usando a fórmula (1.2) da integral de linha.

Considere a região $U = \mathbb{R}^2$. Calcularemos o trabalho realizado por dois campos diferentes ao longo da circunferência de raio 1 com centro na origem. Os pontos desta circunferência estão completamente contidos em U , e podemos parametrizá-la na forma

$$C(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Como vamos precisar da derivada desta função, é melhor calculá-la logo,

$$C'(t) = (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t)).$$

Começemos determinando o trabalho relativo ao campo

$$F_1(x, y) = (x^2, y).$$

Calculando o integrando de (1.2) para este campo, obtemos

$$(\cos(2\pi t)^2, \sin(2\pi t)) \cdot (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t)),$$

que é igual a

$$2\pi(-\cos(2\pi t)^2 \sin(2\pi t) + \sin(2\pi t) \cos(2\pi t)).$$

Portanto, o trabalho realizado pelo campo ao longo da circunferência é

$$2\pi \int_0^1 (-\cos(2\pi t)^2 \sin(2\pi t) + \sin(2\pi t) \cos(2\pi t)) dt.$$

Esta função é facilmente integrável, e nos dá

$$2\pi \left[\frac{\cos(2\pi t)^3}{6\pi} + \frac{\sin(2\pi t)^2}{4\pi} \right]_0^1 = 0.$$

Note que este resultado é compatível com a expectativa gerada pelo teorema 1.1. Como estamos integrando ao longo de uma curva fechada, o valor do campo no início e no fim da curva coincidem. Portanto, *se o teorema continua valendo*, deveríamos mesmo obter 0.

Passando ao segundo exemplo, o campo desta vez é dado por

$$F_2(x, y) = (-y, x).$$

O integrando de (1.2) é igual a

$$(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \cdot (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t)) = 2\pi \sin(2\pi t)^2 + 2\pi \cos(2\pi t)^2 = 2\pi.$$

Portanto, o trabalho realizado por F_2 ao longo da circunferência é igual a

$$\int_0^1 dt = 2\pi,$$

e não é zero, como seria o caso se o teorema 1.1 valesse em geral.

Este último exemplo nos permite concluir que o teorema 1.1 não vale para qualquer campo. Entretanto, já sabemos que sempre vale para campos constantes e parece valer também para F_1 . O “parece” fica por conta do fato de só termos feito os cálculos para um caminho muito especial, a circunferência

de raio 1 em torno da origem. Para garantir que o teorema é válido para F_1 teríamos que testá-lo para qualquer curva fechada contida em U . Vejamos o que acontece se fizermos isto.

Seja, então, $C : [0, 1] \rightarrow U$ uma curva fechada diferenciável. O fato de C ser fechada se traduz pela igualdade $C(0) = C(1)$; e isto é basicamente tudo que sabemos sobre C . Calculando o integrando de (1.2), obtemos

$$c_1(t)^2 c_1'(t) + c_2(t) c_2'(t),$$

onde c_1 e c_2 são as funções coordenadas da curva C . Portanto, o trabalho realizado por F_1 ao longo desta curva é igual a

$$T_C(F_1) = \int_0^1 (c_1(t)^2 c_1'(t) + c_2(t) c_2'(t)) dt = \left[\frac{c_1(t)^3}{3} + \frac{c_2(t)^2}{2} \right]_0^1 = 0,$$

uma vez que

$$c_1(0) = c_1(1) \text{ e } c_2(0) = c_2(1).$$

Mostramos, assim, que o trabalho realizado por F_1 em qualquer caminho fechado é sempre zero. Mas isto basta para concluirmos que o resultado do teorema 1.1 vale para F_1 . Para entender porque, suponha que C e D são duas curvas que vão de P_1 a P_2 , dois pontos de U . Definimos uma nova curva $-D : [0, 1] \rightarrow U$ por

$$-D(t) = D(1 - t).$$

Isto quer dizer que os pontos de $-D$ são os mesmos de D , só que a curva é percorrida ao contrário. Percorrendo, agora, C de P_1 a P_2 , seguido de $-D$, de P_2 a P_1 , obtemos uma curva fechada. Vamos chamá-la de $C - D$. Do que provamos acima,

$$T_{C-D}(F_1) = 0.$$

Mas, como é fácil ver,

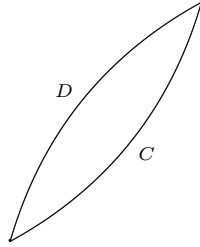
$$T_{C-D}(F_1) = T_C(F_1) + T_{-D}(F_1) = T_C(F_1) - T_D(F_1),$$

já que ao percorrermos a curva em sentido contrário, o sinal da integral se inverte. Mas isto implica que

$$T_C(F_1) = T_D(F_1),$$

provando assim que o trabalho realizado por F_1 independe do deslocamento, desde que os pontos inicial e final coincidam.

Reverendo este argumento com o devido cuidado, é fácil constatar que atiramos toda cautela pela janela. Por exemplo, já vimos que uma curva deve ser diferenciável para que possamos calcular a integral de linha. Contudo $C - D$ pode não ser diferenciável *mesmo se C e D o forem*, como mostra a figura abaixo.



Nesta figura, as curvas C e D foram desenhadas de forma a terem tangentes em todo lugar. Apesar disto, formaram-se ‘bicos’ nos pontos onde as curvas se encontram, indicando que a curva fechada $C - D$ não é diferenciável em nestes pontos. Voltaremos a esta questão em detalhe no §3.1.

Com isto, podemos refinar nossas observações anteriores sobre o teorema 1.1. Mostramos que

- o teorema não vale para qualquer campo;
- o teorema vale para qualquer campo constante;
- o teorema não vale apenas para campos constantes.

Estas observações sugerem imediatamente o seguinte problema.

PROBLEMA. *Caracterizar os campos para os quais trabalho entre dois pontos fixos independe da curva ao longo da qual é calculado.*

Campos para os quais esta propriedade vale são chamados de *conservativos*, e incluem muitos exemplos físicos, como o campo gravitacional e o campo elétrico. A caracterização dos campos conservativos será feita no §5.6 do capítulo 3.

1.4. Mudando de perspectiva. Seja U uma região do plano e F um campo definido em U . No §1.2 vimos que o trabalho de F ao longo de uma curva parametrizada C , contida em U , é a integral da função

$$\gamma(t) = F(C(t)) \cdot C'(t),$$

entre 0 e 1. Neste parágrafo investigamos as propriedades desta função.

A primeira coisa a notar é que γ pode ser facilmente escrita como a composta de duas aplicações, que chamaremos de G e α . A aplicação G é definida por

$$G(t) = (C(t), C'(t))$$

e tem domínio $[0, 1]$ e contradomínio $U \times \mathbb{R}^2$. Já

$$\alpha : U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é definida por

$$\alpha(p, v) = F(p) \cdot v,$$

onde $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^2$. Temos, assim, que

$$[0, 1] \xrightarrow{G} U \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$

onde $\gamma = \alpha \cdot G$. Note que, ao efetuar esta decomposição, os papéis desempenhados pela curva e pelo campo foram atribuídos a duas funções diferentes. De fato G codifica a informação referente à curva, ao passo que o campo é codificado em α . É nas propriedades de α que queremos nos concentrar a seguir.

Em primeiro lugar, se $p \in U$ for fixado, obtemos a partir de α a aplicação

$$\alpha|_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\alpha|_{p_0}(v) = \alpha(p_0, v) = F(p_0) \cdot v.$$

Apelando mais uma vez para as propriedades do produto interno, vemos que $\alpha|_{p_0}$ é uma aplicação linear. Em outras palavras,

Propriedade 1: α é linear em sua segunda entrada, desde que a primeira entrada assuma um valor fixo.

Por outro lado, se $F = (a_1, a_2)$ e $v_0 = (x_0, y_0)$ for um vetor fixo de U , obtemos uma função

$$p \mapsto \alpha(p, v_0) = a_1(p)x_0 + a_2(p)y_0.$$

Mas as funções coordenadas de F são diferenciáveis por hipótese. Como qualquer combinação linear de funções diferenciáveis é uma função diferenciável, o mesmo vale para a função acima definida. Portanto,

Propriedade 2: α é diferenciável em sua primeira entrada, desde que a segunda entrada assuma um valor fixo.

Qualquer aplicação

$$U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaça as propriedades 1 e 2, destacadas acima, é chamada de *1-forma diferencial*. Agora que sabemos o que é uma 1-forma, podemos introduzir a notação tradicionalmente usada para denotá-las. Seja β uma 1-forma em U e

$$\varepsilon = \{e_1, e_2\}$$

a base canônica do \mathbb{R}^2 . Escolha $p \in U$ e $v = x_1e_1 + x_2e_2$ um vetor do plano. Apelando para a linearidade de β relativamente à sua segunda entrada, podemos escrever

$$(1.3) \quad \beta(p, v) = \beta(p, x_1e_1 + x_2e_2) = x_1\beta(p, e_1) + x_2\beta(p, e_2).$$

Como a segunda entrada está fixa em $\beta(p, e_1)$ e $\beta(p, e_2)$, temos que estas duas funções de p são diferenciáveis. A partir de (1.3) seria fácil descrever a representação matricial de β , mas não é este o caminho adotado na notação tradicional. Ao invés disto, definimos aplicações lineares auxiliares $dx_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pela fórmula

$$dx_i(v) = dx_i(x_1e_1 + x_2e_2) = x_i,$$

para $1 \leq i \leq 2$. Em palavras,

dx_i captura a i -ésima coordenada de v .

Usando esta notação, e levando em conta (1.3), β pode ser escrita como

$$\beta = \beta(p, e_1)dx_1 + \beta(p, e_2)dx_2.$$

Podemos resumir o que fizemos até aqui dizendo que uma 1-forma é uma expressão da forma

$$b_1dx_1 + b_2dx_2,$$

onde $b_1, b_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

A aplicação composta $\alpha \cdot G$ é conhecida como a *imagem inversa* de α pela curva parametrizada C , e denotada por $C^*(\alpha)$. Há um detalhe importante desta última construção que não podemos deixar de observar. Conservando a notação introduzida acima para F , e denotando as funções coordenadas de C por c_1 e c_2 , temos que

$$C^*(\alpha) = a_1(C)c'_1 + a_2(C)c'_2.$$

Apesar de estarmos acostumados a pensar na derivada $C'(t)$ como sendo um vetor, o correto seria considerá-la como a transformação linear $D_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em $s \in \mathbb{R}$ por

$$D_{C(t)}(s) = C'(t)s = (c'_1(t)s, c'_2(t)s).$$

Naturalmente estamos supondo que t está fixo na definição acima. Assumindo que a derivada é uma transformação linear, vemos que $C^*(\alpha)$ corresponde à aplicação de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} , dada por

$$(1.4) \quad C^*(\alpha)(t, s) = \gamma(t)s,$$

onde

$$\gamma(t) = (a_1(C(t))c'_1(t) + a_2(C(t))c'_2(t)),$$

é uma função de $[0, 1]$ em \mathbb{R} . Como $C^*(\alpha)(t, s)$ é linear em s e diferenciável em t , temos uma 1-forma diferencial, só que, desta vez, definida no intervalo $(0, 1)$.

Retroagindo à definição dada anteriormente, uma 1-forma diferencial em $(0, 1)$ deve ser uma aplicação

$$\eta : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

que é diferenciável em relação à sua primeira coordenada e linear em relação à segunda. Procedendo como no caso de 1-formas de \mathbb{R}^2 , podemos escrever η como

$$\eta = \eta(t, 1)dt,$$

onde $dt : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a transformação linear definida por $dt(s) = s$. Talvez isto pareça muita notação para pouca matemática, mas é apenas consequência do fato, bem conhecido, de que um operador linear qualquer de \mathbb{R} é dado pela multiplicação por uma constante. E é exatamente isto que obteríamos se fixássemos t na expressão de η . Usando esta notação, podemos reescrever (1.4) na forma

$$C^*(\alpha) = \gamma(t)dt.$$

Estes comentários nos ajudam a interpretar a noção de integral de linha na linguagem das formas diferenciais. Lembre-se que a integral de F ao longo

de C foi definida como sendo a integral da função γ entre 0 e 1. Mas γ é o coeficiente da 1-forma $C^*(\alpha)$. Reescrevendo tudo isto numa ordem mais direta: a integral da 1-forma α ao longo de C , é a integral da 1-forma $C^*(\alpha)$ em $[0, 1]$ que, por sua vez, é a integral de γ neste mesmo intervalo. Isto é,

$$\int_C \alpha = \int_{[0,1]} C^*(\alpha) = \int_0^1 \gamma dt.$$

Como de costume, o termo mais à direita nesta última equação representa a integral da função γ entre 0 e 1. O dt está presente, apenas, para indicar qual é a variável de integração. Contudo, a integral da 1-forma γdt em $[0, 1]$ é

$$\int_{[0,1]} \gamma dt,$$

que é perigosamente parecida com a notação para a integral de γ entre 0 e 1. Removeremos o perigo de ambigüidade simplesmente definindo

$$\int_{[0,1]} \gamma dt, \text{ como sendo igual a } \int_0^1 \gamma dt.$$

Para encerrar, generalizamos a definição acima para a integral de qualquer 1-forma do plano ao longo de uma curva. Se β é uma 1-forma em U e $C : [0, 1] \rightarrow U$ uma curva, definimos

$$\int_C \beta = \int_{[0,1]} C^*(\beta).$$

Como

$$C^*(\beta) = g dt,$$

para alguma função diferenciável g ,

$$\int_{[0,1]} C^*(\beta) = \int_0^1 g dt,$$

que é a integral usual de g entre 0 e 1.

Na próxima seção generalizaremos e sistematizaremos tudo isto. Entre outras coisas, precisamos esclarecer como se deve lidar com o conflito entre intervalos abertos e fechados, que se manifestou subrepitiamente na discussão acima. De fato, a integral foi calculada no intervalo *fechado* $[0, 1]$. Contudo, o seu integrando é uma 1-forma definida no intervalo *aberto* $(0, 1)$.

2. O caso geral

Nesta seção vamos generalizar e (com perdão pelo trocadilho) formalizar a noção de 1-forma diferenciável. Apesar de não utilizarmos formas em espaços de dimensão superior a 3 em nossas aplicações, introduziremos 1-formas sobre \mathbb{R}^n . Faremos isto porque a teoria geral é tão elementar que restringi-la não a simplificaria em nada. Sinta-se livre para imaginar que $1 \leq n \leq 3$, se preferir.

2.1. 1-formas diferenciais. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Uma *1-forma diferencial* em U é uma aplicação

$$\alpha : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz às seguintes condições:

- (1) fixando $p_0 \in U$, e considerando $\alpha(p_0, u)$ como função apenas de u , temos uma aplicação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} ;
- (2) fixando $u_0 \in \mathbb{R}^n$, e considerando $\alpha(p, u_0)$ como função apenas de p , temos uma função diferenciável de U em \mathbb{R} .

Como no §1.4, uma vez que $p \in U$ tenha sido fixado, definimos α_p como sendo a transformação linear

$$\alpha_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\alpha|_p(v) = \alpha(p, v) \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Podemos expressar qualquer 1-forma de maneira bastante concreta, se adotamos um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^n . Feito isto, seja

$$\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\},$$

a base canônica relativamente a esta escolha de coordenadas. Dado um vetor v , qualquer, de \mathbb{R}^n , podemos escrevê-lo como

$$v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n,$$

onde b_1, \dots, b_n são números reais. Fixando, agora, um ponto p em U , e apelando para a propriedade (1) da definição acima,

$$(2.1) \quad \alpha(p, v) = b_1 \alpha(p, e_1) + \dots + b_n \alpha(p, e_n).$$

Denotando, então, por dx_i a transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} que extrai a i -ésima coordenada de um vetor, temos que

$$dx_i(u) = b_i.$$

Portanto, o último termo de (2.1) pode ser reescrito na forma

$$\alpha(p, u) = \alpha(p, e_1) dx_1(u) + \dots + \alpha(p, e_n) dx_n(u).$$

Entretanto, e_i é um vetor fixo de \mathbb{R}^n , de modo que, pela propriedade (2), $\alpha(p, e_i)$ é uma função diferenciável de p para cada $1 \leq i \leq n$. Por isso, escrevendo,

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = \alpha((x_1, \dots, x_n), e_i),$$

temos uma função diferenciável

$$a_i : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\alpha(p, u) = a_1(p) dx_1(u) + \dots + a_n(p) dx_n(u),$$

para todo $p \in U$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Mas isto equivale a dizer que

$$(2.2) \quad \alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n,$$

em $U \times \mathbb{R}^n$.

Não foi à toa que preferimos definir o conceito de 1-forma diferenciável utilizando as propriedades (1) e (2), ao invés de usar diretamente a expressão (2.2). A fórmula (2.2) pressupõe que um sistema de coordenadas tenha sido previamente escolhido, que não é o caso da definição do início deste parágrafo. No jargão matemático a definição que escolhemos é *livre de coordenadas*.

2.2. O espaço vetorial das 1-formas diferenciais. O conjunto formado pelas 1-formas diferenciais definidas em uma região U do \mathbb{R}^n será denotado por $\Omega^1(U)$. Há várias operações que podemos definir em $\Omega^1(U)$, a mais simples das quais é a soma. Sejam α e β 1-formas diferenciais em U , a soma $\alpha + \beta$ é definida em um ponto $(p, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ por

$$(\alpha + \beta)(p, v) = \alpha(p, v) + \beta(p, v).$$

Para que esta definição seja útil, é preciso que $\alpha + \beta$ também seja uma 1-forma diferencial em U , e não apenas uma aplicação qualquer. Mas isto é fácil de verificar usando as propriedades (1) e (2).

Em primeiro lugar, fixando $p \in U$ e tomando $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e um escalar k , temos que

$$(2.3) \quad (\alpha + \beta)(p, v_1 + kv_2) = \alpha(p, v_1 + kv_2) + \beta(p, v_1 + kv_2).$$

Como α e β satisfazem (1),

$$\alpha(p, v_1 + kv_2) = \alpha(p, v_1) + k\alpha(p, v_2) \text{ e}$$

$$\beta(p, v_1 + kv_2) = \beta(p, v_1) + k\beta(p, v_2).$$

Substituindo em (2.3), obtemos

$$(\alpha + \beta)(p, v_1 + kv_2) = \alpha(p, v_1) + k\alpha(p, v_2) + \beta(p, v_1) + k\beta(p, v_2),$$

que pode ser reescrito na forma

$$(\alpha + \beta)(p, v_1 + kv_2) = (\alpha + \beta)(p, v_1) + k(\alpha + \beta)(p, v_2).$$

Isto mostra que $\alpha + \beta$ é linear na segunda coordenada, quando a primeira está fixa. Poderíamos ter abreviado toda esta conta apelando apenas para o fato de que a soma de duas aplicações lineares (neste caso, $\alpha|_p$ e $\beta|_p$) também é uma aplicação linear.

Fixando, agora, um vetor $v_0 \in \mathbb{R}^n$ temos, pela propriedade (2), que $\alpha(p, v_0)$ e $\beta(p, v_0)$ são funções diferenciáveis de p . Como a soma de funções diferenciáveis em U é uma função diferenciável em U , concluímos que $(\alpha + \beta)(p, v_0)$ é diferenciável como função de p . Mostramos, assim, que $\alpha + \beta$ satisfaz (1) e (2); portanto, é uma 1-forma diferenciável em U . Um cálculo simples mostra que se

$$\alpha = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n \text{ e } \beta = b_1 dx_1 + \cdots + b_n dx_n,$$

então

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) dx_1 + \cdots + (a_n + b_n) dx_n,$$

como, aliás, seria de esperar.

Procedendo de maneira semelhante, podemos mostrar que se α é uma 1-forma diferencial em U e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, então a aplicação de $U \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} definida por

$$(f\alpha)(p, v) = f(p)\alpha(p, v),$$

onde $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Mais uma vez, isto é facilmente expresso em termos de coordenadas pela fórmula

$$f\alpha = f(a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n) = (fa_1)dx_1 + \cdots + (fa_n)dx_n.$$

Um caso particular da multiplicação de uma 1-forma por uma função ocorre quando a função é constante. Neste caso o que temos é o produto de um escalar por uma 1-forma. Assim, podemos somar 1-formas diferenciáveis e multiplicá-las por escalares. Com um pouco de paciência é possível verificar que estas operações satisfazem todas as propriedades requeridas para fazer de $\Omega^1(U)$ um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Este é um fato que usaremos com frequência ao longo destas notas; tão frequentemente que raramente chamaremos a atenção para o que estamos fazendo.

No §1.4 vimos como associar uma 1-forma diferencial a um campo do plano. Esta construção se generaliza imediatamente para dimensões maiores. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores diferenciável em U . Denotando por x_1, \dots, x_n as coordenadas de \mathbb{R}^n relativamente à base canônica, e por F_1, \dots, F_n as funções coordenadas de F , definimos a 1-forma diferencial associada a F por

$$\tau_F = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n.$$

Isto nos dá uma correspondência bijetiva entre campos definidos em U e formas em $\Omega^1(U)$. Com isso, tanto podemos estudar o cálculo vetorial em termos de formas, quanto de campos. A vantagem de usar a linguagem de formas é que permite um tratamento unificado do que ocorre em todas as dimensões; ao contrário do que ocorre com os campos de vetores, como já comentamos na introdução.

2.3. Diferencial. Como vimos no §5.2 do capítulo 1, uma classe importante de campos vetoriais são os campos gradientes. Seja F um campo gradiente, definido em uma região U de \mathbb{R}^n , e $f \in \mathcal{O}(U)$ sua função potencial. A 1-forma

$$\tau_{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

é denotada por df , e conhecida como a *diferencial*, ou *diferencial total*, da função f . Uma 1-forma em U que pode ser escrita como df para algum $f \in \mathcal{O}(U)$, é chamada de *exata*.

Podemos nos perguntar de que forma a diferencial se comporta com relação às operações definidas em $\mathcal{O}(U)$; veja §5 do capítulo 1. Em primeiro lugar, como a derivação parcial é linear,

$$d(f + kg) = d(f) + kd(g), \text{ para todo } f, g \in \mathcal{O}(U) \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Como $\mathcal{O}(U)$ e $\Omega^1(U)$ são ambos espaços vetoriais sobre \mathbb{R} , podemos reformular esta propriedade dizendo simplesmente que a diferencial

$$d : \mathcal{O}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$$

é uma transformação linear.

No caso da multiplicação de funções, a situação é mais complicada. Considerando, novamente, o que ocorre com as derivadas parciais, temos que se $f, g \in \mathcal{O}(U)$, então

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j}g + f \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$d(fg) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}g + f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

Distribuindo os dx_j sobre a soma, obtemos

$$d(fg) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}g dx_j + f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

Separando as parcelas em duas somas,

$$d(fg) = \sum_{j=1}^n \left(g \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx_j.$$

Pondo, agora, f e g em evidência,

$$d(fg) = g \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) + f \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx_j,$$

que pode ser reescrito como

$$d(fg) = gdf + f dg.$$

Esta equação é conhecida como *fórmula de Leibniz*.

2.4. Imagem inversa. É chegada a hora de introduzir o conceito de imagem inversa de uma 1-forma por uma aplicação diferenciável. Faremos isto de uma maneira suficientemente geral para cobrir os dois casos de imagem inversa introduzidos no §1.4.

Seja V uma região de \mathbb{R}^m , e seja $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Escrevendo ϕ em termos de suas funções coordenadas, temos que

$$\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_n(p)),$$

para todo $p \in V$. Dizer que ϕ é diferenciável, equivale a dizer que cada uma das funções coordenadas

$$\phi_j : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

é diferenciável. A derivada de ϕ em um ponto $p \in V$ é dada pela matriz jacobiana $J_p(\phi)$, que por sua vez define uma transformação linear de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n , que também denotaremos por $(J_p(\phi))$.

Até aqui não fizemos nada que não tenha sido visto em um curso de cálculo diferencial. Seguindo, agora, o roteiro já utilizado em 1.4, definimos uma função

$$G_\phi : V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

por

$$G_\phi(p, v) = (\phi(p), J_p(\phi)v),$$

onde $p \in V$ e $v \in \mathbb{R}^m$. Note que G_ϕ é diferenciável como função de suas m primeiras coordenadas e linear como função das m últimas coordenadas.

Suponha, agora, que a imagem de ϕ está contida em uma região U de \mathbb{R}^n , na qual está definida uma 1-forma diferencial α . Neste caso a imagem de G_ϕ está contida em $U \times \mathbb{R}^n$, de modo que faz sentido calcular a composta de α com G_ϕ . A *imagem inversa* de α por ϕ , denotada por $\phi^*(\alpha)$, é definida por

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \cdot G_\phi.$$

Pela definição de composta, $\phi^*(\alpha)$ é uma aplicação de $V \times \mathbb{R}^m$ em \mathbb{R} . Restamos mostrar que é uma 1-forma diferencial em V . Para isto, basta verificar as condições (1) e (2) da definição enunciada no §2.1.

Digamos que um ponto $p_0 \in V$ foi fixado. Então, para qualquer $v \in \mathbb{R}^m$ temos

$$\phi^*(\alpha)(p_0, v) = \alpha(\phi(p_0), J_{p_0}(\phi)v),$$

que é equivalente a dizer que

$$\phi^*(\alpha)(p_0, v) = \alpha|_{\phi(p_0)} \cdot J_{p_0}(\phi)(v).$$

Mas, com p_0 fixado, tanto $\alpha|_{\phi(p_0)}$, quanto $J_{p_0}(\phi)$ são lineares nas coordenadas restantes. Como a composta de aplicações lineares é linear, temos que a aplicação $\phi^*(\alpha)(p_0, v)$ é linear em v , de modo que $\phi^*(\alpha)$ satisfaz (1).

Suponhamos, agora, que o vetor $v_0 \in \mathbb{R}^m$ está fixo. Considere a função $g_0 : V \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ definida pela regra

$$g_0(p) = (\phi(p), J_p(\phi)(v_0)).$$

Como $J_p(\phi)(v_0)$ é diferenciável como função de p , o mesmo vale para g_0 . Contudo,

$$\phi^*(\alpha)(p, v_0) = \alpha \cdot g_0(p)$$

qualquer que seja $p \in V$. Como composta de duas aplicações diferenciáveis, $\phi^*(\alpha)(p, v_0)$ é, ela própria, diferenciável, o que prova (2).

É claro que, se ϕ corresponder a uma curva parametrizável, então a imagem inversa definida aqui coincide com a que foi definida no §1.4. Por outro lado, se $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear, então

$$G_\phi(p, v) = (\phi(p), \phi(v)),$$

já que, neste caso, a transformação linear induzida pela jacobiana é a própria ϕ . Se α for uma 1-forma diferencial em \mathbb{R}^m , temos

$$\alpha \cdot G_\phi(p, v) = \alpha(\phi(p), \phi(v)).$$

Supondo, agora, que α é constante, seus coeficientes são independentes da escolha de suas m primeiras coordenadas, de modo que

$$\alpha \cdot G_\phi(p, v) = \alpha(\phi(v)).$$

Com isso,

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \cdot \phi,$$

se α for uma forma constante.

Um caso um pouco mais geral corresponde à imagem inversa de dx_i por uma aplicação diferenciável qualquer, onde x_i é a i -ésima coordenada de \mathbb{R}^n em relação à base canônica ε . Mais uma vez, seja V um aberto de \mathbb{R}^m e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Por definição,

$$G_\phi(p, v) = (\phi(p), J_p(\phi)v),$$

onde $p \in V$ e $v \in \mathbb{R}^m$. Mas isto implica que

$$\phi^*(dx_i)(p, v) = dx_i(J_p(\phi)v).$$

Contudo, a i -ésima coordenada de $J_p(\phi)v$ é igual a

$$(2.4) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial y_1}(p)b_1 + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}(p)b_m,$$

onde y_1, \dots, y_m são as coordenadas de \mathbb{R}^m relativamente à sua base canônica, e $v = (b_1, \dots, b_m)$. Com isto,

$$dy_j(v) = b_j, \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

de modo que (2.4) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_1}(p)dy_1 + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}(p)dy_m \right)(v).$$

Mas isto significa que

$$\phi^*(dx_i) = \frac{\partial \phi_i}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \phi_i}{\partial y_m} dy_m.$$

que é exatamente a diferencial da função ϕ_i , conforme definida no final do §2.1. Com isso, podemos escrever

$$(2.5) \quad \phi^*(dx_i) = d\phi_i.$$

2.5. Propriedades da imagem inversa. Seja $\phi : V \rightarrow U$ uma aplicação diferenciável, onde V e U são regiões de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Usando a notação introduzida no §2.1 para o espaço das 1-formas diferenciais sobre uma região, podemos dizer que a imagem inversa nos dá uma aplicação

$$\phi^* : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^1(V).$$

Observe que ϕ tem V como domínio e U como contradomínio, ao passo que, na imagem inversa, estas duas regiões aparecem com suas posições trocadas: o domínio de ϕ são as formas definidas sobre U , já seu contradomínio corresponde às formas definidas sobre V .

Como $\Omega^1(U)$ e $\Omega^1(V)$ são espaços vetoriais, é razoável perguntar se ϕ^* é uma transformação linear. A resposta é sim, como é fácil de verificar. Se α_1 e α_2 são 1-formas diferenciais em U e k é um escalar, então

$$\phi^*(\alpha_1 + k\alpha_2) = (\alpha_1 + k\alpha_2) \cdot G_\phi.$$

Mas, da definição de soma de formas, isto é igual a

$$\alpha_1 \cdot G_\phi + k(\alpha_2 \cdot G_\phi);$$

que pode ser reescrito como

$$\phi^*(\alpha_1) + k\phi^*(\alpha_2),$$

provando, assim, a linearidade de ϕ^* .

O produto de uma 1-forma por um escalar é apenas um caso especial do produto por uma função. Como vimos no §2.1, se $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e α uma 1-forma na região U , então a fórmula

$$(2.6) \quad (g\alpha)(p, v) = g(p)\alpha(p, v), \text{ para todo } p \in U \text{ e } v \in \mathbb{R}^n,$$

define uma nova 1-forma diferencial em U . Vejamos o que acontece se calculamos a imagem inversa de $g\alpha$ pela aplicação diferenciável $\phi : V \rightarrow U$ dada acima. Por definição, temos que

$$\phi^*(g\alpha)(p, v) = (g\alpha)(\phi(p), J_p(\phi)v).$$

Mas, pela fórmula (2.6),

$$(g\alpha)(\phi(p), J_p(\phi)v) = g(\phi(p))\alpha(\phi(p), J_p(\phi)v) = (g \cdot \phi)(p)\phi^*(\alpha).$$

Escrevendo $\phi^*(g) = g \cdot \phi$, temos a sugestiva fórmula

$$\phi^*(g\alpha) = \phi^*(g)\phi^*(\alpha),$$

na qual a justaposição indica o produto da função $\phi^*(g)$ pela 1-forma $\phi^*(\alpha)$, ambas definidas sobre V . Por uma questão de coerência diremos que $\phi^*(g)$ é a imagem inversa da função g pela aplicação ϕ .

As propriedades descritas acima nos permitem dar uma fórmula bastante compacta, além de muito útil, para a imagem inversa de uma forma expressa em termos de coordenadas. Digamos que x_1, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{R}^n , e que ϕ_1, \dots, ϕ_n são as funções coordenadas de ϕ . Neste caso, se a 1-forma diferencial α se escreve como

$$\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n,$$

temos que

$$\phi^*(\alpha) = \phi^*(a_1 dx_1) + \dots + \phi^*(a_n dx_n),$$

pela linearidade da imagem inversa. Usando, agora, a propriedade relativa ao produto por uma função diferenciável, obtemos

$$\phi^*(\alpha) = \phi^*(a_1)\phi^*(dx_1) + \dots + \phi^*(a_n)\phi^*(dx_n).$$

Finalmente, por (2.5),

$$(2.7) \quad \phi^*(\alpha) = \phi^*(a_1)d\phi_1 + \dots + \phi^*(a_n)d\phi_n.$$

Outra propriedade muito importante da imagem inversa diz respeito à diferencial de uma função. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então, pela fórmula (2.5), a imagem inversa de sua diferencial por ϕ é

$$\phi^*(df) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(z)) d\phi_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(z)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right) dx_i.$$

Entretanto, pela regra da cadeia, isto é igual a

$$d(\phi^*(f)) = d(f \cdot \phi).$$

Como veremos na seção 5, esta fórmula é uma das chaves do estudo de campos conservativos.

A última propriedade que desejamos considerar diz respeito à imagem inversa por uma aplicação composta. Sejam

$$\psi : W \rightarrow V \text{ e } \phi : V \rightarrow U$$

aplicações diferenciáveis, onde W , V e U são regiões de \mathbb{R}^k , \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Queremos calcular $(\phi \cdot \psi)^*(\alpha)$, onde α é uma 1-forma definida em U . Mas,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\alpha)(p, v) = \alpha((\phi \cdot \psi)(p), J_p(\phi \cdot \psi)(v)).$$

Contudo, pela regra da cadeia para funções de mais de uma variável

$$J_p(\phi \cdot \psi) = J_{\psi(p)}(\phi) J_p(\psi).$$

Assim,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\alpha)(p, v) = \alpha((\phi \cdot \psi)(p), J_{\psi(p)}(\phi) J_p(\psi)(v)),$$

que é igual a

$$\phi^*(\alpha)(\psi(p), J_p(\psi)(v));$$

que, por sua vez, é

$$\psi^*(\phi^*(\alpha))(p, v).$$

Portanto,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\alpha) = \psi^*(\phi^*(\alpha)).$$

Note a inversão das posições de ϕ e ψ quando passamos de um lado para o outro da equação.

Vamos encerrar enunciando, de maneira sistemática, todas as propriedades da imagem inversa de formas. Seja $\phi : V \rightarrow U$ uma aplicação diferenciável entre regiões $V \subseteq \mathbb{R}^m$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Propriedade 1: A imagem inversa $\phi^* : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^1(V)$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais.

Propriedade 2: Se $\alpha \in \Omega^1(U)$ e $f \in \mathcal{O}(U)$, então

$$\phi^*(f\alpha) = \phi^*(f)\phi^*(\alpha).$$

Propriedade 3: Se $f \in \mathcal{O}(U)$, então

$$\phi^*(df) = d\phi^*(f).$$

Propriedade 4: Se $\psi : W \rightarrow V$ é uma aplicação diferenciável em uma região $W \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \Omega^1(U)$, então

$$(\phi \cdot \psi)^*(\alpha) = \psi^*(\phi^*(\alpha)).$$

3. Integração de 1-formas

Já estamos de posse de toda a maquinaria necessária para definir a integral de uma 1-forma diferencial qualquer sobre uma curva.

3.1. Integral de 1-forma em 1-célula. Até aqui assumimos que uma curva parametrizada C é, simplesmente, uma função diferenciável do intervalo $[0, 1]$ em \mathbb{R} . Lembre-se que a diferenciabilidade é necessária para que o cálculo da imagem inversa de uma forma possa ser feita. Entretanto, esta definição envolve um certo conflito de interesses. O problema se dá porque queremos que C esteja definida em um intervalo fechado; já que a integral vai de um extremo ao outro da curva. Por outro lado, a diferenciabilidade de C requer que esteja definida em um aberto, porque o limite do quociente de Newton deve ser tomado à esquerda e à direita de cada ponto do intervalo. Daí o conflito: para ter a diferenciabilidade, perdemos os extremos do intervalo.

Há várias saídas possíveis, algumas mais sofisticadas, outras menos. Por exemplo, poderíamos definir diferenciabilidade apenas à direita ou apenas à esquerda, para dar conta das extremidades do intervalo. Entretanto, em nome da simplicidade, a solução que adotaremos será muito menos sofisticada. Imaginaremos que C está definida em um intervalo aberto um pouco maior que $[0, 1]$, e que é diferenciável em todo este intervalo. Para quase todas as aplicações práticas da teoria, esta é uma hipótese perfeitamente aceitável.

Sejam $a < b$ dois números reais. Sistematizando os comentários acima, diremos que σ é uma 1-célula definida no intervalo $[a, b]$, se existe um número real $\epsilon > 0$ tal que

$$\sigma : (a - \epsilon, b + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R},$$

é uma função diferenciável em todo ponto de $(a - \epsilon, b + \epsilon)$. Há duas razões principais para chamar o objeto que acabamos de definir de 1-célula, em vez de curva parametrizada. A primeira, é que teríamos mais um sentido ligeiramente diferente para o termo curva parametrizada, o que o tornaria ainda mais sobre-carregado. A segunda, é que queremos chamar sua atenção para o paralelo entre as várias células definidas ao longo do curso; 2-células no capítulo 3 e 3-células no capítulo 4.

Talvez você já tenha observado que definimos 1-células sobre um intervalo fechado geral $[a, b]$, e não sobre $[0, 1]$, como vínhamos fazendo com todas as curvas parametrizadas até aqui. Na verdade, esta não é uma generalização relevante. De fato, se σ é uma 1-célula em $[a, b]$, então a função

$$\hat{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\hat{\sigma}(t) = \sigma(a(1 - t) + bt)$$

é diferenciável e tem a mesma imagem que σ . Em outras palavras, qualquer 1-célula pode ser reparametrizada em termos do intervalo $[0, 1]$. A única razão para admitir intervalos de definição mais gerais para as 1-células é que isto simplifica as demonstrações de algumas propriedades da integral de uma 1-forma, conforme veremos a seguir.

Nossa definição terá como partida o caso unidimensional. Em primeiro lugar, qualquer 1-forma definida em um intervalo (a', b') de \mathbb{R} pode ser escrita na forma gdt , onde t é a coordenada de \mathbb{R} e $g : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Se $a' < a < b < b'$, então a integral da forma gdt no intervalo $[a, b]$ é definida como sendo a integral da função g neste intervalo. Isto é,

$$\int_{[a,b]} gdt = \int_a^b gdt.$$

Suponha, agora, que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma região, α é uma 1-forma diferencial em U e $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma 1-célula cuja imagem está contida em U . A *integral de α ao longo de σ* é definida por

$$\int_{\sigma} \alpha = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha).$$

Esta fórmula está bem definida porque, à direita, temos a integral de uma 1-forma em dimensão um, que já foi definida anteriormente. Se F for um campo de vetores em U , a *integral de linha de F ao longo de σ* é

$$\int_{\sigma} F = \int_{\sigma} \tau_F.$$

Como τ estabelece uma correspondência bijetiva entre campos e 1-formas, as noções de integral de linha e integral de 1-forma são essencialmente equivalentes. Por isso, passaremos de uma à outra noção, sem maiores cerimônias, sempre que necessário.

Vejamos um exemplo em dimensão três. Seja

$$\alpha = xdx + yzdy + (x + y)dz,$$

uma 1-forma definida em todo o \mathbb{R}^3 e $\sigma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a 1-célula definida por $\sigma(t) = (t^2, t^3, t^4)$. Calculando a imagem inversa da forma por σ , obtemos

$$\sigma^*(\alpha) = \sigma^*(x)\sigma^*(dx) + \sigma^*(yz)\sigma^*(dy) + \sigma^*(x + y)\sigma^*(dz).$$

Contudo,

$$\sigma^*(x) = t^2, \quad \sigma^*(yz) = t^7 \text{ e } \sigma^*(x + y) = t^2 + t^3,$$

ao passo que,

$$\sigma^*(dx) = d(t^2) = 2tdt,$$

$$\sigma^*(dy) = d(t^3) = 3t^2dt \text{ e}$$

$$\sigma^*(dz) = d(t^4) = 4t^3dt.$$

Assim,

$$\sigma^*(\alpha) = (2t^3 + 3t^9 + 4t^5 + 4t^6)dt.$$

Portanto,

$$\int_{\sigma} \alpha = \int_1^2 (2t^3 + 3t^9 + 4t^5 + 4t^6) dt = \left[\frac{t^4}{2} + \frac{3t^{10}}{10} + \frac{2t^6}{3} + \frac{4t^7}{7} \right]_1^2 = \frac{15014}{35}.$$

3.2. Propriedades da integral de uma 1-forma. Há algumas propriedades elementares das integrais de 1-formas que precisamos considerar. Suponha, como já se tornou usual, que U seja uma região de \mathbb{R}^n . Dadas duas 1-formas diferenciais α e β em U , e um escalar $k \in \mathbb{R}$, queremos calcular

$$\int_{\sigma} (\alpha + k\beta),$$

onde σ é uma 1-célula definida em $[a, b]$ cuja imagem está contida em U . Por definição

$$\int_{\sigma} (\alpha + k\beta) = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha + k\beta).$$

Assim, das propriedades da imagem inversa, segue que

$$\int_{\sigma} (\alpha + k\beta) = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) + k\sigma^*(\beta).$$

Mas, do lado direito desta equação, temos a integral de funções de uma variável, que sabemos satisfazer

$$\int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) + k\sigma^*(\beta) = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) + k \int_a^b \sigma^*(\beta).$$

Reescrevendo tudo isto em termos ao longo de C temos

$$\int_{\sigma} (\alpha + k\beta) = \int_{\sigma} \alpha + k \int_{\sigma} \beta,$$

como, aliás, seria de esperar.

As outras propriedades que desejamos estudar estão relacionadas a mudanças nas curvas. Em primeiro lugar, que efeito tem uma reparametrização da curva sobre a integral? Antes de formular esta pergunta com exatidão, é conveniente introduzir a seguinte definição. Para manter a coerência com a noção de 1-célula descrita acima, usaremos a expressão

$$\text{a função diferenciável } \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

para designar uma função diferenciável

$$\gamma : (c - \epsilon, d + \epsilon) \rightarrow (a - \epsilon, b + \epsilon)$$

onde ϵ é um número real positivo. Se σ e γ são como acima, então, $\sigma \cdot \gamma$ define uma parametrização diferente da 1-célula σ . Isto é, $\sigma \cdot \gamma$ é uma 1-célula cuja imagem é a mesma de σ . A pergunta pode, então, ser reformulada como: qual a relação entre a integral de uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ ao longo da 1-célula $\sigma \cdot \gamma$ e a integral da mesma forma ao longo de σ ?

Para responder a esta pergunta, calculamos a integral desejada usando as várias propriedades que já conhecemos. Como,

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \alpha = \int_{[c,d]} (\sigma \cdot \gamma)^* \alpha,$$

devemos calcular primeiro a imagem inversa $(\sigma \cdot \gamma)^* \alpha$. Usando a propriedade 4 do final do §2.5, temos que

$$(\sigma \cdot \gamma)^* \alpha = \gamma^*(\sigma^*(\alpha)).$$

Como $\sigma^*(\alpha)$ é uma função de apenas uma variável, podemos escrevê-la como gdu , onde g é uma função do parâmetro u de σ . Nesta notação,

$$\gamma^*(\sigma^*(\alpha)) = \gamma^*(gdu) = (g \cdot \gamma)d\gamma.$$

Explicitando o valor da diferencial $d\gamma$ em função da variável t de γ , obtemos

$$\gamma^*(\sigma^*(\alpha)) = (g \cdot \gamma)\gamma' dt.$$

Portanto,

$$\int_{[c,d]} \gamma^*(\sigma^*(\alpha)) = \int_{[c,d]} (g \cdot \gamma)\gamma' dt.$$

Mas esta é a integral de uma função de uma variável, de modo que, pela regra de integração por substituição,

$$\int_{[c,d]} (g \cdot \gamma)\gamma' dt = \int_{\gamma(c)}^{\gamma(d)} g(u)du,$$

onde $u = \gamma(t)$. Como $\sigma^*(\alpha) = gdu$, obtemos a fórmula

$$(3.1) \quad \int_{\sigma \cdot \gamma} \alpha = \int_{\gamma(c)}^{\gamma(d)} \sigma^*(\alpha).$$

Se γ satisfizer

$$\gamma(c) = a \text{ e } \gamma(d) = b,$$

a fórmula (3.1) nos dá

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \alpha = \int_{\sigma} \alpha.$$

Em outras palavras, a reparametrização de uma 1-célula por uma função diferenciável não altera o valor da integral de uma forma ao longo daquela 1-célula. Este resultado é tão importante que é melhor enunciá-lo à parte.

FÓRMULA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS. *Sejam $\sigma : [a, b] \rightarrow R$ uma 1-célula e $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função diferenciável. Se a imagem de σ está contida em uma região U de \mathbb{R}^n na qual está definida uma 1-forma α , temos*

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \alpha = \int_{\gamma(c)}^{\gamma(d)} \sigma^*(\alpha).$$

Seja σ uma 1-célula definida em $[a, b]$ e cuja imagem está contida em uma região U de \mathbb{R}^n . Se

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow [a, b],$$

é dada por $\gamma(t) = (b - a)t + a$, então $\sigma \cdot \gamma$ é uma 1-célula cuja imagem é a mesma de σ . Além disso, se $\alpha \in \Omega^1(U)$, temos que

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \alpha = \int_{\sigma} \alpha.$$

Isto significa que podemos supor que as 1-células que aparecem na demonstração de qualquer de nossos teoremas estão parametrizadas a partir de $[0, 1]$, sem que com isto haja qualquer perda de generalidade. É exatamente isto que faremos, daqui até o final deste parágrafo.

As próximas propriedades da integral são conseqüências imediatas da fórmula de mudança de variáveis. Seja σ uma 1-célula parametrizada por $[0, 1]$ e cuja imagem está contida em U . Defina $-\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ pela regra

$$-\sigma(t) = \sigma(1 - t).$$

Se $0 \leq t \leq 1$, então $(1 - t) \in [0, 1]$, contudo $-\sigma(0) = \sigma(1)$ e $-\sigma(1) = \sigma(0)$. Portanto, $-\sigma$ tem a mesma imagem que σ , mas percorre os pontos da imagem no sentido oposto ao de σ . Aplicando a fórmula de mudança de variáveis com $\gamma(t) = 1 - t$, obtemos

$$\int_{-\sigma} \alpha = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \sigma^*(\alpha).$$

Contudo, como $-\sigma(0) = \sigma(1)$ e $-\sigma(1) = \sigma(0)$,

$$\int_{-\sigma} \alpha = - \int_{[0,1]} \sigma^*(\alpha).$$

Portanto,

$$(3.2) \quad \int_{-\sigma} \alpha = - \int_{\sigma} \alpha.$$

Em outras palavras, percorrer a 1-célula ao contrário inverte o sinal da integral.

A próxima propriedade da integral está relacionada ao fato de que uma partícula em movimento pode percorrer uma mesma curva várias vezes. Isto ocorre, por exemplo, com uma partícula carregada presa em um campo magnético. Qual o trabalho realizado pelo campo, em um caso como este? Naturalmente, precisamos supor que a curva é fechada para que a pergunta faça sentido. Seja, então,

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow U,$$

uma curva fechada e α uma 1-forma definida em U . Se percorrermos σ duas vezes, obtemos uma nova curva

$$2\sigma : [0, 2] \rightarrow U$$

definida por

$$2\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ \sigma(t-1) & \text{se } t \in [1, 2], \end{cases}$$

Note que, se σ for diferenciável, então 2σ também será diferenciável e

$$(2\sigma)'(t) = \begin{cases} \sigma'(t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ \sigma'(t-1) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{2\sigma} \alpha = \int_0^2 (2\sigma)^* \alpha$$

é igual a

$$\int_0^1 \alpha(\sigma(t))\sigma'(t)dt + \int_1^2 \alpha(\sigma(t-1))\sigma'((t-1))dt.$$

Contudo, tomando $s = t - 1$,

$$\int_1^2 \alpha(\sigma(t-1))\sigma'((t-1))dt = \int_0^1 \alpha(\sigma(s))\sigma'(s)ds,$$

de modo que

$$\int_{2\sigma} \alpha = 2 \int_0^1 \alpha(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

Assim,

$$\int_{2\sigma} \alpha = 2 \int_{\sigma} \alpha,$$

que, evidentemente, é uma fórmula muito satisfatória. Um argumento semelhante mostra que se k é um inteiro positivo, então

$$\int_{k\sigma} \alpha = k \int_{\sigma} \alpha.$$

Por outro lado, supondo ainda que $k > 0$, temos por (3.2) que

$$\int_{-k\sigma} \alpha = - \int_{k\sigma} \alpha = -k \int_{\sigma} \alpha.$$

Resumindo, se k for um inteiro qualquer, positivo ou negativo, então

$$(3.3) \quad \int_{k\sigma} \alpha = k \int_{\sigma} \alpha.$$

Esta fórmula desempenhará um papel central no próximo parágrafo.

3.3. Integrais em encadeamentos de 1-células. Para a última propriedade da integral consideremos três números reais $a < b < c$ e uma 1-célula σ , definida em $[a, c]$. Podemos subdividir σ em duas curvas que chamaremos de σ_1 e σ_2 . A primeira destas células corresponde ao arco descrito por σ quando t varia entre a e b , ao passo que a segunda corresponde ao arco com t variando entre b e c . Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= \sigma(t) \text{ para } a \leq t \leq b, \text{ e} \\ \sigma_2(t) &= \sigma(t) \text{ para } b \leq t \leq c.\end{aligned}$$

Se a imagem de σ está contida em uma região U de \mathbb{R}^n e $\alpha \in \Omega^1(U)$, então

$$\int_{\sigma} \alpha = \int_{[a,c]} \sigma^*(\alpha).$$

Mas, pelas propriedades da integral de funções de uma variável,

$$\int_{[a,c]} \sigma^*(\alpha) = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) + \int_{[b,c]} \sigma^*(\alpha).$$

Como $\sigma = \sigma_1$ no intervalo $[a, b]$,

$$\int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) = \int_{[a,b]} \sigma_1^*(\alpha) = \int_{\sigma_1} \alpha,$$

e uma equação semelhante vale para σ_2 . Portanto,

$$(3.4) \quad \int_{\sigma} \alpha = \int_{\sigma_1} \alpha + \int_{\sigma_2} \alpha.$$

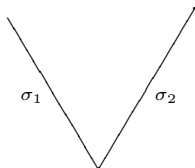
A próxima fórmula deveria corresponder à colagem de duas 1-células, uma seguida da outra, para formar uma única curva parametrizada. Digamos que $\sigma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma_2 : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sejam duas 1-células cujas imagens estão contidas em uma região $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\sigma_1(b) = \sigma_2(a')$, podemos definir uma curva contínua

$$\sigma_1 + \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

por

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_1(a(1-2t) + 2bt) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma_2(a'(1-2t) + 2b't) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Apesar de ser contínua, $\sigma_1 + \sigma_2$ nem sempre será diferenciável no ponto $\sigma_1(b) = \sigma_2(a')$, onde foi feita a emenda. Por exemplo, o segmento de reta σ_1 parametrizado por $(t, -t)$ no intervalo $[-1, 0]$ tem o ponto $(0, 0)$ em comum com o segmento σ_2 parametrizado por (t, t) no intervalo $[0, 1]$. Contudo, a curva C resultante da colagem de σ_1 com σ_2 não é diferenciável em $(0, 0)$.



Felizmente, isto não nos impede de definir a integral de uma forma ao longo de $\sigma_1 + \sigma_2$. A saída deste impasse está no famoso ditado: se não pode prová-lo, defina-o. Continuando com a notação acima, se $\alpha \in \Omega^1(U)$, *definimos*

$$\int_{\sigma_1 + \sigma_2} \alpha,$$

como sendo a soma

$$\int_{\sigma_1} \alpha + \int_{\sigma_2} \alpha.$$

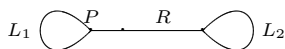
Desta forma, a fórmula (3.4) continua valendo neste caso mais geral, se tomarmos $E = \sigma_1 + \sigma_2$. Isto parece um blefe; e é! Mas, que importa? Basta que o blefe funcione.

Note que esta definição é coerente com a fórmula (3.3), bastando para isso que convecionemos escrever

$$k\sigma = \underbrace{\sigma + \cdots + \sigma}_{k \text{ vezes}}, \text{ se } k \geq 0 \quad \text{e} \quad k\sigma = -|k|\sigma, \text{ se } k < 0,$$

para qualquer 1-célula σ e qualquer inteiro k . Isto explica porque escolhemos usar o símbolo para a soma, em vez do símbolo da união, para denotar este procedimento de colagem de curvas. Afinal, se A é um conjunto, então $A \cup A = A$, que não corresponde ao comportamento esperado para a colagem de curvas.

Considere, agora, o seguinte diagrama



Imagine que uma partícula se movimenta ao longo desta curva da seguinte maneira: começando em P a partícula segue R para a direita, dá a volta no laço L_2 e retorna por R para a esquerda, dando a volta em L_1 e parando novamente no ponto de partida P . Usando a notação introduzida acima, podemos descrever esta curva como

$$(3.5) \quad R + L_2 - R + L_1.$$

Se α for uma 1-forma definida em uma região que contém a curva, então

$$\int_{R+L_2-R+L_1} \alpha = \int_R \alpha + \int_{L_2} \alpha - \int_R \alpha + \int_{L_1} \alpha = \int_{L_2} \alpha + \int_{L_1} \alpha.$$

A tentação em escrever esta última soma de integrais como uma única integral

$$\int_{L_1+L_2} \alpha$$

é grande, mas não faria sentido, pelo menos em vista do processo de colagem definido originalmente. Afinal de contas, os laços L_1 e L_2 juntos *não* formam uma curva contínua. Entretanto, se admitirmos, por um momento, que a soma $L_1 + L_2$ faça sentido, nos vemos tentados a ir ainda mais longe e nos perguntamos se não seria possível cancelar R com $-R$ na expressão (3.5). Neste caso obteríamos diretamente

$$R + L_2 - R + L_1 = L_1 + L_2,$$

e não haveria necessidade, sequer, de escrever as integrais e proceder ao seu cancelamento. Isto é mais razoável do que pode parecer à primeira vista, porque a única justificativa para introduzirmos esta “soma” de células é o fato de que precisamos de curvas mais gerais *para usar nas nossas integrais*. Se o cancelamento vai ser mesmo feito nas integrais, por que não cancelar logo as curvas e ganhar tempo com isto?

Este tipo de argumento é um tanto perigoso em matemática, porque parece estar clamando que os fins justificam os meios. Felizmente há uma saída aceitável, que consiste em criar um cálculo com células, com regras próprias, formalizadas com o devido cuidado. Evidentemente, as regras para este cálculo com células serão derivadas do comportamento das integrais.

Passando à formalização, definimos um *encadeamento de 1-células*, ou *1-encadeamento*, como uma expressão da forma

$$c_1\sigma_1 + \cdots + c_m\sigma_m,$$

onde os σ s são 1-células contidas em uma região U do \mathbb{R}^n e os c s são números inteiros. Esta adição de células satisfaz às seguintes propriedades. Se σ_1, σ_2 e σ_3 são células em U e $k \in \mathbb{Z}$, então:

- $(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3 \equiv \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3)$;
- $\sigma_1 + \sigma_2 \equiv \sigma_2 + \sigma_1$;
- $k\sigma_1 + \sigma_1 \equiv (k+1)\sigma_1$;
- $0\sigma_1 \equiv 0$;
- se a imagem de σ_1 é apenas um ponto, então $\sigma_1 \equiv 0$.

Usamos \equiv em lugar de um simples sinal de igualdade para deixar claro que cada uma destas propriedades é derivada do comportamento de uma integral calculada sobre um encadeamento. Diremos que um encadeamento está em *forma reduzida* se eliminamos todas as parcelas que correspondem a pontos, e cancelamos todos os pares de células com sinais opostos. Assim, no exemplo acima, $L_1 + L_2$ é a forma reduzida de $R + L_2 - R + L_1$.

Para lhe dar o verdadeiro nome, o que fizemos foi sistematizar o comportamento da adição de células enumerando suas propriedades básicas. Isto não corresponde ao que um matemático chamaria de “formalização” desta adição. O problema é que, para chegar a um nível de precisão considerado satisfatório por um matemático precisaríamos apelar para a teoria de grupos. Se o seu conhecimento de grupos abrange a noção de grupo quociente então você pode resolver o problema 3, onde a formalização dos conceitos acima é levada a cabo em detalhes.

4. Teorema do gradiente

Esta seção contém um único resultado: uma generalização do teorema fundamental do cálculo para 1-formas. Nem mesmo se trata de um teorema cuja demonstração seja longa ou complicada. Então, porque dedicar uma seção inteira a este teorema? A principal razão é que este é o primeiro de uma série de resultados que serão todos reunidos no capítulo 4 sob o nome de *teorema de Stokes*. Os resultados correspondentes, nos próximos capítulos, são bem mais sofisticados e demandam uma seção própria. Para chamar sua atenção para o paralelo entre os resultados deste capítulo e dos próximos, pareceu conveniente manter a mesma estrutura de seções entre os diversos capítulos. E foi assim que este teorema veio parar em uma seção própria: por influência de seus irmãos mais importantes.

TEOREMA DO GRADIENTE. *Seja U uma região do \mathbb{R}^n e σ uma 1-célula contida em U , que começa em p e acaba em q . Se $f \in \mathcal{O}(U)$, então*

$$\int_{\sigma} df = f(q) - f(p).$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é meramente uma questão de calcular a integral pela definição. Digamos que σ é parametrizada a partir do intervalo $[a, b]$. Como

$$\int_{\sigma} df = \int_{[a,b]} \sigma^*(df),$$

e $\sigma^*(df) = d(\sigma^*(f))$, temos que

$$\int_{\sigma} df = \int_{[a,b]} d(\sigma^*(f)).$$

Contudo,

$$g(t) = \sigma^*(f) = f(\sigma(t)),$$

é uma função de uma única variável t , de modo que

$$(4.1) \quad \int_{\sigma} df = \int_{[a,b]} d(\sigma^*(f)) = \int_{[a,b]} g' dt.$$

Aplicando, agora, o teorema fundamental do cálculo para uma variável,

$$(4.2) \quad \int_{[a,b]} g' dt = g(b) - g(a).$$

Mas,

$$(4.3) \quad g(b) = f(\sigma(b)) = f(q) \text{ e } g(a) = f(\sigma(a)) = f(p),$$

já que a curva começa em p e acaba em q . Reunindo as equações (4.1), (4.2) e (4.3), obtemos

$$\int_{\sigma} df = \int_a^b g' dt = g(b) - g(a) = f(q) - f(p),$$

provando assim o teorema. □

Se aplicarmos este teorema a uma forma definida em um intervalo da reta, obtemos o teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável, que aprendemos em cálculo I. Entretanto, este último teorema foi o único resultado importante utilizado na demonstração acima. Esta situação curiosa significa que estes dois teoremas – o teorema do gradiente e o teorema fundamental do cálculo – são exatamente equivalentes um ao outro.

Como a integral de uma 1-forma sobre um 1-encadeamento é mera soma das integrais sobre as parcelas, temos de imediato a seguinte generalização do teorema acima.

COROLÁRIO. *Seja U uma região do \mathbb{R}^n e E um 1-encadeamento contido em U , que começa em p e acaba em q . Se $f \in \mathcal{O}(U)$, então*

$$\int_E df = f(q) - f(p).$$

5. Aplicações

Nesta seção investigamos algumas aplicações da integral de uma 1-forma.

5.1. Circulação. Imagine um fluido que escorre em uma região do \mathbb{R}^3 . Sabemos que o campo de velocidades do fluido nos permite descrever o caminho percorrido por uma partícula nele abandonada. A pergunta que desejamos fazer aqui, entretanto, é um pouco diferente:

De que forma o fluido contribui, ou se opõe, ao movimento de uma partícula que percorre uma curva fechada?

Para tornar a pergunta mais concreta, considere a seguinte situação. Imagine uma circunferência feita de arame, na qual circula uma pequena esfera perfurada, como uma conta num colar. Mergulhamos o aro com a esfera em um fluido, e movemos a esfera ao longo do aro. A esfera descreverá uma circunferência mas, dependendo do campo de velocidades, o fluxo pode empurrar a esfera em alguns momentos, e oferecer resistência a seu movimento em outros. Queremos definir uma magnitude, chamada de circulação, que mede a contribuição total de um campo ao movimento ao longo de uma curva fechada contida na região onde o campo está definido.

Vejamos, em primeiro lugar, o que ocorre se o campo é constante. Digamos que o campo está definido em todo o \mathbb{R}^3 , e que flui ao longo do sentido positivo do eixo x . Em outras palavras, o campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definido por

$$F(p) = e_1 = (1, 0, 0), \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja C a circunferência de centro na origem e raio 1, contida no plano $z = 0$. Queremos saber de que forma o campo empurra ou se opõe ao movimento de uma partícula que tentamos fazer girar ao longo de C .

Note que a contribuição do campo ao movimento da partícula é igual à componente de F tangente a C em cada ponto. Parametrizando C como usual,

temos

$$C(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \text{ onde } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

O vetor tangente a C no ponto $C(t)$ é

$$C'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0),$$

de modo que a projeção do campo sobre a tangente à curva no ponto $C(t)$ dá

$$C'(t) \cdot e_1 = -\sin(t).$$

Isto significa que, enquanto empurramos a esfera entre $t = 0$ e $t = \pi$, o campo se opõe ao movimento. Por outro lado, entre $t = \pi$ e $t = 2\pi$, o campo e o vetor tangente à curva apontam na mesma direção. Com isto, o campo nos ajuda a empurrar a esfera. Como

$$-\sin(t + \pi) = -\sin(t),$$

o campo se opõe ao movimento da esfera no primeiro semi-círculo exatamente com a mesma intensidade com que nos ajuda a empurrá-la no segundo semi-círculo. Portanto, é de esperar que a contribuição total do campo ao movimento da esfera seja zero. Mas, para obter a contribuição total, precisamos “somar” $C'(t) \cdot e_1$ sobre todos os valores de t entre 0 e 2π . Mais precisamente, devemos calcular a integral

$$\int_0^{2\pi} (C'(t) \cdot e_1) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin(t)) dt = 0.$$

Em geral, se F é um campo de velocidades definido em uma região U do espaço, a contribuição total de F ao nosso esforço de deslocar uma partícula ao longo de uma curva fechada C , parametrizada por $[a, b]$, é igual à integral da projeção de $F(C(t))$ sobre $C'(t)$ ao longo da curva C . Chamamos este número de *circulação* de F em C , e o denotamos por $\Gamma_F(C)$. Assim,

$$\Gamma_F(C) = \int_C F.$$

Equivalentemente, se α é uma 1-forma em U definimos sua circulação em C por

$$\Gamma_\alpha(C) = \int_C \alpha.$$

Vejamos outro exemplo. Imagine um fio (infinito) ao longo do eixo z no qual flui uma corrente elétrica. Com isto temos um campo magnético

$$B : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

na região

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\},$$

que corresponde ao \mathbb{R}^3 sem o eixo z . O campo B é dado por

$$B(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} (-y, x, 0),$$

onde k é uma constante. Vamos calcular a circulação de \mathbf{B} ao longo de uma circunferência de raio r , contida no plano $z = z_0$. Parametrizando a circunferência, obtemos

$$C(t) = (r \cos(t), r \sin(t), z_0), \text{ onde } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

O vetor tangente a C no ponto $C(t)$ é

$$C'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), 0),$$

ao passo que o valor de \mathbf{B} em $C(t)$ é,

$$\mathbf{B}(C(t)) = \frac{k}{r}(-r \sin(t), r \cos(t), 0).$$

Assim,

$$C'(t) \cdot \mathbf{B}(C(t)) = \frac{k}{r}(r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)) = kr.$$

Portanto,

$$\Gamma_{\mathbf{B}}(C) = \int_0^{2\pi} kr dt = 2\pi kr.$$

Isto não é surpreendente porque, neste caso, as linhas de força do campo são circunferências paralelas ao plano $z = 0$, e com centro no eixo z .

Se interpretarmos o campo \mathbf{B} como sendo o campo de velocidades de um fluido, vemos que o fluido estaria girando em torno do eixo z . Mas isto significa que o campo estaria sempre empurrando ou se opondo a qualquer partícula que fosse girada em torno de z . É exatamente isto que faz com que a circulação deste campo não seja nula. Em geral, o campo de velocidades de um fluido terá circulação não nula se nele houver vórtices ou redemoinhos, como ocorre com o campo \mathbf{B} . A figura abaixo ilustra exemplos de vórtices avistados pelo satélite Landsat 7 na atmosfera terrestre sobre a ilha Selkirk. A propósito, esta ilha do Pacífico tem este nome em homenagem ao marinheiro Alexander Selkirk, que lá foi abandonado, a seu pedido, em 1704. Selkirk foi resgatado em 1709 e voltou à Inglaterra. Esta história inspirou Daniel Defoe a escrever *Robinson Crusoe*, que foi publicado apenas dois anos depois do retorno de Selkirk.

Apesar de só termos calculado exemplos de circulação de campos sobre curvas fechadas parametrizadas, podemos fazê-lo sobre qualquer 1-*encadeamento* cuja extremidade inicial coincide com a final. De agora em diante vamos nos referir a estes encadeamentos como *fechados*.

5.2. Formas exatas. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Lembre-se que uma 1-forma diferencial α em U é *exata* se existir $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\alpha = df$. Neste parágrafo caracterizamos as formas exatas em termos de sua circulação. Usaremos isto, já no próximo parágrafo, para mostrar que todo campo conservativo tem potencial. Outras aplicações surgirão no capítulo 3.

Antes de enunciar o teorema precisamos de introduzir a seguinte terminologia. Diremos que um encadeamento

$$E = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m$$

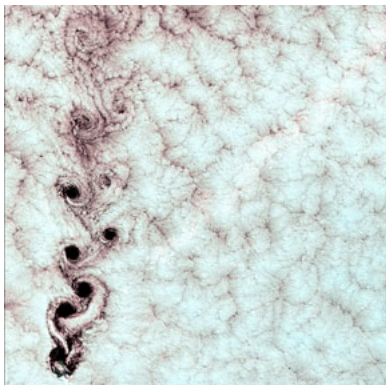


FIGURA 1. Vórtices na atmosfera

é *contínuo* se o ponto final de σ_i coincide com o ponto inicial de σ_{i+1} , para todo $1 \leq i \leq m-1$. Se, além disso, o ponto final de σ_m coincide com o ponto inicial de σ_1 , diremos que E é *fechado*.

TEOREMA. *Uma 1-forma definida em uma região U de \mathbb{R}^n é exata se, e somente se, sua circulação é nula para qualquer encadeamento fechado contido em U .*

DEMONSTRAÇÃO. Para começar, suponha, que a 1-forma é exata. Portanto, podemos escrevê-la como df , para alguma função $f \in \mathcal{O}(U)$. Seja, agora,

$$E = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m \subset U$$

um encadeamento contínuo e digamos que cada uma destas 1-células é parametrizada por $[0, 1]$, o que podemos fazer sem perda de generalidade pela fórmula de mudança de variáveis do §3.2. Então

$$\int_{\sigma_i} df = \int_0^1 \sigma_i^*(df).$$

Como $\sigma_i^*(df) = d(\sigma_i^*(f))$, obtemos

$$\int_{\sigma_i} \tau_{\nabla f} = \int_0^1 d(\sigma_i^*(f)).$$

Mas, $\sigma_i^*(f) = g$ é uma função diferenciável, de uma variável t , definida em $[0, 1]$. Portanto, $\sigma_i^*(df) = g'dt$, donde

$$\int_{\sigma_i} df = \int_0^1 g'dt.$$

Contudo, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_0^1 g'dt = g(1) - g(0),$$

de forma que

$$\int_{\sigma_i} df = g(1) - g(0).$$

Porém, como

$$g(a) = \sigma_i^*(f)(0) = f(\sigma_i(0)),$$

e uma fórmula semelhante vale para $g(1)$, concluímos que

$$\int_{\sigma_i} df = f(\sigma_i(1)) - f(\sigma_i(0)).$$

Como

$$\int_E df = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i} df,$$

obtemos, após o cancelamento dos termos intermediários da soma telescópica, que

$$\int_E df = \sum_{i=1}^m (f(\sigma_i(1)) - f(\sigma_i(0))) = f(\sigma_n(1)) - f(\sigma_1(0)).$$

Portanto,

a integral de uma forma exata df em um encadeamento contínuo depende apenas dos valores de f nos pontos inicial e final do encadeamento.

Em particular, se o encadeamento for fechado, $\sigma_n(1) = \sigma_1(0)$, de modo que

$$\int_E df = 0.$$

Mostramos, assim, que toda forma exata tem circulação nula.

Passando, agora, à recíproca, seja $\alpha \in \Omega^1(U)$ uma 1-forma cuja circulação é zero. Queremos usar isto para construir uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $F = df$. O problema é como proceder para construir f . Se $n = 1$, isto é fácil de fazer. Neste caso, a forma $\alpha = gdx$, onde g é uma função de um intervalo aberto em \mathbb{R} . Portanto, se f for uma primitiva de g , teremos

$$d'f = f'dx = gdx.$$

Logo, para achar f basta integrar g . Isto sugere que podemos tentar obter a função potencial integrando α ao longo de um encadeamento.

Fixe um ponto $p_0 \in U$ que servirá de base para a construção. A função f vai assumir valor zero em p_0 , e seu valor em outros pontos será calculado relativamente a este ponto base.

Seja $p \in U$ e C uma curva qualquer que vai de p_0 a p . Definimos

$$f(p) = \int_E \alpha.$$

Como α é exata, o valor da integral independente do encadeamento contínuo escolhido para ir de p_0 a p . Para concluir a demonstração, precisamos apenas mostrar que $df = \alpha$. Para isto basta provar que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq n,$$

onde a_i é o coeficiente de dx_i em α .

Calcularemos as derivadas parciais de f a partir da definição; isto é, usando quocientes de Newton. Como U é um conjunto aberto, existe um número real positivo ϵ , para o qual a bola aberta $B_p(\epsilon)$, de raio ϵ e centro em p , está totalmente contida em U . Seja h um número real que satisfaz $|h| < \epsilon$. Denotando por e_i o i -ésimo vetor da base canônica, temos que $p + he_i \in B_p(\epsilon)$.

O encadeamento de E com o segmento de reta σ que vai de p a $p + he_i$ nos dá um encadeamento $E + \sigma$ entre p_0 e $p + he_i$. Portanto,

$$f(p + he_i) - f(p) = \int_{E+\sigma} \alpha - \int_E \alpha;$$

donde

$$f(p + he_i) - f(p) = \int_{\sigma} \alpha.$$

Mas $\sigma(t) = p + te_i$, para $0 \leq t \leq h$, de modo que

$$f(p + he_i) - f(p) = \int_0^h \sigma^* \alpha.$$

Contudo, como $p + te_i$ é constante em todas as direções exceto e_i , temos que

$$\sigma^*(dx_j) = \begin{cases} dt & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Mas isto implica que

$$\sigma^*(\alpha) = a_i(p + te_i)dt.$$

Assim,

$$f(p + he_i) - f(p) = \int_0^h a_i(p + te_i)dt$$

que é a integral de uma função de apenas uma variável. Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + he_i) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h a_i(p + te_i)dt$$

é igual a $a_i(p)$, completando assim a demonstração do teorema. \square

A demonstração do teorema propõe um método que podemos utilizar para calcular f , quando soubermos que a forma α é exata. Considere, por exemplo, a forma

$$\alpha = yzdx + xzdy + xydz,$$

definida sobre todo o \mathbb{R}^3 . Tomando o ponto base p_0 como sendo a origem, queremos calcular o valor da função f em $p = (x, y, z)$. Para isso precisamos

calcular a integral de α de um caminho qualquer que vai da origem a p . Como o campo está definido em todo o \mathbb{R}^3 , podemos escolher o segmento de reta que vai da origem a (x, y, z) . Isto é, podemos tomar

$$\sigma(t) = (xt, yt, zt) \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Neste caso,

$$f(p) = \int_{\sigma} \alpha = \int_0^1 \sigma^*(\alpha).$$

Como,

$$\sigma^*(\alpha) = \sigma^*(yzdx + xzdy + xydz) = 3xyzt^2 dt,$$

obtemos

$$f(x, y, z) = f(p) = \int_0^1 3xyzt^2 dt = 3xyz.$$

5.3. Circulação de campos conservativos. No parágrafo 1.3 definimos campos conservativos do plano, mas esta noção pode ser facilmente generalizada para \mathbb{R}^n . Dizemos que um campo F , definido em uma região U de \mathbb{R}^n , é *conservativo* se o trabalho realizado por F é o mesmo ao longo de quaisquer duas curvas em U que tenham os mesmos pontos inicial e final.

Os campos conservativos também podem ser definidos em termos de sua circulação. Como esta outra definição é muito conveniente quando se trata de verificar se um campo é ou não conservativo, provaremos que é equivalente à definição original.

PROPOSIÇÃO. *Um campo é conservativo se, e somente se, sua circulação sobre qualquer encadeamento fechado é nula.*

Um *encadeamento fechado* é aquele que corresponde a uma curva contínua cujos extremos coincidem.

DEMONSTRAÇÃO. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores.

Como F é conservativo, a integral de τ_F assume o mesmo valor ao longo de qualquer caminho que comece e termine em um ponto $P \in U$. Mas o mais simples destes caminhos é dado pela 1-célula constante $D(t) = P$, para todo $t \in [0, 1]$. Contudo, $D^*(\tau_F) = 0$, de modo que

$$\Gamma_F(E) = \int_E \tau_F = \int_D \tau_F = 0,$$

qualquer que digamos que o 1-encadeamento fechado $E \subset U$, que comece e termine no ponto P .

Reciprocamente, suponha que F tem circulação nula, e sejam E_1 e E_2 dois encadeamentos com mesmos pontos iniciais e mesmos pontos finais. Isto significa que o encadeamento $E_1 - E_2$ é fechado. Portanto,

$$\int_{E_1 - E_2} \tau_F = 0.$$

Contudo, pelas fórmulas do final do §3.2, temos

$$\int_{E_1} \tau_F - \int_{E_2} \tau_F = \int_{E_1 - E_2} \tau_F = 0;$$

de modo que

$$\int_{E_1} \tau_F = \int_{E_2} \tau_F,$$

completando, assim, nossa demonstração. \square

Para refinar ainda mais este resultado, usaremos o teorema sobre formas exatas provados no §5.2.

TEOREMA. *Um campo vetorial definido em uma região de \mathbb{R}^n é conservativo se, e somente se, tem função potencial.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e F um campo em U . Pela proposição anterior F é conservativo se, e somente se, sua circulação é nula sobre qualquer encadeamento fechado contido em U . Traduzindo isto em termos de formas, podemos dizer que F é conservativo se, e somente se, τ_F tem circulação igual a zero sobre qualquer encadeamento fechado contido em U . Entretanto, pelo teorema do §5.2, isto ocorre se, e somente se, existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\tau_F = df$. Portanto, F é conservativo, se, e somente se,

$$\tau_F = df = \tau_{\partial f},$$

para algum $f \in \mathcal{O}(U)$; que é equivalente ao resultado enunciado no teorema. \square

5.4. Campos centrais. Um tipo especial de campo conservativo, muito importante em física, são os campos centrais. Se $p \in \mathbb{R}^n$, dizemos que um campo F definido em $U = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ é *central* se

- os vetores de F têm como suporte retas que passam por p ;
- a intensidade de F em qualquer ponto $q \in U$ depende apenas da distância entre p e q .

O ponto p é chamado de *centro* do campo. Escolhendo o sistema de coordenadas de maneira que o centro p seja a origem, podemos escrever F em U na forma

$$(5.1) \quad F(x_1, \dots, x_n) = g(r)(x_1, \dots, x_n),$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Para campos centrais vale uma versão mais refinada do teorema do §5.3.

TEOREMA. *Todo campo central é conservativo, e seu potencial em um ponto é função apenas da distância deste ponto ao centro do campo.*

DEMONSTRAÇÃO. Já vimos que uma escolha adequada de coordenadas nos permite escrever um campo central F na forma (5.1). Como todo campo gradiente é conservativo, basta achar uma função potencial para F . Neste caso

isto é muito fácil, porque se h for qualquer função de uma variável então, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial h(r)}{\partial x_j} = h'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j},$$

onde h' denota a derivada de h em relação à sua única variável, neste caso r . Contudo,

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r},$$

donde

$$\frac{\partial h(r)}{\partial x_j} = h'(r) \frac{x_j}{r}.$$

Assim,

$$\nabla h(r) = \frac{h'(r)}{r} (x_1, \dots, x_n).$$

Comparando esta última equação a 5.1, verificamos que h seria um potencial para F se

$$h'(r) = rg(r);$$

isto é, se h for uma primitiva de $rg(r)$. Como g é diferenciável, uma tal primitiva sempre existe, provando assim o teorema. \square

6. Recapitulando

Nesta seção recapitulamos boa parte do que foi feito no primeiro capítulo. Há duas razões para fazermos isto. A primeira, e mais óbvia, é provê-lo com um resumo sistemático do conteúdo das seções anteriores. A segunda razão é que esta recapitulação nos ajudará a tornar mais explícito o padrão que será seguido no desenvolvimento da teoria de 2-formas no próximo capítulo. Com isto, a seção 5 ficou de fora da recapitulação, já que trata apenas de aplicações da teoria.

Na seção 1 introduzimos de 1-forma, curva parametrizável, imagem inversa e integral de uma 1-forma ao longo de uma curva a partir do conceito de trabalho de uma força. Estas noções foram sistematizadas nas seções 2, 3 e 4, obedecendo às seguintes etapas.

6.1. Definição. Fixada uma região U do \mathbb{R}^n , começamos introduzindo o conceito geral de 1-forma diferencial como sendo uma aplicação

$$\alpha : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz às duas condições seguintes:

- (1) fixando $p_0 \in U$, e considerando $\alpha(p_0, u)$ como função apenas de u , temos uma aplicação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} ;
- (2) fixando $u_0 \in \mathbb{R}^n$, e considerando $\alpha(p, u_0)$ como função apenas de p , temos uma função diferenciável de U em \mathbb{R} .

O conjunto das 1-formas em U , que é denotado por $\Omega^1(U)$, é um espaço vetorial relativamente à soma de formas, e à sua multiplicação por escalares, conforme definidas no §2.1.

6.2. Campos e formas. A um campo vetorial $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujas funções coordenadas são F_1, \dots, F_n , fazemos corresponder a 1-forma

$$\tau_F = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

Esta correspondência é bijetiva, e nos permite tratar a análise vetorial seja na linguagem de formas, seja na linguagem de campos. A vantagem da linguagem de formas é que estabelece um padrão generalizável para objetos de dimensão maior; ao contrário do que acontece com os campos.

6.3. Diferencial. O conjunto das funções diferenciáveis em U será denotado por $\mathcal{O}(U)$. Também este é um espaço vetorial, já que podemos somar estas funções e multiplicá-las por escalar. A *diferencial* determina uma transformação linear de $\mathcal{O}(U)$ em $\Omega^1(U)$, que é definida em $f \in \mathcal{O}(U)$ pela fórmula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Vimos, também, que se $f, g \in \mathcal{O}(U)$, então

$$d(fg) = fd(g) + gd(f),$$

que é conhecida como a *fórmula de Leibniz*. Uma 1-forma que é do tipo df , para alguma função $f \in \mathcal{O}(U)$, é chamada de *exata*.

6.4. 1-células e encadeamentos. Uma 1-célula em U é uma aplicação diferenciável $\sigma : [a, b] \rightarrow U$, onde $a < b$ são números reais. Um encadeamento de 1-células

$$\sigma_j : [a_j, b_j] \rightarrow U, \text{ para } 1 \leq j \leq k$$

é uma expressão da forma

$$(6.1) \quad c_1 \sigma_1 + \dots + c_k \sigma_k,$$

onde os c s são números inteiros. Estas expressões podem ser manipuladas obedecendo-se às seguintes regras: se σ_1, σ_2 e σ_3 são células em U e $k \in \mathbb{Z}$, então,

- $(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3 \equiv \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3)$;
- $\sigma_1 + \sigma_2 \equiv \sigma_2 + \sigma_1$;
- $k\sigma_1 + \sigma_1 \equiv (k+1)\sigma_1$;
- $0\sigma_1 \equiv 0$;
- se a imagem de σ_1 é apenas um ponto, então $\sigma_1 \equiv 0$.

6.5. Imagem inversa. Dada uma aplicação diferenciável $\phi : V \rightarrow U$, onde V é uma região de \mathbb{R}^m , definimos a imagem inversa de uma 1-forma

$$\alpha = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n \in \Omega^1(U),$$

como sendo

$$\phi^*(\alpha) = (a_1 \cdot \phi) d\phi_1 + \cdots + (a_n \cdot \phi) d\phi_n \in \Omega^1(V),$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_n são as funções coordenadas de ϕ . A imagem inversa determina uma transformação linear de $\Omega^1(U)$ em $\Omega^1(V)$ que satisfaz

$$\phi^*(df) = d\phi^*(f).$$

6.6. Integral. Se σ for uma 1-célula em U , a imagem inversa de $\alpha \in \Omega^1(U)$ por σ pode ser escrita na forma

$$\sigma^*(\alpha) = g dt,$$

onde $g = g(t)$ é uma função diferenciável definida no intervalo $[a, b]$, que parametriza σ . A integral de α ao longo de σ é dada por

$$\int_{\sigma} \alpha = \int_{[a,b]} \sigma^*(\alpha) = \int_a^b g dt,$$

que é a integral usual da função g no intervalo $[a, b]$. A integral de α ao longo de um encadeamento (6.1) de U é definida pela fórmula

$$\int_{c_1 \sigma_1 + \cdots + c_k \sigma_k} \alpha = c_1 \int_{\sigma_1} \alpha + \cdots + c_k \int_{\sigma_k} \alpha.$$

Se $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores e E é um encadeamento em U , a integral

$$\int_E F = \int_E \tau_F,$$

é conhecida como a *integral de linha* de F ao longo de E .

7. Exercícios

- Considere as curvas parametrizadas no intervalo $(-1, 1)$ dadas abaixo. Determine os pontos em que sua tangente não está bem definida e esboce a curva em cada caso.
 - $C(t) = (t^2, t^3)$;
 - $C(t) = (t^2 - t, t^3)$;
 - $C(t) = (2 \sin(3\pi t + 1), 3 \sin(2\pi t + 4))$.
- Parametrize as seguintes curvas algébricas usando coordenadas polares. Em cada caso, a e b são constantes positivas.
 - $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;
 - $((x - a)^2 + y^2)((x + a)^2 + y^2) = b^4$;
 - $(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2 y^2$.

3. Esboce cada uma das curvas cuja equação polar é dada abaixo e escreva a equação paramétrica correspondente.
- $r = a \cos(\theta)$;
 - $r = a(1 + \cos(\theta))$;
 - $r = 4a \cos^3(\theta/3)$.
4. Calcule o trabalho dos campos abaixo nos caminhos indicados.
- $(x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ ao longo da parábola $y = x^2$, entre $(-2, 4)$ e $(1, 1)$;
 - $(x, y, xz - y)$ no segmento de reta que vai da origem a $(1, 2, 4)$;
 - $(x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ na circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário;
 - (xy, x) na parábola $x = 2y^2$, do ponto $(2, -1)$, ao ponto $(8, 2)$;
 - (x^2y^2, xy^2) no caminho fechado formado por partes das retas $x = 1$ e $y = 0$, e da parábola $y = \sqrt{x}$, percorrido em sentido anti-horário.
5. Seja $F(x, y) = (cxy, x^6y^2)$, um campo polinomial definido em todo o plano, onde c é uma constante positiva. Sejam a e b números reais positivos. Ache um valor de a , em termos de c , para o qual a integral de F ao longo de $y = ax^b$, da origem à reta $x = 1$ é independente de b .
6. Calcule $\alpha(p, u)$ para
- $\alpha = \cos(x_1)dx_1 + \sin(x_2^2)dx_3$, $p = (1, 0, 0)$, $u = (1, 1, 1)$;
 - $\alpha = e^{x_2}dx_1 + \log(x_3)dx_2 - \cos(x_1x_2)dx_3$, $p = (1, 1, 1)$, $u = (1, 1, 3)$;
 - $\alpha = x_2dx_1 + x_3dx_2 - x_1x_2dx_3$, $p = (1, 8, 7)$, $u = (1, 4, 3)$;
 - $\alpha = \cos(x_1x_3)dx_1 + \sin(x_1x_3)dx_2$, $p = (\pi, 8, 7)$, $u = (1, 5, 1)$;
7. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e α uma 1-forma diferencial em U . Mostre que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a aplicação de $U \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} definida por
- $$(f\alpha)(p, v) = f(p)\alpha(p, v),$$
- onde $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$, é uma 1-forma em U .
8. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Mostre que $\Omega^1(U)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .
9. Calcule a diferencial total de cada uma das seguintes funções de \mathbb{R}^3 :
- $x^2y^4 + 5z^7 + xz^3$;
 - $\cos(z) \tan(x + y)$;
 - $\cos(x + y + z)$;
 - $\log(xyz)$;
 - $\exp(x \cos(y))$.
10. Seja T o operador linear de \mathbb{R}^3 cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule as imagens inversas das 1-formas

$$dx_1, \quad 3dx_1 + 2dx_2 - 2dx_3 \text{ e } dx_1 + dx_2 + dx_3,$$

por T .

11. Calcule as imagens inversas das 1-formas

$$\cos(x_1)dx_1 + \sin(x_2^2)dx_3 \text{ e } e^{x_2}dx_1 + \log(x_3)dx_2 - \cos(x_1x_2)dx_3,$$

pelas seguintes aplicações:

- (a) $\phi(t) = (t^2, t^3, t^4)$;
 - (b) $\phi(s, t) = (t \cos(s), t^2 e^t, t^3)$;
 - (c) $\phi(u, v, w) = (uvw, uv, u^2)$;
 - (d) $\phi(u, v, w) = (u, v, uw)$;
 - (e) $\phi(u, v, w) = (\cos(uvw), v, \exp(u^2))$.
12. Escreva na forma de um 1-encadeamento um caminho *contínuo* cujas células são todas as arestas do cubo

$$[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

É possível fazer isto de modo que cada 1-célula tenha multiplicidade um?

13. Explique porque a curva parametrizada $C(t)$ descrita abaixo não é uma 1-célula e escreva-a na forma de um 1-encadeamento.

$$C(t) = \begin{cases} (2 - \frac{t}{2\pi}, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq 2\pi \\ (\cos(5t), \sin(5t)) & \text{se } 2\pi \leq t \leq 4\pi \\ (2 \cos(t), 2 \sin(t)) & \text{se } 4\pi \leq t \leq 5\pi \\ (-2 + (t - 5\pi), 3(t - 5\pi)) & \text{se } 5\pi \leq t \leq 8\pi \end{cases}$$

14. Calcule a integral do campo $(x, y^2, 4z^3)$ ao longo do caminho obtido como o encadeamento do segmento de reta que vai de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$, seguido do segmento que vai deste último ponto a $(1, 1, 2)$.

15. Calcule as integrais das 1-formas de \mathbb{R}^2 dadas abaixo, nos encadeamentos indicados:

- (a) $xydx + xdy$ na espiral $r = \theta$, com $0 \leq \theta \leq 3\pi$;
- (b) $x^2y^2dx + xy^2dy$ no encadeamento $r = |\cos(\theta)|$, com $0 \leq \theta \leq 3\pi$.
- (c) $(x^2y^2 + x + 1)dx + xy^2dy$ no encadeamento fechado formado por partes das retas $x = 1$ e $y = 0$, e da parábola $y = \sqrt{x}$, orientado no sentido anti-horário;
- (d) $(x^2 + y)dx + (x - y^2)dy$ no encadeamento formado pelos lados do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$, percorrido no sentido anti-horário;
- (e) $(x^2 - y^2)dx + xdy$ no encadeamento fechado, formado pelos eixos coordenados e pelo arco de $x^2 + y^2 = 9$ contido no primeiro quadrante, orientado no sentido anti-horário.

16. Calcule as integrais das 1-formas de \mathbb{R}^3 dadas abaixo, nos encadeamentos indicados:
- (a) $(x - 2x^3y)dx + (y^3 - 2xy)dy + dz$ na interseção de $z = x^2 + y^2$ e $y = 0$ entre os pontos $(-2, 0, 4)$ e $(1, 0, 1)$;
 - (b) $xyzdx + y^2dy + (xz - y)dz$ no segmento de reta que vai da origem a ao ponto $(1, 2, 4)$;
 - (c) $(x^2 - y^2)dx + xdy + (xy + z)dz$ na circunferência de equações $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$, orientada no sentido horário (para quem olha de cima);
 - (d) $xydx + xdy$ na curva $r = z = \theta$, com $0 \leq \theta \leq 3\pi$.
17. Considere o campo definido em \mathbb{R}^2 por $F(x, y) = (x^2y, xy^2)$.
- (a) Este campo admite função potencial?
 - (b) Calcule a integral de F entre a origem O e o ponto $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ao longo do segmento de reta que vai de O a P .
 - (c) Calcule a integral de F entre O e P ao longo do encadeamento do segmento de reta que vai de O a $(1, 0)$, seguido do arco de circunferência que vai de $(1, 0)$ a P .
 - (d) Compare os valores das integrais ao longo destes dois caminhos.
18. Calcule o potencial de cada um dos campos centrais dados abaixo. Para simplificar a notação escreveremos $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- (a) $(x, y, z)/r^3$;
 - (b) $(r^2 + r + 1)(x, y, z)$;
 - (c) $(\cos(r) + 7 \cos(r) \sin(r))(x, y, z)$.
19. Seja $\alpha = a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ uma 1-forma diferencial definida em uma região U de \mathbb{R}^n . Mostre que se a_j é função apenas de x_j , então α é uma forma diferencial exata.
20. Traduza o exercício anterior em termos de campos conservativos.
21. Seja α uma 1-forma $f dx$ definida em $[0, 1]$, com $f(0) = f(1)$. Mostre que existe um único número k , de modo que

$$\alpha - k dx = dg,$$

para alguma função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz $g(0) = g(1)$.

SUGESTÃO: integre $\alpha - k dx = dg$ em $[0, 1]$ para achar k .

8. Problemas

1. Seja σ uma 1-célula em \mathbb{R}^3 . Defina uma 1-forma diferencial ds por

$$ds(p, v) = T(p) \cdot v,$$

onde $T(p)$ é o vetor tangente a $p \in \sigma$. Note que esta forma só está definida para pontos de σ .

- Discuta a forma ds à luz da definição de 1-forma dada no §2.1.
 - Mostre que a integral de ds sobre σ é igual ao comprimento de σ .
 - Seja f uma função definida em uma região contendo σ . Expresse a integral da 1-forma $f ds$ em σ em termos da integral de uma função de uma variável (o parâmetro de σ).
2. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Dado um campo de vetores F em U , defina uma aplicação

$$\iota_F : \Omega^1(U) \rightarrow \mathcal{O}(U),$$

por $\iota_F(\alpha)(p) = \alpha(p, F)$, para uma forma α e um ponto $p \in U$.

- Calcule $\iota_F(\alpha)(p)$ quando $p = (x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$.
- Mostre que ι_F é uma transformação linear.
- Calcule $\iota_{\nabla f}(\alpha)$ e $\iota_F(df)$ onde $f \in \mathcal{O}(U)$.
- Calcule $\iota_F(\tau_F)$.
- Seja $R = (x_1, x_2, x_3)$ o campo radial de \mathbb{R}^3 . Mostre que se f é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis x_1, x_2 e x_3 , então

$$\iota_E(df) = kf.$$

Lembre-se que um polinômio f nas variáveis x_1, x_2 e x_3 é homogêneo se todas os seus monômios têm grau total igual a k . Isto é, a soma dos graus de cada uma das variáveis dá k para cada um dos monômios de f .

3. Seja $\mathcal{S}(U)$ o conjunto das 1-células definidas em uma região $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}(U)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto $\mathcal{S}(U)$. Considere o subgrupo $\mathcal{P}(U)$ de $\mathcal{F}(U)$ gerado pelos $\sigma \in \mathcal{S}(U)$ cuja imagem é um ponto.
- Mostre que se $\alpha \in \Omega^1(U)$, então a aplicação

$$I_\alpha : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$I_\alpha(\sigma) = \int_\sigma \alpha$$

é um homomorfismo de grupos.

- Mostre que $\mathcal{P}(U)$ está contido no núcleo de I_α , qualquer que seja $\alpha \in \Omega^1(U)$.
- Defina o conjunto $\mathcal{E}^1(U)$ dos 1-encadeamentos contidos em U como sendo o grupo quociente $\mathcal{F}(U)/\mathcal{P}(U)$ e mostre que I_α induz um homomorfismo de $\mathcal{E}^1(U)$ em \mathbb{R} .

Capítulo 3

2-formas

Neste segundo capítulo discutimos a noção de 2-forma diferencial. Seguiremos um roteiro semelhante ao do capítulo 2. Assim, na primeira seção introduzimos 2-formas a partir da noção de fluxo. Já a integral de uma 2-forma será definida na seção 3. A seção 4 é dedicada a uma versão do teorema de Stokes e suas interpretações em análise vetorial (teorema de Green). Finalmente, aplicamos estes resultados a problemas de física na seção 5, e revisamos todo o conteúdo do capítulo na seção 6.

1. Fluxo

Vamos imaginar um fluido incompressível que escorre ao longo de uma calha. Incompressível, naturalmente, significa que o fluido não pode ser comprimido. Podemos formalizar isto dizendo que a densidade do fluido é constante ao longo de toda a calha e não varia no tempo. Imagine, agora, que você tem uma moldura de arame plana, com qualquer forma desejada, mas que está vazada. Digamos que a largura máxima da moldura é menor que a profundidade e largura da calha, de modo que podemos imergi-la completamente no fluido. O *fluxo* do fluido através da moldura é a quantidade de líquido que atravessa a área limitada pela moldura. Interpretaremos a quantidade de fluido em termos de volume. Entretanto, como estamos supondo que o fluido é incompressível, poderíamos falar igualmente em massa; para isto, bastaria multiplicar o volume pela densidade do fluido em todas as nossas equações. Nosso objetivo nesta seção é criar um modelo matemático para a noção de fluxo.

Há, entretanto, um detalhe importante que precisa ser levado em conta. Caso a superfície seja fechada—uma caixa oca, por exemplo—o fluxo através da caixa é igual à diferença entre a quantidade de líquido que entra e que sai da caixa. Para que isto faça sentido, precisamos ser capazes de associar um sinal ao fluxo, para que possamos identificar onde o líquido entra na caixa, e onde sai da caixa. Portanto, para que o fluxo através de uma superfície fechada não dê nulo é preciso que haja ou uma fonte, ou um sorvedouro, dentro da superfície.

Como a maneira mais natural de definir fluxo é mesmo em termos de um fluido incompressível, você é convidado a imaginar que os campos de vetores descritos nesta seção são todos campos de velocidades.

1.1. Fluxo de um campo constante. Seja

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

um campo de vetores constante—que estaremos imaginando ser um campo de velocidades. Suponhamos que o vetor constante $F(p)$ é paralelo ao eixo z . Queremos definir o fluxo de F através de um retângulo

$$R = [0, \ell] \times [0, h].$$

Começamos com o caso em que R está contido em um plano paralelo a $z = 0$.

Digamos que R tem largura ℓ (medida ao longo de x) e comprimento h (medido ao longo de y). Neste caso, todo o líquido contido no paralelepípedo de base R e altura $|F(p)|t$ (medida ao longo de z) atravessa R no tempo t . Em outras palavras, o fluxo deste campo através de R será

$$\Phi_F(R) = |F(p)|h\ell,$$

que é a quantidade de líquido que atravessa o retângulo por unidade de tempo.

Mantendo o campo constante, vamos incliná-lo de um ângulo θ em relação ao eixo z . Ao fazer isto, a quantidade de fluido que atravessa R no tempo t passa a ser igual ao volume de um prisma. Tomando a base do prisma como sendo o retângulo de lados ℓ e h , sua altura será igual a

$$|F(p)|t \sin(\theta).$$

Portanto, neste caso, o fluxo de F através de R é

$$\Phi_F(R) = |F(p)|h\ell \sin(\theta).$$

Existe uma outra maneira de calcular o volume do prisma que é mais conveniente para os nossos propósitos. Em primeiro lugar, o retângulo R fica completamente determinado pelos vetores

$$v_1 = \ell e_2, v_2 = h e_2;$$

ao passo que a altura do prisma é dada pela projeção do vetor $v_3 = F(0)$ ao longo da vertical, que é igual a

$$F(0) \cdot e_3.$$

Portanto, o volume do prisma é

$$h\ell(F(0) \cdot e_3) = F(0) \cdot (h\ell e_3).$$

Contudo, como v_1 e v_2 são ortogonais,

$$v_1 \times v_2 = (h\ell e_3).$$

Assim, o fluxo através do retângulo R é dado por

$$(1.1) \quad \Phi_F(R) = F(0) \cdot (v_1 \times v_2),$$

que é o produto misto destes três vetores.

Uma vantagem de expressar o fluxo desta maneira é que a fórmula 1.1 vale, não importa qual seja a posição relativa dos vetores v_1, v_2 e F . Tomaremos este produto misto como sendo a definição do fluxo do campo constante F , através do paralelograma definido pelos vetores ortogonais v_1 e v_2 .

Note que definimos o valor do fluxo como sendo o produto misto, e *não* o seu módulo. Este é um ponto importante. Considere, por exemplo, o que acontece se calculamos o fluxo de um campo constante através do cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Se o campo é definido por $F = e_3$, então o fluxo pelas faces do cubo perpendiculares ao plano $z = 0$ vai dar zero. Já o fluxo pela face contida em $z = 0$ dá 1, e o fluxo pela face contida em $z = 1$ dá -1 . Assim o fluxo total através do cubo dá zero. Isto é exatamente o que esperávamos. Afinal, conforme observamos no início desta seção, o fluxo através de uma superfície fechada será zero sempre que não houver uma fonte ou sorvedouro de fluido dentro da superfície.

Expressar o fluxo como o produto misto também tem a vantagem de que passa a ser fácil calculá-lo a partir das coordenadas dos vetores. Se

$$v_j = (a_j, b_j, c_j), \text{ para } 1 \leq j \leq 2,$$

e $F = (F_1, F_2, F_3)$, então,

$$(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = \det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

como aprendemos no curso básico de geometria analítica. Mais detalhes podem ser encontrados em [12, pp. 21–24]. Para simplificar a notação denotaremos o determinante acima por

$$\det[F, v_1, v_2].$$

1.2. Propriedades do fluxo. Suponhamos, agora, que F seja um campo vetorial qualquer definido em uma região U de \mathbb{R}^3 . Se $p \in U$ e v_1 e v_2 são vetores de \mathbb{R}^3 , então podemos escrever

$$\det[F(p), v_1, v_2].$$

Contudo “poder escrever” não basta. O que queremos mesmo saber é se este número serve para alguma coisa ou, melhor ainda, se tem uma interpretação física. Mas, se os vetores v_1 e v_2 tiverem comprimento muito pequeno, o número $\det[F(p), v_1, v_2]$ nos dá uma aproximação para o fluxo através do retângulo determinado por v_1 e v_2 em p , mesmo quando o campo não for constante. Em outras palavras, $\det[F(p), v_1, v_2]$ representa uma aproximação do fluxo nas proximidades de p . Com isto em mente, estudaremos as propriedades de $\det[F(p), v_1, v_2]$ como função de p e dos vetores v_1 e v_2 .

Para facilitar a discussão escreveremos

$$\Phi_F(p, v_1, v_2) = \det[F(p), v_1, v_2],$$

o que nos dá uma aplicação

$$\Phi_F : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se $p \in U$ for fixado, obtemos a partir de Φ_F a aplicação

$$(\Phi_F)_{p_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$(\Phi_F)_{p_0}(v, w) = \Phi_F(p_0, v, w) = \det[F(p_0), v, w].$$

Apelando para as propriedades do determinante, vemos que $(\Phi_F)_{p_0}$ satisfaz

- $(\Phi_F)_{p_0}(v, w + w') = (\Phi_F)_{p_0}(v, w) + (\Phi_F)_{p_0}(v, w')$, e
- $(\Phi_F)_{p_0}(v, kw) = k(\Phi_F)_{p_0}(v, w)$.

Uma aplicação com estas propriedades é chamada de *bilinear*, porque é linear em cada uma de suas entradas (pressupondo que a outra entrada esteja fixa!).

Uma aplicação bilinear bem conhecida nossa é o produto interno entre dois vetores. Entretanto, ao contrário do que ocorre com o produto interno, $(\Phi_F)_{p_0}$ não é simétrica; isto é, seu valor *não* é independente da ordem em que os vetores aparecem no argumento. Isto ocorre porque o determinante troca de sinal quando permutamos duas de suas linhas. Portanto,

$$(\Phi_F)_{p_0}(w, v) = \det[F(p_0), w, v] = -\det[F(p_0), v, w],$$

que por sua vez é igual a $(\Phi_F)_{p_0}(v, w)$. Logo,

$$(\Phi_F)_{p_0}(w, v) = -(\Phi_F)_{p_0}(v, w).$$

Por isso, dizemos que $(\Phi_F)_{p_0}$ é *alternada*. Assim,

Propriedade 1: Φ_F é bilinear e alternada em suas duas últimas entradas, desde que a primeira entrada assuma um valor fixo.

Apelando para uma outra propriedade dos determinantes, a expansão em co-fatores, podemos decompor $\Phi_F(p, v, w)$ de uma maneira mais ou menos canônica. Expandindo o determinante pela primeira linha

$$(1.2) \quad \Phi_F(p, v, w) = F_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - F_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + F_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Supondo que os vetores v e w estejam fixos, $\Phi_F(p, v, w)$ é uma combinação linear dos coeficientes de F . Como estes coeficientes são diferenciáveis, o mesmo vale para $\Phi_F(p, v, w)$ como função de p . Portanto,

Propriedade 2: Φ_F é diferenciável em sua primeira entrada, desde que as duas últimas entradas assumam valores fixos.

Qualquer aplicação

$$U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaça as propriedades 1 e 2, destacadas acima, é chamada de *2-forma diferencial*. Agora que sabemos o que é uma 2-forma, podemos introduzir a notação tradicionalmente usada para denotá-las. Para $1 \leq i \neq j \leq 3$ definimos $dx_i \wedge dx_j$ como sendo a 2-forma de \mathbb{R}^3 dada pelo determinante

$$\det[(-1)^k e_k, v, w], \text{ onde } i \neq k \neq j.$$

Por sua vez, este determinante é o menor 2×2 obtido da matriz $[(-1)^k e_k, v, w]$ pela eliminação da primeira linha e da k -ésima coluna. Por exemplo,

$$dx_2 \wedge dx_3(v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Em geral, temos

$$(1.3) \quad dx_i \wedge dx_j(e_k, e_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = \ell \\ -1 & \text{se } i = \ell \text{ e } j = k \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Usando esta notação podemos escrever (1.11) como

$$(1.4) \quad \Phi_F = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Diremos que esta é a 2-forma associada ao fluxo do campo F .

Como já atribuímos um significado a dx_1 , dx_2 e dx_3 (como 1-formas), é difícil resistir à tentação de pensar em $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$ e $dx_2 \wedge dx_3$ como “produtos” destas 1-formas. É difícil, e não é necessário, porque, como veremos, é possível definir uma multiplicação de 1-formas. Mas isto fica para a seção ????

Vejamos o que acontece se aplicamos a definição de 2-forma ao \mathbb{R}^2 . Seja V uma região de \mathbb{R}^2 , e η uma aplicação

$$V \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

que é diferenciável com respeito à primeira, e bilinear alternada com respeito às duas últimas entradas. Tome $p \in V$ e dois vetores

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 \text{ e } w = b_1 e_1 + b_2 e_2.$$

Vamos calcular

$$\eta(q, v, w) = \eta(q, a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2).$$

Como η é bilinear,

$$\eta(q, v, w) = a_1 b_1 \eta(q, e_1, e_1) + a_1 b_2 \eta(q, e_1, e_2) + a_2 b_1 \eta(q, e_2, e_1) + a_2 b_2 \eta(q, e_2, e_2).$$

Mas η também é alternada, o que implica que

$$\eta(q, e_2, e_1) = -\eta(q, e_1, e_2),$$

e também que

$$\eta(q, e_1, e_1) = \eta(q, e_2, e_2) = 0.$$

Temos, portanto, que

$$(1.5) \quad \eta(q, v, w) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \eta(q, e_1, e_2),$$

onde $g(p) = \eta(q, e_1, e_2)$ é uma função diferenciável definida em V .

Denotando por s e t as coordenadas de \mathbb{R}^2 , podemos definir $ds \wedge dt$ como sendo a 2-forma de \mathbb{R}^2 que satisfaz

$$ds \wedge dt(v, w) = \det[v, w] = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Usando esta notação, (1.14) nos dá a igualdade

$$(1.6) \quad \eta = g ds \wedge dt.$$

1.3. Superfícies parametrizadas. Até agora tratamos apenas de como calcular o fluxo de um campo constante através de um retângulo. Mas nossa meta é definir fluxo para um campo qualquer através de uma superfície não necessariamente plana. Para isso, precisamos delimitar o que deve ser entendido quando usarmos a palavra superfície. Antes, porém, precisamos descobrir como estas superfícies serão utilizadas. Por isso, começaremos descrevendo a estratégia a ser adotada para definir fluxo no caso geral.

Usando a definição de trabalho sobre uma curva como inspiração, iniciaremos aproximando a superfície por retângulos. Além disso, assumiremos que os retângulos escolhidos são pequenos o suficiente para que o campo possa ser considerado como constante sobre cada um deles. Sob estas hipóteses podemos calcular o fluxo através de cada retângulo, cuja soma nos dará uma aproximação para o fluxo através de toda a superfície. Passando ao limite, obteremos uma fórmula integral para o fluxo. Nossa experiência com o caso do trabalho de um campo sugere que, para facilitar a aproximação por retângulos, seria preferível introduzir superfícies de maneira parametrizada, e é exatamente isto que faremos aqui.

Tomando a definição de curva como ponto de partida, definimos uma superfície parametrizada de \mathbb{R}^3 como sendo uma aplicação diferenciável

$$S : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $a < a'$ e $b < b'$ são números reais. Como sempre não estamos fazendo uma distinção clara entre a aplicação S e sua imagem, muito embora a superfície propriamente dita corresponda ao conjunto de pontos de \mathbb{R}^3 que forma a imagem de S .

Como no caso de curvas, trabalhar com uma superfície parametrizada S tem a vantagem de permitir que a aproximação de S por uma malha de retângulos seja fácil de fazer. Para isto, subdividimos $[a, a']$ em m partes iguais, e $[b, b']$ em n partes iguais, onde m e n são inteiros positivos. Assim, $[a, a'] \times [b, b']$ fica subdividido em mn retângulos de largura

$$\ell = \frac{(a' - a)}{m}$$

e altura

$$h = \frac{(b' - b)}{n},$$

que correspondem aos produtos cartesianos de cada uma das partes em que dividimos os dois intervalos. Escrevendo

$$a_i = a + i\ell \text{ e } b_i = b + jh$$

onde $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq j \leq n$, temos que o retângulo resultante do produto do subintervalo

$$[a_i, a_{i+1}]$$

de $[a, a']$, com o subintervalo

$$[b_j, b_{j+1}],$$

de $[b, b']$ pode ser parametrizado como

$$(1 - t_1 - t_2)(a_i, b_j) + t_1(a_{i+1}, b_j) + t_2(a_i, b_{j+1}),$$

onde $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Aplicando os vértices deste retângulo do plano sobre a superfície S , obtemos os retângulos $R_{i,j}(S)$ definidos por

$$(1 - t_1 - t_2)S(a_i, b_j) + t_1S(a_{i+1}, b_j) + t_2S(a_i, b_{j+1}),$$

onde $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Na verdade, $R_{i,j}(S)$ fica completamente determinado pelos vetores

$$S(a_{i+1}, b_j) - S(a_i, b_j) \text{ e } S(a_i, b_{j+1}) - S(a_i, b_j),$$

que definem dois de seus lados adjacentes. Em particular, $R_{i,j}(S)$ não é a imagem de um retângulo do plano por S .

Para simplificar a terminologia, diremos que $R_{i,j}(S)$ é um *S-retângulo*, e que o conjunto

$$\mathcal{R}_{m,n} = \{R_{i,j}(S) : 0 \leq i \leq m \text{ e } 0 \leq j \leq n\},$$

de todos os *S-retângulos* correspondentes a uma certa escolha de inteiros positivos m e n , determina uma *subdivisão* da superfície. Entretanto, deve ficar claro que os *S-retângulos* que estamos considerando são planos, e sabemos apenas que seus vértices estão sobre a superfície. Em outras palavras, não é estritamente verdade que S fica subdividida pelos $R_{i,j}(S)$, já que os pontos destes retângulos não estão totalmente contidos na imagem de S . Por exemplo, ao subdividir uma calota esférica em *S-retângulos* temos um efeito semelhante ao que obteríamos colando pastilhas de revestimento de parede na superfície interna da calota.

Aliás, o exemplo da calota é muito bom, porque pode ser facilmente explicitado usando coordenadas esféricas. Considerando a calota como tendo raio um e centro na origem, sua parametrização

$$S : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

será dada por

$$S(\theta, \phi) = (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)).$$

O quadrado $[0, \pi/4] \times [0, \pi/2]$ é levado por esta parametrização em

$$\begin{aligned} R_{0,0}(S) = & (1 - u - v)(0, 0, 1) + \\ & u(\sin(0) \cos(\pi/2), \sin(0) \sin(\pi/2), \cos(0)) + \\ & v(\sin(\pi/4) \cos(0), \sin(\pi/4) \sin(0), \cos(\pi/4)) \end{aligned}$$

que é igual a

$$R_{0,0}(S) = (0, 0, 1)(1 - u - v) + u(0, 1, 0) + v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Outro exemplo é dado pela superfície do cilindro parabólico, definida por

$$S_c(s, t) = (s, s^2, t), \text{ onde } 0 \leq s, t \leq 1.$$

Tomando $n = 4$, como acima, temos

$$R_{0,0}(S_c) = (0, 0, 0)(1 - u - v) + u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0\right) + v\left(0, 0, \frac{1}{4}\right),$$

ao passo que

$$R_{1/2,0}(S_c) = (1 - u - v)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right) + u\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, 0\right) + v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

1.4. Fluxo através de uma superfície. Seja U uma região de \mathbb{R}^3 e

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

um campo de vetores. Queremos calcular o fluxo de F através de uma superfície parametrizada

$$S : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $a < a'$ e $b < b'$ são números reais.

Recapitulando a estratégia, já descrita no §1.3, devemos, primeiramente, subdividir a superfície em S -retângulos. Supondo os retângulos suficientemente pequenos, assumiremos que o campo pode ser considerado constante sobre todo o retângulo. Com isto, podemos calcular o fluxo através de um retângulo a partir do valor do campo em um de seus vértices. Somando todos estes valores temos uma aproximação do valor do fluxo sobre toda a superfície. Mas esta aproximação é tanto melhor quanto maiores são m e n . Portanto, tomando o limite quando m e n tendem a infinito obteremos o valor exato, que será representado por uma integral dupla.

Para executar esta estratégia em detalhes, começamos escolhendo os inteiros positivos m e n , e construindo a subdivisão $\mathcal{R}_{m,n}$ da superfície em S -retângulos. Utilizando a notação introduzida no número 1.3, o fluxo através do retângulo $R_{ij}(S)$ será

$$\det[F(a_i, b_j), \Delta_1(i, j), \Delta_2(i, j)].$$

onde

$$\Delta_1(i, j) = S(a_{i+1}, b_j) - S(a_i, b_j) = S(a_i + \ell, b_j) - S(a_i, b_j)$$

ao passo que

$$\Delta_2(i, j) = S(a_i, b_{j+1}) - S(a_i, b_j) = S(a_i, b_j + h) - S(a_i, b_j),$$

para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Somando sobre toda a superfície, obtemos uma soma dupla

$$(1.7) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \det[F(a_i, b_j), \Delta_1(i, j), \Delta_2(i, j)].$$

que corresponde a uma aproximação do fluxo $\Phi_F(S)$ do campo F calculado sobre toda a superfície S .

Como o determinante é linear relativamente a cada uma de suas linhas, podemos reescrever (1.7) como

$$(1.8) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \det[F(a_i, b_j), \frac{\Delta_1(i, j)}{\ell}, \frac{\Delta_2(i, j)}{h}] \ell h,$$

onde ℓ é largura e h a altura de cada um dos retângulos da malha em que $[a, a'] \times [b, b']$ foi subdividido. Com isto, a aproximação para o fluxo dada por (1.7) pode ser considerada como uma soma de Riemann.

O próximo passo consiste em passar ao limite, fazendo m e n tenderem a infinito. Entretanto, à medida que o número de quadrados cresce, seu tamanho diminui. Mais precisamente, ℓ e h tendem a zero quando m e n tendem a infinito. Contudo,

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{S(s_0 + \ell, t_0) - S(s_0, t_0)}{\ell} = \frac{\partial S}{\partial s}(s_0, t_0),$$

onde s e t denotam os parâmetros de S . Esta notação precisa ser interpretada com um certo cuidado. Geralmente falamos de derivadas parciais de funções de uma região *aberta* em \mathbb{R} . Porém, S é uma aplicação cujo contradomínio é \mathbb{R}^3 . Em outras palavras,

$$S(s, t) = (S_1(s, t), S_2(s, t), S_3(s, t)),$$

onde S_1 , S_2 e S_3 são as funções coordenadas de S . Então, a derivada parcial de S com relação a s deve ser interpretada como sendo o vetor

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial s}, \frac{\partial S_2}{\partial s}, \frac{\partial S_3}{\partial s} \right),$$

já que o limite quando ℓ vai a zero está sendo tomado com relação a cada coordenada. Sob esta mesma interpretação, é fácil mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(s_0, t_0 + h) - S(s_0, t_0)}{h} = \frac{\partial S}{\partial t}(s_0, t_0),$$

Portanto, ao tomar o limite quando m e n tendem a infinito, a aproximação dada pela dupla soma de Riemann (1.8) tende para a integral dupla

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} \det \left[F(S(s, t)), \frac{\partial S}{\partial s}(s, t), \frac{\partial S}{\partial t}(s, t) \right] ds dt.$$

Sempre que não houver o risco de confusão, omitiremos os nomes dos parâmetros da notação. Fazendo isto na expressão acima, ela se simplifica para

$$(1.9) \quad \int_a^{a'} \int_b^{b'} \det \left[F(S), \frac{\partial S}{\partial s}, \frac{\partial S}{\partial t} \right] ds dt.$$

Seja

$$F = (x, y, z^2)$$

um campo em \mathbb{R}^3 e

$$\sigma_p : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

parte da superfície de um parabolóide parametrizado por

$$(1.10) \quad \sigma_p(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2).$$

Vamos determinar o fluxo de F através de σ_p utilizando (1.9). Para começar precisamos calcular a função

$$g(r, \theta) = \det \left[\sigma_p, \frac{\partial \sigma_p}{\partial r}, \frac{\partial \sigma_p}{\partial \theta} \right],$$

que devemos integrar. Mas, para isto, precisamos conhecer as derivadas parciais de σ_p ,

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 2r) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_p}{\partial \theta} = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0).$$

Então,

$$g(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & r \sin(\theta) & z^2 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2r \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

que, feitos os os cancelamentos necessários, nos dá

$$g(r, \theta) = (r^5 - 2r^3).$$

Portanto, o fluxo de F através de σ_p é igual à integral

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} (r^5 - 2r^3) dr d\theta.$$

Efetuada a integração, obtemos

$$\left[\frac{r^6}{6} - \frac{r^4}{2} \right]_0^1 \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{3}.$$

1.5. Mudando a perspectiva. Procederemos exatamente como fizemos no §1.4. Assim, nosso primeiro objetivo é separar, no integrando do fluxo, o que cabe ao campo e o que cabe à superfície. Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo e $S : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow U$, uma superfície em uma região U de \mathbb{R}^n . Denotando por F_i e S_i as funções coordenadas de F e S , respectivamente, o integrando será

$$\gamma(s, t) = \det \begin{bmatrix} F_1(S) & F_2(S) & F_3(S) \\ \partial S_1 / \partial s & \partial S_2 / \partial s & \partial S_3 / \partial s \\ \partial S_1 / \partial t & \partial S_2 / \partial t & \partial S_3 / \partial t \end{bmatrix}$$

onde s e t são os parâmetros de S . Para isolar a contribuição do campo F , da que corresponde à superfície S criaremos duas funções. A primeira,

$$G_S : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

é definida por

$$G_S(q, u, z) = (S(q), J_q(S)u, J_q(S)z),$$

onde $J_q(S)$ é a jacobiana de S em q ; e a segunda

$$\omega : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\omega(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

onde $v = (a_1, a_2, a_3)$ e $w = (b_1, b_2, b_3)$. Com isto,

$$\gamma(q) = (\omega \cdot G_F)(q, e_1, e_2).$$

É nas propriedades de ω que queremos nos concentrar, em primeiro lugar.

Se $p \in U$ for fixado, obtemos a partir de ω a aplicação

$$\omega_{p_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\omega_{p_0}(v, w) = \omega(p_0, v, w) = \det[F(p_0), v, w].$$

Apelando para as propriedades do determinante, vemos que ω_{p_0} satisfaz

- $\omega_{p_0}(v, w + w') = \omega_{p_0}(v, w) + \omega_{p_0}(v, w')$, e
- $\omega_{p_0}(v, kw) = k\omega_{p_0}(v, w)$.

Uma aplicação com estas propriedades é chamada de *bilinear*, porque é linear em cada uma de suas entradas (pressupondo que a outra entrada esteja fixa!).

Uma aplicação bilinear bem conhecida nossa é o produto interno entre dois vetores. Entretanto, ao contrário do que ocorre com o produto interno, ω_{p_0} não é simétrica; isto é, seu valor *não* é independente da ordem em que os vetores aparecem no argumento. Isto ocorre porque o determinante troca de sinal quando permutamos duas de suas linhas. Portanto,

$$\omega_{p_0}(w, v) = \det[F, w, v] = -\det[F, v, w],$$

que por sua vez é igual a $\omega_{p_0}(v, w)$. Logo,

$$\omega_{p_0}(w, v) = -\omega_{p_0}(v, w).$$

Por isso, dizemos que ω_{p_0} é *alternada*. Assim,

Propriedade 1: ω é bilinear e alternada em suas duas últimas entradas, desde que a primeira entrada assuma um valor fixo.

Apelando para uma outra propriedade dos determinantes, a expansão em co-fatores, podemos decompor $\omega(p, v, w)$ de uma maneira mais ou menos canônica. Expandindo o determinante pela primeira linha

$$(1.11) \quad \omega(p, v, w) = F_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - F_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + F_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Supondo que os vetores v e w estejam fixos, $\omega(p, v, w)$ é uma combinação linear dos coeficientes de F . Como estes coeficientes são diferenciáveis, o mesmo vale para $\omega(p, v, w)$ como função de p . Portanto,

Propriedade 2: ω é diferenciável em sua primeira entrada, desde que as duas últimas entradas assumam valores fixos.

Qualquer aplicação

$$U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaça as propriedades 1 e 2, destacadas acima, é chamada de *2-forma diferencial*. Agora que sabemos o que é uma 2-forma, podemos introduzir a notação tradicionalmente usada para denotá-las. Para $1 \leq i \neq j \leq 3$ definimos $dx_i \wedge dx_j$ como sendo a 2-forma de \mathbb{R}^3 dada pelo determinante

$$\det[e_k, v, w], \text{ onde } i \neq k \neq j.$$

Por sua vez, este determinante é o menor 2×2 obtido da matriz $[e_k, v, w]$ pela eliminação da primeira linha e da k -ésima coluna. Assim, por exemplo,

$$dx_2 \wedge dx_3(v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Em geral, temos

$$(1.12) \quad dx_i \wedge dx_j(e_k, e_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = \ell \\ -1 & \text{se } i = \ell \text{ e } j = k \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Usando esta notação podemos escrever (1.11) como

$$(1.13) \quad \Phi_F = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Diremos que esta é a *2-forma associada ao fluxo* do campo F .

Como já atribuímos um significado a dx_1 , dx_2 e dx_3 (como 1-formas), é difícil resistir à tentação de pensar em $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$ e $dx_2 \wedge dx_3$ como “produtos” destas 1-formas. É difícil, e não é necessário, porque, como veremos, é possível definir uma multiplicação de 1-formas. Mas isto fica para a próxima seção.

Vejamos o que acontece se aplicamos a definição de 2-forma ao \mathbb{R}^2 . Seja V uma região de \mathbb{R}^2 , e η uma aplicação

$$V \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

que é diferenciável com respeito à primeira, e bilinear alternada com respeito às duas últimas entradas. Tome $p \in V$ e dois vetores

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 \text{ e } w = b_1 e_1 + b_2 e_2.$$

Vamos calcular

$$\eta(q, v, w) = \eta(q, a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2).$$

Como η é bilinear,

$$\eta(q, v, w) = a_1 b_1 \eta(q, e_1, e_1) + a_1 b_2 \eta(q, e_1, e_2) + a_2 b_1 \eta(q, e_2, e_1) + a_2 b_2 \eta(q, e_2, e_2).$$

Mas η também é alternada, o que implica que

$$\eta(q, e_2, e_1) = -\eta(q, e_1, e_2),$$

e também que

$$\eta(q, e_1, e_1) = \eta(q, e_2, e_2) = 0.$$

Temos, portanto, que

$$(1.14) \quad \eta(q, v, w) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \eta(q, e_1, e_2),$$

onde $g(p) = \eta(q, e_1, e_2)$ é uma função diferenciável definida em V .

Denotando por s e t as coordenadas de \mathbb{R}^2 , podemos definir $ds \wedge dt$ como sendo a 2-forma de \mathbb{R}^2 que satisfaz

$$ds \wedge dt(v, w) = \det[v, w] = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Usando esta notação, (1.14) nos dá a igualdade

$$(1.15) \quad \eta = g ds \wedge dt.$$

É chegada a hora de voltar nossa atenção para a aplicação composta $\omega \cdot G_S$, que é conhecida como a *imagem inversa* de ω pela superfície parametrizada S , e denotada por $S^*(\omega)$. Se q é um ponto do retângulo onde S está definida, temos por (1.15) que

$$S^*(\omega) = \omega(S, J_q(S)e_1, J_q(S)e_2) ds \wedge dt = \gamma(q) ds \wedge dt.$$

Estes comentários nos ajudam a interpretar a noção de integral de superfície na linguagem das formas diferenciais. Lembre-se que a integral de F através de S foi definida como sendo a integral da função γ no retângulo

$$R = [a, a'] \times [b, b'].$$

Mas γ é o coeficiente da 1-forma $S^*(\omega)$. Reescrevendo tudo isto numa ordem mais direta: a integral da 2-forma ω ao longo de S , é a integral da 2-forma $S^*(\omega)$ no retângulo R que, por sua vez, é a integral de γ neste mesmo retângulo. Isto é,

$$\int_S \omega = \int_R S^*(\omega) = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \gamma ds dt.$$

Como no caso de 1-formas, removemos o perigo de ambigüidade entre a integral da 2-forma $\gamma ds \wedge dt$ e a integral dupla de γ declarando que uma é outra. Ou seja, definimos

$$\int_R \gamma ds \wedge dt, \text{ como sendo igual a } \int_a^{a'} \int_b^{b'} \gamma ds dt.$$

Com isto podemos generalizar a definição acima para a integral de qualquer 2-forma sobre uma superfície. Se θ é uma 2-forma em U e $S : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow U$ é uma superfície, definimos

$$\int_S \theta = \int_{[a, a'] \times [b, b']} S^*(\theta).$$

Como

$$S^*(\theta) = g ds \wedge dt,$$

para alguma função diferenciável g ,

$$\int_{[a, a'] \times [b, b']} S^*(\theta) = \int_a^{a'} \int_b^{b'} g dt,$$

que é a integral usual de g no retângulo $[a, a'] \times [b, b']$.

Note o paralelo entre as integrais de 1-formas e 2-formas, que relacionamos na tabela abaixo.

Onde havia:	Temos agora:
trabalho	fluxo
1-forma	2-forma
integral simples	integral dupla
curva parametrizada C	superfície parametrizada S
$C(t)$	$S(s, t)$
dC/dt	$\partial S/\partial s$ e $\partial S/\partial t$.

2. O caso geral

Nesta seção começamos a sistematizar os conceitos introduzidos na seção anterior. Iniciamos revisando alguns conceitos básicos de álgebra linear.

2.1. Formas bilineares alternadas. Uma *forma bilinear* de \mathbb{R}^n é uma aplicação

$$\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz à seguinte condição:

dado um vetor $v_0 \in \mathbb{R}^n$, a aplicação

$$\omega_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ para } j = 1, 2$$

obtida fixando-se a j -ésima coordenada de ω como sendo igual a v_0 , é linear.

Uma descrição mais explícita (porém mais prolixa) consiste em dizer que, dados $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, temos que

- $\omega(v_0, v_1 + kv_2) = \omega(v_0, v_1) + k\omega(v_0, v_2)$, e
- $\omega(v_1 + kv_2, v_0) = \omega(v_1, v_0) + k\omega(v_2, v_0)$.

As formas bilineares ocorrem em abundância em matemática, a começar pelo produto interno de \mathbb{R}^n . Outro exemplo, que já fez sua aparição na seção anterior, é o determinante

$$\det[F, v_1, v_2] = \det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix},$$

onde $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um vetor constante, ao passo que

$$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } v_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

são vetores quaisquer de \mathbb{R}^3 .

Uma forma bilinear ω de \mathbb{R}^n pode ser expressa, de maneira bastante concreta, se fixamos uma base

$$\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$$

de \mathbb{R}^n . Escrevendo $v, w \in \mathbb{R}^n$ como função de β , obtemos

$$(2.1) \quad v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n \text{ e } w = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n,$$

onde os a s e os b s são números reais. Apelando, agora, para a linearidade de ω relativamente à segunda entrada, temos que

$$\omega(v, w) = \omega(v, b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n)$$

nos dá

$$(2.2) \quad \omega(v, w) = b_1 \omega(v, u_1) + \cdots + b_n \omega(v, u_n).$$

Mas ω também é linear com relação à sua primeira entrada, de forma que

$$\omega(v, u_i) = \omega(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, u_i) = a_1 \omega(u_1, u_i) + \cdots + a_n \omega(u_n, u_i),$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Substituindo em (2.2),

$$(2.3) \quad \omega(v, w) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j \omega(u_i, u_j).$$

Esta equação pode ser reescrita em forma matricial como

$$\omega(v, w) = v^t \Omega_\beta w,$$

onde Ω_β é a matriz $n \times n$ cuja entrada ij é $\omega(u_i, u_j)$.

Há duas classes muito importantes de formas bilineares: as formas simétricas e as formas alternadas. Uma forma bilinear ω de \mathbb{R}^n é *simétrica* se

$$\omega(v, w) = \omega(w, v) \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Escolhendo, em particular, $v = u_i$ e $w = u_j$, elementos de β , obtemos

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(u_j, u_i),$$

quaisquer que sejam $1 \leq i, j \leq n$. Isto implica que as entradas das posições ij e ji de Ω_β são iguais. Em outras palavras, Ω_β é uma matriz simétrica: o que, aliás, soa muito justo. O produto escalar é o exemplo mais conhecido de forma simétrica.

Por outro lado, uma forma bilinear ω de \mathbb{R}^n é *alternada* se

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v) \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

As formas bilineares alternadas também são conhecidas como 2-formas constantes.

A matriz Ω_β , da forma bilinear alternada ω relativamente a uma base β do \mathbb{R}^n , é *anti-simétrica*, isto é, satisfaz

$$\Omega_\beta^t = -\Omega_\beta.$$

Em particular, usando a notação de (2.1), temos que

$$\omega(v, w) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(u_i, u_j) (a_i b_j - a_j b_i).$$

Note que $a_i b_j - a_j b_i$ é igual ao determinante da matriz 2×2 correspondente às colunas i e j da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

A aplicação que associa ao par de vetores (v, w) o número $a_i b_j - a_j b_i$ também é uma 2-forma constante. Quando β é a base canônica de \mathbb{R}^n , esta forma é denotada por $dx_i \wedge dx_j$. Neste caso, podemos escrever ω como

$$(2.4) \quad \omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(u_i, u_j) dx_i \wedge dx_j.$$

Como as 2-formas constantes são aplicações que tomam valores em \mathbb{R} , podemos somá-las da maneira usual. Isto, é, dadas duas formas constantes ω e θ , definimos

$$(2.5) \quad (\omega + \theta)(v, w) = \omega(v, w) + \theta(v, w),$$

quaisquer que sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$. Não há dúvida de que esta fórmula define uma aplicação de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} ; a questão é se essa aplicação é bilinear e alternada. Contudo, fixando v_0 em (2.5), temos

$$(\omega + \theta)(v_0, w) = \omega(v_0, w) + \theta(v_0, w).$$

Mas, por definição, $\omega(v_0, w)$ e $\theta(v_0, w)$ são aplicações lineares, quando consideradas como funções de suas segundas entradas. Assim, $(\omega + \theta)(v_0, w)$ é linear como função de w . Um argumento semelhante mostra que $\omega + \theta$ é linear como função da primeira entrada, quando a segunda está fixa. Finalmente,

$$(\omega + \theta)(w, v) = \omega(w, v) + \theta(w, v) = -\omega(w, v) - \theta(w, v);$$

como isto é igual a $-(\omega + \theta)(w, v)$, concluímos que $\omega + \theta$ também é alternada. Resumindo:

a soma de duas 2-formas constantes é uma 2-forma constante.

Encerramos este parágrafo definindo a imagem inversa de uma 2-forma constante por uma aplicação linear. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, começamos por definir uma aplicação

$$\Delta_T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pela fórmula

$$\Delta_T(v, w) = (T(v), T(w)).$$

Como T é linear,

- $\Delta_T(v_1 + kv_2, w_0) = \Delta_T(v_1, w_0) + k\Delta_T(v_2, w_0);$
- $\Delta_T(w_0, v_1 + kv_2) = \Delta_T(w_0, v_1) + k\Delta_T(w_0, v_2),$

onde k é um escalar e $v_1, v_2, w_0 \in \mathbb{R}^m$.

PROPOSIÇÃO. Se ω é uma 2-forma constante em \mathbb{R}^n , então a composta $\omega \cdot \Delta_T$ é uma 2-forma constante em \mathbb{R}^m .

DEMONSTRAÇÃO. Sejam k um escalar e $v_1, v_2, w_0 \in \mathbb{R}^m$, então

$$(\omega \cdot \Delta_T)(v_1 + kv_2, w_0) = \omega \cdot \Delta_T(v_1, w_0) + k\omega \cdot \Delta_T(v_2, w_0);$$

ao passo que $(\omega \cdot \Delta_T)(v_1, w_0)$ é igual a

$$\omega(T(v_1), T(w_0)) = -\omega(T(w_0), T(v_1)) = -(\omega \cdot \Delta_T)(w_0, v_1),$$

donde

$$(\omega \cdot \Delta_T)(v_1, w_0) = -(\omega \cdot \Delta_T)(w_0, v_1).$$

Portanto, $\omega \cdot \Delta_T$ é uma 2-forma constante em \mathbb{R}^m , como desejávamos mostrar. \square

Nos próximos parágrafos generalizaremos tudo isto para 2-formas não constantes, definidas sobre uma região aberta de \mathbb{R}^n .

2.2. 2-formas diferenciais. Seja U uma região de \mathbb{R}^n . Uma *2-forma diferencial* em U é uma aplicação

$$\alpha : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz às seguintes condições:

- (1) fixando $p_0 \in U$, e considerando $\omega(p_0, v, w)$ como função apenas de v e w , temos uma aplicação bilinear alternada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} ;
- (2) fixando $v_0, w_0 \in \mathbb{R}^n$, e considerando $\omega(p, v_0, w_0)$ como função apenas de p , temos uma função diferenciável de U em \mathbb{R} .

Como no caso de 1-formas, optamos por uma definição livre de coordenadas para as 2-formas diferenciais. Por isso devemos começar descobrindo como escrever uma 2-forma em termos de coordenadas; como, aliás, já fizemos para o caso de dimensão três no §1.5. Seja $p \in U$. De acordo com a propriedade (1), a aplicação

$$\omega_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\omega_p(v, w) = \omega(p, v, w),$$

é uma 2-forma constante. Assumindo que os vetores v e w foram expressos em termos de suas coordenadas na base canônica, segue da equação (2.4) que

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(p) dx_i \wedge dx_j.$$

Porém, como $dx_i \wedge dx_j(e_i, e_j) = 1$, temos

$$\omega(p, e_i, e_j) = a_{ij}(p).$$

Portanto, pela propriedade (2) da definição de 2-forma diferencial,

$$a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R},$$

são funções diferenciáveis definidas em U . Concluimos, portanto, que toda 2-forma diferencial definida em uma região U do \mathbb{R}^n pode ser escrita na forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

onde $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ são funções diferenciáveis em U . Por outro lado, como é fácil verificar, qualquer aplicação da forma acima satisfaz (1) e (2).

O conjunto das 2-formas diferenciais definidas em uma região aberta U de \mathbb{R}^n será denotado por $\Omega^2(U)$. Há várias operações que podemos definir em $\Omega^2(U)$, a mais simples das quais é a soma. Sejam ω e θ 2-formas diferenciais em U , a soma $\omega + \theta$ é definida em um ponto $(p, v, w) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$(2.6) \quad (\omega + \theta)(p, v, w) = \omega(p, v, w) + \theta(p, v, w).$$

Para que esta definição seja útil, é preciso que $\omega + \theta$ também seja uma 2-forma diferencial em U , e não apenas uma aplicação qualquer. Mas isto é fácil de verificar usando as propriedades (1) e (2), como veremos a seguir.

Fixando $p \in U$, podemos reescrever (2.6) na forma

$$(\omega + \theta)(p, v, w) = (\omega_p + \theta_p)(v, w).$$

Porém, como vimos no §2.1, a soma de 2-formas constantes é uma 2-forma constante. Portanto, $\omega + \theta$ é bilinear alternada, o que prova (1). Passando, agora, à segunda propriedade, fixamos dois vetores v_0 e w_0 do \mathbb{R}^n , e consideramos

$$(\omega + \theta)(p, v_0, w_0) = \omega(p, v_0, w_0) + \theta(p, v_0, w_0),$$

como função de p . Mas $\omega(p, v_0, w_0)$ e $\theta(p, v_0, w_0)$ são ambas diferenciáveis como funções de p , e a soma de funções diferenciáveis é diferenciável. Assim, $(\omega + \theta)(p, v_0, w_0)$ é uma função diferenciável de p , o que prova (2). Um cálculo simples mostra que se

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \text{ e } \theta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

então

$$\omega + \theta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} + b_{ij}) dx_i \wedge dx_j$$

como, aliás, seria de esperar.

Procedendo de maneira semelhante, podemos mostrar que, se ω é uma 2-forma diferencial em U e $f \in \mathcal{O}(U)$, então a aplicação de $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} definida por

$$(f\omega)(p, v, w) = f(p)\omega(p, v, w),$$

onde $p \in U$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$ também é uma 2-forma diferencial. Mais uma vez, isto é facilmente expresso em termos de coordenadas pela fórmula

$$f\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (fa_{ij}) dx_i \wedge dx_j.$$

Um caso particular da multiplicação de uma 2-forma por uma função ocorre quando a função é constante. Neste caso o que temos é o produto de um escalar por uma 2-forma. Assim, podemos somar 2-formas diferenciáveis e multiplicá-las por escalares. Com um pouco de paciência é possível verificar que estas operações satisfazem todas as propriedades requeridas para fazer de $\Omega^2(U)$ um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Este é um fato que usaremos com frequência ao

longo deste livro; tão frequentemente que raramente chamaremos a atenção para o que estamos fazendo.

2.3. Produto exterior. Como já observamos no parágrafo 1.5, a notação $dx_i \wedge dx_j$ sugere uma interpretação desta 2-forma como um produto. Neste parágrafo, introduzimos uma noção de multiplicação de formas que nos permitirá formalizar esta interpretação. Mais precisamente, dada uma região $U \subseteq \mathbb{R}^n$, desejamos inventar uma operação que, a cada par de 1-formas em U , associa uma 2-forma, também definida em U .

Sejam α e β 1-formas diferenciais definidas em U , definimos o *produto exterior* $\alpha \wedge \beta$ em um ponto

$$(p, v, w) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

pela fórmula

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v) & \beta(p, w) \end{bmatrix}.$$

É importante você notar que há uma correlação entre a ordem em que as 1-formas e os vetores aparecem em $(\alpha \wedge \beta)(p, v, w)$ e sua posição no determinante. Afinal, qualquer variação na ordem das linhas ou colunas fará o determinante mudar de sinal. Por exemplo,

$$(\alpha \wedge \beta)(p, w, v) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, w) & \alpha(p, v) \\ \beta(p, w) & \beta(p, v) \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v) & \beta(p, w) \end{bmatrix}$$

que, por sua vez, é igual a $-(\alpha \wedge \beta)(p, v, w)$. Portanto,

$$(\alpha \wedge \beta)(p, w, v) = -(\alpha \wedge \beta)(p, v, w).$$

Em particular, $\alpha \wedge \beta$ é alternada.

Para mostrar que $\alpha \wedge \beta$ é bilinear, suponhamos que v' é um outro vetor do \mathbb{R}^n e que k é um escalar, então

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v + kv', w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, v + kv') & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v + kv') & \beta(p, w) \end{bmatrix}.$$

Pela linearidade de α e de β ,

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v + kv', w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, v) + k\alpha(p, v') & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v) + k\alpha(p, v') & \beta(p, w) \end{bmatrix}.$$

Mas, este último determinante é igual à soma

$$\det \begin{bmatrix} \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, v) & \beta(p, w) \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} \alpha(p, v') & \alpha(p, w) \\ \alpha(p, v') & \beta(p, w) \end{bmatrix}.$$

Transcrevendo esta equação em termos de \wedge , obtemos

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v + kv', w) = (\alpha \wedge \beta)(p, v, w) + k(\alpha \wedge \beta)(p, v', w).$$

Um argumento análogo, mostra que

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v, w + kw') = (\alpha \wedge \beta)(p, v, w) + k(\alpha \wedge \beta)(p, v', w').$$

Portanto, $\alpha \wedge \beta$ satisfaz a propriedade (1).

Por outro lado, se fixarmos v e w , as entradas do determinante passam a ser funções diferenciáveis em U . Como somas e produtos de funções diferenciáveis também são diferenciáveis, o determinante é diferenciável como função de p . Isto prova a propriedade (2). Como já havíamos provado (1), podemos concluir que a aplicação $\alpha \wedge \beta$ acima definida é uma 2-forma diferenciável em U . Portanto, o produto exterior define uma aplicação

$$\Omega^1(U) \times \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U),$$

e, como tal, pode ser considerada como uma operação, que a cada par de 1-formas associa uma 2-forma.

Tendo chegado a este ponto, podemos nos perguntar se a 2-forma $dx_i \wedge dx_j$, definida como o produto exterior de dx_i por dx_j coincide com a 2-forma de mesmo nome definida no §1.5. Para isto, basta mostrar que o produto de dx_i por dx_j satisfaz (1.12), já que isto define completamente o valor de uma 2-forma em qualquer par de vetores. Mas, por definição, o produto exterior de dx_i por dx_j no par (e_k, e_ℓ) vale

$$\det \begin{bmatrix} dx_i(e_k) & dx_i(e_\ell) \\ dx_j(e_k) & dx_j(e_\ell) \end{bmatrix}.$$

Escrevendo

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} \end{bmatrix},$$

já que dx_i captura a i -ésima coordenada de um vetor, e dx_j sua j -ésima coordenada. Mas,

$$\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = \ell \\ -1 & \text{se } i = \ell \text{ e } j = k \\ 0 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

como desejávamos mostrar.

2.4. Propriedades do produto exterior. Agora que sabemos que \wedge é uma operação que entrelaça duas 1-formas para produzir uma 2-forma; devemos nos perguntar quais são as propriedades de uma tal operação.

Começamos com a comutatividade. Sejam α_1 e α_2 1-formas diferenciais definidas em uma região U do \mathbb{R}^n . Vamos calcular $\alpha_2 \wedge \alpha_1$ e compará-lo a $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Se $p \in U$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$, então

$$(\alpha_2 \wedge \alpha_1)(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha_2(p, v) & \alpha_2(p, w) \\ \alpha_1(p, v) & \alpha_1(p, w) \end{bmatrix}.$$

Como o determinante troca de sinal quando permutamos duas de suas linhas,

$$(\alpha_2 \wedge \alpha_1)(p, v, w) = -\det \begin{bmatrix} \alpha_1(p, v) & \alpha_1(p, w) \\ \alpha_2(p, v) & \alpha_2(p, w) \end{bmatrix},$$

que é igual a $-(\alpha_1 \wedge \alpha_2)(p, v, w)$. Mas esta igualdade vale para qualquer escolha de $p \in U$ e $v, w \in \mathbb{R}^3$, de modo que podemos concluir que

$$(2.7) \quad \alpha_2 \wedge \alpha_1 = -(\alpha_1 \wedge \alpha_2).$$

Em particular a operação \wedge não é comutativa. Como nada pior que uma troca de sinal acontece, quando os termos são transpostos, dizemos que \wedge é *anti-comutativa*.

A anti-comutatividade de \wedge tem um efeito colateral inesperado. Por exemplo, tomando $\alpha_1 = \alpha_2$ em (2.7), verificamos que

$$\alpha_1 \wedge \alpha_1 = -(\alpha_1 \wedge \alpha_1).$$

Mas isto só pode ocorrer se $\alpha_1 \wedge \alpha_1 = 0$. Portanto,

$$(2.8) \quad \alpha \wedge \alpha = 0$$

para toda 1-forma diferencial α .

A segunda propriedade que abordaremos é a distributividade. Conservando a notação anterior, seja α_3 uma terceira 1-forma em U e $k \in \mathbb{R}$, então

$$((\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \alpha_3)(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} (\alpha_1 + k\alpha_2)(p, v) & (\alpha_1 + k\alpha_2)(p, w) \\ \alpha_3(p, v) & \alpha_3(p, w) \end{bmatrix}$$

Como

$$(\alpha_1 + k\alpha_2)(p, v) = \alpha_1(p, v) + k\alpha_2(p, v) \text{ para todo } p \in U \text{ e } v \in \mathbb{R}^n,$$

temos que

$$((\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \alpha_3)(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha_1(p, v) + k\alpha_2(p, v) & \alpha_1(p, w) + k\alpha_2(p, w) \\ \alpha_3(p, v) & \alpha_3(p, w) \end{bmatrix}.$$

Mas este determinante é igual a

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1(p, v) & \alpha_1(p, w) \\ \alpha_3(p, v) & \alpha_3(p, w) \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} \alpha_2(p, v) & \alpha_2(p, w) \\ \alpha_3(p, v) & \alpha_3(p, w) \end{bmatrix},$$

donde,

$$((\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \alpha_3)(p, v, w) = (\alpha_1 \wedge \alpha_3)(p, v, w) + k(\alpha_2 \wedge \alpha_3)(p, v, w).$$

Como esta igualdade vale para qualquer escolha de $p \in U$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$, podemos concluir que

$$(\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + k(\alpha_2 \wedge \alpha_3).$$

Logo, \wedge é distributiva.

Há uma propriedade da operação usual de multiplicação que ainda não abordamos com relação ao produto exterior. Trata-se da associatividade, que equivale a perguntar se

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_3).$$

Contudo, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ é uma 2-forma que, do lado esquerdo da equação, está sendo multiplicada pela 1-forma α_3 . Entretanto, um tal produto nunca foi definido: tudo o que sabemos é multiplicar duas 1-formas. Portanto, pelo menos por

enquanto, esta propriedade está fora do nosso alcance pela falta dos conceitos apropriados.

2.5. Diferencial de 1-formas. Podemos aproveitar o que fizemos na seção anterior para definir a diferencial de uma 1-forma. Lembre-se que no §2.3 do capítulo 2 definimos a diferencial de uma função como sendo uma certa 1-forma. Neste parágrafo pretendemos estender este conceito, da maneira mais natural possível, para as 1-formas: o resultado, naturalmente, será uma 2-forma. Mais precisamente, queremos construir uma aplicação

$$d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U),$$

onde U é uma região de \mathbb{R}^n .

Usando o produto exterior, podemos escrever uma 1-forma α definida em U como

$$(2.9) \quad \alpha = \sum_{j=1}^n a_j dx_j,$$

onde $a_i \in \mathcal{O}(U)$ para $1 \leq i \leq n$. Como a diferencial de uma função é uma transformação linear, é razoável supor que a diferencial de uma 1-forma pelo menos se distribui sobre uma soma. Mas, isto implica que

$$d(\alpha) = \sum_{j=1}^n d(a_j dx_j),$$

de forma que basta definir $d(a_i dx_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Tomando como inspiração os cálculos do parágrafo anterior, definiremos

$$d(a_i dx_i) = d(a_i) \wedge d(dx_i).$$

Portanto,

$$d(\alpha) = \sum_{j=1}^n d(a_j) \wedge d(dx_j),$$

é uma 2-forma em U como desejávamos.

Agora que temos uma definição, resta-nos verificar se é satisfatória. Por exemplo, o que ocorre se calculamos a diferencial de $f\alpha$, onde $f \in \mathcal{O}(U)$? Vejamos: escrevendo α como na equação (2.9), temos

$$f\alpha = \sum_{j=1}^n (f a_j) dx_j,$$

donde

$$d(f\alpha) = \sum_{j=1}^n d(f a_j) dx_j.$$

Contudo,

$$d(f a_i) = f da_i + a_i df \text{ para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^n d(fa_i) \wedge dx_i = \sum_{j=1}^n (f da_i \wedge dx_i + a_i df \wedge dx_i);$$

e pondo f e df em evidência,

$$\sum_{j=1}^n d(fa_i) \wedge dx_i = f \sum_{j=1}^n da_i \wedge dx_i + df \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_i dx_i \right).$$

Portanto,

$$(2.10) \quad d(f\alpha) = f d\alpha + df \wedge \alpha,$$

de forma que esta diferencial satisfaz uma relação análoga à *fórmula de Leibniz*. Esta é uma boa notícia porque, além da linearidade, a fórmula de Leibniz foi a única propriedade da diferencial de funções que provamos no capítulo 2.

Por falar em linearidade, ainda não sabemos se a diferencial é linear. É verdade que distribui sobre uma soma, já que esta propriedade foi usada implicitamente em sua definição. Mas será que respeita o produto por escalar? Para verificar isto, seja $k \in \mathbb{R}$. Considerando k como uma função constante, podemos usar (2.10), de modo que

$$d(k\alpha) = kd(\alpha) + d(k) \wedge \alpha.$$

Levando em conta que $d(k) = 0$, temos

$$d(k\alpha) = kd(\alpha);$$

o que completa a prova da linearidade da diferencial.

Estendendo a terminologia usada para 1-formas, dizemos que uma 2-forma em U é *exata* se pode ser escrita como $d\alpha$, para algum $\alpha \in \Omega^1(U)$. Como já ocorreu no caso de 1-formas, não é verdade que toda 2-forma é exata. De fato, isto está muito longe de ser verdade. Entretanto, para poder provar que uma dada forma não é exata, precisamos de um teorema de que ainda não dispomos. Por isso vamos esperar o §5.7 para poder dar um exemplo de uma 2-forma que não é exata.

Por falar em formas exatas, o que ocorre se calcularmos a diferencial de uma 1-forma exata? Para isto, considere $f \in \mathcal{O}(U)$. Calculando sua diferencial, temos

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i;$$

que, por sua vez, tem diferencial

$$(2.11) \quad d(df) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i,$$

Contudo,

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j.$$

Substituindo em (2.11), e levando em conta a anti-comutatividade do produto exterior,

$$d(df) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Porém, como f é diferenciável em todas as ordens, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

para todo $1 \leq i < j \leq n$; donde

$$d(df) = 0.$$

Na linguagem da álgebra linear, mostramos que toda 1-forma exata pertence ao núcleo da transformação linear

$$d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U).$$

Entretanto, nem sempre é verdade que o núcleo desta transformação é sempre igual ao conjunto das 1-formas exatas. Por isso, precisamos de uma palavra diferente para designar as 1-formas que pertencem ao núcleo de d ; diremos que são *formas fechadas*. Nesta terminologia, mostramos que toda forma exata é fechada. Por outro lado, embora seja fácil dar exemplos de formas fechadas que não são exatas, esbarramos novamente com a falta de uma ferramenta adequada para provar que uma dada forma não é exata. Por isso, este exemplo também vai ter que esperar até o §5.7. Já no §5.6 provaremos que toda forma fechada definida em uma região convexa é exata.

Resumindo, estendemos neste parágrafo a noção de diferencial para o caso de 1-formas. Mais precisamente, definimos uma transformação linear

$$d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U).$$

que satisfaz $d(f\alpha) = df \wedge \alpha$. De fato, esta propriedade, juntamente com a linearidade determinam completamente a aplicação d . Vimos também que o núcleo de d contém o conjunto formado por todas as 1-formas exatas, e afirmamos (sem contudo dar exemplos) que estes dois conjuntos nem sempre são iguais.

2.6. Imagem inversa. É chegada a hora de introduzir o conceito de imagem inversa de uma 2-forma por uma aplicação diferencial. Antes, porém, precisamos de um resultado de álgebra linear elementar.

Seja V uma região de \mathbb{R}^m , e seja $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Escrevendo ϕ em termos de suas funções coordenadas, temos que

$$\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_n(p)),$$

para todo $p \in V$. Sabemos que ϕ é diferenciável se, e somente se, cada uma das funções coordenadas

$$\phi_j : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

é diferenciável. A derivada de ϕ em um ponto $p \in V$ corresponde à matriz jacobiana $J_p(\phi)$.

Generalizando o roteiro já utilizado no §1.5, definimos uma função

$$G_\phi : V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

por

$$G_\phi(p, v, w) = (\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w),$$

onde $p \in V$ e $v, w \in \mathbb{R}^m$. Note que G_ϕ é diferenciável como função de suas m primeiras coordenadas e linear como função das $2m$ últimas coordenadas.

Suponha, agora, que a imagem de ϕ está contida em uma região U de \mathbb{R}^n , na qual está definida uma 2-forma diferencial ω . Neste caso a imagem de G_ϕ está contida em $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, de modo que faz sentido calcular a composta de ω com G_ϕ . A *imagem inversa* de ω por ϕ , denotada por $\phi^*(\omega)$, é definida por

$$\phi^*(\omega) = \omega \cdot G_\phi.$$

Portanto, se $p \in U$ e $v, w \in \mathbb{R}^m$,

$$\phi^*(\omega)(p, v, w) = \omega(\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w).$$

Pela definição de composta, $\phi^*(\omega)$ é uma aplicação de $V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ em \mathbb{R} . Mas ainda precisamos mostrar que é uma 2-forma diferencial em V . Para isto, basta verificar as condições (1) e (2) da definição de 2-forma enunciada no §2.2.

Digamos que o ponto $p_0 \in V$ foi fixado. Então, quaisquer que sejam $v, w \in \mathbb{R}^m$ temos

$$\phi^*(\omega)(p_0, v, w) = (\omega_{p_0}) \cdot \Delta_{J_{p_0}(\phi)}(v, w).$$

Mas, fixado p_0 , $\omega|_{\phi(p_0)}$ é uma 2-forma constante, de forma que (1) é consequência da proposição da seção 2. Por outro lado, fixando os vetores $v_0, w_0 \in \mathbb{R}^m$, temos que

$$\phi^*(\omega)(p, v_0, w_0) = \omega(p, J_p(\phi)v_0, J_p(\phi)w_0),$$

qualquer que seja $p \in V$. Podemos considerar esta expressão como sendo a composta de ω com h_ϕ , a aplicação de V em $U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definida pela regra

$$h_\phi(p) = G_\phi(p, v_0, w_0) = (\phi(p), J_p(\phi)v_0, J_p(\phi)w_0).$$

Como a jacobiana é diferenciável como função de p , o mesmo vale para h_ϕ . Contudo, ω é diferenciável em função de p , e linear nas outras entradas, de modo que é diferenciável como aplicação em $U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Como a composta de aplicações diferenciáveis é diferenciável, podemos concluir que a propriedade (2) vale para $\phi^*(\omega)$. Em particular, $\phi^*(\omega)$ é uma 2-forma diferencial em V .

É claro que, se ϕ definir uma superfície parametrizável, então esta definição coincide com a do §1.5. Outro exemplo importante é o da imagem inversa de $dx_i \wedge dx_j$ por uma aplicação diferenciável qualquer, onde x_1, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{R}^n . Mais uma vez, seja V um aberto de \mathbb{R}^m e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Por definição,

$$G_\phi(p, e_r, e_s) = (\phi(p), J_p(\phi)e_r, J_p(\phi)e_s),$$

onde $p \in V$ e e_r e e_s são vetores da base canônica de \mathbb{R}^m . Mas isto implica que

$$(2.12) \phi^*(dx_i \wedge dx_j)(p, e_r, e_s) = (dx_i \wedge dx_j)(J_p(\phi)e_r, J_p(\phi)e_s).$$

Contudo, denotando por y_1, \dots, y_m as coordenadas de \mathbb{R}^m relativamente à sua base canônica, temos que $\partial\phi_i/\partial y_r$ é a i -ésima coordenada de $J_p(\phi)e_r$ e $\partial\phi_j/\partial y_s$ a j -ésima coordenada de $J_p(\phi)e_s$. Substituindo isto em (2.12), obtemos

$$\phi^*(dx_i \wedge dx_j)(p, e_r, e_s) = \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_r}(p) \frac{\partial\phi_j}{\partial y_s}(p) - \frac{\partial\phi_i}{\partial y_s}(p) \frac{\partial\phi_j}{\partial y_r}(p) \right) dy_r \wedge dy_s.$$

Supondo que p é constante, podemos usar (2.4) para escrever

$$\phi^*(dx_i \wedge dx_j)|_p = \sum_{1 \leq r < s \leq m} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_r}(p) \frac{\partial\phi_j}{\partial y_s}(p) - \frac{\partial\phi_i}{\partial y_s}(p) \frac{\partial\phi_j}{\partial y_r}(p) \right) dy_r \wedge dy_s,$$

donde

$$(2.13) \phi^*(dx_i \wedge dx_j) = \sum_{1 \leq r < s \leq m} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_r} \frac{\partial\phi_j}{\partial y_s} - \frac{\partial\phi_i}{\partial y_s} \frac{\partial\phi_j}{\partial y_r} \right) dy_r \wedge dy_s.$$

Utilizando o produto exterior, podemos reescrever esta fórmula de maneira muito mais compacta. De fato como

$$d\phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi_i}{\partial y_r} dy_r \text{ e } d\phi_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi_j}{\partial y_s} dy_s,$$

temos que $d\phi_i \wedge d\phi_j$ é igual ao lado direito de (2.13), donde

$$(2.14) \quad \phi^*(dx_i \wedge dx_j) = d\phi_i \wedge d\phi_j.$$

2.7. Propriedades da imagem inversa. Seja $\phi : V \rightarrow U$ uma aplicação diferenciável, onde V e U são regiões de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Usando a notação introduzida no §2.2 para o espaço das 2-formas diferenciais sobre uma região, podemos dizer que a imagem inversa nos dá uma aplicação

$$\phi^* : \Omega^2(U) \rightarrow \Omega^2(V).$$

Observe que ϕ tem V como domínio e U como contradomínio, ao passo que em ϕ^* estas duas regiões aparecem com suas posições trocadas, como já acontecia no caso de 1-formas.

Como $\Omega^2(U)$ e $\Omega^2(V)$ são espaços vetoriais, é razoável perguntar se ϕ^* é uma transformação linear. A resposta é sim, como é fácil de verificar. Se ω_1 e ω_2 são 2-formas diferenciais em U e k é um escalar, então

$$\phi^*(\omega_1 + k\omega_2) = (\omega_1 + k\omega_2) \cdot G_\phi.$$

Mas, da definição de soma de formas, isto é igual a

$$\omega_1 \cdot G_\phi + k(\omega_2 \cdot G_\phi);$$

que pode ser reescrito como

$$\phi^*(\omega_1) + k\phi^*(\omega_2),$$

provando, assim, a linearidade de ϕ^* .

O produto de uma 2-forma por um escalar é apenas um caso especial do produto por uma função. Como vimos em 2.1, se $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e ω uma 2-forma na região U , então a fórmula

$$(2.15) (g\omega)(p, v, w) = g(p)\omega(p, v, w), \text{ para todo } p \in U \text{ e } v \in \mathbb{R}^n,$$

define uma nova 2-forma diferencial em U . Vejamos o que acontece se calculamos a imagem inversa de $g\omega$ pela aplicação diferenciável $\phi : V \rightarrow U$ dada acima. Por definição, temos que

$$\phi^*(g\omega)(p, v, w) = (g\omega)(\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w).$$

Mas, pela fórmula (2.15),

$$(g\omega)(\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w) = g(\phi(p))\omega(\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w);$$

isto é,

$$(g\omega)(\phi(p), J_p(\phi)v, J_p(\phi)w) = (g \cdot \phi)(p)\phi^*(\omega)(p, v, w).$$

Como $\phi^*(g) = g \cdot \phi$,

$$\phi^*(g\omega) = \phi^*(g)\phi^*(\omega),$$

onde a justaposição indica o produto da função $\phi^*(g)$ pela 2-forma $\phi^*(\omega)$, ambas definidas sobre V .

As propriedades descritas até aqui nos permitem dar uma fórmula bastante compacta, além de muito útil, para a imagem inversa de uma 2-forma em termos de coordenadas. Digamos que x_1, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{R}^n , e que ϕ_1, \dots, ϕ_n são as funções coordenadas de ϕ . Neste caso, se a 2-forma diferencial ω se escreve como

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

então, temos que

$$\phi^*(\omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \phi^*(a_{ij})\phi^*(dx_i \wedge dx_j)$$

pela linearidade da imagem inversa. Mas, por (2.14),

$$\phi^*(dx_i \wedge dx_j) = \phi^*(dx_i) \wedge \phi^*(dx_j).$$

Combinando isto com a equação (2.5) da página 84, obtemos

$$\phi^*(dx_i \wedge dx_j) = d\phi_i \wedge d\phi_j.$$

Finalmente,

$$(2.16) \quad \phi^*(\omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \phi^*(a_{ij})d\phi_i \wedge d\phi_j,$$

que é a fórmula desejada.

Já identificamos como a imagem inversa de 2-formas se comporta com relação à soma e ao produto por uma função. Precisamos, agora, descobrir como se relaciona com o produto exterior.

PROPOSIÇÃO. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ regiões abertas. Se α e β são 1-formas definidas em U e $\phi : V \rightarrow U$ é uma aplicação diferenciável, então*

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como vimos no §2.1, as 1-formas α e β podem ser escritas como

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \text{ e } \beta = \sum_{i=1}^n b_i dx_i,$$

onde $a_i, b_i \in \mathcal{O}(U)$ para $1 \leq i \leq n$. Multiplicando estas formas

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j.$$

Por (2.16), a imagem inversa desta 2-forma por ϕ é

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\phi^*(a_i)\phi^*(b_j) - \phi^*(a_j)\phi^*(b_i))d\phi_i \wedge d\phi_j,$$

que, por sua vez é igual a

$$\left(\sum_{i=1}^n \phi^*(a_i) d\phi_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \phi^*(b_j) d\phi_j \right).$$

Mas esta expressão é igual a

$$\phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta),$$

completando, assim, a demonstração da proposição. \square

A última propriedade diz respeito à imagem inversa por uma aplicação composta. Sejam

$$\psi : W \rightarrow V \text{ e } \phi : V \rightarrow U$$

aplicações diferenciáveis, onde W , V e U são regiões de \mathbb{R}^k , \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Queremos calcular $(\phi \cdot \psi)^*(\omega)$, onde ω é uma 2-forma definida em U . Mas,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\omega)(p, v, w) = \omega((\phi \cdot \psi)(p), J_p(\phi \cdot \psi)(v), J_p(\phi \cdot \psi)(w)).$$

Contudo, pela regra da cadeia para funções de mais de uma variável

$$J_p(\phi \cdot \psi) = J_{\psi(p)}(\phi) J_p(\psi).$$

Assim,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\omega)(p, v, w) = \omega((\phi \cdot \psi)(p), J_{\psi(p)}(\phi) J_p(\psi)(v), J_{\psi(p)}(\phi) J_p(\psi)(w))$$

que é igual a

$$\phi^*(\omega)(\psi(p), J_p(\psi)(v), J_p(\psi)(w));$$

que, por sua vez, é

$$\psi^*(\phi^*(\omega))(p, v, w).$$

Portanto,

$$(\phi \cdot \psi)^*(\omega) = \psi^*(\phi^*(\omega)).$$

Note a inversão das posições de ϕ e ψ quando passamos de um lado para o outro da equação como, aliás, já acontecia para 1-formas.

Vamos encerrar enunciando, de maneira sistemática, todas as propriedades da imagem inversa de formas. Seja $\phi : U \rightarrow V$ uma aplicação diferenciável entre regiões $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Propriedade 1: A imagem inversa $\phi^* : \Omega^2(U) \rightarrow \Omega^2(V)$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais.

Propriedade 2: Se $\omega \in \Omega^1(U)$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\phi^*(f\omega) = \phi^*(f)\phi^*(\omega).$$

Propriedade 3: Se $\omega, \eta \in \Omega^1(U)$, então

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta).$$

Propriedade 4: Se $\psi : W \rightarrow U$ é uma aplicação diferenciável em uma região aberta $W \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\omega \in \Omega^2(V)$, então

$$(\phi \cdot \psi)^*(\omega) = \psi^*(\phi^*(\omega)).$$

3. Integração de 2-formas

Já estamos de posse de toda a maquinaria necessária para definir a integral de uma 2-forma diferencial qualquer sobre uma superfície.

3.1. 2-células e fronteiras. É hora de formalizar a noção de superfície parametrizada. Sejam $a < a'$, $b < b'$ e $\epsilon > 0$ números reais e

$$R = [a, a'] \times [b, b'],$$

um retângulo fechado. Uma 2-célula de \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável

$$\sigma : (a - \epsilon, a' - \epsilon) \times (b - \epsilon, b' - \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $\epsilon > 0$ é um número real. Como de hábito, não distinguiremos claramente entre a aplicação σ e a imagem de R por σ . Para os propósitos deste livro uma *superfície* é simplesmente uma 2-célula, e os dois termos serão usados de maneira intercambiável de agora em diante.

Todos temos uma noção intuitiva do que significa a fronteira (também conhecida como margem ou borda) de uma superfície. Sabemos também que nem toda superfície tem fronteira: um plano, porque se estende infinitamente em todas as direções; uma esfera, porque é fechada. Nossa meta é formalizar este conceito para o caso de 2-células.

Vamos começar com o próprio retângulo de parâmetros

$$R = [a, a'] \times [b, b'].$$

Um ponto está na fronteira de R se pertence a um dos quatro lados do retângulo, a saber

$$\begin{aligned}
 L_1 &= [a, a'] \times \{b\} \\
 L_2 &= \{a'\} \times [b, b'] \\
 L_3 &= [a, a'] \times \{b'\} \\
 L_4 &= \{a\} \times [b, b'].
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

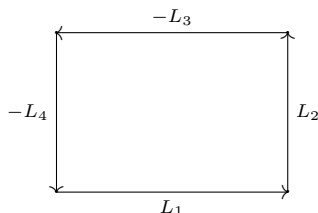
Cada um destes lados corresponde a um intervalo da reta real que foi trasladado de sua posição sobre o eixo, e podemos parametrizá-los facilmente, como mostra a tabela abaixo. Com isto, fizemos com que cada lado de R se tornasse

Segmento	Parametrização	Valores dos parâmetros
L_1	(t, b)	$a \leq t \leq a'$
L_2	(a', t)	$b \leq t \leq b'$
L_3	(t, b')	$a \leq t \leq a'$
L_4	(a, t)	$b \leq t \leq b'$

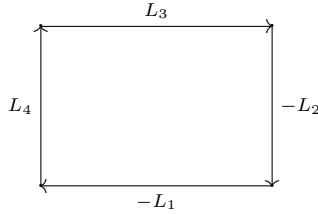
uma 1-célula. Encadeando estas 1-células, obteremos uma parametrização de toda a fronteira. Contudo, para que o encadeamento seja contínuo, o ponto inicial de uma 1-célula deve ser igual ao final da célula seguinte. Infelizmente isto não é verdade no caso das parametrizações acima. Por exemplo, L_2 acaba no ponto (a', b') , ao passo que L_3 começa em (a, b') . O problema é que a parametrização de L_3 induzida pela ordenação natural dos números reais no segmento $[a, a']$, percorre o segmento no sentido contrário ao desejada. De fato, L_3 termina em (a', b') , que deveria ser seu ponto inicial. Mas este problema é fácil de resolver: basta percorrer L_3 no sentido inverso ao que é dado pela parametrização induzida da ordenação natural em \mathbb{R} . Observe que o mesmo problema se dá com L_4 . Denotando por ∂R a fronteira de R considerada como 1-encadeamento, podemos concluir que

$$\partial R = L_1 + L_2 - L_3 - L_4.$$

O sentido em que cada um dos lados de R deve ser percorrido para que a fronteira seja este 1-encadeamento é ilustrado na figura abaixo.



Observe, entretanto, que esta não é a única maneira possível de se obter um encadeamento contínuo a partir dos lados de R . A outra possibilidade está ilustrada na figura abaixo.



Em nossa escolha original do sentido em que a fronteira de R é percorrida, avançamos ao longo do eixo x , e só depois subimos ao longo de y . Desta forma, a ordenação das coordenadas é respeitada (primeiro vem x , depois vem y). Por isso, podemos argüir que esta maneira de encadear os lados é ‘mais natural’ que aquela em que os lados são percorridos no sentido inverso. Por isso, assumiremos, de agora em diante, que

considerando R como conjunto de parâmetros, e assumindo que todos os seus lados são percorridos no sentido natural de crescimento dos números reais, sua fronteira será

$$\partial R = L_1 + L_2 - L_3 - L_4.$$

Naturalmente, R também pode ser encarado como uma 2-célula. Porém, antes de tratar deste caso, precisamos definir o que é a fronteira de uma 2-célula qualquer.

Seja $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma 2-célula. A *fronteira* de σ é a forma reduzida do 1-encadeamento

$$\sigma(L_1) + \sigma(L_2) - \sigma(L_3) - \sigma(L_4),$$

e vamos denotá-la por $\partial\sigma$. Note que, na definição da fronteira do retângulo de parâmetros não aparecia a expressão ‘forma reduzida’. A razão é simples: não existe a possibilidade de cancelamento entre as várias 1-células na fronteira de R . Entretanto, como veremos adiante, isto freqüentemente ocorre no caso geral.

Vejam alguns exemplos. Se a 2-célula for o parabolóide $z = x^2 + y^2$, com a parametrização σ_p descrita em (1.10), então os lados do retângulo são dados por

$$(3.2) \quad \begin{aligned} L_1 &= [0, 1] \times \{0\} \\ L_2 &= \{1\} \times [0, 2\pi] \\ L_3 &= [0, 1] \times \{2\pi\} \\ L_4 &= \{0\} \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Contudo, $\sigma_p(L_4) = (0, 0, 0)$, de modo que a fronteira de σ_p seria

$$\sigma_p(L_1) + \sigma_p(L_2) - \sigma_p(L_3).$$

Isto nos dá uma curva em 3 partes, quando estávamos esperando apenas uma: a circunferência de raio 1 e centro em $(0, 0, 1)$, contida no plano $z = 1$. É fácil ver que esta circunferência corresponde a $\sigma_p(L_2)$, uma vez que em L_2

o parâmetro r assume, apenas, o valor constante 1. Já L_1 e L_3 apresentam o fenômeno oposto: o ângulo está fixo e o raio varia. Portanto, as imagens destes dois lados nos dão um arco de parábola no plano $y = 0$, contido entre os planos $z = 0$ e $z = 1$. Entretanto, $\sigma_p(L_1)$ percorre o arco de baixo para cima, ao passo que $-\sigma_p(L_3)$ percorre o mesmo arco de cima para baixo. Portanto, estas células se cancelam, deixando apenas $\sigma_p(L_2)$ como fronteira para o parabolóide.

Uma situação um pouco diferente ocorre com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, que pode ser parametrizado pela aplicação

$$\sigma_c : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\sigma_c(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z).$$

Neste caso os lados do retângulo de parâmetros são

$$L_1 = [0, 2\pi] \times \{0\}$$

$$L_2 = \{2\pi\} \times [0, 1]$$

$$L_3 = [0, 2\pi] \times \{1\}$$

$$L_4 = \{0\} \times [0, 1].$$

Portanto, a fronteira deveria ser

$$\sigma_c(L_1) + \sigma_c(L_2) - \sigma_c(L_3) - \sigma_c(L_4).$$

Desta vez nenhum dos três lados se reduz a um ponto. Pelo contrário, $\sigma_c(L_1)$ e $\sigma_c(L_3)$ representam circunferências; a primeira no plano $z = 0$, a segunda em $z = 1$. Olhando de um ponto acima do plano $z = 0$ veríamos ambas estas circunferências sendo percorridas em sentido anti-horário. Por outro lado, $\sigma_c(L_2)$ e $\sigma_c(L_4)$ representam o segmento de reta que vai de $(1, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$, e que está contido na superfície do cilindro. Como estes segmentos estão sendo percorridos em sentidos opostos, podemos cancelá-los, obtendo

$$\sigma_c(L_1) - \sigma_c(L_3)$$

como fronteira para o cilindro. Portanto, a fronteira do cilindro é formada por duas circunferências; a de baixo percorrida no sentido anti-horário, a de cima no sentido horário.

3.2. Orientando uma 2-célula. Antes de poder definir encadeamentos de 2-células, precisamos decidir o que significa orientar uma tal célula. Só assim podemos falar de “menos” uma 2-célula. A saída mais simples é recorrer à orientação da fronteira da célula, que é induzida a partir da orientação da fronteira do seu retângulo de parâmetros. Esta última, contudo, é sempre feita de uma maneira padronizada, como convencionamos no parágrafo anterior.

Antes de formalizar isto, vejamos o que ocorre quando a 1-célula é o próprio retângulo de parâmetros. Porém, quando consideramos o retângulo

como como 1-célula, devemos parametrizá-lo. A maneira natural de fazer isto é dada pela fórmula

$$s(1, 0) + t(0, 1), \text{ onde } (s, t) \in R = [a, a'] \times [b, b'].$$

Sob esta parametrização, L_1 e L_2 são percorridos no sentido positivo do eixo, de modo que a fronteira desta 1-célula é a mesma de R . Para obter uma parametrização cuja fronteira é percorrida no sentido oposto basta forçar um dos lados do retângulo a ser percorrido no sentido oposto ao usual; por exemplo,

$$(a + a' - s)(1, 0) + t(0, 1), \text{ onde } (s, t) \in R = [a, a'] \times [b, b'].$$

Desta vez, só obtemos uma fronteira contínua a partir do ponto (a, b) , se começarmos subindo pelo eixo y antes de avançar pela horizontal. Assim, a fronteira desta 1-célula é percorrida no sentido oposto ao do retângulo R . Em outras palavras, considerando o retângulo como 1-célula, sua fronteira sob esta nova parametrização é

$$L_3 + L_4 - L_2 - L_1 = -\partial R.$$

Por isso, convencionaremos chamar de $-R$ o retângulo $[a, a'] \times [b, b']$ considerado como 1-célula sob esta parametrização. Já R designará o retângulo sob a parametrização usual. Com isto, R está representando duas coisas diferentes: o retângulo de parâmetros $[a, a'] \times [b, b']$, e o mesmo retângulo visto como 1-célula sob a parametrização natural. Como a fronteira é a mesma nos dois casos, não corremos nenhum risco, apesar da ambigüidade da notação.

Passando ao caso geral, seja

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

uma 2-célula e

$$\partial\sigma = \sigma(L_1) + \sigma(L_2) - \sigma(L_3) - \sigma(L_4),$$

sua fronteira. Tomando o caso do retângulo como inspiração, definimos

$$-\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como sendo a 2-célula em $R = [a, a'] \times [b, b']$ para a qual

$$\sigma(s, t) = \sigma(a + a' - s, t).$$

Obedecendo à convenção que determina como R deve ser percorrido, verificamos que

$$\partial(-\sigma) = \sigma(L_3) + \sigma(L_4) - \sigma(L_1) - \sigma(L_2),$$

como seria de esperar. Por isso, diremos que $-\sigma$ tem a *orientação inversa* de σ .

A orientação de uma 2-célula está relacionada ao seu vetor normal, como é fácil de ver no caso de um retângulo parametrizado S . Denotaremos por $v_j(S)$ o vetor unitário paralelo ao lado L_j de S , cujo sentido coincide com aquele

segundo o qual o lado é percorrido na orientação definida pela parametrização de S . Com isto,

$$v_1(R) = -v_3(R) = e_1 \text{ e } v_2(R) = -v_4(R) = e_2,$$

ao passo que

$$v_1(-R) = -v_3(-R) = -e_1 \text{ e } v_2(-R) = v_4(-R) = e_2.$$

Esboçando estes vetores com centro na origem, obtemos



A regra da mão direita nos dá,

$$v_j(R) \times v_{j+1}(R) = e_3, \text{ ao passo que, } v_j(-R) \times v_{j+1}(-R) = -e_3,$$

qualquer que seja $1 \leq j \leq 4$. Isto pode ser formulado de uma maneira mais fácil de lembrar observando simplesmente que, se os dedos da mão direita percorrem a fronteira de S , então o polegar vai apontar sempre no sentido $v_j(S) \times v_{j+1}(S)$, quaisquer que sejam S e $1 \leq j \leq 4$.

Podemos facilmente estender estas observações a uma 2-célula geral

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Lembre-se que os vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s}(p) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial t}(p),$$

são tangentes a σ em um ponto $p \in R$, desde que não se anulem neste ponto. Portanto, sob a hipótese de que os vetores não se anulam em p , temos que o produto vetorial

$$N_p(\sigma) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(p) \times \frac{\partial \sigma}{\partial t}(p),$$

é perpendicular ao plano tangente a σ em p . Diremos que se trata de um vetor *normal* a σ em p . Como

$$\frac{\partial(-\sigma)}{\partial u}(p) = -\frac{\partial \sigma}{\partial s}(p) \text{ e } \frac{\partial(-\sigma)}{\partial v}(p) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}(p),$$

temos que

$$N_p(-\sigma) = -N_p(\sigma).$$

Geometricamente isto significa que o vetor normal agora aponta para o lado oposto da superfície.

Para poder relacionar o vetor normal à fronteira, como fizemos no caso do retângulo, redefinimos v_j como sendo o vetor tangente à 1-célula $\sigma(L_j)$.

Parametrizando os lados de R como

$$L_1 = (0, 0) + t_1(1, 0)$$

$$L_2 = (0, 0) + t_2(0, 1)$$

$$L_3 = (0, b') + (a' + a - t_1)(1, 0)$$

$$L_4 = (a', 0) + (b' + b - t_2)(0, 1)$$

onde $t_1 \in [a, a']$ e $t_2 \in [b, b']$ e assumindo que $p \in L_j$, sejam

$$v_j(\sigma, p) = \frac{\partial \sigma(L_j)}{\partial t_1}(p) \text{ e } v_{j+1}(\sigma, p) = \frac{\partial \sigma(L_{j+1})}{\partial t_2}(p)$$

para $j = 1, 3$. Observe que estes vetores apontam no sentido em que a fronteira de σ é percorrida. Como $-\sigma(t_1, t_2) = \sigma(a + a' - t_1, t_2)$ temos

$$v_j(-\sigma, p) = -\frac{\partial \sigma(L_j)}{\partial t_1}(p) \text{ e } v_{j+1}(-\sigma, p) = \frac{\partial \sigma(L_{j+1})}{\partial t_2}(p)$$

para $j = 1, 3$. Portanto,

$$v_j(-\sigma, p) = v_j(\sigma, p) \text{ e } v_{j+1}(-\sigma, p) = v_{j+1}(\sigma, p).$$

Supondo, agora, que $p \in L_j \cap L_{j+1}$, para $j = 1, 3$, concluímos que se

$$N_j(\sigma, p) = v_j(\sigma, p) \times v_{j+1}(\sigma, p) = -(v_j(-\sigma, p) \times v_{j+1}(-\sigma, p)) = N_j(-\sigma, p).$$

Um argumento semelhante se aplica aos outros dois pontos de interseção de lados da fronteira de R . Resumindo:

se, na vizinhança de um ponto dado, o movimento da mão direita acompanha a direção em que a fronteira de σ é percorrida, então o polegar aponta na direção do vetor normal a σ naquele ponto.

3.3. Integração de 2-formas. Neste parágrafo veremos como integrar uma 2-forma em 2-células. Começaremos com o caso mais simples possível: uma 2-forma definida em um retângulo de \mathbb{R}^2 .

Seja U uma região do plano, e digamos que

$$R = [a, a'] \times [b, b'] \subseteq U.$$

Dada $\eta \in \Omega^2(U)$, queremos definir a integral de η no retângulo R . Se s e t são as coordenadas em \mathbb{R}^2 , podemos escrever

$$\eta = f(s, t)ds \wedge dt.$$

Definimos, então, a integral de η em R como sendo a integral da função f neste mesmo retângulo; isto é

$$\int_R \eta = \int_a^{a'} \int_b^{b'} f ds dt.$$

Esta é a base de nossa definição: o caso geral é reduzido a este caso particular através do cálculo de uma imagem inversa. Em outras palavras, se

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

é uma 2-célula cuja imagem está contida em uma região U de \mathbb{R}^n , definimos a integral de ω em σ por

$$(3.3) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_R \sigma^*(\omega).$$

Precisamos descobrir de que maneira a orientação da 2-célula afeta o cálculo da integral. Para isto, consideramos uma 2-célula σ , definida sobre o retângulo

$$R = [a, a'] \times [b, b']$$

cuja imagem está contida em uma região U de \mathbb{R}^n . Digamos que s_1 e s_2 são os parâmetros de σ . Se $\omega \in \Omega^2(U)$, então $-\sigma$ tem domínio R e é definida por $-\sigma(t_1, t_2) = \sigma(a + a' - t_1, t_2)$. Desta forma

$$(-\sigma)^*(\omega)(q) = \omega(\sigma(q), -J_q(\sigma)e_1, J_q(\sigma)e_2)dt_1 \wedge dt_2,$$

onde $q = (t_1, t_2)$. Portanto,

$$(-\sigma)^*(\omega)(q) = -\omega(\sigma(q), J_q(\sigma)e_1, J_q(\sigma)e_2)dt_1 \wedge dt_2 = -(\sigma)^*(\omega)(q),$$

já que a troca de entradas em ω leva a uma troca de sinal da imagem inversa. Assim,

$$\int_{R^t} (-\sigma)^*(\omega) = - \int_R (\sigma)^*(\omega),$$

que é equivalente a dizer que

$$\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega.$$

3.4. 2-encadeamento. Com o que vimos estamos aptos a definir um 2-encadeamento como sendo uma expressão da forma

$$(3.4) \quad E = c_1\sigma_1 + \cdots + c_m\sigma_m,$$

onde os c s são números inteiros e os σ s são 2-células contidas em uma região U de \mathbb{R}^n . O sinal do coeficiente nos diz se a célula está sendo percorrida no sentido dado por sua parametrização, ou no sentido oposto. Se $\omega \in \Omega^1(U)$, definimos

$$\int_E = c_1 \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + c_m \int_{\sigma_m} \omega.$$

Como no caso de 1-encadeamentos, a definição de integral sobre um encadeamento justifica a utilização das seguintes propriedades da adição de 2-células. Se σ_1, σ_2 e σ_3 são 2-células em U e $k \in \mathbb{Z}$, então:

- $(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3 \equiv \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3)$;
- $\sigma_1 + \sigma_2 \equiv \sigma_2 + \sigma_1$;
- $k\sigma_1 + \sigma_1 \equiv (k+1)\sigma_1$;
- $0\sigma_1 \equiv 0$;
- se a imagem de σ_1 é uma curva, então $\sigma_1 \equiv 0$.

Usamos \equiv em lugar de um simples sinal de igualdade para deixar claro que cada uma destas propriedades é derivada do comportamento de uma integral calculada sobre um encadeamento. Na última das propriedades acima, o que era *ponto* no caso de 1-célula virou *curva*, agora que nossas células têm dimensão dois. Diremos que um encadeamento está em *forma reduzida* se eliminamos todas as parcelas que correspondem a pontos, e cancelamos todos os pares de células iguais com sinais opostos.

Em princípio estamos admitindo 2-células quaisquer entre os σ s. Na prática, porém, o único caso que nos interessa é aquele em que as células são disjuntas ou se intersectam apenas em pontos da fronteira. Neste último caso, podemos considerar (3.4) como uma coleção de 2-células às quais estamos associando multiplicidades que nos dizem em que sentido, e quantas vezes, aquela 2-célula está sendo percorrida. A fronteira do 2-encadeamento E descrito em (3.4) é definida pela fórmula

$$\partial E \equiv c_1 \partial(S_1) + \cdots + c_m \partial(S_m),$$

onde, como sempre, estaremos considerando a forma reduzida da expressão à direita.

Considere, por exemplo, a superfície correspondente à colagem das três faces de um cubo de lado um que estão contidas nos planos coordenados, como mostra a figura.

Queremos representar esta colagem como um 2-encadeamento. Digamos que $1 \leq i < j \leq 3$. A face σ_{ij} , contida no plano $x_i x_j$, pode ser parametrizada como

$$\sigma_{ij}(s, t) = se_i + te_j,$$

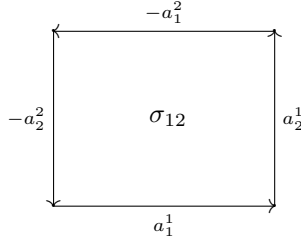
onde $e_i, e_j \in \varepsilon$, a base canônica de \mathbb{R}^3 . Por causa de nossa convenção de que $i < j$, o vetor normal N_{ij} a σ_{ij} , satisfaz

$$N_{ij} = e_i \times e_j = \begin{cases} e_k & \text{se } (i, j) = (1, 2), (2, 3) \\ -e_k & \text{se } (i, j) = (1, 3) \end{cases}$$

onde $k \neq i, j$. O problema é que, se encadearmos as 2-células assim parametrizadas, a fronteira não será a esperada. Por exemplo, σ_{13} e σ_{23} têm um lado comum ℓ sobre o eixo x_3 . Como este lado é interno à colagem das faces, não deve fazer parte da fronteira do encadeamento. Entretanto, ℓ está orientado no mesmo sentido, tanto em σ_{13} , quanto em σ_{23} , de forma que não será cancelado na fronteira de $\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23}$.

Para evitar isto, precisamos reorientar algumas destas 2-células, o que nos obriga a listar os lados de cada face; isto é, as arestas do cubo. Escreveremos a_i^i para a aresta que está ao longo do eixo x_i . A aresta oposta a a_i^i na face σ_{ij} será denotado por a_i^j . Em ambos os casos vamos assumir que a 1-célula correspondente aponta no sentido do eixo x_i . Usando esta notação, os lados de

σ_{12} podem ser enumerados como na figura.



Assim,

$$\partial\sigma_{12} = a_1^1 + a_2^1 - a_1^2 - a_2^2.$$

Procedendo de maneira semelhante para as outras faces, constatamos que

$$\partial\sigma_{23} = a_2^2 + a_3^2 - a_2^3 - a_3^3 \quad \text{e que} \quad \partial\sigma_{13} = a_1^1 + a_3^1 - a_1^3 - a_3^3.$$

As arestas que devem se cancelar no encadeamento destas três faces do cubo são a_1^1 , a_2^2 e a_3^3 . Mas, para que isto ocorra quando somamos as fronteiras acima, basta inverter o sinal de σ_{13} . Portanto, o encadeamento desejado é

$$E = \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{13},$$

que tem como fronteira

$$a_2^1 - a_1^2 + a_3^2 - a_2^3 - a_1^3 + a_3^3.$$

Voltando aos vetores normais, constatamos que apenas N_{13} não aponta para dentro do cubo – caso o cubo estivesse fechado, é claro. Isto nos dá uma maneira fácil de lembrar como orientar as faces para obter o 2-encadeamento correto: basta que todas as faces tenham o vetor orientado para dentro do cubo, ou para fora do cubo. No primeiro caso, temos o 2-encadeamento E acima; no segundo caso, obtemos $-E$.

O cubo que vimos considerando tem outras três faces. Escrevendo σ_{ij}^o para a face oposta a σ_{ij} , verificamos que tanto

$$E' = -\sigma_{12}^o - \sigma_{23}^o + \sigma_{13}^o,$$

quanto $-E'$ produzem um 2-encadeamento com a fronteira correta. Contudo, os vetores normais em E' apontam todos para dentro do cubo, e $\partial E' = -\partial E$. Portanto,

$$\partial(E + E') = 0,$$

de modo que não há fronteira neste caso. Isto não é surpreendente, afinal um cubo não tem mesmo fronteira.

3.5. Encadeamentos fechados. Diremos que um 2-encadeamento cuja fronteira é zero é *fechado*. Já vimos que isto ocorre no caso do cubo, outro exemplo, é o 2-encadeamento do parabolóide σ_p , definido no §3.1, com o disco σ_d definido, sobre o mesmo retângulo de parâmetros R de σ_p , por

$$\sigma_d(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1).$$

Neste caso, os pontos de interseção de σ_p com σ_d coincidem com os pontos da fronteira de ambas as células, e formam a circunferência de raio 1 e centro em $(0, 0, 1)$. Como $\sigma_p(L_4) = (0, 0, 0)$,

$$\partial\sigma_p \equiv \sigma_p(L_1) + \sigma_p(L_2) - \sigma_p(L_3) \equiv \sigma_p(L_2).$$

Já no caso do disco, $\sigma_d(L_4)$ degenera em um ponto (a origem), ao passo que $\sigma_d(L_1)$ e $\sigma_d(L_3)$ correspondem ao segmento de reta que vai da origem ao ponto $(1, 0, 1)$, percorrido em sentidos opostos. Com isso,

$$\partial\sigma_d \equiv \sigma_p(L_2).$$

Portanto, $\sigma_p + \sigma_d$ não é fechada, ao passo que $-\sigma_p + \sigma_d$ e $\sigma_p - \sigma_d$ são fechadas.

Naturalmente o conceito de encadeamento fechado também se aplica a uma única 2-célula; como é o caso da esfera. Contudo, neste caso nos deparamos com a necessidade de *orientar a fronteira de uma superfície sem fronteira*. Nem podemos descartar este caso sumariamente, assumindo, por exemplo, que se não há fronteira, não há necessidade de nos preocuparmos com a orientação da superfície. Afinal, a orientação da célula afeta o sinal da integral. Há duas maneiras de contornar este problema.

A primeira, consiste em recorrer à relação entre orientação da fronteira e vetor normal à célula. Como vimos no §(3.2), ao decidir qual o sentido no qual a fronteira do retângulo de parâmetros está sendo percorrida, fizemos uma escolha entre um dos dois vetores normais à 2-célula. Como isto depende apenas da parametrização da célula e da orientação da fronteira do retângulo, podemos utilizar esta definição mesmo se a fronteira da 2-célula for zero. Neste caso, adotaremos a convenção:

a escolha da orientação de uma superfície fechada deve ser feita de modo que o vetor normal sempre aponte para fora da superfície.

Considere, por exemplo, o que acontece com a esfera σ_e de raio 1 e centro na origem. Utilizaremos a parametrização de σ_e em coordenadas esféricas

$$\sigma_e(\phi, \theta) = (\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi)).$$

definida no retângulo

$$R = [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

Neste caso, o vetor normal será dado por

$$N_p(\sigma_e) = \frac{\partial\sigma_e}{\partial\phi}(p) \times \frac{\partial\sigma_e}{\partial\theta}(p).$$

Um cálculo simples mostra que

$$N_p(\sigma_e) = \sin(\phi)\sigma_e(\theta, \phi).$$

Como o seno é positivo para $0 \leq \phi \leq \pi$, temos que $N_p(\sigma_e)$ aponta sempre no mesmo sentido que $\sigma_e(\theta, \phi)$; isto é, para fora da superfície.

Podemos chegar ao mesmo resultado representando uma superfície fechada como encadeamento de duas ou mais células, cada uma das quais tem

uma fronteira não nula. Naturalmente a orientação de cada uma destas duas células precisa ser feita de maneira que:

- as fronteiras de células adjacentes tenham orientações opostas, e
- o vetor normal aponte para fora em cada uma das células em que a superfície foi subdividida.

Por exemplo, a esfera σ_e pode ser subdividida em duas células com fronteira, cada uma delas correspondendo a um hemisfério. Neste caso, o hemisfério superior H_s é obtido restringindo-se a parametrização σ_e da esfera definida no retângulo

$$[0, \pi/2] \times [0, 2\pi].$$

H_s tem fronteira

$$\partial(H_s) \equiv H_s(L_1) + H_s(L_2) - H_s(L_3) - H_s(L_4),$$

onde os L s correspondem aos lados do retângulo $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ enumerados da maneira usual. Contudo,

$$H_s(L_1) \equiv -H_s(L_3) \text{ e } H_s(L_4) \equiv 0,$$

de modo que

$$\partial(H_s) \equiv H_s(L_2).$$

Mas esta curva corresponde à circunferência da base do hemisfério, percorrida no sentido anti-horário. Portanto, neste caso, o vetor normal aponta sempre para fora do hemisfério H_s . Restringindo, agora, σ_e ao retângulo

$$[\pi, \pi/2] \times [0, 2\pi],$$

obtemos o hemisfério inferior H_i , parametrizado de modo que o vetor normal aponte para fora (ou para baixo, se você preferir), e com fronteira

$$\partial(H_i) \equiv -H_s(L_2).$$

Encadeando os dois hemisférios assim orientados, obtemos a orientação desejada para a esfera.

Mesmo no caso em que a superfície não é fechada, usaremos as expressões lado de fora e lado de dentro da superfície. Neste caso, o lado de fora designa apenas aquele para o qual aponta o vetor normal. Por exemplo, parametrizando o cilindro σ_c como no §3.1, temos um vetor normal que aponta para o que normalmente chamamos de parte de dentro do cilindro. Portanto, uma parametrização mais natural seria dada por $-\sigma_c$.

Encerramos este parágrafo com a surpreendente revelação de que certos objetos que chamamos de superfícies não admitem um lado de dentro, nem um lado de fora. O exemplo mais simples é a chamada *faixa de Möbius*. Para construí-la, tome uma faixa de papel de uns 5 cm de largura e uns 20 cm de comprimento. Escolha um dos lados deste retângulo de papel, que chamaremos de lado de cima, e desenhe sobre ele a orientação anti-horária da fronteira. Para obter uma superfície com um lado de cima e um lado de baixo, precisaríamos colar as extremidades da fita de maneira que estivessem orientadas em sentidos opostos. Se fizéssemos isto neste caso, obteríamos um cilindro. Ao invés disto,

faremos a colagem de modo que as orientações nas extremidades coincidam. Para que isto seja possível você precisará torcer a fita de papel. O resultado é uma faixa como a da figura 1, que é usada como logotipo pelo IMPA.



FIGURA 1. Logotipo do IMPA

A razão pela qual esta fita não tem um lado de dentro, e um lado de fora, é que não há dois lados, mas apenas um. Imagine uma formiga que começasse a caminhar pelo lado que convencionamos chamar “de cima” no retângulo original. No momento em que a formiga inicia sua caminhada transformamos o retângulo na faixa. Como as extremidades da faixa foram emendadas, a formiga poderá continuar sua caminhada. Entretanto, ao fazer isto sobre a faixa de Möbius ela terá passado para o que era o “lado de baixo” no retângulo original. Você pode facilmente simular o comportamento da formiga traçando um caminho sobre o papel da fita.

Não podemos integrar formas sobre superfícies deste tipo porque, como veremos no próximo parágrafo, precisamos saber para que lado a normal à superfície aponta. Como fenômenos como o da fita de Möbius não podem ocorrer sobre 2-células, não precisamos nos preocupar mais com este tipo de problema.

Vamos calcular alguns exemplos como ilustração. Considere, em primeiro lugar, o encadeamento $\sigma_d - \sigma_p$, do parabolóide com o disco definido no §3.4. Dada

$$\omega = x^2 dy \wedge dz,$$

calcularemos

$$\int_{\sigma_d - \sigma_p} \omega.$$

Como esta integral é igual a

$$\int_{\sigma_d} \omega - \int_{\sigma_p} \omega,$$

basta determinar cada uma destas, separadamente, e subtraí-las. Usando as parametrizações definidas no §3.1, temos que

$$\sigma_p(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2),$$

ao passo que

$$\sigma_d(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1),$$

ambas definidas em $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Começando pelo parabolóide,

$$\sigma_p^*(\omega) = r^2 \cos^2(\theta) d(r \sin(\theta) \wedge d(r^2)).$$

Como

$$d(r \sin(\theta) \wedge d(r^2)) = (r \cos(\theta) d\theta + \sin(\theta) dr) \wedge 2r dr,$$

e $dr \wedge dr = 0$, concluímos que

$$\sigma_p^*(\omega) = (2r^4 \cos^2(\theta) \cos(\theta)) d\theta \wedge dr.$$

Assim,

$$\int_{\sigma_p} \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^4 \cos^3(\theta) d\theta dr.$$

Calculando a integral,

$$\int_{\sigma_p} \omega = \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) = \frac{2}{5} \left[\frac{(\cos^2(\theta) + 2) \sin(\theta)}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Passando, agora, ao disco

$$\sigma_p^*(\omega) = 0,$$

já $\sigma_p^*(dz) = 0$. Com isto,

$$\int_{\sigma_d - \sigma_p} \omega = \int_{\sigma_d} \omega - \int_{\sigma_p} \omega = 0.$$

Como um segundo exemplo, calcularemos a integral

$$\int_S \frac{1}{z^2} dx \wedge dy,$$

onde S é a superfície esférica de raio unitário e centro na origem. O primeiro impulso é pensar em usar coordenadas esféricas. Neste caso teríamos, simplesmente, a integral de uma 2-forma em uma 2-célula. Contudo, neste exemplo em particular, os cálculos ficam mais fáceis se usarmos coordenadas cilíndricas. O único problema é que, para fazer isto, precisamos parametrizar cada hemisfério separadamente. Assim, acabamos tendo que tratar a esfera como um encadeamento de seus dois hemisférios. Começamos por parametrizar os hemisférios sobre o retângulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, o que nos dá

$$H_s(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{1 - r^2}),$$

para o hemisfério superior, e

$$H_i(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -\sqrt{1 - r^2}),$$

para o inferior. Os lados de R são os mesmos de (3.2), e é fácil ver que $H_s(L_1)$ e $H_s(L_3)$ correspondem ao arco que vai de $(0, 0, 1)$ a $(1, 0, 0)$, percorridos em sentidos opostos. Já $H_s(L_2)$ é a circunferência que representa a interseção da esfera com o plano $z = 0$. Finalmente, $H_s(L_4)$ é apenas o ponto $(0, 0, 1)$. Isto significa que

$$\partial H_s \equiv H_s(L_2).$$

Um argumento semelhante mostra que

$$\partial H_i \equiv H(L_2).$$

Como a circunferência gira para no mesmo sentido em ambas as parametrizações, concluímos que

$$S = H_s - H_i,$$

para que a normal sempre aponte para fora da esfera, como convecionamos fazer no §3.4. Temos, assim, que

$$\int_S \frac{1}{z^2} dx \wedge dy = \int_{H_s} \frac{1}{z^2} dx \wedge dy - \int_{H_i} \frac{1}{z^2} dx \wedge dy.$$

Contudo,

$$H_s^* \left(\frac{1}{z^2} dx \wedge dy \right) = \sqrt{1 - r^2} d(r \cos(\theta)) \wedge d(r \sin(\theta)).$$

Mas,

$$d(r \cos(\theta)) \wedge d(r \sin(\theta)) = (-r \sin(\theta) d\theta + \cos(\theta) dr) \wedge (r \cos(\theta) d\theta + \sin(\theta) dr),$$

é igual a $-r d\theta \wedge dr$ uma vez que

$$\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1.$$

Portanto,

$$H_s^* \left(\frac{1}{z} dx \wedge dy \right) = -\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} d\theta \wedge dr$$

Como a única diferença entre as parametrizações H_s e H_i está no sinal da última coordenada, teremos que

$$H_i^* (z dx \wedge dy) = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} d\theta dr$$

Calculando a integral

$$\int_{H_s} z dx \wedge dy = \int_R H_s^* (z dx \wedge dy)$$

obtemos

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} d\theta dr = -2\pi \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^1 = 2\pi;$$

donde

$$-\int_{H_i} z dx \wedge dy = \int_{H_s} z dx \wedge dy = 2\pi.$$

Mas isto significa que

$$\int_S z dx \wedge dy = \int_{H_s} z dx \wedge dy - \int_{H_i} z dx \wedge dy = 4\pi.$$

3.6. Propriedades da integral de uma 2-forma. Há algumas propriedades elementares das integrais de 2-formas que precisamos considerar. Suponha que U seja uma região de \mathbb{R}^n . Dadas 2-formas diferenciais ω e η em U , e um escalar $k \in \mathbb{R}$, queremos calcular

$$\int_{\sigma} (\omega + k\eta),$$

onde S é uma 2-célula sobre um retângulo R do plano, cuja imagem está contida em U . Por definição

$$\int_{\sigma} (\omega + k\eta) = \int_R \sigma^*(\omega + k\eta).$$

Assim, das propriedades da imagem inversa, segue que

$$\int_{\sigma} (\omega + k\eta) = \int_R \sigma^*(\omega) + k\sigma^*(\eta).$$

Mas, do lado direito desta equação, temos a integral dupla de funções de duas variáveis. Logo,

$$\int_R \sigma^*(\omega) + k\sigma^*(\eta) = \int_R \sigma^*(\omega) + k \int_R \sigma^*(\eta).$$

Reescrevendo tudo isto em termos de integrais ao longo de σ temos

$$\int_{\sigma} (\omega + k\eta) = \int_{\sigma} \omega + k \int_{\sigma} \eta,$$

como, aliás, seria de esperar. Como a integral sobre um encadeamento é igual à soma das integrais sobre suas parcelas (respeitado sentido da fronteira), segue dos cálculos acima que

$$\int_E (\omega + k\eta) = \int_E \omega + k \int_E \eta,$$

para qualquer encadeamento E cuja imagem está contida em U .

As outras propriedades que desejamos estudar estão relacionadas a mudanças nas 2-células. Em primeiro lugar, que efeito tem uma reparametrização da 2-células sobre a integral? Antes de formular esta pergunta com exatidão, é conveniente introduzir a seguinte definição. Para manter a coerência com a noção de superfície descrita no §3.1, usaremos a expressão

$$\text{a aplicação diferenciável } \gamma : [a, a'] \times [b, b'] \rightarrow [c, c'] \times [k, k']$$

para designar uma função diferenciável

$$\gamma : (a - \epsilon, a' + \epsilon) \times (b - \epsilon, b' + \epsilon) \rightarrow (c - \epsilon, c' + \epsilon) \times (k - \epsilon, k' + \epsilon)$$

onde ϵ é um número real positivo. Suponhamos, além disso, que:

- γ é bijetiva e
- leva o interior de $[a, a'] \times [b, b']$ no interior de $[c, c'] \times [k, k']$.

Se σ e γ são como acima, então, $\sigma \cdot \gamma$ define uma parametrização diferente da 2-célula σ . Isto é, $\sigma \cdot \gamma$ é uma superfície cuja imagem é a mesma de σ . A pergunta pode, então, ser reformulada como: qual a relação entre a integral de uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(U)$ na 2-célula $\sigma \cdot \gamma$ com a integral da mesma forma ao longo de σ ?

Para responder a esta pergunta, calculamos a integral desejada usando as várias propriedades que já conhecemos. Como,

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \omega = \int_a^{a'} \int_b^{b'} (\sigma \cdot \gamma)^* \omega,$$

devemos calcular primeiro a imagem inversa $(\sigma \cdot \gamma)^* \omega$. Usando a propriedade 4 do final do §2.7, temos que

$$(\sigma \cdot \gamma)^* \omega = \gamma^*(\sigma^*(\omega)).$$

Como $\sigma^*(\omega)$ é uma 2-forma no plano, podemos escrevê-la como $g ds_1 \wedge ds_2$, onde g é uma função dos parâmetros s_1 e s_2 de σ . Nesta notação,

$$\gamma^*(\sigma^*(\omega)) = \gamma^*(g ds_1 \wedge ds_2) = (g \cdot \gamma) d\gamma_1 \wedge d\gamma_2,$$

onde γ_1 e γ_2 são as funções coordenadas de γ . Um cálculo simples mostra que

$$(3.5) \quad d\gamma_1 \wedge d\gamma_2 = \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2} \right) ds_1 \wedge ds_2.$$

Contudo, o jacobiano de γ é

$$J(\gamma) = \begin{bmatrix} \partial \gamma_1 / \partial s_1 & \partial \gamma_1 / \partial s_2 \\ \partial \gamma_2 / \partial s_1 & \partial \gamma_2 / \partial s_2 \end{bmatrix};$$

de forma que (3.5) pode ser reescrita como

$$d\gamma_1 \wedge d\gamma_2 = \det(J(\gamma)) ds_1 \wedge ds_2.$$

Portanto,

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \omega = \int_a^{a'} \int_b^{b'} (g \cdot \gamma) \det(J(\gamma)) ds_1 ds_2.$$

Mas, se

$$\det(J(\gamma))(p) > 0 \text{ para todo } p \in [a, a'] \times [b, b'],$$

então, pela fórmula de mudança de variáveis em integrais duplas,

$$\int_a^{a'} \int_b^{b'} (g \cdot \gamma) \det(J(\gamma)) ds_1 ds_2 = \int_c^{c'} \int_k^{k'} g dt_1 dt_2.$$

Contudo esta última integral é, por definição, a integral de ω sobre σ . Provamos, portanto, a seguinte fórmula de mudança de variáveis para integrais de 2-formas.

FÓRMULA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS. *Sejam R e R' retângulos do plano e $\gamma : R \rightarrow R'$ uma aplicação diferenciável bijetora para a qual:*

- *o determinante do jacobiano é sempre positivo em todo ponto de R ,*
- e*
- *o interior de R é levado por γ no interior de R' .*

Se

$$\sigma : R \rightarrow U,$$

é uma 2-célula contida em uma região U de \mathbb{R}^n , então

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

Em outras palavras, a reparametrização de uma superfície por uma aplicação diferenciável cujo determinante jacobiano é positivo não altera o valor da integral de uma 2-forma ao longo daquela superfície.

Como consequência desta fórmula mostraremos que, ao provar um resultado sobre integração de 2-formas, sempre podemos supor que a superfície tem o retângulo $[0, 1]^2$ como espaço de parâmetros.

PROPOSIÇÃO. *Seja $R = [a, a'] \times [b, b']$ um retângulo e ω uma 2-forma definida em uma região aberta do plano que contém R . Então existe uma aplicação diferenciável $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow R$, tal que*

$$\int_R \omega = \int_{[0, 1]^2} \gamma^*(\omega).$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina $\gamma : [0, 1]^2 \rightarrow R$ por $\gamma(s, t) = (a, b) + s(a' - a, 0) + t(0, b' - b)$. Temos que

$$J(\gamma) = \begin{bmatrix} a' - a & 0 \\ 0 & b' - b \end{bmatrix};$$

donde $\det(J(\gamma)) = (a' - a)(b' - b) > 0$, pois $a' > a$ e $b' > b$. A proposição segue imediatamente da fórmula de mudança de variáveis. \square

4. Teorema de Stokes

Nesta seção provamos nossa primeira versão do teorema de Stokes.

TEOREMA DE STOKES. *Seja α uma 1-forma diferencial definida em uma região U de \mathbb{R}^n . Se E é um encadeamento de superfícies contido em U , então*

$$\int_{\partial E} \alpha = \int_E d\alpha.$$

Dividiremos a demonstração em duas partes. Na primeira parte provamos o teorema para 2-formas do plano, integradas sobre um retângulo; na segunda reduzimos o caso geral a este caso especial.

4.1. Demonstração do teorema de Stokes no plano. Começamos tratando o caso mais simples em que a 1-forma gds é integrada no retângulo $[0, 1]^2$.

PRIMEIRA PARTE: demonstração do teorema para a 1-forma gds em $[0, 1]^2$, onde $g \in \mathcal{O}(U)$.

Como

$$d(\alpha) = \left(\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) ds \wedge dt$$

temos que

$$\int_R d\alpha = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) ds dt.$$

Isto é

$$\int_R d\alpha = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds dt - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} ds dt;$$

Contudo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds dt = \int_0^1 (g(1, t) - g(0, t)) dt,$$

Analogamente,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} ds dt = \int_0^1 (g(s, 1) - g(s, 0)) ds.$$

Assim,

$$\int_R d\alpha = \int_0^1 (g(1, t) - g(0, t)) dt - \int_0^1 (g(s, 1) - g(s, 0)) ds,$$

que pode ser reescrito como

$$(4.1) \quad \int_R d\alpha = \int_0^1 g(s, 0) ds + \int_0^1 g(1, t) dt - \int_0^1 g(s, 1) ds - \int_0^1 g(0, t) dt.$$

Entretanto, R tem lados

$$L_1 = [0, 1] \times \{0\}$$

$$L_2 = \{1\} \times [0, 1]$$

$$L_3 = [0, 1] \times \{1\}$$

$$L_4 = \{0\} \times [0, 1].$$

Parametrizando L_1 na forma $(0, 0) + s(1, 0)$, vemos que

$$\int_{L_1} g ds = \int_0^1 g((0, 0) + s(1, 0)) ds = \int_0^1 g(s, 0) ds,$$

que é igual à primeira parcela na soma (4.1). Cálculos semelhantes mostram que

$$\int_{L_j} \alpha = \int_{L_j} g ds$$

corresponde à j -ésima parcela daquela soma. Portanto,

$$\int_R d\alpha = \int_{L_1} \alpha + \int_{L_2} \alpha - \int_{L_3} \alpha - \int_{L_4} \alpha.$$

Porém, a fronteira de R é

$$\partial R = L_1 + L_2 - L_3 - L_4,$$

de sorte que

$$\int_{\partial R} \alpha = \int_{L_1} \alpha + \int_{L_2} \alpha - \int_{L_3} \alpha - \int_{L_4} \alpha.$$

Mas isto nos permite concluir que

$$\int_R d\alpha = \int_{\partial R} \alpha,$$

provando assim que o teorema de Stokes neste caso bastante particular.

SEGUNDA PARTE: demonstração do teorema para a 1-forma $g_1 ds + g_2 dt$ em $[0, 1]^2$, onde $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(U)$.

Por um lado,

$$\int_{\partial R} \alpha = \int_{\partial R} g_1 ds + \int_{\partial R} g_2 dt,$$

ao passo que

$$\int_R d\alpha = \int_R d(g_1 ds) + \int_R d(g_2 dt),$$

já que d é uma transformação linear. Entretanto, pela primeira parte,

$$\int_R d(g_1 ds) = \int_{\partial R} g_1 ds \text{ e que } \int_R d(g_2 dt) = \int_{\partial R} g_2 dt.$$

Combinando estas igualdades obtemos o resultado desejado.

TERCEIRA PARTE: demonstração do teorema para a 1-forma $g_1 ds + g_2 dt$ em um retângulo qualquer R , onde $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(U)$.

Pela proposição do §3.6

$$(4.2) \quad \int_R \omega = \int_{[0,1]^2} \omega.$$

Digamos que os lados de $[0, 1]^2$ sejam enumerados consecutivamente por L_1 , L_2 , L_3 e L_4 . Assim, o lado de R correspondente a L_i é $\gamma(L_i)$. Pela fórmula de mudança de variáveis para integrais de 1-formas

$$(4.3) \quad \int_{\partial R} \alpha = \int_{\partial[0,1]^2} \alpha.$$

Mas, pela segunda parte,

$$\int_{[0,1]^2} \omega = \int_{\partial[0,1]^2} \alpha.$$

Combinando esta igualdade com (4.2) e (4.3), concluímos que

$$\int_R \omega = \int_{\gamma(L_1)} \alpha + \int_{\gamma(L_2)} \alpha - \int_{\gamma(L_3)} \alpha - \int_{\gamma(L_4)} \alpha,$$

que é o teorema de Stokes sobre R .

4.2. Demonstração do teorema de Stokes em \mathbb{R}^n . Levando em conta que

- a fronteira de um encadeamento é igual ao encadeamento das fronteiras de suas parcelas;
- a integral sobre um encadeamento é igual à soma das integrais sobre cada parcela do encadeamento;

vemos que basta provar o resultado no caso em que E é uma 2-célula.

Sejam, então, $R = [a, a'] \times [b, b']$,

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

uma 2-célula, e

$$L_1 = [a, a'] \times \{b\}$$

$$L_2 = \{a'\} \times [b, b']$$

$$L_3 = [a, a'] \times \{b'\}$$

$$L_4 = \{a\} \times [b, b'].$$

os lados do retângulo R . Então a fronteira de σ é dada por

$$\partial\sigma = \sigma(L_1) + \sigma(L_2) - \sigma(L_3) - \sigma(L_4).$$

Se $\alpha \in \Omega^1(U)$ então,

$$\sigma^*(\alpha) \in \Omega^1(V),$$

onde $V \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo aberto que contém R . Mas,

$$\int_{\partial\sigma} \alpha = \int_{\partial R} \sigma^*(\alpha).$$

Contudo, já sabemos do §4.1 que o teorema de Stokes se aplica a esta última integral, donde

$$\int_{\partial R} \sigma^*(\alpha) = \int_R d(\sigma^*(\alpha)).$$

Entretanto, pela definição de integral de uma 2-forma

$$\int_{\sigma} d\alpha = \int_R \sigma^*(d\alpha).$$

Como $\sigma^*(d\alpha) = d\sigma^*(\alpha)$, podemos concluir que

$$\int_{\sigma} d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha,$$

provando, assim, o teorema de Stokes no começo da seção.

5. Aplicações

Nesta seção consideraremos várias aplicações do teorema de Stokes e das 2-formas a problemas de física.

5.1. Circulação e rotacional. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial definido em uma região U do plano. Começamos lembrando as definições das formas associada a este campo. A 1-forma associada a F é

$$\tau_F = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3,$$

e a 2-forma, utilizada para calcular o fluxo é

$$\Phi_F = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Calculando a diferencial de τ_F , obtemos

$$d\tau_F = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j,$$

que, por sua vez, corresponde à 2-forma do fluxo do campo

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right).$$

Este último campo é conhecido como o *rotacional* de F , e é denotado por $\text{rot}(F)$. Portanto,

$$(5.1) \quad d\tau_F = \Phi_{\text{rot}(F)}.$$

Esta igualdade nos permite enunciar o teorema de Stokes na versão que será utilizada na maioria das aplicações.

TEOREMA DE STOKES. *Seja σ uma 2-célula e F um campo vetorial definido em uma região aberta do plano que contém σ , então*

$$\int_{\partial\sigma} \tau_F = \int_{\sigma} \Phi_{\text{rot}(F)}.$$

Para entender o significado físico do rotacional, lembre-se que a circulação de F em uma curva fechada C , totalmente contida em U , foi definida no §5.1 como

$$\Gamma_F(C) = \int_C F.$$

Supondo que C é igual à fronteira de uma 2-célula σ *totalmente contida em U* , o teorema de Stokes nos dá

$$\Gamma_F(C) = \int_{\partial\sigma} \tau_F = \int_{\sigma} d\tau_F;$$

Isto é

$$\Gamma_F(C) = \int_{\sigma} \Phi_{\text{rot}(F)}.$$

Portanto, se F tem rotacional zero, então sua circulação é zero ao longo de qualquer curva fechada *que seja fronteira de uma 2-célula inteiramente contida em U* . A parte da frase em *itálico* é extremamente importante, e voltaremos a ela ao final do parágrafo. Como o rotacional ser zero implica que a circulação é zero – ao menos sob certas hipóteses – deve haver alguma ligação entre o rotacional e o fato do campo não ter redemoinhos; veja §5.1.

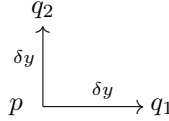
Para entender isto melhor, vamos tentar relacionar o rotacional diretamente à existência de movimento angular em um campo, sem recorrer à circulação. Digamos que \mathbb{V} representa o campo de velocidades de um fluxo bidimensional. Você pode imaginar isto como uma aproximação do que ocorre quando uma lâmina muito fina de água que escorre sobre uma superfície plana. Então,

$$\mathbb{V}(x_1, x_2, x_3) = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), 0),$$

uma vez que o campo é bidimensional. Calculando o rotacional, obtemos $\text{rot} = (0, 0, \omega)$, onde

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Para descobrir o que ω representa consideremos fiapo de nylon, na forma de um ângulo reto, totalmente imerso no fluido.



Denotaremos por p o vértice do ângulo, e por q_1 e q_2 as extremidades de cada um dos segmentos que formam o fiapo. Para facilitar os cálculos, digamos que estamos considerando o fiapo no exato momento em que pq_1 é paralelo ao eixo x e pq_2 é paralelo ao eixo y . Como o fiapo é muito pequeno, os segmentos são muito curtos: pq_1 tem comprimento δx e pq_2 tem comprimento δy . A diferença entre a componente da velocidade ao longo do eixo y em q_1 e em p é igual a

$$v_2(p + \delta x) - v_2(p).$$

Como δx é muito pequeno, esta diferença está muito próxima de

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \delta x.$$

Isto significa que, em um tempo muito curto δt , o ponto q_1 percorre a distância

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \delta x \delta t$$

na direção y . Como a distância de p a q_1 é igual a δx , o ponto q_1 percorre um ângulo

$$\arctan \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \delta t \right)$$

com centro em p . Entretanto, se θ é muito pequeno, $\arctan(\theta)$ é aproximadamente igual a θ . Assumindo que este é o caso acima – já que δt é um tempo muito curto – vemos que o ângulo percorrido por q_1 , relativamente à p , é aproximadamente igual a

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} \delta t.$$

Portanto, a velocidade angular instantânea de pq_1 em torno do eixo z é aproximadamente igual a

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Um cálculo similar mostra que a velocidade angular instantânea de pq_2 em torno do eixo z é aproximadamente igual a

$$-\frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Portanto, a velocidade angular média do fiapo em forma de ângulo reto é igual a

$$\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\text{rot}(\mathbb{V}).$$

Se \mathbb{V} é o campo de velocidades de um fluido, a quantidade

$$\omega = \text{rot}(\mathbb{V}),$$

é conhecida como a *vorticidade* de \mathbb{V} , e mede a tendência que um pequeno fiapo tem de rodar no fluido. Um campo de velocidades cuja vorticidade é nula é chamado de *irrotacional* ou *solenoidal*. Note que o fato de um fluido ter vorticidade não nula não implica que tenha um movimento rotatório global; isto é, que haja redemoinhos no fluido. Por exemplo,

$$\mathbb{V} = (y, 0, 0)$$

não exibe redemoinhos. Porém, a componente da velocidade ao longo do eixo x aumenta com a distância entre o ponto e o eixo x . Isto faz com que um fiapo de nylon paralelo a y tenda a rodar enquanto é arrastado pelo fluido. De fato, um cálculo simples, que será deixado exercício, mostra que este fluido tem vorticidade -1 .

Contudo, a relação entre rotacional e circulação é mais sutil do que nossos comentários acima podem sugerir. Por exemplo, se há uma haste perpendicular ao fluxo, podemos ter rotacional zero em todo lugar acompanhado de circulação não nula sobre curvas fechadas que dão a volta ao cilindro. É por isso que precisamos acrescentar a hipótese de que a curva fosse fronteira de uma 2-célula *inteiramente contida em U* , nas considerações que fizemos acima. Se há um obstáculo no fluido, ela está fora da 2-célula. Veremos um exemplo de um campo com estas propriedades no §5.7.

5.2. A integral de superfície. Ao contrário do que fizemos até aqui, vamos considerar neste parágrafo uma superfície S de \mathbb{R}^3 descrita como o conjunto de zeros de uma função diferenciável. Mais precisamente, seja U uma região de \mathbb{R}^3 e $f \in \mathcal{O}(U)$. Definimos

$$S_f = \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 0\};$$

cf. exercício 20 da página 20. Muitas superfícies bem conhecidas, e já utilizadas neste livro, podem ser descritas desta maneira, entre elas a esfera, o

cone, o parabolóide e o cilindro. Todos os exemplos de superfícies mencionados acima também podem ser descritos a partir de uma parametrização, e é esta exatamente a situação que queremos estudar neste parágrafo:

uma superfície S_f , para algum $f \in \mathcal{O}(U)$, que admite uma parametrização $\sigma : R \rightarrow U$, onde R é um retângulo de \mathbb{R}^2 .

Supondo que o gradiente de f não se anula em U , podemos definir o campo

$$\mathbf{n}_f = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

na região U . No caso particular em que ℓ é uma função linear, a superfície S_ℓ é um plano, e tem gradiente constante. Se u e v forem dois paralelos a este plano e $p \in S_\ell$, então $\Phi_{G_\ell}(p, u, v)$ é o volume do sólido determinado por u , v e pelo vetor

$$G_\ell(p) = \frac{(\nabla \ell)(p)}{\|(\nabla \ell)(p)\|}.$$

Como este último vetor é normal a S_f e tem norma 1, o volume do sólido coincide com a área do paralelogramo definido por u e v . Por isso, a forma diferencial Φ_{G_f} é conhecida como *elemento de área* e denotada por dA . Note, contudo, que trata-se apenas de uma notação: dA não corresponde, em geral, à diferencial total de nenhuma função.

Em geral, os vetores do campo G são unitários e normais a S_f em cada ponto desta superfície. Portanto, o fluxo deste campo por S_f deve ser igual a área de S_f . Em outras palavras,

$$\text{área de } S_f = \int_{\sigma} dA,$$

onde

$$dA = \Phi_{\nabla f / \|\nabla f\|}$$

e σ é uma parametrização de S_f . Considere, por exemplo, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Neste caso, $f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, de modo que

$$\mathbf{n}_f = \frac{1}{r}(x, y, z),$$

é um campo central, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, como usual. Parametrizando S_f em coordenadas esféricas

$$\sigma_e(x, y, z) = (a \cos(\theta) \sin(\phi), a \sin(\theta) \sin(\phi), a \cos(\phi)),$$

onde a é o raio (constante!) da esfera. Daí,

$$\sigma_e^*(dx \wedge dy) = a^2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

$$\sigma_e^*(dx \wedge dz) = -a^2 \sin(\theta) \sin^2(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

$$\sigma_e^*(dy \wedge dz) = a^2 \cos(\theta) \sin^2(\phi) d\theta \wedge d\phi.$$

Portanto, após os devidos cancelamentos,

$$\sigma_e^*(dA) = a^2 \sin(\phi) d\theta \wedge d\phi.$$

Logo, a área da esfera é igual a

$$\int_{\sigma_e} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sin(\phi) d\theta \wedge d\phi = 4\pi a^2,$$

como seria de esperar.

Suponha, agora, que há outra função ψ , definida na mesma região U . Multiplicando ψ por dA obtemos uma nova 2-forma em U , cuja integral

$$\int_{\sigma} \psi dA$$

é conhecida como a *integral de superfície* de ψ em S_f . Como ψ é uma função que toma valores reais,

$$\psi dA = \Phi_{\psi \nabla f / \|\nabla f\|}.$$

Vejamos o que acontece quando $F \in \mathcal{X}(U)$, $f \in \mathcal{O}(U)$ e ψ é igual ao produto escalar dos campos F e \mathbf{n}_f . Neste caso,

$$(F \cdot \mathbf{n}_f) \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \text{Proj}_{\mathbf{n}_f}(F),$$

que é a projeção do campo F na direção da normal a S_f . Contudo, se u e v são tangentes a S_f em p , então $u \times v$ aponta na direção da normal a S_f , de modo que

$$F(p) \cdot (u \times v) = \text{Proj}_{\mathbf{n}_f}(F)(p) \cdot (u \times v).$$

Portanto,

$$((F \cdot \mathbf{n}_f)dA)(p, u, v) = \Phi_F(p, u, v),$$

desde que u e v sejam tangentes a S_f em p . Como esta hipótese é satisfeita quando

$$u = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

temos que

$$\sigma^*((F \cdot \mathbf{n}_f)dA) = \sigma^*(\Phi_F).$$

Logo, a integral de superfície

$$\int_{\sigma} (F \cdot \mathbf{n}_f)dA = \int_R \sigma^*((F \cdot \mathbf{n}_f)dA)$$

é igual a

$$\int_R \sigma^*(\Phi_F) = \int_{\sigma} \Phi_F.$$

Esta igualdade desempenhará um papel importante na interpretação vetorial que daremos ao teorema de Stokes no próximo parágrafo.

5.3. A variante vetorial. Antes de passar às aplicações do teorema de Stokes ao eletromagnetismo, precisamos considerar sua tradução em termos da análise vetorial tradicional. Isto é, sem usar formas diferenciais.

Começaremos com a versão bidimensional do teorema de Stokes, que foi originalmente enunciada por George Green em sua monografia [6, p.].

TEOREMA DE GREEN. *Seja A uma região do plano parametrizada por um retângulo. Se $F = (F_1, F_2)$ é um campo definido em uma região do plano que contém A , então*

$$\int_{\partial A} F = \int_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) dx dy.$$

Seja σ uma 1-célula contida em uma região U de \mathbb{R}^3 . Para poder enunciar a versão vetorial do teorema de Stokes em dimensão 3, precisamos explicitar

$$\int_{\sigma} d\tau_F$$

em termos de uma integral dupla em cujo integrando o rotacional aparece. Mas,

$$\int_{\sigma} d\tau_F = \int_{\sigma} \Phi_{\text{rot}(F)},$$

onde σ é uma 2-célula sobre o retângulo plano R . Contudo, usando a igualdade entre integral do fluxo e integral de superfície enunciada ao final do §5.2 temos que

$$\int_{\sigma} \Phi_{\text{rot}(F)} = \int_{\sigma} \psi(\text{rot}(F) \cdot G_F) dA.$$

Isto nos permite enunciar a versão vetorial do teorema de Stokes.

TEOREMA DE STOKES (versão vetorial). *Seja σ uma 2-célula. Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo definido em uma região aberta do plano que contém σ , então*

$$\int_{\partial \sigma} F = \int_{\sigma} (\text{rot}(F) \cdot N) d\sigma.$$

5.4. Campo elétrico de uma carga pontual. Começamos nossas aplicações ao eletromagnetismo calculando o fluxo do campo elétrico correspondente a uma carga pontual $q > 0$ através de uma esfera. Pela lei de Coulomb, este campo é dado por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

onde k é uma constante, que não precisamos explicitar.

Para calcular o fluxo, usamos a 2-forma correspondente, que neste caso é

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy).$$

Como o campo é central, e a integração será sobre a superfície de uma esfera, é melhor usar coordenadas esféricas:

$$S(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi)),$$

onde r é o raio (constante!) da esfera. Daí,

$$\begin{aligned} S^*(dx \wedge dy) &= r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\theta \wedge d\phi \\ S^*(dx \wedge dz) &= r^2 \sin(\theta) \sin^2(\phi) d\theta \wedge d\phi \\ S^*(dy \wedge dz) &= -r^2 \cos(\theta) \sin^2(\phi) d\theta \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Portanto, após os devidos cancelamentos,

$$S^*(\Phi_{\mathbf{E}}) = -kq \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\theta \wedge d\phi.$$

Portanto, o fluxo total através da esfera é

$$\int_S \Phi_{\mathbf{E}} = \int_R S^*(\Phi_{\mathbf{E}}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -kq \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\theta d\phi,$$

que é facilmente integrável e dá

$$(5.2) \quad \int_S \Phi_{\mathbf{E}} = 2\pi kq \cos^2(\phi) \Big|_0^\pi = 4\pi kq.$$

Note que não é fácil calcular, desta maneira, o valor do fluxo através de superfícies mais gerais. Afinal, se a parametrização for muito complicada, os cálculos podem ficar intratáveis. No entanto, com a ajuda da versão do teorema de Stokes que apresentaremos no próximo capítulo, será fácil determinar o fluxo de uma carga pontual através de qualquer superfície. E mais, o resultado geral será uma consequência dos cálculos deste parágrafo. E como se isto não bastasse, poderemos tratar também do caso de uma quantidade finita qualquer de cargas pontuais.

5.5. As equações de Maxwell. O estudo dos campos eletromagnéticos está completamente contido nas equações introduzidas por J. C. Maxwell em 1873. Das quatro equações, duas dependem de conceitos que ainda não introduzimos, as outras duas podem ser formuladas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\mathbf{B}) &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J} \right), \end{aligned}$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} representam, respectivamente, os campos elétrico e magnético, J é a densidade de corrente (que também é um vetor), c e ϵ_0 são constantes cujo significado físico não precisamos considerar.

Segundo a primeira equação, o rotacional do campo elétrico é dado por uma variação do campo magnético com o tempo. Já a segunda equação nos diz que o rotacional do campo magnético depende, não apenas da variação do campo elétrico, mas também da densidade de corrente.

Para simplificar, consideraremos apenas o caso *estático*, em que nenhuma das quantidades acima varia com o tempo. Temos, assim, que o vetor \mathbf{J} é

constante, e que as derivadas de E e \mathbf{B} com respeito a t são nulas. Portanto, as equações se simplificam para

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{E}) &= 0 \\ \text{rot}(\mathbf{B}) &= \frac{J}{c^2\epsilon_0}.\end{aligned}$$

Seja C uma curva fechada no espaço. Se C for a fronteira de um 2-encadeamento S , então, pelo teorema de Stokes

$$\int_C \mathbf{E} = \int_{\partial S} \tau_{\mathbf{E}} = \int_S d\tau_{\mathbf{E}}.$$

Contudo, pela equação (5.1),

$$d\tau_{\mathbf{E}} = \Phi_{\text{rot}(\mathbf{E})} = 0,$$

donde

$$\int_C \mathbf{E} = 0.$$

Portanto, o campo eletrostático tem circulação nula.

A situação é completamente diferente no caso do campo magnético. Repetindo o argumento acima para \mathbf{B} , vemos que

$$\int_C \mathbf{B} = \int_S \Phi_{\text{rot}(\mathbf{B})}.$$

Mas, pela equação de Maxwell,

$$\Phi_{\text{rot}(\mathbf{B})} = \Phi_{J/c^2\epsilon_0} = \frac{1}{c^2\epsilon_0}\Phi_J$$

donde,

$$(5.3) \quad \int_C \mathbf{B} = \frac{1}{c^2\epsilon_0} \int_S \Phi_J.$$

Resta-nos entender o que esta última integral representa. Para isto precisamos compreender melhor o significado de J .

Imagine a corrente como um fluxo de elétrons ao longo de um fio e considere uma seção transversal T do fio. Se a corrente não varia com o tempo, então os elétrons que passam por um ponto $p \in T$ têm sempre a mesma velocidade $v(p)$. Se a densidade de carga no fio é constante e igual a ρ então $J(p) = \rho v(p)$. Portanto,

$$\int_T \Phi_J$$

representa a quantidade total de carga que flui através da seção T ; isto é, a integral representa a *corrente* através de T . Assim, voltando à equação (5.3), podemos reescrevê-la na forma

$$\int_C \mathbf{B} = \frac{I_C}{c^2\epsilon_0}.$$

onde I_C representa a corrente que passa através da curva fechada C . Esta equação é conhecida como *lei de Ampère*.

A lei de Ampère pode ser usada para calcular a intensidade do campo magnético de um fio reto infinito de espessura desprezível, estendido ao longo do eixo z . Porém, para viabilizar este cálculo precisamos de uma hipótese adicional, que resulta da simetria do campo:

sobre qualquer cilindro cujo eixo é o próprio fio, o campo
é constante, tangente ao cilindro e perpendicular ao fio.

Em particular, o campo é constante sobre uma circunferência de raio r , desenhada sobre um plano perpendicular ao fio, cujo centro é o ponto de interseção do fio com o plano. Denotando por C_r esta circunferência, temos que

$$\int_{C_r} \mathbf{B} = 2\pi r \|\mathbf{B}(p)\|, \text{ para qualquer } p \in C_r.$$

Portanto, pela lei de Ampère,

$$2\pi r \|\mathbf{B}(p)\| = \frac{I_C}{c^2 \epsilon_0},$$

donde

$$\|\mathbf{B}(p)\| = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{I_C}{r}.$$

Como r é a distância de $p = (x, y, z)$ ao fio, podemos reescrever esta fórmula como

$$\|\mathbf{B}(x, y, z)\| = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{I_C}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Finalmente, levando em conta que o campo é tangente a C_r ,

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{I_C}{(x^2 + y^2)} (-y, x, 0).$$

Podemos obter esta mesma fórmula, sem recorrer a nenhuma hipótese extra, calculando o potencial do campo; veja [11, p. 41].

5.6. Lema de Poincaré. Começamos relembando as definições de formas exatas e fechadas. Seja α uma 1-forma diferencial definida em uma região U de \mathbb{R}^n . Dizemos que α é *fechada* se $d\alpha = 0$, e que é *exata* se existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\alpha = df$. Mas, como vimos no §2.5, $d(df) = 0$; isto é, toda forma exata é fechada. Nosso objetivo é discutir a recíproca desta afirmação; isto é:

toda 1-forma fechada é exata?

Como a resposta é “nem sempre”, precisamos entender de que a resposta depende.

Começamos estudando uma região sobre a qual todas as formas fechadas são exatas. Lembre-se que uma região U do \mathbb{R}^n é *convexa* se, dados dois pontos quaisquer p e q em U , o segmento de reta que vai de p a q está totalmente contido em U .

LEMA DE POINCARÉ (para 1-formas). *Toda 1-forma fechada definida em uma região convexa de \mathbb{R}^n é exata.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja U uma região de \mathbb{R}^n e α uma forma fechada definida em U . Tendo em vista o teorema do §5.2, basta mostrar que a circulação de α é zero sobre qualquer 1-encadeamento fechado E . Isto é fácil de provar desde que E seja a fronteira de um 2-encadeamento \mathcal{E} . Se for este o caso, então, pelo teorema de Stokes,

$$\int_E \alpha = \int_{\partial \mathcal{E}} \alpha = \int_{\mathcal{E}} d\alpha = 0,$$

já que α é fechada. Portanto, para completar a demonstração basta construir \mathcal{E} a partir de E .

Para isto suponha que

$$E = \sigma_1 + \cdots + \sigma_m,$$

onde os σ s são 1-células parametrizadas por $[0, 1]$ e digamos que $\sigma_i(0) = p_i$. Como o encadeamento é fechado, temos que

$$\sigma_i(1) = p_{i+1} \text{ e } \sigma_m(1) = p_1.$$

Seja, agora, q um ponto que não pertence a E , e considere as 2-células definidas por

$$\mathcal{S}_i(s, t) = (1 - s)p_0 + t\sigma_i(t),$$

para $(s, t) \in [0, 1]^2$. Denotando por r_i a reta que vai de q a p_i , podemos considerar esta 2-célula como um triângulo (curvilíneo), com vértice em q , cujos lados são as retas r_i e r_{i+1} . Mais precisamente,

$$\partial(\mathcal{S}_i) = \sigma_i - r_{i+1} + r_i,$$

Portanto, se

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^m \mathcal{S}_i,$$

então

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^m \partial(\mathcal{S}_i) = \sum_{i=1}^m (\sigma_i - r_{i+1} + r_i);$$

cuja forma reduzida é

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^m \sigma_i = E.$$

Note que a construção de \mathcal{E} assume, implicitamente, que a região U é convexa, do contrário não poderíamos garantir que as retas r_i pertencessem a U . \square

Combinando o lema de Poincaré com o teorema do §5.2, obtemos uma caracterização bastante simples dos campos conservativos em regiões convexas.

COROLÁRIO. *Um campo F , definido em uma região convexa de \mathbb{R}^n , é conservativo se, e somente se, τ_F é uma forma fechada.*

Quando $n = 3$ este resultado pode ser reformulado em termos do rotacional do campo.

COROLÁRIO. *Um campo F , definido em uma região convexa de \mathbb{R}^3 , é conservativo se, e somente se, $\text{rot}(F) = 0$ é uma forma fechada.*

5.7. Formas fechadas, não exatas. Tendo mostrado que toda forma fechada sobre um região aberta convexa é exata, passamos agora ao caso em que a região não é convexa. Para isto consideramos o campo magnético de um fio infinito, estendido ao longo do eixo z . Como o campo é constante ao longo de qualquer cilindro cujo eixo é o fio, basta considerar o que acontece em um plano perpendicular a z , digamos xy . Restringindo o campo a este plano obtemos

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)}(-y, x, 0),$$

onde escolhemos a intensidade da corrente de modo que o quociente dos termos constantes seja 1. Esta última hipótese não é necessária, e só foi feita para facilitar a notação. Este campo está definido na região $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e

$$\tau = \tau_{\mathbf{B}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Um cálculo direto, que será deixado por sua conta, mostra que $d\tau = 0$. Logo a forma τ é fechada. Considere, agora, a curva $C : [0, 2\pi] \rightarrow U$ que corresponde à circunferência de raio 1 parametrizada por

$$C(t) = (\cos t, \sin t).$$

Como $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$,

$$C^*(\tau) = -\sin(t)d(\cos(t)) + \cos t d(\sin(t)) = (\sin^2(t) + \cos^2 t)dt = dt.$$

Mas isto significa que,

$$\int_C \tau = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Contudo, pelo corolário 5.3, se τ fosse uma forma exata, a integral deveria ter dado zero, porque o caminho é fechado. Portanto, τ não pode ser exata, e obtivemos o exemplo desejado.

Vamos imaginar, agora, que \mathbf{B} define, não um campo magnético, mas sim um campo de velocidades em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Podemos visualizar isto como modelando um fluxo laminar definido em uma superfície na qual está inserida um prego (situado na origem do sistema de eixos). A presença deste prego faz com que o campo não esteja definido em $(0, 0)$. Utilizando a terminologia introduzida no §5.1 temos, assim um campo de vorticidade zero, cuja circulação sobre uma curva fechada que envolve a origem é não nula.

Voltando às formas, você pode ter ficado com a impressão de que, se usando apenas funções racionais bem simples, conseguimos uma 1-forma não exata em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que dizer então se usarmos uma combinação de senos, co-senos, logaritmos e exponenciais! A verdade, é que nada essencialmente pior que

$$\tau = \tau_{\mathbf{B}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

ocorre, como mostra o próximo teorema.

TEOREMA. *Seja $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se $\alpha \in \Omega^1(U)$ é fechada, então*

$$\alpha = k\tau + df,$$

para algum $f \in \mathcal{O}(U)$ e algum $k \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja σ a 1-célula que corresponde a uma circunferência com centro na origem e raio 1; isto é,

$$\sigma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Considere

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \alpha,$$

que, claramente, é um número real. Seja, agora, E um encadeamento *fechado* qualquer em U . Como α é fechada, temos pelo teorema de Stokes que

$$\int_{E-C} \alpha = 0.$$

Portanto,

$$\int_E \alpha = \int_C \alpha = 2\pi k.$$

Se $k = 0$, então pelo teorema do §5.2, α é exata. Logo, existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $df = \alpha$, e o teorema está provado neste caso. Suponha, agora, que $k \neq 0$ e considere a forma

$$\beta = \alpha - k\tau.$$

Como

$$\int_C \beta = \int_C \alpha - k \int_C \tau = 2\pi k - k2\pi = 0,$$

podemos concluir, da parte anterior do argumento, que $\beta = df$ para alguma função $f \in \mathcal{O}(U)$. Portanto, que

$$\alpha - k\tau = \beta = df;$$

donde $\alpha = k\tau + df$, como queríamos mostrar. □

6. Recapitulando

Nesta seção recapitulamos tudo o que foi feito neste segundo capítulo. Note que seguimos os mesmos passos utilizados na definição de 1-formas e suas integrais no capítulo anterior.

Ao longo de toda esta seção U será uma região de \mathbb{R}^n e V uma região de \mathbb{R}^m .

6.1. Definição. Uma *2-forma diferencial* é uma aplicação

$$\alpha : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz às seguintes condições:

- (1) fixando $p_0 \in U$, e considerando $\omega(p_0, v, w)$ como função apenas de v e w , temos uma aplicação bilinear alternada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} ;
- (2) fixando $v_0, w_0 \in \mathbb{R}^n$, e considerando $\omega(p, v_0, w_0)$ como função apenas de p , temos uma função diferenciável de U em \mathbb{R} .

O conjunto das 2-formas em U , que é denotado por $\Omega^2(U)$, é um espaço vetorial relativamente à soma de formas, e à sua multiplicação por escalares, conforme definidas no §2.2.

6.2. Produto exterior. Sejam α e β 1-formas diferenciais definidas em U , definimos o *produto exterior* $\alpha \wedge \beta$ em um ponto

$$(p, v, w) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

pela fórmula

$$(\alpha \wedge \beta)(p, v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, v) & \beta(p, v) \\ \alpha(p, w) & \beta(p, w) \end{bmatrix}.$$

A operação assim definida satisfaz as seguintes propriedades

Anti-comutatividade: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$;

Distributividade: $\alpha + k\beta \wedge \eta = \alpha \wedge \eta + k(\beta \wedge \eta)$;

onde $\eta \in \Omega^1(U)$ é outra 1-forma e k é um escalar. A anti-comutatividade implica que

$$\alpha \wedge \alpha = 0,$$

para qualquer 1-forma α em U .

O produto exterior nos permite expressar qualquer 2-forma em U como

$$a_1 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_2 \wedge dx_3,$$

onde $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{O}(U)$. Podemos usá-lo também para definir a *diferencial total* da 1-forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^n b_i dx_i,$$

como sendo

$$d(\alpha) = \sum_{i=1}^n db_i \wedge dx_i.$$

6.3. Campos e formas. A um campo vetorial $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujas funções coordenadas são F_1, F_2, F_3 , fazemos corresponder a 2-forma

$$\Phi_F = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as coordenadas de \mathbb{R}^3 . Esta correspondência é bijetiva, e nos permite tratar a análise vetorial seja na linguagem de formas, seja na linguagem de campos.

6.4. Superfícies. Uma 2-célula em U é uma aplicação diferenciável $C : R \rightarrow U$, onde

$$R = [a, a'] \times [b, b']$$

é um retângulo em R com $a' > a$ e $b' > b$. Denotando por L_1, L_2, L_3 e L_4 os lados consecutivos de R parametrizados de maneira que R é percorrido no sentido anti-horário, temos que a fronteira de σ é a forma reduzida do encadeamento de curvas

$$\sigma(L_1) + \sigma(L_2) - \sigma(L_3) - \sigma(L_4).$$

Um 2-encadeamento em U é uma expressão da forma

$$E = c_1\sigma_1 + \cdots + c_k\sigma_k,$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ são 2-células em U e os c_i são números inteiros. A fronteira de E é a forma reduzida do encadeamento de curvas

$$c_1\partial\sigma_1 + \cdots + c_k\partial\sigma_k.$$

6.5. Imagem inversa. Dada uma aplicação diferenciável $\phi : V \rightarrow U$, onde V é uma região aberta de \mathbb{R}^m , definimos a imagem inversa de uma 2-forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \in \Omega^2(U),$$

como sendo

$$\phi^*(\omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} \cdot \phi) d\phi_i \wedge d\phi_j.$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_n são as funções coordenadas de ϕ . A imagem inversa determina uma transformação linear de $\Omega^2(U)$ em $\Omega^2(V)$ que satisfaz

$$\sigma^*(df) = d\sigma^*(f).$$

6.6. Integral. Seja σ uma superfície em U parametrizada pelo retângulo plano

$$R = [a, a'] \times [b, b'].$$

A imagem inversa de $\omega \in \Omega^2(U)$ por σ pode ser escrita na forma

$$\sigma^*(\omega) = g dt_1 \wedge dt_2,$$

onde $g = g(t_1, t_2)$ é uma função diferenciável em R . A integral de ω sobre σ é dada por

$$\int_{\sigma} \omega = \int_R \sigma^*(\omega) = \int_a^{a'} \int_b^{b'} g dt_1 \wedge dt_2,$$

que é a integral usual da função g no retângulo R . A integral de ω ao longo do 2-encadeamento

$$E = c_1\sigma_1 + \cdots + c_k\sigma_k,$$

é definida como sendo

$$\int_E \omega = c_1 \int_{\sigma_1} \omega + \cdots + c_k \int_{\sigma_k} \omega.$$

6.7. Teorema de Stokes. Seja σ uma superfície. O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema, que conecta a integral de uma 1-forma na fronteira de σ com a integral de sua diferencial sobre σ .

TEOREMA DE STOKES. *Seja α uma 1-forma diferencial definida em uma região aberta U de \mathbb{R}^n . Se E é um 2-encadeamento contido em U , então*

$$\int_{\partial E} \alpha = \int_E d\alpha.$$

7. Exercícios

1. Parametrize cada uma das superfícies dadas abaixo:
 - (a) o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$;
 - (b) o cone $a^2 z^2 = x^2 + y^2$;
 - (c) o parabolóide $a^2 z = x^2 + y^2$;
 - (d) o hiperbolóide $z^2 = x^2 - y^2$.

SUGESTÃO: use funções hiperbólicas para parametrizar o hiperbolóide.
2. Calcule o fluxo dos campos abaixo através das superfícies indicadas:
 - (a) $F(x, y, z) = (x^2, -y^3, z)$ através do quadrado $[0, 1] \times [0, 1] \times \{2\}$;
 - (b) $F(x, y, z) = (3xy^2, 3x^2y, 0)$ através da circunferência de raio unitário e centro na origem, contida no plano $z = 0$;
 - (c) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, 0)$ através circunferência de raio unitário e centro na origem, contida no plano $z = 0$;
 - (d) $F(x, y, z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ através da esfera de raio unitário e centro na origem;
 - (e) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ através da esfera de raio unitário e centro na origem;
3. Calcule as imagens inversas das seguintes formas sob as aplicações indicadas:
 - (a) $xdy \wedge dz$ sob $\sigma(u, v) = (\cos(uv), \sin(uv), uv^2)$;
 - (b) $xydz \wedge dx$ sob $\sigma(u, v) = (u \cos(v), u + v, u \sin(v))$;
 - (c) $z^3 dx \wedge dy$ sob $\sigma(u, v) = (e^u + v, e^u - v, 2)$;
 - (d) $dx \wedge dy$ sob a transformação de coordenadas polares para coordenadas cartesianas;
 - (e) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ sob a transformação de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas;
4. Calcule a integral da forma $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ nos encadeamentos indicados:
 - (a) a 2-célula dada por

$$x = u + v, \quad y = u^2 - v^2 \text{ e } z = uv$$

$$\text{com } 0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 1;$$

- (b) a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 1$, orientada de modo que o vetor normal aponte para fora;
- (c) a superfície do cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, sem a tampa superior, orientado de modo que o vetor normal aponte para fora.
5. Calcule a integral da 2-forma $(x^2 + y^2)dx \wedge dy$ na região D dentro do quadrado $|x| + |y| = 4$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$.
6. Calcule a integral do fluxo do rotacional de cada um dos campos abaixo nas superfícies indicadas:
- (a) $F(x, y, z) = (y, z, x)$ no triângulo cujos vértices são $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$;
- (b) $F(x, y, z) = (x + y, y - z, x + y + z)$ no hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $z \geq 0$.
7. Considere o campo vetorial $F(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$. Seja E um 2-encadeamento fechado. Calcule a integral de F ao longo da fronteira de E .
8. Calcule o rotacional de um campo central.
9. Calcule a vorticidade de cada um dos campos de velocidades abaixo. Quais deles representam um campo irrotacional?
- (a) $F(x, y, z) = (ay, 0, 0)$;
- (b) $F(x, y, z) = (a/r^2, 0, 0)$;
- (c) $F(x, y, z) = (ay, 0, 0)$;
- (d) $F(x, y, z) = (0, ar^n, 0)$;
- onde $a \neq 0$ é uma constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
10. Seja C o 1-encadeamento fechado que limita um 2-encadeamento conexo E . Mostre que a área de E é igual a
- $$\frac{1}{2} \int_C xdy - ydx.$$
11. Calcule a área das seguintes regiões:
- (a) a região limitada pela hipociclóide
- $$x = a \cos^3(t) \text{ e } y = a \sin^3(t),$$
- onde $0 \leq t \leq 2\pi$ e $a > 0$;
- (b) a região limitada por um arco de ciclóide
- $$x = a(t - \sin(t)) \text{ e } y = a(1 - \cos(t)),$$
- com $a > 0$ e $0 \leq t \leq 2\pi$;
12. Seja $F(x, y, z) = (x, 0, -2z)$ um campo definido em todo o \mathbb{R}^3 .
- (a) Determine Φ_F .

- (b) Determine uma parametrização para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de modo que o vetor normal sempre aponte para fora.
- (c) Calcule o fluxo de F através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com a orientação determinada acima.
13. Mostramos no §2.4 que se λ_1 , λ_2 e λ_3 são 1-formas constantes e k é um escalar, então
- $$(\lambda_1 + k\lambda_2) \wedge \lambda_3 = \lambda_1 \wedge \lambda_3 + k(\lambda_2 \wedge \lambda_3).$$
- Use esta propriedade e a anti-comutatividade de \wedge para provar que
- $$\lambda_1 \wedge (\lambda_2 + k\lambda_3) = \lambda_1 \wedge \lambda_2 + k(\lambda_1 \wedge \lambda_3).$$
14. Seja σ uma 2-célula definida em uma região U de \mathbb{R}^3 . Suponha que F é um campo de vetores definido em U e cujo rotacional é tangente a σ em todos os seus pontos. Calcule $\int_{\partial\sigma} \tau_F$.
15. O campo elétrico de um fio infinito cuja densidade de carga é uniforme é dado por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2}(x, y),$$

onde k é uma constante. Calcule o fluxo deste campo através de um cilindro cujo eixo é o próprio fio.

16. Seja F um campo vetorial definido em uma região U de \mathbb{R}^3 . Prove as seguintes fórmulas:
- (a) $\text{rot}(\nabla g) = 0$;
- (b) $\text{rot}(gF) = [\nabla g, F] + g \text{rot}(F)$;
- onde $g \in \mathcal{O}(U)$. A definição do comutador $[\cdot, \cdot]$ pode ser encontrada na página 11.
- SUGESTÃO: traduza as afirmações em termos de formas diferenciais.
17. Determine fórmulas para o rotacional de um campo de \mathbb{R}^3
- (a) em coordenadas cilíndricas;
- (b) em coordenadas esféricas.
18. Seja σ uma 2-célula contida em uma região U de \mathbb{R}^3 e $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Prove as seguintes identidades:

$$(a) \int_{\partial\sigma} \tau_{f\nabla g} = \int_{\sigma} \Phi_{\nabla f \times \nabla g};$$

$$(b) \int_{\partial\sigma} \tau_{f\nabla g + g\nabla f} = 0;$$

19. Seja U a região de \mathbb{R}^2 definida por $x > 0$ e seja

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x}{x^2 + y^2} dy.$$

- (a) Mostre que U é convexa.

- (b) Mostre que α é uma 1-forma fechada em U .
- (c) Mostre que α é exata em U e determine $f \in \mathcal{O}(U)$ de modo que $\alpha = df$.
- (d) Explique porque isto não contradiz a propriedade de α estabelecida no §5.7.
20. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e considere um campo no plano definido por $F(x, y) = (-g(r)y, g(r)x)$, onde g é uma função diferenciável de uma variável.
- (a) Determine uma condição necessária e suficiente para que τ_F seja fechada.
- (b) Resolva a equação diferencial obtida em (a) e determine g como função de r .
- (c) Em que região o campo assim obtido está definido? Este campo é conservativo? Justifique detalhadamente sua resposta.
- SUGESTÃO: a equação diferencial obtida em (a) fica fácil de resolver se você multiplicá-la por r e usar a regra da derivação do produto.

8. Problemas

1. Prove a distributividade do produto exterior de 1-formas não constantes sobre a adição.
2. Sejam x_1, x_2, y_1, y_2 coordenadas de \mathbb{R}^4 e seja $x\mathbf{d}y$ a 1-forma de \mathbb{R}^4 definida por

$$x\mathbf{d}y = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2.$$

- (a) Calcule $d(x\mathbf{d}y)$. Esta é uma 2-forma de \mathbb{R}^4 que vamos denotar por $dx \wedge dy$ (por razões óbvias).
- (b) Calcule a integral de $dx \wedge dy$ em uma superfície fechada e mostre que dá zero.
3. Seja f um polinômio nas variáveis x e y e C_f a curva algébrica por ele definida em \mathbb{R}^2 ; veja página 11 para a definição. Mostre que um campo vetorial \mathbb{F} de \mathbb{R}^2 é tangente a C_f em todos os seus pontos se, e somente se,

$$(\nabla f)(p) \cdot \mathbb{F}(p) = 0,$$

para todo $p \in C_f$.

4. Seja \mathbb{F} um campo vetorial polinomial de \mathbb{R}^2 . A curva algébrica definida pelo polinômio f , nas variáveis x e y , é uma *solução algébrica* de \mathbb{F} se o polinômio

$$(\nabla f \cdot \mathbb{F})(x, y)$$

é múltiplo de f . Se $\mathbb{F} = (F_1, F_2)$, defina a forma $\alpha_{\mathbb{F}} = F_2 dx - F_1 dy$.

- (a) Mostre que se f é uma solução algébrica de \mathbb{F} , então \mathbb{F} é tangente a C_f em todo ponto $p \in C_f$ em que nem \mathbb{F} nem o gradiente de f se anulam.

- (b) Mostre que f é uma solução algébrica de \mathbb{F} se, e somente se,

$$\alpha_{\mathbb{F}} \wedge df = f\eta,$$

onde η é uma 2-forma polinomial em \mathbb{R}^3 .

- (c) Mostre que se $\alpha_{\mathbb{F}}$ for exata então \mathbb{F} tem infinitas soluções algébricas distintas.
5. Mostre que um campo linear F sempre tem pelo menos uma reta como solução algébrica.

Capítulo 4

3-formas

Neste capítulo introduzimos 3-formas e estudamos uma versão do teorema de Stokes que nos permite passar de integrais de 2-formas a integrais de 3-formas. Traduzindo este resultado na linguagem do cálculo diferencial, obteremos o teorema de divergência de Gauss.

Ao contrário dos outros capítulos, introduzimos 3-formas e outros conceitos correlatos diretamente, sem nenhuma motivação física preliminar. Afinal de contas, tomando por base a teoria de 1-formas e 2-formas, não é difícil adivinhar o que deve ser uma 3-forma, nem o que devemos fazer para integrá-las.

1. 3-formas

Começamos generalizando o conceito de fórmula bilinear alternada.

1.1. Formas multilineares alternadas. Uma *forma k-linear* de \mathbb{R}^n é definida recursivamente como sendo uma aplicação

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz à seguinte condição:

dado um vetor $v_0 \in \mathbb{R}^n$, a aplicação

$$\omega_j : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k-1 \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ para } j = 1, \dots, k$$

obtida fixando-se a j -ésima coordenada de ω como sendo igual a v_0 , é $k - 1$ -linear.

Por exemplo,

$$\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

é 3-linear se, para todo $v_0 \in \mathbb{R}^n$, as formas

$$\omega_1(u, w) = \omega(v_0, u, w),$$

$$\omega_2(u, w) = \omega(u, v_0, w), \text{ e}$$

$$\omega_3(u, w) = \omega(u, w, v_0),$$

são bilineares.

Uma forma k -linear ω de \mathbb{R}^n é *alternada* se

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

quaisquer que sejam $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Em outras palavras, trocando de posição duas entradas de ω , a forma troca de sinal. Como consequência disto temos que

$$\text{se } v_i = v_j \text{ então } \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0.$$

Uma forma k -linear alternada também é conhecida como uma k -forma constante.

Usando estas propriedades é fácil determinar *todas* as 3-formas constantes de \mathbb{R}^3 . Seja ω uma forma 3-linear alternada e $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Se e_1, e_2 e e_3 são os vetores da base canônica, então

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \text{ onde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Da linearidade de ω , obtemos

$$(1.1) \quad \omega(u, v, w) = a_1 \omega(e_1, v, w) + a_2 \omega(e_2, v, w) + a_3 \omega(e_3, v, w).$$

Mas os $\omega(e_j, v, w)$ são formas bilineares alternadas e, como tais, podemos escrevê-las usando determinantes. Por exemplo, se

$$v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \text{ e } w = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

então,

$$\omega(e_1, v, w) = \omega(e_1, b_2 e_2 + b_3 e_3, c_2 e_2 + c_3 e_3),$$

já que a forma se anula quando duas entradas quaisquer se repetem. Assim, das propriedades de formas bilineares alternadas temos que

$$\omega(e_1, v, w) = \omega(e_1, e_2, e_3) \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Analogamente,

$$\omega(e_2, v, w) = -\omega(e_1, e_2, e_3) \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix}$$

ao passo que,

$$\omega(e_3, v, w) = \omega(e_1, e_2, e_3) \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo em (1.1), vemos que $\omega(u, v, w)$ é igual a

$$\omega(e_1, e_2, e_3) \left(a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \right).$$

Porém, a menos da constante $\omega(e_1, e_2, e_3)$, esta é a expansão em co-fatores (pela primeira linha) do determinante

$$\det[u, v, w] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$(1.2) \quad \omega(u, v, w) = \omega(e_1, e_2, e_3) \det[u, v, w].$$

Como as 3-formas constantes são aplicações que tomam valores em \mathbb{R} , podemos somá-las da maneira usual. Isto, é, dadas duas 3-formas constantes ω e θ , definimos

$$(1.3) \quad (\omega + \theta)(u, v, w) = \omega(u, v, w) + \theta(u, v, w),$$

quaisquer que sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Que esta fórmula define uma aplicação de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} , não há dúvida; a questão é se essa aplicação é 3-linear e alternada. Fixando u_0 em (1.3), temos

$$(\omega + \theta)(u_0, v, w) = \omega(u_0, v, w) + \theta(u_0, v, w).$$

Contudo, por definição, $\omega(u_0, v, w)$ e $\theta(u_0, v, w)$ são aplicações bilineares quando consideradas como funções de suas duas últimas entradas. Assim, $(\omega + \theta)(u_0, v, w)$ é bilinear como função de v e w . Resultados semelhantes valem para as outras duas escolhas de entradas fixas. Finalmente,

$$(\omega + \theta)(u, v, w) = \omega(u, v, w) + \theta(u, v, w) = -\omega(u, w, v) - \theta(u, w, v);$$

como isto é igual a $-(\omega + \theta)(u, w, v)$, e resultados semelhantes valem para as outras escolhas de entradas. Concluimos, assim, que $\omega + \theta$ também é alternada. Resumindo:

a soma de duas 3-formas constantes é uma 3-forma constante.

Encerramos este parágrafo definindo a imagem inversa de uma 3-forma constante por uma aplicação linear. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, começamos por definir uma aplicação

$$\Delta_T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pela fórmula

$$\Delta_T(u, v, w) = (T(u), T(v), T(w)).$$

Como T é linear,

$$\Delta_T(u_1 + ku_2, v_0, w_0) = \Delta_T(u_1, v_0, w_0) + k\Delta_T(u_2, v_0, w_0),$$

onde k é um escalar e $v_1, v_2, w_0 \in \mathbb{R}^m$. Fórmulas semelhantes valem para as outras duas escolhas de entradas.

PROPOSIÇÃO. *Se ω é uma 3-forma em \mathbb{R}^n então a composta $\omega \cdot \Delta_T$ é uma 3-forma em \mathbb{R}^m .*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam k é um escalar e $u_1, u_2, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^m$, então

$$(\omega \cdot \Delta_T)(u_1 + ku_2, v_0, w_0) = \omega \cdot \Delta_T(u_1, v_0, w_0) + k\omega \cdot \Delta_T(u_2, v_0, w_0);$$

ao passo que $(\omega \cdot \Delta_T)(u_1, v_0, w_0)$ é igual a

$$\omega(T(u_1), T(v_0), T(w_0)) = -\omega(T(w_0), T(v_0), T(u_1)) = -(\omega \cdot \Delta_T)(w_0, v_0, u_1),$$

donde

$$(\omega \cdot \Delta_T)(u_1, v_0, w_0) = -(\omega \cdot \Delta_T)(w_0, v_0, u_1).$$

Como fórmulas semelhantes valem para as outras trocas de posições dos vetores, podemos concluir que $\omega \cdot \Delta_T$ é uma 2-forma constante em \mathbb{R}^m , como desejávamos mostrar. \square

Nos próximos parágrafos generalizemos tudo isto para 3-formas não constantes, definidas sobre uma região aberta de \mathbb{R}^n .

1.2. 3-formas diferenciais. Seja U uma região aberta de \mathbb{R}^n . Uma *3-forma diferencial* em U é uma aplicação

$$\omega : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz às seguintes condições:

- (1) fixando $p_0 \in U$, e considerando $\omega(p_0, u, v, w)$ como função apenas de u, v e w , temos uma aplicação 3-linear alternada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} ;
- (2) fixando $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^n$, e considerando $\omega(p, u_0, v_0, w_0)$ como função apenas de p , temos uma função diferenciável de U em \mathbb{R} .

O conjunto das 3-formas diferenciais definidas em uma região aberta U de \mathbb{R}^n será denotado por $\Omega^3(U)$. Há várias operações que podemos definir em $\Omega^3(U)$, a mais simple das quais é a soma. Sejam ω e θ 3-formas diferenciais em U , a soma $\omega + \theta$ é definida em um ponto $(p, u, v, w) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$(1.4) \quad (\omega + \theta)(p, u, v, w) = \omega(p, u, v, w) + \theta(p, u, v, w).$$

Para que esta definição seja útil, é preciso que $\omega + \theta$ também seja uma 3-forma diferencial em U , e não apenas uma aplicação qualquer. Mas, como vimos no §1.1, a soma de 3-formas constantes é uma 3-forma constante, o que prova (1). Já (2) segue porque a soma de funções diferenciáveis é diferenciável.

Procedendo de maneira semelhante, podemos mostrar que se ω é uma 3-forma diferencial em U e $f \in \mathcal{O}(U)$, então a aplicação de $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} definida por

$$(f\omega)(p, u, v, w) = f(p)\omega(p, u, v, w),$$

onde $p \in U$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ também é uma 3-forma diferencial. Um caso particular da multiplicação de uma 3-forma por uma função ocorre quando a função é constante. Neste caso o que temos é o produto de um escalar por uma 3-forma. Assim, podemos somar 3-formas diferenciais e multiplicá-las por escalares. Com um pouco de paciência é possível verificar que estas operações satisfazem todas as propriedades requeridas para fazer de $\Omega^3(U)$ um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

1.3. Produto exterior. Nesta seção queremos introduzir o produto exterior de três 1-formas, assim como o produto de uma 2-forma por uma 1-forma. Como seria de esperar, em ambos os casos, teremos como resultado uma 3-forma.

Começamos com o produto de três 1-formas, α , β e γ , definidas em uma região aberta U de \mathbb{R}^n . Sejam $p \in U$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Tomando a definição do produto exterior de duas 1-formas como ponto de partida, podemos definir

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(p, u, v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(p, u) & \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, u) & \beta(p, v) & \beta(p, w) \\ \gamma(p, u) & \gamma(p, v) & \gamma(p, w) \end{bmatrix}$$

Segue, imediatamente, das propriedades do determinante que a expressão $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(p, u, v, w)$ é 3-linear alternada se p estiver fixo. Por outro lado, o determinante é uma expressão polinomial de suas entradas. Como somas e produtos de funções diferenciáveis são diferenciáveis, temos que esta função é diferenciável quando u, v e w estão fixos. Logo, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ define, corretamente, uma 3-forma diferencial.

É importante você notar que há uma correlação entre a ordem em que as 1-formas e os vetores aparecem em $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(p, u, v, w)$ e sua posição no determinante. Afinal, qualquer variação na ordem das linhas ou colunas fará o determinante mudar de sinal. Por exemplo,

$$(\beta \wedge \alpha \wedge \gamma)(p, u, v, w) = \det \begin{bmatrix} \beta(p, u) & \beta(p, v) & \beta(p, w) \\ \alpha(p, u) & \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \gamma(p, u) & \gamma(p, v) & \gamma(p, w) \end{bmatrix}$$

é igual a

$$- \det \begin{bmatrix} \alpha(p, u) & \alpha(p, v) & \alpha(p, w) \\ \beta(p, u) & \beta(p, v) & \beta(p, w) \\ \gamma(p, u) & \gamma(p, v) & \gamma(p, w) \end{bmatrix}$$

que, por sua vez, é igual a $-(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(p, u, v, w)$. Portanto,

$$\beta \wedge \alpha \wedge \gamma = -(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma).$$

Em particular, se duas entre as três 1-formas são trocadas de posição, o sinal do produto exterior muda. Por outro lado, se fizermos duas trocas de posição, o sinal muda duas vezes, de modo que continua igual ao inicial. Portanto, como no caso do produto exterior de duas 1-formas, o produto de três delas também é anti-comutativo; isto é, o sinal troca a cada troca de posição entre duas das três 1-formas que estão sendo multiplicadas.

Como no caso de 2-formas, o produto exterior das 1-formas básicas desempenha um papel extremamente importante na teoria. Por isso, vamos calcular $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ em $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Se

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n,$$

$$v = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

$$w = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$$

então, por definição,

$$(dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k)(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} dx_i(u) & dx_j(u) & dx_k(u) \\ dx_i(v) & dx_j(v) & dx_k(v) \\ dx_i(w) & dx_j(w) & dx_k(w) \end{bmatrix}$$

Levando em conta que estas 1-formas capturam certas coordenadas dos vetores u, v e w , obtemos

$$(1.5) \quad (dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k)(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Em particular,

$$(dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k)(e_{i'}, e_{j'}, e_{k'}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k = k' \\ 0 & \text{se } i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \text{ ou } k \neq k'. \end{cases}$$

Agora que temos a definição do produto exterior de três 1-formas, podemos expressar uma 3-forma qualquer em termos de coordenadas. Para simplificar a notação, faremos isto apenas para 3-formas em \mathbb{R}^3 ; o caso geral fica como exercício. Seja p um ponto de uma região aberta U de \mathbb{R}^3 e $\omega \in \Omega^3(U)$. De acordo com a propriedade (1), a aplicação

$$\omega_p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\omega_p(u, v, w) = \omega(p, u, v, w),$$

é uma 3-forma constante. Portanto, por (1.2) e (1.5),

$$\omega_p(u, v, w) = \omega_p(e_1, e_2, e_3)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(u, v, w).$$

Como $\omega_p(e_1, e_2, e_3)$ é diferenciável como função de p , podemos escrever

$$\omega = g dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

onde $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(p) = \omega_p(e_1, e_2, e_3)$.

Assumindo que o produto exterior deve ser sempre distributivo sobre a soma, é fácil descobrir como o produto de uma 2-forma por uma 1-forma deve ser feito para que seja compatível com o produto de três 1-formas. Mais uma vez, consideraremos apenas o caso em que a região aberta U está contida em \mathbb{R}^3 , já que este é o único caso necessário na maioria de nossas aplicações posteriores. Sejam $\alpha \in \Omega^1(U)$ e $\omega \in \Omega^1(U)$. Então, existem $a_{ij} \in \mathcal{O}(U)$, tais que

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Assumindo a distributividade do produto exterior sobre a soma,

$$(1.6) \quad \alpha \wedge \omega = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} a_{jk} \alpha \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Mas,

$$\alpha = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3;$$

de modo que, usando novamente a distributividade, obtemos

$$\alpha \wedge dx_j \wedge dx_k = b_i dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Como $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, podemos rearrumar a expressão $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ para que fique na ordem $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Contudo, como o produto de três

1-formas muda de sinal, dependendo da ordem em que i , j e k aparecem. Denotando por $\text{trocas}(ijk)$ o número de trocas de posição entre i , j e k que devem ser efetuados para que estes três índices apareçam em ordem crescente, teremos

$$\alpha \wedge dx_j \wedge dx_k = (-1)^{\text{trocas}(ijk)} b_i dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Por exemplo, para converter 321 em 123 precisamos:

- trocar o 1 com o 2, obtendo 312;
- trocar o 1 com o 3, obtendo 132;
- trocar o 3 com o 2, obtendo 123.

Fizemos, portanto, três trocas de posição, de modo que

$$dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = (-1)^3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Voltando à equação (1.6) podemos escrevê-la, a partir do que foi feito acima, como

$$\alpha \wedge \omega = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} (-1)^{\text{trocas}(ijk)} b_i a_{jk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Explicitando os três casos possíveis para ijk , vemos que

$$\alpha \wedge \omega = (b_1 a_{23} - b_2 a_{13} + b_3 a_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Vejamos quais são as propriedades básicas do produto exterior nos casos em que o resultado é uma 3-forma. Como o produto de uma 2-forma por uma 1-forma foi definido a partir do produto de três 2-formas, tudo segue das propriedades deste último caso. Porém, já vimos que o produto exterior de três 1-formas é anti-comutativo e distributivo. Na verdade, segue das propriedades do determinante que se $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma \in \Omega^1(U)$, onde U é uma região aberta de \mathbb{R}^3 , e $k \in \mathbb{R}$, então

$$(\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha_1 \wedge \beta \wedge \gamma + k(\alpha_2 \wedge \beta \wedge \gamma).$$

Portanto, se ω é uma 2-forma em U ,

$$(\alpha_1 + k\alpha_2) \wedge \omega = \alpha_1 \wedge \omega + k(\alpha_2 \wedge \omega);$$

ao passo que, se $\theta \in \Omega^2(U)$,

$$\alpha \wedge (\omega + k\theta) = \alpha \wedge \omega + k\alpha \wedge \theta.$$

Estas são as propriedades do produto exterior de que precisamos. A bem da verdade, podemos resumir as propriedades do produto exterior *em todos os casos* que consideramos neste texto dizendo apenas que este produto é anti-comutativo, associativo e distributivo. Praticamente tudo o mais segue disto.

1.4. Diferencial de 2-formas. Podemos aproveitar o que fizemos na seção anterior para definir a diferencial de uma 2-forma que, naturalmente, será uma 3-forma. Mais precisamente, queremos construir uma aplicação

$$d : \Omega^2(U) \rightarrow \Omega^3(U),$$

onde U é uma região de \mathbb{R}^n .

Usando o produto exterior, podemos escrever uma 2-forma ω definida em U como

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

onde $a_{ij} \in \mathcal{O}(U)$ para $1 \leq i < j \leq n$. Definimos a diferencial de ω por

$$d(\omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(a_{ij}) \wedge dx_i \wedge dx_j.$$

As propriedades desta aplicação são muito semelhantes às da diferencial de uma 1-forma, como aliás seria de esperar. Sejam $\omega, \eta \in \Omega^2(U)$, f uma função diferenciável em U e k um escalar, então

$$(1) \quad d((\omega + k\eta)) = d(\omega) + kd(\eta);$$

$$(2) \quad d(f\omega) = d(f) \wedge \omega + fd(\omega).$$

Por outro lado, se $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$,

$$(3) \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta;$$

$$(4) \quad d(d\alpha) = 0.$$

Tendo em vista (1) e (2) e as propriedades da diferencial de uma 1-forma, basta provar (3) quando

$$\alpha = adx_i \text{ e } \beta = bdx_j,$$

onde $a, b \in \mathcal{O}(U)$. Contudo,

$$d(adx_i \wedge bdx_j) = d(abdx_i \wedge dx_j),$$

que, por sua vez é igual a

$$d(ab)(dx_i \wedge dx_j) + abd(dx_i \wedge dx_j).$$

Pela definição da diferencial de uma 2-forma, $d(dx_i \wedge dx_j) = 0$, donde

$$d(adx_i \wedge bdx_j) = d(ab)(dx_i \wedge dx_j).$$

Pela regra de Leibniz

$$d(ab) = bd(a) + ad(b);$$

de forma que

$$d(adx_i \wedge bdx_j) = bd(a) \wedge dx_i \wedge dx_j + ad(b) \wedge dx_i \wedge dx_j.$$

Mas, pela anti-comutatividade do produto exterior,

$$d(b) \wedge dx_i \wedge dx_j = -dx_i \wedge d(b) \wedge dx_j;$$

donde

$$d(adx_i \wedge bdx_j) = (d(a) \wedge dx_i) \wedge (bdx_j) + -(adx_i) \wedge (d(b) \wedge dx_j).$$

Transcrevendo esta última equação em termos de α e β obtemos a propriedades (3).

Para provar (4), escreva α na forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

onde $a_i \in \mathcal{O}(U)$ para $1 \leq i \leq n$. Calculando sua diferencial, temos

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n d(a_i) \wedge dx_i;$$

que, por sua vez, tem diferencial

$$(1.7) \quad d(d\alpha) = \sum_{i=1}^n d(d(a_i)) \wedge dx_i + d(a_i) \wedge d(dx_i),$$

Contudo,

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j.$$

Substituindo em (1.7), e levando em conta a anti-comutatividade do produto exterior,

$$d(df) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Porém, como f é diferenciável em todas as ordens, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

para todo $1 \leq i < j \leq n$; donde

$$d(df) = 0.$$

Estendendo a terminologia já usada anteriormente, dizemos que uma 3-forma em U é *exata* se pode ser escrita como $d\omega$, para algum $\omega \in \Omega^2(U)$. Como já ocorreu no caso de 1-formas e 2-formas, não é verdade que toda 3-forma é exata. Como no capítulo anterior, será fácil dar exemplos de 3-formas que não são exatas quando estivermos de posse do teorema de Stokes na versão que interliga 2-formas e 3-formas. Já uma 2-forma ω é *fechada* se $d\omega = 0$. Podemos reformular a propriedade (4) como dizendo que toda 2-forma exata é fechada. Exploraremos melhor a relação entre 2-formas exatas e fechadas no §4.4.

1.5. Imagem inversa. Seja V uma região aberta de \mathbb{R}^m , e seja $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Generalizando o roteiro já utilizado para as imagens inversas de 1-formas e 2-formas, definimos

$$G_\phi : V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

por

$$G_\phi(p, u, v, w) = (\phi(p), (J_p\phi)u, (J_p\phi)v, (J_p\phi)w),$$

onde $p \in V$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^m$. Note que G_ϕ é diferenciável como função de suas m primeiras coordenadas e linear como função das $3m$ últimas coordenadas.

Suponha, agora, que a imagem de ϕ está contida em uma região aberta U de \mathbb{R}^n , na qual está definida uma 3-forma diferencial ω . Neste caso a imagem de G_ϕ está contida em $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, de modo que faz sentido calcular a composta de ω com G_ϕ . A *imagem inversa* de ω por ϕ , denotada por $\phi^*(\omega)$, é definida por

$$\phi^*(\omega) = \omega \cdot G_\phi.$$

Portanto, se $p \in U$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^m$,

$$\phi^*(\omega)(p, u, v, w) = \omega(\phi(p), J_p(\phi)u, J_p(\phi)v, J_p(\phi)w).$$

Pela definição de composta, $\phi^*(\omega)$ é uma aplicação de $V \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ em \mathbb{R} . Mas, ainda precisamos mostrar que é uma 3-forma diferencial em V . Para isto, basta verificar as condições (1) e (2) da definição de 3-forma enunciada no §1.2.

Digamos que o ponto $p_0 \in V$ foi fixado. Então, quaisquer que sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ temos

$$\phi^*(\omega)(p_0, u, v, w) = (\omega_{p_0}) \cdot \Delta_{J_{p_0}(\phi)}(u, v, w),$$

para um valor fixo de p_0 . Mas, fixado p_0 , $\omega|_{\phi(p_0)}$ é uma 3-forma constante, de forma que (1) é consequência da proposição da 1. Por outro lado, fixando os vetores $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^m$, temos que

$$\phi^*(\omega)(p, u_0, v_0, w_0) = \omega \cdot G_\phi(p, (J_p(\phi))(u_0), (J_p(\phi))(v_0), (J_p(\phi))(w_0)),$$

qualquer que seja $p \in V$. Podemos considerar esta expressão como sendo a composta de ω com h_ϕ , a aplicação de V em $U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definida pela regra

$$h_\phi(p) = G_\phi(p, v_0, w_0) = (\phi(p), (J_p(\phi))(u_0), (J_p(\phi))(v_0), (J_p(\phi))(w_0)).$$

Como a jacobiana é diferenciável como função de p , o mesmo vale para h_ϕ . Contudo, ω é diferenciável como função de p , e linear nas outras entradas, de modo que é diferenciável como aplicação em $U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Como a composta de aplicações diferenciáveis é diferenciável, podemos concluir que a propriedade (2) vale para $\phi^*(\omega)$. Em particular, $\phi^*(\omega)$ é uma 3-forma diferencial em V .

Vamos calcular a imagem inversa de $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ por uma aplicação diferenciável ϕ de uma região aberta V de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 . Denotaremos por

x_1, x_2, x_3 as coordenadas no contradomínio, e por y_1, y_2, y_3 as coordenadas no domínio. Por definição,

$$G_\phi(p, e_1, e_2, e_3) = (\phi(p), J_p(\phi)e_1, J_p(\phi)e_2, J_p(\phi)e_3),$$

onde $p \in V$ e e_1, e_2 e e_3 são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 . Mas isto implica que

$$(1.8) \quad \phi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(p, e_1, e_2, e_3) = (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(J_p(\phi)e_1, J_p(\phi)e_2, J_p(\phi)e_3);$$

donde

$$\phi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(p, e_1, e_2, e_3) = \det[\nabla\phi_1, \nabla\phi_2, \nabla\phi_3]dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3.$$

Utilizando o produto exterior, podemos reescrever isto como

$$(1.9) \quad \phi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = d\phi_1 \wedge d\phi_2 \wedge d\phi_3;$$

que é a forma como vamos utilizá-la.

2. Integração de 3-formas

É hora de descobrir como integrar uma 3-forma; antes, porém, precisamos definir 3-células e seus encadeamentos.

2.1. 3-células e fronteiras. Sejam $a < a', b < b', c < c'$ e $\epsilon > 0$ números reais e

$$(2.1) \quad R = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'],$$

um 3-retângulo (ou paralelepípedo) fechado. Uma 3-célula de \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável

$$\sigma : (a - \epsilon, a' - \epsilon) \times (b - \epsilon, b' - \epsilon) \times (c - \epsilon, c' - \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $\epsilon > 0$ é um número real. Como de hábito, não distinguiremos claramente entre a aplicação σ e a imagem de R por σ . Para os propósitos deste livro um *sólido* é simplesmente uma 2-célula, e os dois termos serão usados de maneira intercambiável de agora em diante.

Como no caso de 2-células, começamos definindo orientação e fronteira para o próprio 3-retângulo. Um ponto está na fronteira de R se pertence a uma de suas seis faces. Adaptando a notação utilizada para o cubo $[0, 1]^3$ no §3.4, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{12} &= [a, a'] \times [b, b'] \times \{c\} \\ R_{12}^o &= [a, a'] \times [b, b'] \times \{c'\} \\ R_{23} &= \{a\} \times [b, b'] \times [c, c'] \\ R_{23}^o &= \{a'\} \times [b, b'] \times [c, c'] \\ R_{13} &= [a, a'] \times \{b\} \times [c, c'] \\ R_{13}^o &= [a, a'] \times \{b'\} \times [c, c'] \end{aligned}$$

Como no caso de 2-retângulos, assumiremos que cada uma destas faces está orientada respeitando-se o sentido em que os reais crescem. Assim, se N_{ij} é o vetor normal à face R_{ij} e N_{ij}^o o vetor normal à face oposta, temos que

$$\begin{aligned} N_{12} &= -N_{12}^o = e_3 \\ N_{23} &= -N_{23}^o = e_1 \\ N_{13} &= -N_{13}^o = -e_2. \end{aligned}$$

No §3.4 vimos que há duas escolhas possíveis de sinais que fazem do encadeamento das faces de R uma 2-célula fechada. Em uma delas, o vetor normal a cada face aponta para dentro, na outra, aponta para fora. Entre estas duas, escolheremos aquela em que o vetor normal sempre aponta para fora. Portanto, orientando R da forma sua fronteira será

$$\partial R = -R_{12} + R_{12}^o - R_{23} + R_{23}^o + R_{13} - R_{13}^o.$$

A fronteira de qualquer 3-célula será orientada a partir desta orientação padrão de R .

Definimos, então, a fronteira $\partial\sigma$ de uma 3-célula

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como a forma reduzida de

$$-\sigma(R_{12}) + \sigma(R_{12}^o) - \sigma(R_{23}) + \sigma(R_{23}^o) + \sigma(R_{13}) - \sigma(R_{13}^o).$$

Um bom exemplo, é a esfera de raio b da qual foi extraída uma esfera menor, de raio $a < b$. Neste caso, a parametrização

$$S_{a,b} : [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

em coordenadas esféricas, será dada por

$$S_{a,b}(r, \theta, \phi) = (r \sin(\phi) \cos(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\phi)).$$

Enumerando as faces de R na mesma ordem que fizemos acima, verificamos que $\partial S_{a,b}(R_{12})$ e $-\partial S_{a,b}(R_{12}^o)$ são pontos, e que

$$\partial S_{a,b}(R_{13}) \equiv -\partial S_{a,b}(R_{13}^o)$$

correspondem à metade de um anel vertical, contido no semiplano definido por $y = 0$ e $x \geq 0$. Este anel tem de raio externo b e raio interno a , e as duas circunferências correspondentes a estes raios estão orientadas em sentidos opostos. Portanto,

$$\partial S_{a,b} = -S_{a,b}(R_{23}) + S_{a,b}(R_{23}),$$

é igual ao encadeamento das superfícies interna e externa de $S_{a,b}$, ambas orientadas de modo que seus vetores normais apontem para fora da parte sólida da 3-célula.

A esfera (sólida) de raio a é um caso particular desta 3-célula, bastando para isto tomar $b = 0$. Neste caso, $S_a = S_{a,0}$ tem fronteira

$$\partial S_a = S_{a,b}(R_{23}^o),$$

já que

$$S_{a,b}(R_{23}) \equiv 0.$$

Antes de poder definir um 3-encadeamento, precisamos considerar como inverter o sinal de uma 3-célula. Mas, para isto, basta trocar o sentido em que um de seus parâmetros avança. Por exemplo, se o 3-retângulo de parâmetros for (2.1), podemos tomar

$$-\sigma(r, s, t) = \sigma(a + a' - r, s, t).$$

Com isto estamos prontos para definir um 3-encadeamento como sendo uma expressão da forma

$$(2.2) \quad E = c_1 \sigma_1 + \cdots + c_m \sigma_m,$$

onde os c s são inteiros e os σ s são 3-células. A fronteira deste 3-encadeamento é definida pela fórmula

$$\partial E = c_1 \partial(\sigma_1) + \cdots + c_m \partial(\sigma_m),$$

como, aliás, seria de esperar.

2.2. Integração de 3-formas. Neste parágrafo veremos como integrar uma 3-forma em 3-células. Começaremos com o caso mais simples possível: uma 3-forma definida em um 3-retângulo de \mathbb{R}^3 .

Seja U uma região do espaço, e digamos que

$$R = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'] \subseteq U.$$

Dada $\eta \in \Omega^3(U)$, queremos definir a integral de η no 3-retângulo R . Se r, s e t são as coordenadas em \mathbb{R}^3 , podemos escrever

$$\eta = f(r, s, t) dr \wedge ds \wedge dt.$$

Definimos, então, a integral de η em R como sendo a integral da função f neste mesmo retângulo; isto é

$$\int_R \eta = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f dr ds dt.$$

Esta é a base de nossa definição: o caso geral é reduzido a este caso particular através do cálculo de uma imagem inversa. Em outras palavras, se

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

é uma 3-célula cuja imagem está contida em uma região U de \mathbb{R}^n , definimos a integral de ω em σ por

$$(2.3) \quad \int_\sigma \omega = \int_R \sigma^*(\omega).$$

Precisamos discutir de que maneira a orientação da 3-célula afeta o cálculo da integral. Para descobrir o que ocorre, consideramos uma 3-célula σ , definida sobre o retângulo

$$R = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$$

cuja imagem está contida em uma região U de \mathbb{R}^n . Digamos que r, s e t são os parâmetros de σ . Se $\omega \in \Omega^3(U)$ então $-\sigma$ tem domínio R e é definida por $-\sigma(r, s, t) = \sigma(a + a' - r, s, t)$. Desta forma

$$(-\sigma)^*(\omega)(r, s, t) = \omega(\sigma(q), -J_q(\sigma)e_1, J_q(\sigma)e_1, J_q(\sigma)e_3)dr \wedge ds \wedge dt,$$

onde $q = (a + a' - r, s, t)$. Portanto,

$$(-\sigma)^*(\omega)(r, s, t) = -(\sigma)^*(\omega)(q),$$

pela bilinearidade de ω . Assim,

$$\int_R (-\sigma)^*(\omega) = - \int_R (\sigma)^*(\omega),$$

que é equivalente a dizer que

$$\int_{-\sigma} \omega = - \int_{\sigma} \omega.$$

2.3. Propriedades da integral de uma 3-forma. Há algumas propriedades elementares das integrais de 3-formas que precisamos considerar. Suponha que U é uma região de \mathbb{R}^n . Se $\omega, \eta \in \Omega^3(U)$ e $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int_E (\omega + k\eta) = \int_E \omega + k \int_E \eta,$$

onde E é um 3-encadeamento contido em U . A demonstração é essencialmente a mesma da propriedade correspondente para 2-formas e fica como exercício.

A segunda propriedade que desejamos estudar é a fórmula de mudança de variáveis. No que segue, usaremos a expressão

$$\text{a aplicação diferenciável } \gamma : [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'] \rightarrow [k, k'] \times [\ell, \ell'] \times [m, m']$$

para designar uma função diferenciável

$$\gamma : (a - \epsilon, a' + \epsilon) \times (b - \epsilon, b' + \epsilon) \times (c - \epsilon, c' + \epsilon) \rightarrow (k - \epsilon, k' + \epsilon) \times (\ell - \epsilon, \ell' + \epsilon) \times (m - \epsilon, m' + \epsilon)$$

onde ϵ é um número real positivo. Suponhamos, além disso, que:

- γ é bijetiva e
- leva o interior de $[a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ no interior de $[k, k'] \times [\ell, \ell'] \times [m, m']$.

O resultado que desejamos pode ser enunciado como segue.

FÓRMULA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS. *Sejam R e R' retângulos do plano e $\gamma : R \rightarrow R'$ uma aplicação diferenciável bijetora para a qual:*

- *o determinante do jacobiano é sempre positivo em todo ponto de R ,*
- e*
- *o interior de R é levado por γ no interior de R' .*

Se

$$\sigma : R \rightarrow U,$$

é uma 3-célula contida em uma região U de \mathbb{R}^n , então

$$\int_{\sigma \cdot \gamma} \sigma^* \omega = \int_{\sigma} \omega.$$

Como no caso de 2-formas, a demonstração consiste em reduzir o problema à integração de uma 3-forma em um 3-retângulo, usando a imagem inversa por σ . Mas uma 3-forma em uma região U de \mathbb{R}^3 se escreve na forma $g dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, onde $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Portanto, integrar esta forma em um retângulo é o mesmo que integrar g neste retângulo, o que nos permite usar o teorema de mudança de base para integrais triplas. Os detalhes ficam como exercício.

Como consequência desta fórmula sempre podemos supor, ao provar um resultado sobre integração de 3-formas, que a célula tem o retângulo $[0, 1]^3$ como espaço de parâmetros.

PROPOSIÇÃO. *Seja $R = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ um 3-retângulo e ω uma 3-forma definida em uma região aberta do plano que contém R . Então existe uma aplicação diferenciável $\gamma : [0, 1]^3 \rightarrow R$, tal que*

$$\int_R \omega = \int_{[0, 1]^3} \gamma^*(\omega).$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina $\gamma : [0, 1]^3 \rightarrow R$ por

$$\gamma(r, s, t) = (a, b, c) + r(a' - a, 0) + s(0, b' - b) + t(0, 0, c' - c).$$

Temos que $\det(J(\gamma)) = (a' - a)(b' - b)(c' - c) > 0$, pois $a' > a$, $b' > b$ e $c' > c$. A proposição segue imediatamente da fórmula de mudança de variáveis. \square

3. Teorema de Stokes

Nesta seção enunciamos e provamos nossa segunda versão do teorema de Stokes.

TEOREMA DE STOKES. *Seja ω uma 2-forma diferencial definida em uma região U de \mathbb{R}^n . Se E é um 3-encadeamento contido em U , então*

$$\int_{\partial E} \omega = \int_E d\omega.$$

A demonstração é inteiramente análoga a da versão do mesmo teorema enunciada na seção 4 do capítulo 3. Na verdade as duas demonstrações são tão semelhantes que seria preferível se você tratasse esta como um exercício, do qual estamos dando uma resposta completa.

Dividiremos a demonstração em duas partes. A primeira consiste em mostrar que o teorema vale para 3-formas do \mathbb{R}^3 , integradas sobre um 3-retângulo. A segunda reduz o caso geral a este caso especial.

3.1. Demonstração do teorema de Stokes no \mathbb{R}^3 . Começamos tratando o caso mais simples em que E é um 3-retângulo e ω uma 2-forma diferencial definida em uma região aberta V do plano, que contém E .

PRIMEIRA PARTE: redução ao caso em que o retângulo é $[0, 1]^3$.

Pela proposição 2.3

$$(3.1) \quad \int_R \omega = \int_{[0,1]^3} \gamma^*(d\omega).$$

Enumerando os lados de $C = [0, 1]^3$ e R segundo a convenção introduzida no §3.4, vemos que

$$\gamma(C_{ij}) = R_{ij},$$

e o mesmo vale para os lados opostos. Mas, pela fórmula de mudança de variáveis para integrais de 2-formas

$$\int_{R_{ij}} \omega = \int_{\gamma(C_{ij})} \omega = \int_{C_{ij}} \gamma^*(\omega).$$

de modo que

$$(3.2) \quad \int_{\partial R} \omega = \int_{\partial[0,1]^3} \gamma^*(\omega).$$

Mas, se o teorema de Stokes vale para $\gamma^*(\omega)$ em $[0, 1]^3$, temos

$$\int_{[0,1]^3} \gamma^*(d\omega) = \int_{\partial[0,1]^3} \gamma^*(\omega);$$

donde segue por (3.1) e (3.2), que

$$\begin{aligned} \int_R \gamma^*(\omega) = & \\ & - \int_{\gamma(R_{12})} \gamma^*(\omega) + \int_{\gamma(R_{12}^o)} \gamma^*(\omega) \\ & - \int_{\gamma(R_{23})} \gamma^*(\omega) + \int_{\gamma(R_{23}^o)} \gamma^*(\omega) \\ & + \int_{\gamma(R_{13})} \gamma^*(\omega) - \int_{\gamma(R_{13}^o)} \gamma^*(\omega), \end{aligned}$$

que é o teorema de Stokes sobre R . Por isso, podemos supor, de agora em diante, que $R = [0, 1]^3$.

SEGUNDA PARTE: redução ao caso em que a 2-forma em $[0, 1]^3$ é $gdt_1 \wedge dt_2$.

Seja

$$\omega = g_1 dt_1 \wedge dt_2 + g_2 dt_2 \wedge dt_3 + g_3 dt_1 \wedge dt_3,$$

onde $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{O}(V)$. Mas,

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial R} g_1 dt_1 \wedge dt_2 + \int_{\partial R} g_2 dt_2 \wedge dt_3 + \int_{\partial R} g_3 dt_1 \wedge dt_3,$$

ao passo que

$$\int_R d\omega = \int_R d(g_1 dt_1 \wedge dt_2) + \int_R d(g_2 dt_2 \wedge dt_3) + \int_R d(g_3 dt_1 \wedge dt_3),$$

já que d é uma transformação linear. Portanto, basta provar que

$$\begin{aligned} \int_R d(g_1 dt_1 \wedge dt_2) &= \int_{\partial R} g_1 dt_1 \wedge dt_2 \\ \int_R d(g_2 dt_2 \wedge dt_3) &= \int_{\partial R} g_2 dt_2 \wedge dt_3 \text{ e que} \\ \int_R d(g_3 dt_1 \wedge dt_3) &= \int_{\partial R} g_3 dt_1 \wedge dt_3. \end{aligned}$$

Como as demonstrações destas três fórmulas são idênticas (a menos de uma mudança de parâmetros), basta provar uma delas, as outras podem ficar como exercícios.

TERCEIRA PARTE: demonstração do teorema para a 1-forma $g dt_1 \wedge dt_2$ em $[0, 1]^3$.

Recapitulando, vimos nas duas partes anteriores que basta provar que a igualdade do teorema de Stokes é verdadeira quando

$$R = [0, 1]^3 \text{ e } \omega = g(t_1, t_2, t_3) dt_1 \wedge dt_2,$$

onde $g \in \mathcal{O}(U)$. Porém, como

$$d(\omega) = \frac{\partial g}{\partial t_3} dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3$$

temos que

$$\int_R d\omega = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t_3} dt_1 dt_2 dt_3.$$

Contudo, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t_3} dt_1 dt_2 dt_3 = \int_0^1 \int_0^1 (g(t_1, t_2, 1) - g(t_1, t_2, 0)) dt_1 dt_2,$$

que pode ser reescrito como

$$(3.3) \int_R d\omega = \int_0^1 \int_0^1 g(t_1, t_2, 1) dt_1 dt_2 - \int_0^1 \int_0^1 g(t_1, t_2, 0) dt_1 dt_2.$$

Por outro lado, enumerando as faces de R na forma já utilizada acima, verificamos que a imagem inversa de $g(t_1, t_2, t_3) dt_1 \wedge dt_2$ por R_{i3} e R_{i3}^o , para $1 \leq i \leq 2$, são nulas pois, em ambos os casos, a primeira ou a segunda

coordenada da face é constante. Parametrizando as duas faces restantes na forma

$$\begin{aligned} R_{12}(s_1, s_2) &= (0, 0, 0) + s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0), \\ R_{12}^o(s_1, s_2) &= (0, 0, 1) + s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0), \end{aligned}$$

temos que

$$\int_{R_{12}} g dt_1 \wedge dt_2 = \int_0^1 \int_0^1 g(s_1, s_2, 0) ds_1 ds_2,$$

ao passo que

$$\int_{R_{12}^o} g dt_1 \wedge dt_2 = \int_0^1 \int_0^1 g(s_1, s_2, 1) ds_1 ds_2,$$

Como

$$\partial R = -R_{12} + R_{12}^o - R_{23} + R_{23}^o + R_{13} - R_{13}^o,$$

obtemos,

$$\int_{\partial R} \omega = - \int_0^1 \int_0^1 g(s_1, s_2, 0) ds_1 ds_2 + \int_0^1 \int_0^1 g(s_1, s_2, 1) ds_1 ds_2$$

já que as integrais sobre todas as outras faces são nulas. Mas isto nos permite concluir que

$$\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega,$$

provando assim que o teorema de Stokes vale sobre um retângulo do plano.

3.2. Demonstração do teorema de Stokes em \mathbb{R}^n . Levando em conta que

- a fronteira de um encadeamento é igual ao encadeamento das fronteiras de suas parcelas;
- a integral sobre um encadeamento é igual à soma das integrais sobre cada parcela do encadeamento;

vemos que basta provar o resultado no caso em que E é uma 3-célula.

Sejam, então, R um 3-retângulo e

$$\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^n$$

uma 3-célula. Se $\omega \in \Omega^2(U)$ então,

$$\sigma^*(\omega) \in \Omega^2(V),$$

onde $V \subset \mathbb{R}^3$ é uma região que contém R . Mas,

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \int_{\partial R} \sigma^*(\omega).$$

Contudo, já sabemos do §3.1 que o teorema de Stokes se aplica a esta última integral, donde

$$\int_{\partial R} \sigma^*(\omega) = \int_R d(\sigma^*(\omega)).$$

Entretanto, pela definição de integral de uma 3-forma

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_R \sigma^*(d\omega).$$

Como $\sigma^*(d\omega) = d\sigma^*(\omega)$, podemos concluir que

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega,$$

provando, assim, o teorema de Stokes enunciado no começo da seção.

3.3. A variante vetorial. Antes de passar às aplicações do teorema de Stokes, precisamos considerar sua tradução em termos da análise vetorial tradicional. Isto é, sem usar formas diferenciais.

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial definido em uma região U do plano. A 2-forma associada a F é

$$\Phi_F = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

e tem como diferencial

$$d\Phi_F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right).$$

A função

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

é conhecida como o *divergente* de F , e denotada por $\operatorname{div}(F)$. Portanto,

$$(3.4) \quad d\Phi_F = \operatorname{div}(F) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Veremos como interpretar o divergente na seção 4, por enquanto vamos nos contentar em traduzir o teorema de Stokes em termos do divergente.

Para poder enunciar a versão vetorial do teorema de Stokes em dimensão 3, precisamos escrever

$$\int_{\sigma} \Phi_F$$

sem usar formas. Mas, já fizemos isto no caso especial de um campo rotacional. Estendendo a definição ao presente caso, obtemos

$$\int_{\sigma} \Phi_F = \int_{\sigma} (F \cdot N) d\sigma,$$

onde N é o vetor normal unitário a σ . Com isto podemos enunciar a versão vetorial do teorema de Stokes.

TEOREMA DE DIVERGÊNCIA (caso vetorial). *Seja σ uma 3-célula. Se F é um campo definido em uma região de \mathbb{R}^3 que contém σ , então*

$$\int_{\partial\sigma} (F \cdot N) d\sigma = \int_{\sigma} \operatorname{div}(F) dV.$$

Na prática utilizaremos uma versão híbrida do teorema, em que o divergente aparece como coeficiente de uma 3-forma. O enunciado completo é o seguinte.

TEOREMA DE DIVERGÊNCIA. *Seja σ uma 3-célula. Se F é um campo definido em uma região de \mathbb{R}^3 que contém σ , então*

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_F = \int_{\sigma} \operatorname{div}(F) dV,$$

onde $dV = dx \wedge dy \wedge dz$.

4. Aplicações

Nesta seção consideraremos várias aplicações do teorema de Stokes e das 3-formas a problemas de física. Começamos buscando uma interpretação para o divergente de um campo.

4.1. Divergente. Começaremos calculando o divergente de alguns campos simples de \mathbb{R}^3 . Como é claro que um campo constante tem divergente zero, vamos começar por um campo não constante, mas cujos vetores são todos paralelos a uma dada direção. Se v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^3 e ν uma função de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} , podemos escrever um tal campo na forma

$$F(p) = \nu(p)v_0, \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^3.$$

Como v_0 é constante, podemos escolher as coordenadas de modo que $v_0 = (1, 0, 0)$, donde

$$F(p) = (\nu(p), 0, 0).$$

Calculando o divergente, obtemos

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial \nu}{\partial x_1}.$$

Se interpretarmos F como um campo de velocidades, então ν corresponde ao módulo da velocidade em cada ponto. Portanto, o divergente será zero apenas se o campo tiver aceleração nula em todo lugar. Geometricamente isto significa que partículas que forem liberadas próximas uma da outra não serão separadas pela ação do campo. Isto é, não vão seguir *trajetórias divergentes*. Por outro lado, se a aceleração for não nula, as partículas tendem a se afastar, ou a se aproximar, umas das outras. Um modelo físico desta situação é dado por um gás que está sendo expandido (aceleração positiva) ou comprimido (aceleração negativa). É por isto que, em mecânica de fluidos, dizemos que um fluido é *incompressível* se seu divergente é zero.

É claro que há outras maneiras de duas partículas serem arrastadas para longe ou para perto umas das outras, sem que para isto o módulo da velocidade precise variar. Basta considerar, por exemplo, o campo de velocidades

$$\mathbb{V}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}(x_1, x_2, x_3),$$

que tem módulo constante igual a 1. Neste caso as partículas se afastam, porque o campo é central. Calculando o divergente, obtemos

$$\operatorname{div}(\mathbb{V}) = \frac{-1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}(x_1 + x_2 + x_3),$$

que não é constante, como seria de esperar.

Para uma análise mais geral, e mais refinada, desta interpretação do divergente, considere uma região $U \subseteq \mathbb{R}^3$ onde está definido um campo de vetores F . Dado um ponto $p \in U$, seja σ_r uma bola fechada de raio r e centro em p , que está inteiramente contida em U . Pelo teorema da divergência,

$$(4.1) \quad \int_{\partial\sigma_r} \Phi_F = \int_{\sigma_r} \operatorname{div}(F) dV.$$

Como $\operatorname{div}(F)(p)$ é constante e

$$\int_{\sigma_r} dV = \frac{4\pi r^3}{3},$$

é o volume da célula σ_r , temos que se $p \in U$,

$$\int_{\sigma_r} \operatorname{div}(F)(p) dV = \operatorname{div}(F)(p) \int_{\sigma_r} dV = \frac{4\pi r^3}{3} \operatorname{div}(F)(p),$$

Somando e subtraindo este termo do lado direito de (4.1), obtemos

$$(4.2) \quad \int_{\partial\sigma_r} \Phi_F = \int_{\sigma_r} \delta dV + \frac{4\pi r^3}{3} \operatorname{div}(F)(p),$$

onde

$$\delta(x, y, z) = \operatorname{div}(F)(x, y, z) - \operatorname{div}(F)(p).$$

Como r é constante, podemos dividir (4.2) por $4\pi r^3/3$, o que nos dá

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\partial\sigma_r} \frac{1}{r^3} \Phi_F = \frac{3}{4\pi} \int_{\sigma_r} \frac{1}{r^3} \delta dV + \operatorname{div}(F)(p),$$

Entretanto, $\operatorname{div}(F)$ é uma função contínua em U , de forma que o limite de $\delta(x, y, z)$ tende a zero quando (x, y, z) tende a p . Assim, tomando o limite quando r tende a zero,

$$(4.3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\sigma_r} \delta dV = 0.$$

Disto obtemos

$$\frac{3}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\sigma_r} \frac{1}{r^3} \Phi_F = \operatorname{div}(F)(p).$$

Portanto, lembrando que r está fixo,

$$(4.4) \quad \operatorname{div}(F)(p) = \frac{3}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\sigma_r} \frac{1}{r^3} \Phi_F$$

Segundo a equação (4.4), se r for muito pequeno, o divergente em p é mais ou menos igual ao fluxo através de uma esfera de raio r e centro em p , dividido pelo volume da esfera. Mas o fluxo através da esfera representa o balanço entre

a quantidade de fluido que entra, e a quantidade que sai da esfera. Portanto, o divergente nos dá o balanço entre a quantidade de fluido que entra e sai da esfera, por unidade de volume. Em particular, se o divergente for zero, então todo o fluido que entra na esfera, acaba saindo. Isto é, não pode haver fluido se acumulando na esfera (seja por compressão, ou porque há um sorvedouro dentro da esfera), nem pode haver fluido vazando da esfera (seja por expansão, ou porque há uma fonte dentro da esfera).

No §5.5 determinamos o campo magnético de um fio infinito, que se prolonga ao longo do eixo z , e por onde flui uma corrente constante. Vimos que a simetria do problema nos permite afirmar que

sobre qualquer cilindro cujo eixo é o próprio fio, o campo é constante, tangente ao cilindro e perpendicular ao fio.

Isto significa que duas partículas, abandonarmos próximas uma da outra, e a uma mesma distância do fio, terão a mesma distância relativa ao longo de toda a sua trajetória. Por outro lado, se as duas partículas estão a distâncias diferentes do fio, então só manterão sua posição relativa se a intensidade do campo for a mesma em todo lugar. Contudo, as hipóteses decorrentes da simetria do problema, combinadas com as equações de Maxwell, nos permitiram determinar o campo como sendo

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2}(-y, x, 0).$$

Em particular, o campo magnético de um fio reto infinito tem intensidade um em todo lugar. Combinadas com a interpretação física apresentada acima, estas considerações nos permitem afirmar que o divergente deste campo deve ser nulo. Um cálculo direto a partir da fórmula para \mathbb{B} mostra que $\text{div}(\mathbb{B})$ é igual a

$$\frac{-2kx}{(x^2 + y^2)^2}(-y) + \frac{-2ky}{(x^2 + y^2)^2}(x) \frac{2kxy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2kxy}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

confirmando portanto, o palpite decorrente da geometria do campo. No §4.3 veremos que o fato do divergente ser nulo é uma propriedade do campo magnético, qualquer que seja sua fonte.

4.2. Lei de Gauss: carga pontual. Seja

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

e $\mathbb{E} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo elétrico de uma carga pontual q situada na origem. Pela lei de Coulomb $\mathbb{E} = \nabla f$, onde

$$f = -\frac{kq}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Temos, assim, que

$$\Phi_{\mathbb{E}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2.$$

Portanto,

$$\Phi_{\mathbb{E}} = g\Phi_R$$

onde

$$g = \frac{kq}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

e R é o campo radial. Mas,

$$d(\Phi_R) = 3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

ao passo que

$$dg = \frac{-3kq}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3).$$

Contudo,

$$dg \wedge \Phi_R = \frac{-3kq}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3;$$

donde

$$dg \wedge \Phi_R = \frac{-3kq}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Mas,

$$d\Phi_{\mathbb{E}} = dg \wedge (\Phi_R) - g \wedge d(\Phi_R),$$

de forma que obtemos

$$d\Phi_{\mathbb{E}} = 0.$$

Em particular, $\text{div}(\mathbb{E}) = 0$.

Com isto fica fácil determinar o fluxo de \mathbb{E} através da fronteira de um 3-célula σ que não contém a origem. Afinal, pelo teorema de Stokes

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbb{E}} = \int_{\sigma} d\Phi_{\mathbb{E}} = 0.$$

Por outro lado, se a origem está no interior de σ , o teorema de Stokes não pode ser aplicado diretamente. O problema é que, por hipótese, precisamos que a 3-célula esteja totalmente contida na região onde a 2-forma está definida. Mas isto não ocorre neste caso, uma vez que $\Phi_{\mathbb{E}}$ não está definida na origem, que está contida em σ . Por sorte este obstáculo é fácil de contornar, desde que a 3-célula tenha pontos interiores; isto é, não se reduza a uma superfície. Como este é mesmo o único caso que nos interessa, podemos fazer esta hipótese sem a preocupação com possíveis sobressaltos posteriores.

Seja, então, σ uma 3-célula σ que contém a origem e cujo interior é não vazio e contém a origem. Como a origem é um ponto interior de σ , existe um real positivo $\epsilon > 0$ de modo que a bola B de raio ϵ e centro na origem está totalmente contida no interior de σ . Considere o 3-encadeamento $E = \sigma - B$, que corresponde ao sólido σ do qual foi removido a bola B . A fronteira deste encadeamento é igual a

$$\partial E = \partial\sigma - \partial B,$$

que corresponde à superfície de σ , com o vetor normal orientado para fora, somada à superfície da bola B , com o vetor normal voltado para $(0, 0, 0)$. Como a origem não pertence a E , podemos aplicar o teorema de Stokes, que nos dá

$$\int_{\partial E} \Phi_{\mathbb{E}} = \int_E d\Phi_{\mathbb{E}} = 0.$$

Contudo,

$$\int_{\partial E} \Phi_{\mathbb{E}} = \int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbb{E}} - \int_{\partial B} \Phi_{\mathbb{E}};$$

donde podemos concluir que

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbb{E}} = \int_{\partial B} \Phi_{\mathbb{E}}.$$

Portanto, para achar o fluxo de \mathbb{E} através de $\partial\sigma$ basta calcular seu fluxo através de ∂B , que é uma esfera de raio ϵ . Mas o valor deste fluxo já foi obtido na equação (5.2) da página 114, e é igual a $4\pi kq$. Portanto,

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbb{E}} = 4\pi kq,$$

qualquer que seja a 3-célula σ . Observe que se trata de um resultado extremamente geral, que seria muito difícil de provar sem este teorema. Resumindo, provamos o seguinte resultado da eletrostática.

LEI DE GAUSS (para cargas pontuais). *O fluxo do campo elétrico de uma carga pontual q através de uma superfície fechada S é igual a*

- zero, se a carga não está contida no interior de S ;
- $4\pi kq$, se a carga está contida no interior de S .

Podemos nos perguntar se este resultado vale de maneira mais geral. Por exemplo, o que acontece se temos uma quantidade finita de cargas pontuais q_1, \dots, q_m dentro da 3-célula σ ? Neste caso, podemos repetir o argumento anterior, desta vez tomando n bolas B_1, \dots, B_m , cada uma das quais contém uma das cargas, e está completamente contida em σ . Fazendo isto, vemos que, neste caso, o fluxo é igual a

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbb{E}} = \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_j} \Phi_{\mathbb{E}} = 4\pi kqm.$$

4.3. As equações de Maxwell. No §5.5 do capítulo 3 consideramos duas, das quatro equações de Maxwell. No caso estático, as duas equações restantes podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbb{E}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div}(\mathbb{B}) &= 0, \end{aligned}$$

onde \mathbb{E} e \mathbb{B} representam, respectivamente, os campos elétrico e magnético, ρ é a densidade de carga e ϵ_0 é uma constante cujo significado não precisa nos preocupar.

Pela quarta equação de Maxwell, o divergente de um campo magnético é sempre zero. Se o campo magnético fosse o campo de velocidades de um fluido, isto significaria que este campo não tem fontes, nem sorvedouros. No caso do campo elétrico, que pode ter divergente não nulo, uma fonte do campo é uma carga positiva, e um sorvedouro uma carga negativa. Portanto, podemos interpretar a quarta equação de Maxwell como dizendo que não há nada semelhante a uma carga isolada, no caso do campo magnético. Utilizando o jargão usual, não pode haver um monopólo magnético; isto é, um pólo isolado. Portanto, a quarta lei de Maxwell está relacionada ao fato, bem conhecido, de que quando quebramos um ímã ao meio surgem dois novos pólos magnéticos de sinais opostas, um de cada lado da

Passando à terceira equação de Maxwell, o que temos é uma versão diferencial da lei de Gauss. De fato, se U é uma região de \mathbb{R}^3 e \mathbb{E} é um campo elétrico definido em U então, pelo teorema de divergência

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_F = \int_{\sigma} \operatorname{div}(F) dV,$$

onde σ é uma 3-célula contida em U . Substituindo $\operatorname{div}(\mathbb{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ nesta equação, obtemos

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_F = \int_{\sigma} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV.$$

Suponhamos que toda a carga está concentrada em uma 3-célula $\xi \subseteq \sigma$. Neste caso, a densidade de carga é nula em $\sigma - \xi$. Assim,

$$\int_{\sigma} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \int_{\xi} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV,$$

uma vez que

$$\int_{\sigma-\xi} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_F = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\xi} \rho dV.$$

Contudo, a integral à direita da fórmula acima é igual à carga total contida em ξ . Resumindo, temos a seguinte versão generalizada da *Lei de Gauss*.

LEI DE GAUSS. *Seja S uma superfície fechada. O fluxo do campo elétrico gerado por uma distribuição de carga de densidade ρ contida em um sólido \mathcal{V} é igual a*

- zero, se \mathcal{V} não está contida em S ;
- Q/ϵ_0 , se \mathcal{V} está contido em S .

Encerraremos o parágrafo calculando o campo elétrico \mathbb{E} de um fio infinito e carregado, cuja seção transversal suporemos desprezível, assim como fizemos para o campo magnético. Note porém que, neste caso, não há uma corrente: a distribuição de cargas no fio é uniforme e estática. Como no caso do campo magnético (veja §5.5) precisaremos apelar para a simetria do problema, a fim de entender a geometria do campo. Como se trata de um fio infinito, o

campo deve ser igual em qualquer ponto de um cilindro σ coaxial com o fio. Além disso, nossa experiência com o caso de uma carga isolada sugere que este campo deve ser normal ao cilindro. Portanto, denotando o campo restrito ao cilindro σ por \mathbb{E}_σ , obtemos

$$\mathbb{E}_\sigma = \|\mathbb{E}_\sigma\| \mathbf{n}_\sigma,$$

onde \mathbf{n}_σ é o vetor normal a σ . Observe que as considerações sobre a simetria do problema implicam que $\|\mathbb{E}_\sigma\|$ é constante. Logo,

$$\sigma^*(\Phi_{\mathbb{E}}) = \|\mathbb{E}_\sigma\| \Phi_{\mathbf{n}_\sigma}.$$

Portanto,

$$\int_\sigma \Phi_{\mathbb{E}} = \|\mathbb{E}_\sigma\| \int_\sigma \Phi_{\mathbf{n}_\sigma},$$

já que as considerações anteriores mostram que $\|\mathbb{E}_\sigma\|$ é constante sobre o cilindro. Contudo,

$$\int_{\partial\sigma} \Phi_{\mathbf{n}_\sigma} = 4\pi r\ell,$$

que é a área do cilindro. Deste modo,

$$\int_\sigma \Phi_{\mathbb{E}} = \|\mathbb{E}_\sigma\| 4\pi r\ell.$$

Apelando, agora, para a lei de Gauss, temos que $\|\mathbb{E}_\sigma\| 4\pi r\ell$ deve ser igual à carga total dentro de σ . Supondo que o fio tem densidade de carga constante, e igual a ρ , por unidade de comprimento, a carga total será $q\ell/\epsilon_0$. Obtemos, assim, que

$$\|\mathbb{E}_\sigma\| = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

4.4. Lema de Poincaré. Seja U uma região de \mathbb{R}^3 . Inspirados nas noções correspondentes para 1-formas, vimos que uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(U)$ é *fechada* se $d\omega = 0$. Uma 2-forma *exata* é aquela que pode ser escrita como $d\alpha$ para algum $\alpha \in \Omega^1(U)$. Como $d(d\alpha) = 0$, temos que toda forma exata é fechada. O que dizer sobre a recíproca?

Como no caso de 1-formas, se a região U for convexa então a resposta à pergunta é que a recíproca é verdadeira. Também neste caso o resultado é conhecido como lema de Poincaré.

LEMA DE POINCARÉ (para 2-formas). *Toda 2-forma fechada definida em uma região e convexa de \mathbb{R}^3 é exata.*

Para simplificar os detalhes técnicos da construção provaremos o lema de Poincaré apenas no caso em que U é um 3-retângulo aberto que contém a origem.

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$\omega = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

uma 2-forma fechada definida em uma região convexa U de \mathbb{R}^n . Vamos construir, explicitamente, uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $\omega = d\alpha$, mostrando,

assim, que ω é exata. Na verdade, podemos até mesmo supor que o coeficiente de dx_3 em α é zero; de modo que

$$\alpha = b_1 dx_1 + b_2 dx_2,$$

onde $a_1, a_2 \in \mathcal{O}(U)$.

Calculando $d\alpha$ e igualando a ω , verificamos que

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\partial b_2}{\partial x_3} \\ a_2 &= -\frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\ a_3 &= \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Integrando as duas primeiras equações com relação a z , obtemos

$$b_1 = -\int_0^{x_3} a_2(x_1, x_2, t) dt + P_1$$

ao passo que

$$b_2 = -\int_0^{x_3} a_1(x_1, x_2, t) dt + P_2,$$

onde P_1 e P_2 são funções apenas de x_1 e x_2 , que por isso funcionam como constantes na integração. Para determinar P_1 e P_2 recorreremos à terceira das equações acima. Substituindo os valores que obtivemos para b_1 e b_2 naquela equação, chegamos a

$$(4.5) \quad a_3 = -\int_0^{x_3} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right) dt + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P_2}{\partial x_2}.$$

Contudo, como ω é uma forma fechada, $d\omega = 0$, donde

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Substituindo em (4.5),

$$b_3 = \int_0^{x_3} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, t) dt + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P_2}{\partial x_2}.$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$a_3(x_1, x_2, x_3) = a_3(x_1, x_2, x_3) - a_3(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P_2}{\partial x_2}.$$

Efetando os devidos cancelamentos,

$$a_3(x_1, x_2, 0) = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P_2}{\partial x_2}.$$

Mas, para que esta última equação seja satisfeita, basta tomar $P_2 = 0$ e

$$P_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} a_3(t, x_2, 0) dt.$$

Resumindo, mostramos que $\alpha = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$, onde

$$b_1 = - \int_0^{x_3} a_2(x_1, x_2, t) dt + \int_0^{x_1} a_3(t, x_2, 0) dt \quad \text{e}$$

$$b_2 = - \int_0^{x_3} a_1(x_1, x_2, t) dt$$

satisfaz $\omega = d\alpha$, provando assim o teorema de Poincaré no caso especial em que U é um 3-retângulo aberto que contém a origem. \square

Como no caso de 1-formas esta demonstração do lema de Poincaré nos dá um procedimento pelo qual podemos calcular a 1-forma α que satisfaz $d\alpha = \omega$, quando ω é uma dada 2-forma fechada definida em um paralelepípedo de \mathbb{R}^3 . Por exemplo, seja

$$(4.6) \quad \omega = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y dy \wedge dz - x dx \wedge dz).$$

Como

$$d\omega = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx \wedge dz = 0,$$

então, pelo lema de Poincaré, existe uma 1-forma α , definida em um 3-retângulo R que não contém o eixo z , para a qual

$$d\alpha = \omega.$$

Como a origem não pertence ao retângulo R , vamos tomar o ponto $p = (1, 0, 0)$ como base da construção. Naturalmente, para que isto faça sentido, devemos ter que $p \in R$. Supondo que $\alpha = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$, devemos ter

$$b_1 = - \int_0^z a_2(x, y, t) dt + \int_1^x a_3(t, y, z) dt \quad \text{e} \quad b_2 = - \int_0^z a_1(x, y, t) dt$$

já que o ponto base é $(1, 0, 0)$. Substituindo os valores de a_1 , a_2 e $a_3 = 0$ nas integrais,

$$b_1 = - \int_0^z \frac{-x}{x^2 + y^2} dt = \frac{xz}{x^2 + y^2}$$

$$b_2 = - \int_0^z \frac{-y}{x^2 + y^2} dt = \frac{yz}{x^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$(4.7) \quad \alpha = \frac{xz}{x^2 + y^2} dx + \frac{yz}{x^2 + y^2} dy.$$

Observe que a forma α está definida em toda a região

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\},$$

e satisfaz $d\alpha = \omega$ em toda esta região e não apenas no retângulo na qual foi calculada. Com isso, acabamos obtemos mais do que barganhamos, já que mostramos que ω é exata em U e não apenas em um retângulo R contendo $(1, 0, 0)$.

4.5. Potencial vetor. Vejamos o que o lema de Poincaré nos diz quando é aplicado a um campo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Apesar de nossa demonstração se restringir ao caso em que U é um retângulo, vimos que o lema vale sobre qualquer região convexa. Por isso suporemos apenas que U é convexa. Digamos que F tem divergente zero. Neste caso,

$$d\Phi_F = \operatorname{div}(F)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0.$$

Logo, a 2-forma Φ_F é fechada e, pelo lema de Poincaré, existe

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3,$$

tal que $d\alpha = \Phi_F$. Escrevendo G para o campo cujas funções coordenadas são (a_1, a_2, a_3) , vemos que

$$\alpha = \tau_G,$$

donde

$$\Phi_F = d\alpha = d\tau_G = \Phi_{\operatorname{rot}(G)}.$$

Concluimos que todo campo em U cujo divergente é zero é igual ao rotacional de algum campo vetorial. Observe, também, que G não está definido de maneira única. Afinal, se $g \in \mathcal{O}(U)$, então $H = G + \nabla g$ satisfaz

$$\tau_H = \tau_G + \tau_{\nabla g} = \tau_G + dg,$$

donde

$$\Phi_H = d(\tau_G + dg) = d(\tau_G) = \Phi_F,$$

já que $d^2 = 0$. Em outras palavras, qualquer que seja $g \in \mathcal{O}(U)$ temos

$$\operatorname{rot}(G + \nabla g) = \operatorname{rot}(G) = F.$$

Todas estas considerações se aplicam quando F é um campo magnético já que, segundo às equações de Maxwell, este campo tem divergente nulo. Para falar a verdade, tudo isto se parece muito com o que ocorria com o campo elétrico e seu potencial. Só que lá, o potencial era uma função com valores em reais, e o campo era obtido do potencial tomando-se o seu gradiente. Neste caso, G funciona como o potencial de F , só que G também é um campo, e F é obtido de G tomando-se o seu rotacional. Estes paralelos fazem com que seja natural pensar em G como um *potencial vetor* de F . Outra semelhança: no caso do campo elétrico o potencial está definido a menos de uma constante; no campo magnético, o potencial está definido a menos do gradiente de uma função diferenciável. A transformação que leva o potencial vetor G de um campo F em $G + \nabla g$, para algum $g \in \mathcal{O}(U)$ é conhecida como uma “*mudança de gauge*”, às vezes traduzida em português como *mudança de calibre*.

Um exemplo simples é dado pelo campo magnético de um fio infinito, alinhado ao longo do eixo z . Neste caso o campo é dado por

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2}(-y, x, 0);$$

de modo que, a menos da constante k , a forma do fluxo é a 2-forma ω definida em (4.6). Como uma 1-forma α para a qual $\omega = d\alpha$ é dada pela fórmula (4.7),

o potencial vetor de B corresponderá ao campo \mathbf{A} que satisfaz $\tau \mathbf{A} = \alpha$. Mas, este campo é

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{xz}{x^2 + y^2}, \frac{yz}{x^2 + y^2} \right).$$

Podemos nos perguntar se o potencial vetor de um campo magnético é um campo fidedigno ou apenas uma ficção matemática. Para responder a esta pergunta precisamos recorrer à fenômenos da física quântica. Em primeiro lugar, um campo pode ser nulo sem que seu potencial vetor seja nulo. Este é o caso, por exemplo, dos campos conservativos. Uma situação ainda mais radical ocorre para o campo magnético de um solenóide infinito no qual flui uma corrente estacionária. Neste caso, o campo *fora* do solenóide é nulo, embora seu potencial vetor não seja nulo. A pergunta é: o fato do potencial vetor não ser nulo fora do solenóide pode ter algum efeito sobre um elétron que trafega nas proximidades solenóide? A resposta é sim, como mostra o chamado *efeito de Aharonov-Bohm*. O potencial vetor causa uma mudança de fase no elétron, que pode ser observada em um experimento de difração. Para mais detalhes veja [5, pp. 15-8 a 15-14] ou o verbete correspondente na Wikipedia. Uma discussão detalhada do potencial vetor pode ser encontrada em [13].

5. Exercícios

- Calcule a diferencial das seguintes formas:
 - $xdy \wedge dz$;
 - $xydz \wedge dx$;
 - $z^3dx \wedge dy$;
 - $dx \wedge dy$;
 - $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
- Dê exemplo de uma 2-forma de \mathbb{R}^3 que não é fechada.
- Use o produto exterior para calcular o jacobiano para as transformações de coordenadas cartesianas para
 - coordenadas cilíndricas;
 - coordenadas esféricas.
- Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo dos seguintes campos através das superfícies dadas:
 - $F = (y - x, z - y, y - x)$, através do cubo $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$;
 - $F = (y, xy, -z)$, na fronteira do sólido interno ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, limitado por $z = 0$ e por $z = x^2 + y^2$;
 - $F = (2x, y^2, z^2)$ sobre a esfera unitária com centro na origem;
 - $F = (2x, 3y, z)$ sobre a superfície que limita a região definida por $x^2 + y^2 \leq 4$ e $1 \leq z \leq 3$.

5. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do campo

$$\left(\log(x^2 + y^2), \frac{2z}{x} \arctan\left(\frac{y}{x}, z\sqrt{x^2 + y^2}\right),\right),$$

através da fronteira do sólido

$$V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \text{ e } -1 \leq z \leq 2\}.$$

6. Deduza a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss para uma carga pontual.
7. Mostre que a lei de Gauss é falsa para qualquer campo central cuja intensidade no ponto de coordenadas (x_1, x_2, x_3) é dada por

$$\frac{k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{n/2}},$$

onde k é uma constante e $n \neq 2$ é um inteiro positivo.

8. Seja F um campo vetorial definido em uma região U de \mathbb{R}^3 . Prove as seguintes fórmulas:

- (a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$;
 (b) $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div}(F)$;

onde $g \in \mathcal{O}(U)$.

SUGESTÃO: traduza as afirmações em termos de formas diferenciais.

9. Considere o campo central

$$F(x, y, z) = (kx, ky, kz),$$

onde k é uma constante. Esta fórmula descreve um campo elétrico ou um campo magnético? Justifique sua resposta usando as leis de Maxwell.

10. Calcule o divergente de cada um dos campos de velocidades abaixo. Quais deles representam um campo incompressível?

- (a) $F(x, y, z) = (ay, 0, 0)$;
 (b) $F(x, y, z) = (a/r^2, 0, 0)$;
 (c) $F(x, y, z) = (ay, 0, 0)$;
 (d) $F(x, y, z) = (0, ar^n, 0)$;

onde $a \neq 0$ é uma constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

11. Calcule o divergente de um campo central do \mathbb{R}^3 .

12. Determine uma fórmula para o divergente:

- (a) em coordenadas cilíndricas;
 (b) em coordenadas esféricas.

13. Considere cada uma das 2-formas ω de \mathbb{R}^3 dadas abaixo. Verifique se ω é fechada e, se for, determine uma 1-forma α tal que $d\alpha = \omega$.

- (a) $\omega = x^2 dx \wedge dy + (y^3 + 1) dy \wedge dz + (z + 2) dx \wedge dz$;
 (b) $\omega = xy dx \wedge dy$;
 (c) $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dz$;

(d) $\omega = zdx \wedge dy + ydx \wedge dz.$

14. Prove que a integral de uma 2-forma sobre fronteira de qualquer sólido é igual a zero.
15. Sejam a_1, a_2 e a_3 funções diferenciáveis de uma variável definidas em toda a reta \mathbb{R} , e considere a 2-forma

$$\omega = a_1(x)dx \wedge dy + a_2(y)dy \wedge dz + a_3(z)dx \wedge dz.$$

- (a) Mostre que ω é uma forma fechada.
- (b) Determine uma 1-forma α tal que $d\alpha = \omega$.
16. Considere o campo $F(x, y, z) = (0, 0, -k \log(x^2 + y^2))$ definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$, onde $k \in \mathbb{R}$.
- (a) Mostre que F é um potencial vetor para o campo magnético de um fio infinito alinhado ao longo do eixo z .
- (b) Qual a “mudança de gauge” que nos permite passar de F ao potencial vetorial A determinado na página 4.5 para este mesmo campo?
17. Seja F um campo de vetores definido em uma região U de \mathbb{R}^3 .
- (a) Calcule $\text{div}(\nabla F)$.
- (b) Mostre que $\text{div}(\nabla F) = \Delta f$, o laplaciano de f .
- (c) Dê exemplos de funções para as quais $\Delta f = 0$.
- (d) Se uma função potencial f satisfaz $\Delta f = 0$, o que podemos dizer sobre o campo gradiente de f , quando é considerado como um campo de velocidades?

A definição de $\Delta(f)$ aparece na página 11.

18. Sejam U uma região de \mathbb{R}^3 , $f, g \in \mathcal{O}(U)$ e V um sólido limitado contido em U . Prove as seguintes fórmulas, conhecidas como *identidades de Green*:

$$(a) \quad \int_{\partial V} \Phi_{(f\nabla g)} = \int_V (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$(b) \quad \int_{\partial V} \Phi_{(f\nabla g - g\nabla f)} = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Neste problema estamos usando a notação $\nabla^2 f$ para denotar $\text{div}(\nabla f)$.

6. Problemas

1. Seja U uma região de \mathbb{R}^3 e $f \in \mathcal{O}(U)$ uma função que satisfaz $\Delta f = 0$. Denote por $D_v f$ a derivada direcional de f ao longo de v . Considere um sólido V contido em U e seja \mathbf{n} o vetor unitário normal a V .
- (a) Determine a 2-forma $D_{\mathbf{n}} f dA$.

(b) Mostre que

$$\int_{\partial V} D_{\mathbf{n}} f dA = 0.$$

(c) Mostre que

$$\int_{\partial V} f D_{\mathbf{n}} f dA = \int_V \|\nabla f\|^2 dx \wedge dy \wedge dz.$$

SUGESTÃO: Em (b) tome $F = \nabla f$ e em (c) $F = f \nabla f$.

2. A pressão para baixo exercida por um fluido que preenche a região U definida por $x \leq 0$ é dada por $F(x, y, z) = (0, 0, cx^3)$, onde c é a densidade do fluido. Seja V um sólido (limitado) contido em U . O empuxo sobre V é definido como

$$- \int_{\partial V} \Phi_F.$$

Use o teorema de Stokes para provar o seguinte teorema de Arquimedes:

O empuxo sobre V é igual ao peso do fluido deslocado por V .

Capítulo 5

n -formas

Neste capítulo fazemos uma revisão geral de tudo o que estudamos no livro; por isso, há aqui apenas definições e teoremas, sem nenhuma demonstração. Utilizaremos um enfoque em que 1-formas, 2-formas e 3-formas são tratadas simultaneamente, como instâncias diferentes de um mesmo tipo de objeto. Isto significa que, se você desejar, pode considerar esta revisão como uma introdução às n -formas. Neste caso, as demonstrações de todos os resultados enunciados ficam como exercícios.

!!!!!! Só que ainda não tive tempo de escrever este capítulo!!!!

Apêndice

Estas seções apenas revisam algumas propriedades elementares do cálculo diferencial e dos determinantes que usamos com frequência neste livro.

1. Determinantes

Só usaremos determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 , e não teremos ocasião de calcular estes determinantes explicitamente em casos numéricos. Por isso, não usaremos técnicas de cálculo como o método de Gauss. De fato, além das propriedades elementares dos determinantes usaremos apenas a expansão em co-fatores para matrizes 3×3 .

Seja A uma matriz 2×2 , cujas entradas são

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

O determinante de A é definido por

$$\det(A) = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Para calcular o determinante de uma matriz 3×3 , apelamos para a expansão em co-fatores. Expandindo o determinante de

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

pela primeira linha, obtemos

$$\det(B) = a_1 \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Note a alternância dos sinais ao longo da linha. Para efetuar o cálculo completo do determinante de $\det(B)$ precisaríamos, agora, de expandir cada um dos determinantes 2×2 . Não faremos isto, porque a expressão final é complicada e não será utilizada em nenhum lugar no livro.

Para simplificar a notação, pensaremos cada uma das linhas de uma matriz como um vetor. Assim,

$$u_1 = (a_1, a_2, a_3), u_2 = (b_1, b_2, b_3) \text{ e } u_3 = (c_1, c_2, c_3).$$

Com isto, podemos escrever

$$B = [u_1, u_2, u_3] \text{ e } \det B = \det[u_1, u_2, u_3].$$

Lembre-se que os u s representam as *linhas* de B , e não as suas *colunas*. Com esta notação podemos formular facilmente as propriedades do determinante de que vamos precisar. Sejam $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, então

Propriedade 1: se trocamos duas linhas quaisquer de um determinante entre si, ele troca de sinal, por exemplo,

$$\det[u_2, u_1, u_3] = -\det[u_1, u_2, u_3];$$

Propriedade 2: se uma linha da matriz for multiplicada por uma constante k , então o determinante é multiplicado por k , por exemplo,

$$\det[ku_1, u_2, u_3] = k \det[u_1, u_2, u_3];$$

Propriedade 3: o determinante é aditivo com respeito a cada uma de suas linhas, por exemplo,

$$\det[u_1 + u_4, u_2, u_3] = \det[u_1, u_2, u_3] + \det[u_4, u_2, u_3];$$

Embora tenhamos enunciado estas propriedades apenas no caso em que a matriz é 3×3 , elas também valem para matrizes 2×2 . Na verdade, todas valem quaisquer que sejam as matrizes quadradas cujos determinantes estamos calculando.

Bibliografia

- [1] V. I Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York (1989).
- [2] D. Bachman, *A geometric approach to differential forms*, arXiv:math.GT/0306194 (2003).
- [3] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford University Press, Oxford (1995).
- [4] R. Courant e F. John, *Introduction to calculus and analysis*, vol. 2, John Wiley and Sons (1974).
- [5] R. P. Feynman, *The Feynman lectures on physics*, vol II, comemorative issue, Addison-Wesley, Reading (1989).
- [6] G. Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, (1828).
Disponível em <http://>
- [7] G. Heflerich, *Humboldt's Cosmos: Alexander von Humboldt and the Latin American Journey that changed the way we see the World*, Gotham Books, New York (2004).
- [8] S. Lang, *Calculus of several variables*, Springer, New York (1987).
- [9] I. Madsen e J. Tornehave, *From calculus to cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press (1999)
- [10] I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world*, vol. I, tradução de A. Motte, revisão de F. Cajori Springer, University of California Press, Berkeley, (1962).
- [11] E. M. Purcell, *Elettricidade e magnetismo*, curso de física de Berkeley, vol. 2, Edgard Blücher, São Paulo (1970).
- [12] N. M. dos Santos, *Vetores e matrizes*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1975).
- [13] M. D. Semon e J. R. Taylor, *Thoughts on the magnetic potential*, Am. J. Phys. **64** (1996), 1361–1369.
- [14] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Benjamin/Cummings, New York (1965).
- [15] R. S. Westfall, *Never at rest: a biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).

Índice

- Base canônica, 1
- Bola
 - aberta, 1
 - fechada, 1
- Célula
 - 1-célula, 52
 - 2-célula, 87
 - 3-célula, 137
- Campo
 - constante, 43
 - de velocidades, 44
 - central, 50
 - conservativo, 49
 - elétrico
 - de fio infinito, 151
 - magnético
 - de fio infinito, 45, 116, 118, 148
- Carga
 - pontual, 148
- Circulação, 43, 44, 108
 - e campos conservativos, 49
- Comutador, 11
- Conexo, 3
- Conjunto
 - aberto, 2
 - convexo, 3
 - fechado, 2
 - vazio, 2
- Curva
 - algébrica, 11
 - contínua
 - parametrizável, 3
- Divergente, 145
 - fórmula integral, 147
 - interpretação física, 146
- Encadeamento
 - 1-encadeamento, 52
- Equação de Laplace, 10
- Equações de Maxwell, 150
- Fluido
 - incompressível, 146
- Forma
 - diferencial, 51
- Fronteira, 2
- Gauss
 - lei de, 151
- Laplaciano, 10
- Lei
 - de Ampère, 115
 - de Gauss, 148, 152
- Magnético
 - monopólo, 151
- Norma, 1
- Redemoinho, 45
- Retângulo, 2
- Retângulo fechado, 2
- rotacional, 108
- Singularidade, 5
- Teorema
 - da divergência, 145, 146
 - do gradiente, 42
 - de Stokes, 42, 104, 141
- Vórtice, 45
- Velocidade
 - angular, 110
 - campo de, 109
- Vorticidade, 110, 118