UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
1^o Semestre de 2014
Prof. Moisés Lima de Menezes

Lista de Análise Combinatória

1. Calcule:

a) 3! b) 5! c) 0! d) $\binom{3}{2}$ e) $\binom{4}{4}$ f) $\binom{5}{1}$

g) $\binom{9}{6}$ h) $A_{3,2}$ i) $A_{4,4}$ j) $A_{5,1}$ l) $A_{9,6}$ m) $A_{1,0}$

2. Um vendedor de automóveis pretende impressionar os possíveis compradores com o número de combinações diferentes possíveis. Um modelo pode ser dotado de três tipos de motor, dois tipos de transmissão, cinco cores externas e duas internas. Quantas são as escolhas possíveis?

3. Segundo o DENATRAN, as placas de veículos automotivos devem ter três letras e quatro algarismos.
a) Quantas placas diferentes podemos formar, admitido-se o uso de todas as letras e todos algarismos?
b) Quantas são as placas possíveis excluindo-se o grupamento "SEX" mas admitindo-se O's e zeros?
c) Quantas são as placas possíveis excluindo-se a letra O e o zero?
d) Quantas são as placas possíveis excluindo-se o grupamento "SEX", a letra O e o zero?

4. Quantas permutações distintas podem ser feitas com as letras da palavra BLUEBEARD?

5. Dispõem-se de três rodas, cada uma com os algarismos de 0 a 9, de maneira que cada uma possa ser girada independentemente das outras.
a) Quantos números diferentes podem formar-se?
b) Quantos são os números possíveis com o algarismo 1 na posição central?

6. Se um torneio de futebol consiste de 36 times onde todos os times se enfrentam com partidas de ida e volta, determine:
a) Quantos jogos há neste torneio?
b) De quantas maneiras podem ser conquistados os três primeiros lugares?

7. Joga-se uma moeda sete vezes. De quantas maneiras podem ocorrer os seguintes resultados:
a) cinco caras b) quatro caras c) todas caras d) uma cara

8. A Pizzaria Joe oferece as seguintes escolhas de pizza: presunto, calabreza, portuguesa, romana e mussarela. De quantas maneiras podemos escolher dois tipos diferentes de pizza?

Solução:

1.

a)

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

b)

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

c)

$$0! = 1$$

d)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

e)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{4!}{4! \times 0!} = \frac{4!}{4!} = 1.$$

f)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5.$$

g)

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

h)

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6.$$

i)

$$A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24.$$

j)

$$A_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5.$$

l)

$$A_{9,6} = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60.480.$$

m)

$$A_{1,0} = \frac{1!}{(1-0)!} = \frac{1!}{1!} = 1.$$

2.
Para montar um modelo de automóvel, temos três tipos de motores.

$$\{m1; m2; m3\}$$

Para cada tipo de motor, temos dois tipos de transmissão.

$$\{t1; t2\}$$

Assim:

$$\begin{array}{cc} m1t1 & m1t2 \\ m2t1 & m2t2 \\ m31t & m3t2 \end{array}$$

Para cada combinação de motor e transmissão temos cinco tipos de cores externas.

$$\{e1; e2; e3; e4; e5\}$$

Assim:

$$\begin{array}{ccccc} m1t1e1 & m1t1e2 & m1t1e3 & m1t1e4 & m1t1e5 \\ m2t1e1 & m2t1e2 & m2t1e3 & m2t1e4 & m2t1e5 \\ m3t1e1 & m3t1e2 & m3t1e3 & m3t1e4 & m3t1e5 \\ m1t2e1 & m1t2e2 & m1t2e3 & m1t2e4 & m1t2e5 \\ m2t2e1 & m2t2e2 & m2t2e3 & m2t2e4 & m2t2e5 \\ m3t2e1 & m3t2e2 & m3t2e3 & m3t2e4 & m3t2e5 \end{array}$$

Para cada combinação de motor, transmissão e cor externa temos dois tipos de cores internas.

$$\{i1; i2\}$$

Assim:

$$\begin{array}{ccccc} m1t1e1i1 & m1t1e2i1 & m1t1e3i1 & m1t1e4i1 & m1t1e5i1 \\ m2t1e1i1 & m2t1e2i1 & m2t1e3i1 & m2t1e4i1 & m2t1e5i1 \\ m3t1e1i1 & m3t1e2i1 & m3t1e3i1 & m3t1e4i1 & m3t1e5i1 \\ m1t2e1i1 & m1t2e2i1 & m1t2e3i1 & m1t2e4i1 & m1t2e5i1 \\ m2t2e1i1 & m2t2e2i1 & m2t2e3i1 & m2t2e4i1 & m2t2e5i1 \\ m3t2e1i1 & m3t2e2i1 & m3t2e3i1 & m3t2e4i1 & m3t2e5i1 \\ m1t1e1i2 & m1t1e2i2 & m1t1e3i2 & m1t1e4i2 & m1t1e5i2 \\ m2t1e1i2 & m2t1e2i2 & m2t1e3i2 & m2t1e4i2 & m2t1e5i2 \\ m3t1e1i2 & m3t1e2i2 & m3t1e3i2 & m3t1e4i2 & m3t1e5i2 \\ m1t2e1i2 & m1t2e2i2 & m1t2e3i2 & m1t2e4i2 & m1t2e5i2 \\ m2t2e1i2 & m2t2e2i2 & m2t2e3i2 & m2t2e4i2 & m2t2e5i2 \\ m3t2e1i2 & m3t2e2i2 & m3t2e3i2 & m3t2e4i2 & m3t2e5i2 \end{array}$$

Assim, o total de combinações possíveis são:

$$3 \times 2 \times 5 \times 2 = 60.$$

3.
a) Temos 26 letras e 10 algarismos de 0 a 9. Então, como podemos repetir letras e algarismos nas placas de carro, as possíveis placas são:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square & \square & \square & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 26 & 26 & 26 & & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

Assim, teremos

$$26^3 \times 10^4 = 175.760.000.$$

b)
Aqui consideramos todas as placas (sem exceção) e excluimos as placas que contém a sequência "SEX". Ou seja:
Todas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square & \square & \square & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 26 & 26 & 26 & & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

$$26^3 \times 10^4.$$

As placas com a sequências "SEX":

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square S & \square E & \square X & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 1 & 1 & 1 & & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

$$10^4.$$

Assim, as possíveis placas são "todas menos as que contém a sequência "SEX"".

$$26^3 \times 10^4 - 10^4 = \left(26^3 - 1\right) \times 10^4 = 175.750.000.$$

c)
Ao excluirmos a letra "O", o número de letras possíveis passa a ser apenas 25 e ao excluirmos o zero, o número de lagarismos passa a ser apenas 9 (de 1 a 9). assim, passamos a ter o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square & \square & \square & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 25 & 25 & 25 & & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

Logo:

$$25^3 \times 9^4 = 102.515.625.$$

d)
Se assumimos que as placas não contém a letra "O" e o algarismo zero, o total de placas será o da letra c). Assim, teremos:
Todas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square & \square & \square & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 25 & 25 & 25 & & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$25^3 \times 9^4.$$

As placas com a sequências “SEX”:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{Letras} & & & & \text{Algarismos} & & \\ \square S & \square E & \square X & \text{-} & \square & \square & \square & \square \\ 1 & 1 & 1 & & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$9^4.$$

Assim, as possíveis placas são “todas menos as que contém a sequência “SEX””.

$$25^3 \times 9^4 - 9^4 = \left(25^3 - 1\right) \times 9^4 = 102.509.064.$$

4.
A palavra BLUEBEARD tem 9 letras, sendo duas delas (B e E) repetidas duas vezes, cada. Assim, o número de permutações será:

$$\frac{9!}{2! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} = \frac{181.440}{2} = 90.720.$$

5.
a)
Os números são formados na sequência:

R_1	R_2	R_3
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Como cada roda tem 10 algrismos possíveis, então temos:

$$10 \times 10 \times 10 = 1.000.$$

b)
Fixando o algarismo 1 na roda do meio, teremos:

R_1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

R_2
1

R_3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Como na roda 2, o valor 1 é fixo, então temos:

$$10 \times 1 \times 10 = 100.$$

6.
a)
Cada um dos 36 times joga contra os demais 35. Nesta contagem já estão incluídos os jogos de ida e volta pois, por exemplo, quando o time A joga contra os outros 35, há o jogo: $A \times B$.
Por sua vez, quando o time B joga contra os demais, há o jogo: $B \times A$.
Assim, já estão computados os jogos de ida e volta dos times A e B .
Desta forma, o número total de jogos será:

$$36 \times 35 = 1.260.$$

b)
Para decidir o primeiro colocado, há 36 possibilidades (são os 36 times);
Uma vez decidido o primeiro colocado, para o segundo colocado haverá 35 possibilidades;
Decididos o primeiro e o segundo colocados, restam 34 possibilidade para o terceiro colocado.
Assim, o número total de possibilidades para os três primeiros lugares deste torneio será:

$$36 \times 35 \times 34 = 42.840.$$

7.
Este é um problema de combinações:
a)

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

b)

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = \frac{210}{6} = 35.$$

c)

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7! \times 0!} = \frac{7!}{7! \times 1} = \frac{7!}{7!} = 1.$$

d)

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1! \times 6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7.$$

8.
Temos 5 tipos de pizza para escolher 2.
Novamente, combinação:

$$\left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$