Universidade Federal Fluminense
Departamento de Estatística
Prof. Moisés Lima

Lista 7

1. As alturas dos alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal com média de 1,70 m e desvio padrão de 5 cm.

a) Qual a probabilidade de um aluno ter altura superior a 1,65m?

b) Se no colégio há 10.000 alunos, então qual o número esperado de alunos com altura abaixo da média, porém superior a 1,60m?

2. Os depósitos efetuados no Banco da Ribeira durante o mês de janeiro são normalmente distribuídos com média de \$10.000,00 e desvio padrão de \$1.500,00. Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos no mês em questão. Determine a probabilidade de que o depósito seja:

a) Um valor entre \$12.000,00 e \$15.000,00;

b) Maior que \$8.000,00;

c) Menor que \$9.000,00.

3. As alturas das pessoas adultas do sexo feminino em uma determinada população seguem uma distribuição normal com média de 1,60m e variância de 100 cm^2.

a) Determine o percentual de mulheres desta população que medem mais de 1,72m;

b) Qual a probabilidade de uma mulher selecionada aleatoriamente nesta população ter altura entre 155 cm e 162 cm?

4. Os escores de QI têm distribuição normal com média 100 e desvio-padrão 15. A Mensa é uma organização para pessoas com QI elevado, e a admissão exige um QI superior a 131.5.

a) Escolhida aleatoriamente uma pessoa, determine a probabilidade de ela satisfazer aquela exigência da Mensa.

b) Em uma região típica de 75.000 habitantes, quantos serão candidatos à Mensa?

5. Um casal tem renda mensal variável segundo uma distribuição normal. O homem recebe, em média, \$4.000, com desvio padrão \$400, enquanto a mulher recebe em média \$3.200, com desvio padrão \$300.

a) Qual a probabilidade de que, em um dado mês, recebam juntos, mais de \$7.500?

b) Qual a probabilidade de que, em um dado mês, a mulher receba entre \$3.000 e \$3.100?

6. O diâmetro X de rolamentos de esferas fabricados por certa fábrica é normalmente distribuído com média de 0,614 cm e desvio padrão de 0,0025 cm. O lucro L de cada esfera depende de seu diâmetro de tal modo que: L = 0,10, se a esfera é boa, L = 0,05, se a esfera é recuperável e L = - 0,10, se a esfera é defeituosa. Considera-se boa a esfera cujo diâmetro está entre 0,61 cm e 0,618 cm, recuperável se o diâmetro está entre 0,608 cm e 0,61 cm ou entre 0,618 cm e 0,62 cm e defeituosa, a esfera cujo diâmetro é menor que 0,608 cm ou maior que 0,62 cm.

Considere uma esfera sorteada aleatoriamente. Determine:

a) A probabilidade de ela ser boa;

b) A probabilidade de ela ser recuperável;

c) A probabilidade de ela ser defeituosa;

d) O lucro médio.

Solução:

1) Convertendo as unidades de medidas para centímetro, temos:

$$X \sim N(170;\ 5)$$

a)

$$Pr(X\ >\ 165) =\ Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{165-170}{2}\right) = \Pr\left(Z > \frac{-5}{5}\right) = \Pr(Z > -1)$$
$$= \Pr(Z < 1) = 0{,}5 + tab(1) = 0{,}5 + 0{,}34134 = \mathbf{0,84134}.$$

b)

$$Pr(160\ \leq\ X\ \leq\ 170) =\ Pr\left(\frac{160-170}{5} \leq Z \leq \frac{170-170}{5}\right) = Pr\left(-\frac{10}{5} \leq Z \leq 0\right)$$
$$= Pr(-2 \leq Z \leq 0) = Pr(0 \leq Z \leq 2) = tab(2) = 0{,}4772.$$

Para sabermos quantos de 10.000 estariam nesta faixa, multiplicamos:

$$10.000\ \times\ 0,4772\ =\ \mathbf{4772}.$$

2)

$$X \sim N(10.000;\ (1.500)^2)$$

a)

$$Pr(12.000\ \leq\ X\ \leq\ 15.000)\ =\ Pr\left(\frac{12.000-10.000}{1.500} \leq Z \leq \frac{15.000-10.000}{1.500}\right)$$

$$= Pr\left(\frac{2.000}{1.500} \leq Z \leq \frac{5.000}{1.500}\right) = Pr(1{,}33\ \leq Z\ 3{,}33)$$
$$= 0{,}49957 - 0{,}40824 = \mathbf{0,09133}.$$

b)

$$Pr(X > 8.000) =\ Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{8.000-10.000}{1.500}\right) = Pr\left(Z > \frac{-2.000}{1.500}\right)$$

$$= Pr(Z > -1{,}33) = 0{,}5 + 0{,}40824 = \mathbf{0,90824}.$$

c)

$$Pr(X < 9.000) =\ Pr\left(Z < \frac{9.000-10.000}{1.500}\right) = Pr(Z < -0{,}67)$$
$$= 0,5 - 0{,}24857\ =\ \mathbf{0,25143}.$$

3)
Seja X: altura, então $X \sim N(160; 100)$, em centímetros. Teremos o seguinte conjunto de dados: $\mu =\ 160;\ \sigma^{\,2} =\ 100;\ \sigma\ =\ 10.$

a)

$$Pr(X\ >\ 172) = Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{172-160}{10}\right) = Pr(Z > 1{,}2)$$

$$= 0{,}5 - Pr(0 < Z < 1{,}2) = 0{,}5 - 0{,}38493 = \mathbf{0,11507}.$$

Ou seja, **11,507%**.

b)

$$Pr(155 < X < 162) = Pr\left(\frac{155-160}{10} < Z < \frac{162-160}{10}\right) = \Pr(-0{,}5 < Z < 0{,}2)$$

$$= 0{,}19146 + 0{,}07926 = \mathbf{0,27072}.$$

4)

a)

Seja X uma variável aleatória que representa o QI de um indivíduo qualquer. A probabilidade de um indivíduo qualquer satisfazer às exigências da Mensa será:

$$Pr(X > 131{,}5)$$

Para usarmos a tabela normal, precisamos padronizar subtraindo pela média e dividindo pelo desvio padrã0. Assim:

$$\Pr(X > 131{,}5) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{131{,}5-100}{15}\right) = \Pr(Z > 2{,}1)$$

Observando na tabela normal, vemos que $\Pr(0 \leq Z \leq 2{,}1) = 0{,}4821$. *Assim, a probabilidade desejada será o complementar da metade da curva normal.*

Logo: $\Pr(Z > 2{,}1) = 0{,}5 - 0{,}4821 = 0{,}0179.$

Resposta: 0,0179.

b)

Para saber quantos serão chamados em uma população de 75.000 habitantes, basta usar o fato de a proporção de 0,0179 desta população poderá se candidatar à Mensa.

Assim, podão se candidatar $75.000 \times 0{,}0179 = 1.342{,}5 \cong 1.343.$

Solução: 1.343.

5)

Juntos, o casal recebe, em média, $(4.000+3.200)=$7.200 e o desvio padrão é $(400+300)=$700.

a)

A probabilidade de que, em um dado mês, recebam juntos, mais de $7.500 será expressa por $\Pr(X \geq 7.500)$, onde $X \sim N(7.200; 700)$.

Para usar a tabela normal padrão, precisamos padronizar a variável. Assim,

$$\Pr(X \geq 7.500) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{7.500-7.200}{700}\right) = \Pr(Z \geq 0{,}43) = 0{,}5 - \Pr(0 \leq Z \leq 0{,}43)$$
$$= 0{,}5 - 0{,}1664 = \mathbf{0,3336}.$$

Resposta: 0,3336.

b)

A probabilidade de que, em um dado mês, a mulher receba entre $3.000 e $3.100 será expressa por $\Pr(3.000 \leq X \leq 3.100)$, onde $X \sim N(3.200; 300)$.

Para usar a tabela normal padrão, precisamos padronizar a variável. Assim,

$$\Pr(3.000 \leq X \leq 3.100) = Pr\left(\frac{3.000-3.200}{300} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3.100-3.200}{300}\right)$$

$= \Pr(-0{,}67 \leq Z \leq -0{,}33) = \Pr(0 \leq Z \leq 0{,}67) - \Pr(0 \leq Z \leq 0{,}33)$, *pois se trata de uma diferença entre dois valores no mesmo lado da curva.*

Assim,

$$\Pr(3.000 \le X \le 3.100) = \Pr(0 \le Z \le 0{,}67) - \Pr(0 \le Z \le 0{,}33) = 0{,}2486 - 0{,}1293 = \mathbf{0{,}1193}.$$

Resposta: 0,1193.

---

6)

$$X \sim N(0{,}614; 0{,}0025^2)$$

a)

$$\Pr(boa) = \Pr(0{,}61 \le X \le 0{,}618) = \Pr\left(\frac{0{,}61 - 0{,}614}{0{,}0025} \le Z \le \frac{0{,}618 - 0{,}614}{0{,}0025}\right)$$
$$= \Pr(-1{,}6 \le X \le 1{,}6) = 2 \times \Pr(0 \le X \le 1{,}6) = 2 \times tab(1{,}6) = 2 \times 0{,}4452 = 0{,}8904.$$

Pr(boa)=0,8904.

b)

$$\Pr(\text{recuperável}) = \Pr(0{,}608 \le \mathrm{X} \le 0{,}61) + \Pr(0{,}618 \le \mathrm{X} \le 0{,}62)$$

$$= \Pr\left(\frac{0{,}608 - 0{,}614}{0{,}0025} \le Z \le \frac{0{,}61 - 0{,}614}{0{,}0025}\right) + Pr\left(\frac{0{,}618 - 0{,}614}{0{,}0025} \le Z \le \frac{0{,}62 - 0{,}614}{0{,}0025}\right)$$

$$= \Pr(-2{,}4 \le Z \le -1{,}6) + \Pr(1{,}6 \le Z \le 2{,}4) = 2 \times \Pr(1{,}6 \le Z \le 2{,}4)$$

$$= 2 \times [tab(2{,}4) - tab(1{,}6)] = 2 \times [0{,}4918 - 0{,}4452] = 2 \times 0{,}0466 = 0{,}0932.$$

Pr(recuperável)=0,0932.

c)

$$\Pr(defeituosa) = \Pr(X < 0{,}608) + \Pr\,(\mathrm{X} > 0{,}62)$$

$$= \Pr\left(Z < \frac{0{,}608 - 0{,}614}{0{,}0025}\right) + \Pr\left(\mathrm{Z} > \frac{0{,}62 - 0{,}614}{0{,}0025}\right) = \Pr(\mathrm{Z} < -2{,}4) + \Pr\,(\mathrm{Z} > 2{,}4)$$

$$= 2 \times \Pr(Z > 2{,}4) = 2 \times [0{,}5 - tab(2{,}4)] = 2 \times [0{,}5 - 0{,}4918] = 2 \times 0{,}0082 = 0{,}0164.$$

Pr(defeituosa)=0,0164.

d) Com as probabilidades encontradas na acima, podemos construir a tabela de distribuição de frequência do lucro:

L	0,10	0,05	-0,10
$p(L)$	0,8904	0,0932	0,0164

O lucro médio é dado pela esperança.

$$E(L) = 0{,}10 \times 0{,}8904 + 0{,}05 \times 0{,}0932 - 0{,}10 \times 0{,}0164 = 0{,}08904 + 0{,}00466 - 0{,}00164 = 0{,}09206.$$

$E(L)$=0,09206.