Aula 12

ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Objetivo

Nesta aula, você estudará os conceitos de média e variância de variáveis aleatórias discretas, que são, respectivamente, medidas de posição e dispersão da distribuição de probabilidade.

ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

INTRODUÇÃO

Consideremos novamente o experimento aleatório “lançamento de um dado”, mas agora um dado que sabemos não ser equilibrado. Como poderíamos proceder para calcular a probabilidade de cada face?

Uma resposta, talvez intuitiva, seria lançar esse dado um *grande* número de vezes e observar o número de ocorrências de cada face. As frequências relativas nos dariam, então, o que poderíamos pensar como sendo a probabilidade de cada evento simples (face).

É de se esperar que, quanto maior o número de repetições do experimento (lançamento do dado), mais próximas das “verdadeiras” probabilidades estariam essas frequências relativas. Esta é, assim, a definição de probabilidade de um evento através da frequência relativa:

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições do experimento,}}$$

em que o número de repetições do experimento deve ser grande.

Ao trabalharmos com variáveis aleatórias, podemos pensar também nas probabilidades dos diferentes valores da variável como sendo frequências relativas em um número sempre crescente de repetições do experimento, ou seja, podemos pensar as probabilidades como sendo limites das frequências relativas.

Dessa forma, temos um paralelo entre a função de distribuição de probabilidade e as frequências relativas simples e entre a função de distribuição acumulada e as frequências relativas acumuladas.

No estudo das distribuições de frequências de variáveis quantitativas, vimos como calcular medidas de posição e medidas de dispersão da variável em estudo. De modo análogo, definiremos medidas de posição e dispersão para distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias.

ESPERANÇA OU MÉDIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

No estudo das distribuições de frequências de variáveis quantitativas, vimos que a média de dados agrupados em classes era calculada como uma média ponderada dos pontos médios das classes (valores representativos), com a ponderação definida pelas frequências relativas das classes.

No estudo de variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidades, estamos associando números aos pontos do espaço amostral, ou seja, o resultado é sempre uma variável quantitativa (note que os resultados cara e coroa não definem uma variável aleatória; para tal, temos que associar números, 0 e 1, por exemplo, a esses resultados). Sendo assim, faz sentido perguntar "qual é o valor médio da variável aleatória X?"

Definição 12.1.

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente. A **média** ou **esperança** de X é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) \qquad (12.1)$$

onde o somatório se estende por todos os valores possíveis de X.

Podemos ver, então, que a esperança de X é uma média dos seus valores, ponderada pelas respectivas probabilidades. Lembre-se de que, no caso das distribuições de frequências, tínhamos $\overline{x} = \sum_i f_i x_i$. Como antes, a média de uma v.a. X está na mesma unidade da variável.

Exemplo 12.1.

Em determinado setor de uma loja de departamentos, o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a seguinte distribuição de probabilidades (esses números foram obtidos dos resultados de vários anos de estudo):

Número de produtos	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Cada vendedor recebe comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até dois produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R$50,00 por produto. Qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual a comissão média de cada um deles?

Solução:

O número médio de vendas por funcionário é

$$\begin{aligned} E(P) &= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 \\ &\quad +4 \times 0,1 + 5 \times 0,05 + 6 \times 0,05 \\ &= 2,05 \end{aligned}$$

Com relação à comissão, vamos construir sua fdp:

Número de produtos P	0	1	2	3	4	5	6
Comissão C	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

$$\begin{aligned} E(C) &= 0 \times 0,1 + 10 \times 0,4 + 20 \times 0,2 + 70 \times 0,1 + \\ &\quad +120 \times 0,1 + 170 \times 0,05 + 220 \times 0,05 \\ &= 46,5 \end{aligned}$$

ou seja, a comissão média diária de cada vendedor é R$ 46,50.

Assim, como no caso das distribuições de frequência, a esperança de X é o centro de gravidade da distribuição de probabilidades.

ESPERANÇA DE FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Vimos que é possível obter novas variáveis aleatórias a partir de funções $g(X)$ de uma variável X e através da fdp de X podemos obter a fdp de Y. Sendo assim, podemos calcular a esperança de Y. Foi exatamente isso o que fizemos no caso das comissões no exemplo anterior, onde tínhamos

$$C = \begin{cases} 10P, & \text{se } P \leq 2 \\ 20 + 50 \times (P - 2), & \text{se } P > 2 \end{cases}$$

Analisando atentamente aquele exemplo e notando que, por definição de função, a cada valor de X corresponde um único $Y = g(X)$, obtemos o resultado geral sobre a esperança de funções de variáveis aleatórias.

Definição 12.2 (Esperança de Funções de uma Variável Aleatória)**.**

Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade $f_X(x)$. Se definimos uma nova v.a. $Y = g(X)$, então

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, f_X(x) \tag{12.2}$$

Exemplo 12.2.

Considere a v.a. X, já analisada no Exemplo 11.8 onde calculamos $E(X^2)$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Naquele exemplo, calculamos a fdp da v.a. $Y = X^2$ e a partir dela podemos calcular:

$$E(Y) = E\left(X^2\right) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = 2,2$$

Usando o resultado anterior, podemos fazer simplesmente:

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,2 + 0^2 \times 0,2 + \\ &\quad + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,1 + 3^2 \times 0,1 = 2,2 \end{aligned}$$

sem necessidade do cálculo da fdp de Y.

PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

As propriedades da esperança são as mesmas vistas para a média de uma distribuição de frequência.

No que segue, X é uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidades $f_X(x)$ e $a, b \neq 0$ são constantes reais quaisquer. Temos, então, os seguintes resultados, cujas demonstrações são imediatas, a partir da definição de esperança:

$$E(a) = a \tag{12.3}$$

$$E(X + a) = E(X) + a \tag{12.4}$$

$$E(bX) = bE(X) \tag{12.5}$$

$$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max} \tag{12.6}$$

Nessa última propriedade, $x_{\min}$ e $x_{\max}$ são os valores mínimo e máximo da variável X.

Exercício 12.1.

Encontre a esperança da v.a. X definida no Exercício 11.1.

Exercício 12.2.

Encontre a esperança da v.a. X definida no Exercício 11.3.

Exercício 12.3.

Encontre a esperança das v.a. Y e Z definidas no Exercício 11.4.

VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

A esperança de uma variável aleatória X é uma medida de posição. No entanto, é possível que duas variáveis bem diferentes tenham a mesma esperança, como é o caso das duas distribuições apresentadas na **Figura 12.1**.

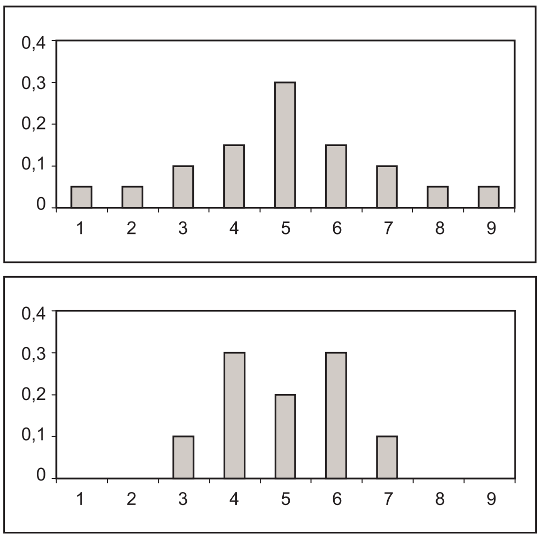

Figura 12.1: Distribuições com mesma esperança e diferentes dispersões.

Como já visto, no caso da Estatística Descritiva, é necessário mensurar outros aspectos da distribuição, entre eles a dispersão dos dados. Esta será medida através da distância quadrática de cada valor à média da distribuição.

Definição 12.3.

A **variância** de uma variável aleatória X é definida como

$$Var(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 \tag{12.7}$$

Vamos ver como calcular a variância de uma v.a. discreta. Para isso, vamos definir $g(X) = [X - E(X)]^2$. Então, usando o resultado dado na equação (12.2), temos que

$$Var(X) = E\left[g(X)\right] = \sum_x [x - E(X)]^2 f_X(x)$$

Desenvolvendo o quadrado e usando as propriedades do somatório e da esperança vistas na seção anterior, resulta

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_x \left\{x^2 - 2xE(X) + [E(X)]^2\right\} f_X(x) = \\
&= \sum_x x^2 f_X(x) - 2E(X)\sum_x x f_X(x) + [E(X)]^2 \sum_x f_X(x) = \\
&= \sum_x x^2 f_X(x) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \times 1 = \\
&= \sum_x x^2 f_X(x) - 2\left[E(X)\right]^2 + [E(X)]^2 = \\
&= \sum_x x^2 f_X(x) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

Mas, se definimos $h(X) = X^2$, então $E\left[h(X)\right] = \sum_x x^2 f_X(x)$. Logo, podemos escrever

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{12.8}$$

que pode ser lida de maneira mais fácil como "a variância é a esperança do quadrado menos o quadrado da esperança".

Lembre-se de que tínhamos visto resultado análogo para a variância populacional de um conjunto de dados (variância é a média dos quadrados menos o quadrado da média). Vimos também que a unidade de medida da variância é igual ao quadrado da unidade da variável.

PROPRIEDADES DA VARIÂNCIA

Sendo uma medida de dispersão, é fácil ver que são válidas as seguintes propriedades (note que são as mesmas que vimos para uma distribuição de frequências), onde $a, b \neq 0$ são constantes quaisquer:

$$Var(X) \geq 0 \tag{12.9}$$

$$Var(a) = 0$$

$$Var(X + a) = Var(X)$$

$$Var(bX) = b^2 Var(X)$$

DESVIO PADRÃO

Como já dito, a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade de medida da variável em estudo, sendo assim, uma unidade sem significado físico. Para se ter uma medida de dispersão na mesma unidade dos dados, define-se o *desvio padrão* como a raiz quadrada da variância.

Definição 12.4.

O **desvio padrão** de uma variável aleatória X é definido como a raiz quadrada de sua variância:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} \tag{12.10}$$

Como consequência direta dessa definição e das propriedades da variância, temos as seguintes propriedades do desvio padrão, onde $a, b \neq 0$ são constantes reais quaisquer.

$$DP(X) \geq 0$$

$$DP(a) = 0$$

$$DP(X + a) = DP(X)$$

$$DP(bX) = |b| DP(X)$$

Exemplo 12.3.

Considere a v.a. Y definida no Exercício 11.2 com fdp dada por

y	-3	-1	0	2	5	8	9
$f_Y(y)$	$0,25$	$0,30$	$0,20$	$0,10$	$0,07$	$0,05$	$0,03$

e seja $Z = 2Y - 3$. Vamos calcular a variância de Y e Z.

Solução:

No Exercício 12.1, você calculou $E(Y)$ e $E(Z)$ como

$$\begin{aligned} E(Y) &= -3 \times 0,25 - 1 \times 0,30 + 0 \times 0,20 + 2 \times 0,10 \\ &\quad +5 \times 0,07 + 8 \times 0,05 + 9 \times 0,03 = 0,17 \end{aligned}$$

$$E(Z) = 2 \times E(Y) - 3 = 2 \times 0,17 - 3 = -2,66$$

Vamos calcular agora $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 9 \times 0,25 + 1 \times 0,30 + 0 \times 0,20 + 4 \times 0,10 \\ &\quad +25 \times 0,07 + 64 \times 0,05 + 81 \times 0,03 = 10,33 \end{aligned}$$

Logo

$$Var(Y) = 10,33 - 0,17^2 = 10,3011$$

Usando as propriedades da variância, temos que

$$Var(Z) = 2^2 \times Var(Y) = 41,2044$$

Exemplo 12.4.

Um lojista mantém extensos registros das vendas diárias de certo aparelho. O quadro a seguir, dá a distribuição de probabilidades do número de aparelhos vendidos em uma semana. Se o lucro por unidade vendida é de R$500,00, qual o lucro esperado em uma semana? Qual é o desvio padrão do lucro?

$x =$ **número de aparelhos**	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Solução:

Seja X o número de aparelhos vendidos em uma semana e seja L o lucro semanal. Então, $L = 500X$.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 \\ &\quad + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,1 \\ &= 2,7 \text{ aparelhos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 \\ &\quad + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,1 \\ &= 10,2 \text{ aparelhos}^2 \end{aligned}$$

$$Var(X) = 10,2 - (2,7)^2 = 2,91 \text{ aparelhos}^2$$

$$DP(X) = 1,706 \text{ aparelhos}$$

Com relação ao lucro semanal, temos que

$$E(L) = 500E(X) = R\$1350,00$$

$$DP(L) = R\$852,94$$

Exemplo 12.5.

Seja uma v.a. X com fdp dada na tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	p^2	p^2	p	p	p^2

1. Encontre o valor de p para que $f_X(x)$ seja, de fato, uma função de distribuição de probabilidade.
2. Calcule $\Pr(X \geq 4)$ e $\Pr(X < 3)$.
3. Calcule $\Pr(|X-3| \geq 2)$.
4. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Solução:

1. Como $\sum_x f_X(x) = 1$, temos que ter:

$$3p^2 + 2p = 1 \Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ \text{ou} \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

   Como p é uma probabilidade, temos que ter $p \geq 0$. Logo, o valor correto é $p = \frac{1}{3}$.

2. $\Pr(X \geq 4) = \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) = p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.
   $Pr(X < 3) = \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = 2p^2 = \frac{2}{9}$.

3. Aqui temos que notar o seguinte fato sobre a função módulo, ilustrado na **Figura 12.2**:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ou} \\ x \leq -k \end{cases}$$

$$\text{e } |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \text{(parte em cinza da figura)}$$

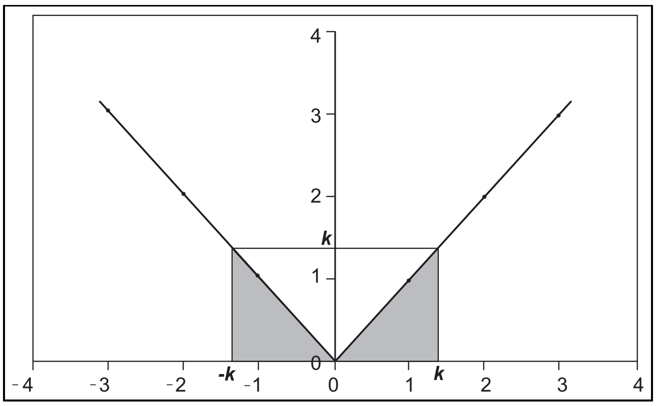

Figura 12.2: Função módulo.

   Usando esses fatos, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(|X-3| \geq 2) &= \Pr(\{X-3 \leq -2\} \cup \{X-3 \geq 2\}) = \\ &= \Pr(X-3 \leq -2) + \Pr(X-3 \geq 2) = \\ &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(X \geq 5) = \\ &= \Pr(X = 1) + \Pr(X = 5) = \\ &= 2p^2 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

4. Temos que

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1\times p^2+2\times p^2+3\times p+4\times p+5\times p^2\\
&= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{4}{3}+\frac{5}{9}\\
&= \frac{29}{9}=3,2222
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= 1^2\times p^2+2^2\times p^2+3^2\times p+4^2\times p+5^2\times p^2\\
&= \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+3+\frac{16}{3}+\frac{25}{9}\\
&= \frac{105}{9}=\frac{35}{3}\\
Var(X) &= \frac{35}{3}-\left(\frac{29}{9}\right)^2=\frac{14}{81}
\end{aligned}$$

Exemplo 12.6.

Um jogador A paga R$5,00 a B e lança um dado. Se sair face 3, ganha R$20,00. Se sair face 4, 5, ou 6, perde. Se sair face 1 ou 2, tem o direito de jogar novamente. Desta vez, lança dois dados. Se saírem duas faces 6, ganha R$50,00. Se sair uma face 6, recebe o dinheiro de volta. Nos demais casos, perde.

Seja L o lucro líquido do jogador A nesse jogo. Calcule a função de distribuição de probabilidade de L e o lucro esperado do jogador A.

Solução:

Sabemos que o dado é honesto e que os lançamentos são independentes. O diagrama de árvore para o espaço amostral desse experimento é dado na **Figura 12.3**.

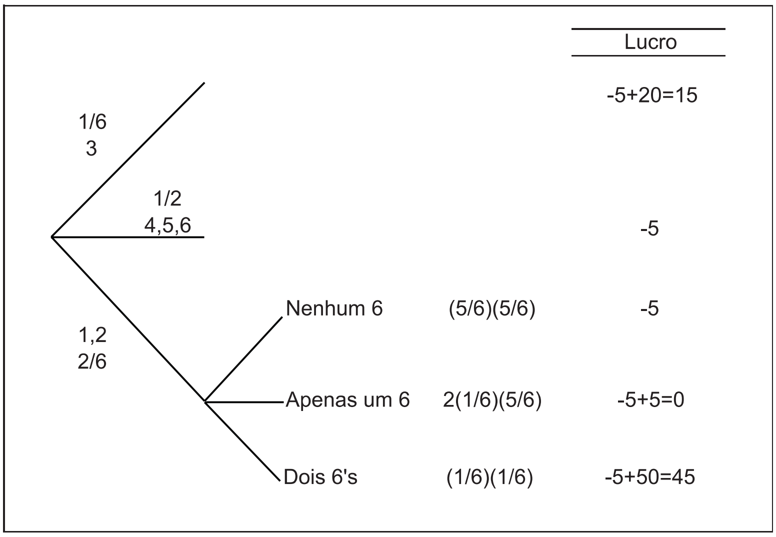

Figura 12.3: Solução do Exemplo 12.6.

Para calcular a probabilidade dos eventos associados aos lançamentos dos dois dados (parte inferior da árvore), usamos o fato de que a probabilidade da interseção de eventos independentes é o produto das probabilidades.

No cálculo da probabilidade de uma face 6, multiplicamos por 2, porque a face 6 pode estar em qualquer um dos dois dados.

Vemos que os valores do lucro L são: -5; 0; 15; 45 e a fdp de L é

Lucro ℓ	-5	0	15	45
$\Pr(L=\ell)$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}\times 2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

ou

Lucro ℓ	-5	0	15	45
$\Pr(L=\ell)$	$\frac{158}{216}$	$\frac{20}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{2}{216}$

$$E(L) = -5\times\frac{158}{216}+15\times\frac{36}{216}+45\times\frac{2}{216} = -\frac{160}{216} = -0,74$$

Exercício 12.4.

Encontre a variância da v.a. X definida no Exercício 11.1.

Exercício 12.5.

Encontre a variância da v.a. X definida no Exercício 11.3.

Observação: Você calculou as esperanças dessas v.a. nos Exercícios 12.1 e 12.2.

Resumo

Nesta aula, você estudou os seguintes conceitos:

- Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente. A **média** ou **esperança** de X é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i)$$

  onde o somatório se estende por todos os valores possíveis de X.

- Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade $f_X(x)$. Se definimos uma nova v.a. $Y = g(X)$, então

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

- A **variância** de uma variável aleatória X é definida como

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- O **desvio padrão** de uma variável aleatória X 5 é definido como a raiz quadrada de sua variância:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- Propriedades da esperança, da variância e do desvio padrão: sejam $a, b \neq 0$ constantes quaisquer.

$$\begin{aligned} x_{\min} \leq E(X) &\leq x_{\max} \\ E(a) &= a \\ E(X + a) &= E(X) + a \\ E(bX) &= bE(X) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} Var(X) \geq 0 & DP(X) \geq 0 \\ Var(a) = 0 & DP(a) = 0 \\ Var(X + a) = Var(X) & DP(X + a) = DP(X) \\ Var(bX) = b^2 Var(X) & DP(bX) = |b| DP(X) \end{array}$$

Exercício 12.6.

Um vendedor de serviços de informática visita diariamente uma ou duas empresas, com probabilidades 0,6 e 0,4. Em cada visita, ele pode ser mal-sucedido e não conseguir fechar negócio com probabilidade 0,6 ou ser bem-sucedido e conseguir fechar um contrato médio no valor de 5.000 reais ou um contrato grande no valor de 20.000 reais com probabilidades 0,3 e 0,1, respectivamente.

Determine o valor esperado das vendas diárias desse vendedor.

Exercício 12.7.

Uma empresa de aluguel de carros tem em sua frota 4 carros de luxo e ela aluga esses carros por dia, segundo a seguinte função de distribuição de probabilidade:

No de carros alugados/dia	0	1	2	3	4
Probabilidade de alugar	0,10	0,30	0,30	0,20	0,10

O valor do aluguel é de R$2000,00 por dia; a despesa total com manutenção é de R$500,00 por dia quando o carro é alugado e de R$200,00 por dia quando o carro não é alugado. Calcule:

1. o número médio de carros de luxo alugados por dia, bem como o desvio padrão;
2. a média e o desvio padrão do lucro diário com o aluguel dos carros de luxo.

Exercício 12.8.

As chamadas diárias recebidas por um batalhão do Corpo de Bombeiros apresentam a seguinte distribuição:

Número de chamadas/dia	0	1	2	3	4	5
Percentual (%) de dias	10	15	30	25	15	5

1. Calcule o número médio de chamadas por dia, bem como o desvio padrão do número de chamadas diárias.
2. Em um ano de 365 dias, qual é o número total de chamadas?

Exercício 12.9.

Considere o lançamento de três moedas e denote por K a ocorrência de cara e por C a ocorrência de coroa. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma sequência, ao passo que se ocorre o evento CKC temos três sequências.

Defina a v.a. $X =$ "número de caras obtidas" e $Y =$ "número de sequências obtidas".

Note que no Exercício 11.7, você obteve as distribuições de X e Y.

Exercício 12.10.

As probabilidades de que haja 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas em cada carro que se dirige ao Barra Shopping em um sábado são, respectivamente, 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10.

Qual o número médio de pessoas por carro? Se chegam ao shopping 50 carros por hora, qual o número esperado de pessoas no período das 13 às 18 horas?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 12.1.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,0253 + 1 \times 0,1496 + 2 \times 0,3251 + \\ &\quad + 3 \times 0,3251 + 4 \times 0,1496 + 5 \times 0,0253 = 2,5 \end{aligned}$$

Note que esse valor segue imediatamente do fato de a média ser o centro de gravidade da fdp: no exercício a fdp é uma função simétrica; logo, a esperança é o "valor do meio".

Exercício 12.2.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,1044 + 1 \times 0,2982 + 2 \times 0,3408 + \\ &\quad + 3 \times 0,1948 + 4 \times 0,0556 + 5 \times 0,0064 = 1,8186 \end{aligned}$$

Exercício 12.3.

$$\begin{aligned} E(Y) &= -3 \times 0,25 - 1 \times 0,30 - 0 \times 0,2 + 2 \times 0,10 + \\ &\quad + 5 \times 0,07 + 8 \times 0,05 + 9 \times 0,03 = 0,17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= -9\times 0,25 - 5\times 0,30 - 3\times 0,2 + 0,10 + \\ &\quad +7\times 0,07 + 13\times 0,05 + 15\times 0,03 = -2,66 \end{aligned}$$

ou pelas propriedades da esperança:

$$E(Z) = 2E(Y) - 3 = 2\times 0,17 - 3 = -2,66$$

Exercício 12.4.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2\times 0,0253 + 1^2\times 0,1496 + 2^2\times 0,3251 + \\ &\quad +3^2\times 0,3251 + 4^2\times 0,1496 + 5^2\times 0,0253 = 7,402 \end{aligned}$$

$$Var(X) = 7,402 - 2,5^2 = 1,152$$

Exercício 12.5.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2\times 0,1044 + 1^2\times 0,2982 + 2^2\times 0,3408 + 3^2\times 0,1948 \\ &\quad +4^2\times 0,0556 + 5^2\times 0,0064 = 4,4642 \\ Var(X) &= 4,4642 - 1,8186^2 = 1,156894 \end{aligned}$$

Exercício 12.6.

Veja a **Figura 12.4** com o espaço amostral deste experimento.

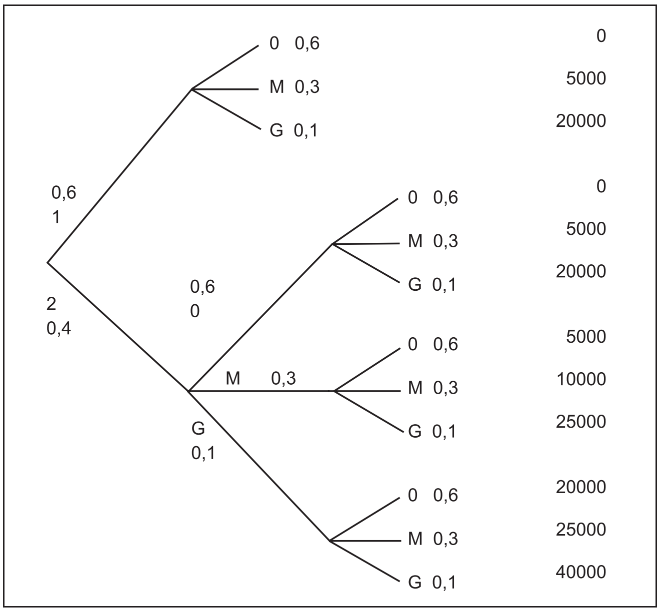

Figura 12.4: Solução do Exercício 12.6.

Daí, podemos ver que o vendedor pode

- não vender qualquer projeto,
- vender apenas um projeto médio,
- vender apenas um projeto grande,
- vender um projeto médio e um projeto grande,
- vender dois projetos médios ou
- vender dois projetos grandes.

Seja V a v.a. "valor das vendas diárias". Usando a regra da multiplicação, que diz que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$ e o axioma da probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\Pr(V=0) &= 0,6\times 0,6 + 0,4\times 0,6\times 0,6 = 0,504\\
\Pr(V=5000) &= 0,6\times 0,3 + 2\times 0,4\times 0,6\times 0,3 = 0,324\\
\Pr(V=10000) &= 0,4\times 0,3\times 0,3 = 0,036\\
\Pr(V=20000) &= 0,6\times 0,1 + 2\times 0,4\times 0,6\times 0,1 = 0,108\\
\Pr(V=25000) &= 2\times 0,4\times 0,3\times 0,1 = 0,024\\
\Pr(V=40000) &= 0,4\times 0,1\times 0,1 = 0,004
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(V) &= 5000\times 0.324 + 10000\times 0.036 + 20000\times 0.108\\
&\quad +25000\times 0.024 + 40000\times 0.004 = 4900
\end{aligned}$$

Exercício 12.7.

Número de carros alugados/dia	**Probabilidade de alugar**	**Lucro por dia**
0	$0,10$	$4\times(-200) = -800$
1	$0,30$	$2000-500-3\times 200 = 900$
2	$0,30$	$4000-2\times 500-2\times 200 = 2600$
3	$0,20$	$6000-3\times 500-200 = 4300$
4	$0,10$	$8000-4\times 500 = 6000$

Sejam $X =$ "número de carros de luxo alugados por dia" e
$L =$ "lucro diário com aluguel de carros de luxo". Então,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1\times 0,30 + 2\times 0,30 + 3\times 0,20 + 4\times 0,10 = 1,9 \text{ carros por dia}\\
E(X^2) &= 1^2\times 0,30 + 2^2\times 0,30 + 3^2\times 0,20 + 4^2\times 0,10 = 4,9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 4,9 - (1,9)^2 = 1,29 \\ DP(X) &= 1,1356 \text{ carros por dia} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(L) &= (-800) \times 0.10 + 900 \times 0.30 + 2600 \times 0.30 + 4300 \times 0.20 + \\ &\quad +6000 \times 0.10 = 2430 \text{ reais} \\ E(L^2) &= (-800)^2 \times 0.10 + 900^2 \times 0.30 + 2600^2 \times 0.30 + 4300^2 \times 0.20 \\ &\quad +6000^2 \times 0.10 = 9633000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(L) &= E(L^2) - [E(L)]^2 = 9633000 - 2430^2 = 3728100 \\ DP(L) &= 1930,83 \text{ reais} \end{aligned}$$

Exercício 12.8.

1. Seja X = "número de chamadas por dia".

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times 0,15 + 2 \times 0,30 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,15 + 5 \times 0,05 = \\ &= 2,35 \text{ chamadas por dia} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= 1 \times 0,15 + 4 \times 0,30 + 9 \times 0,25 + 16 \times 0,15 + \\ &\quad +25 \times 0,05 - (2,35)^2 = 1,7275 DP(X) = 1,3143 \text{ chamadas por dia} \end{aligned}$$

2. Seja T = "número de chamadas em um ano". Então,
$T = 365X$ e $E(T) = 2,35 \times 365 = 857,75$

Exercício 12.9.

As distribuições de X e Y são

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

Logo,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ Var(X) &= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{2}{8}+\frac{8}{8}+\frac{6}{8}=\frac{16}{8}=2$$

Note que a distribuição é simétrica!

$$Var(Y) = \frac{2}{8}+\frac{16}{8}+\frac{18}{8}-4=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

Exercício 12.10.

X : número de pessoas em cada carro

Y : número de pessoas em 50 carros em 5 horas de contagem

X :

x	1	2	3	4	5
p	0,05	0,20	0,40	0,25	0,10

$Y = 50 \times 5 \times X = 250X$

$E(X) = 0,05+0,40+1,20+1,0+0,5 = 3,15$ pessoas por carro.

$E(Y) = 250E(X) = 250 \times 3,15 = 787,5$ pessoas.