Aula 9

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Objetivos

Nesta aula, você aprenderá:

1. os conceitos de probabilidade condicional e independência de eventos;
2. a importância desses conceitos na modelagem de fenômenos aleatórios, com aplicações em diversas áreas do conhecimento.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Já vimos que o espaço amostral desse experimento é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Considere o evento A = "sair face 2". Se não temos qualquer informação além de: o dado ser equilibrado, vimos que

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}.$$

Suponhamos, agora, que o dado tenha sido lançado e a seguinte informação fornecida: "saiu facer par". Qual é a probabilidade de ter saído face 2?

Note a diferença: agora nós temos uma informação parcial sobre o experimento e devemos usá-la para reavaliar a nossa estimativa. Mais precisamente, sabemos que ocorreu o evento B = "face par". Com essa informação, podemos nos concentrar no evento $B = \{2, 4, 6\}$, uma vez que as faces 1, 3, 5 ficam descartadas em função da informação dada. Dentro dessas três possibilidades, a probabilidade do evento A passa a ser $\frac{1}{3}$.

Calculamos, assim, a probabilidade do evento A, sabendo que ocorreu o evento B. Essa probabilidade será denotada por $\Pr(A|B)$ (lê-se probabilidade de A dado B).

Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos A = "soma das faces é par" e B = "soma das faces é maior ou igual a 9". Se sabemos que ocorreu B, qual é a probabilidade de ter ocorrido A?

Queremos calcular $\Pr(A|B)$. Temos que

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5), \\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6) \end{array} \right\}$$

$$B = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Se ocorreu B, a única chance de ter ocorrido A é que tenha ocorrido o evento

$$A \cap B = \{(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\}$$

e, nesse caso, a probabilidade é $\frac{4}{10}$, ou seja,

$$\Pr(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Esses dois exemplos ilustram o fato geral que está exibido na **Figura 9.1**: se sabemos que aconteceu o evento B, esse evento passa a ser o "novo espaço amostral" e nesse novo espaço amostral, a única parte de A presente é $A \cap B$ - parte sombreada mais clara.

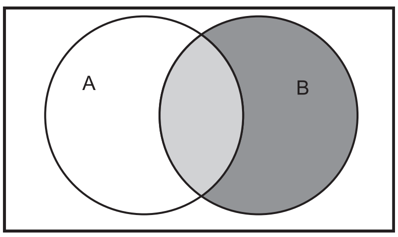

Figura 9.1: Probabilidade condicional $\Pr(A|B)$.

Com esses exemplos, estamos ilustrando uma situação comum, onde temos que calcular a probabilidade de um evento tendo uma *informação parcial*. Esse é o conceito de *probabilidade condicional*.

Definição 9.1.

A **probabilidade condicional** do evento A dada a ocorrência do evento B é

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Note que, nessa definição, temos que supor que o evento B é um evento possível, já que ele ocorreu. Logo, é óbvio que $\Pr(B) > 0$.

Exemplo 9.1.

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela a seguir.

Sexo	**Atividade de lazer**			
	Cinema	**Praia**	**Esporte**	**Total**
Masculino	10	12	13	35
Feminino	15	41	9	65
Total	25	53	22	100

1. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?

2. Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos: M = “masculino”; F = “feminino”; C = “cinema”; P = “praia”; E = “esporte”.

1. O problema pede $\Pr(M)$. Como há 35 homens dentre as 100 pessoas, temos que

$$\Pr(M) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

2. O problema pede $\Pr(M|P)$. Por definição,

$$\Pr(M|P) = \frac{\Pr(M \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53}$$

   Note que a probabilidade do evento "aluno do sexo masculino" se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer.

Exemplo 9.2.

De um baralho de 52 cartas, extrai-se uma ao acaso. Defina os eventos $C =$ "carta é de copas" e $R =$ "carta é um rei". Calcule $\Pr(C)$, $\Pr(R)$, $\Pr(C \cap R)$, $\Pr(C|R)$.

Solução:

$$\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\Pr(C \cap R) = \frac{1}{52}$$

$$\Pr(C|R) = \frac{\Pr(C \cap R)}{\Pr(R)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = \Pr(C)$$

Neste caso, a probabilidade do evento C não se modifica quando sabemos da ocorrência do evento R.

Exemplo 9.3.

De um total de 500 empregados, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se aleatoriamente um empregado dessa empresa.

1. Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar?

2. Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar?

3. Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar?

4. Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa?

Solução:

Vamos denotar por E o evento "empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa" e por P o evento "empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar". O problema diz que

$$\Pr(P) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \qquad \Pr(E) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} \qquad \Pr(P \cap E) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Note que essas informações podem ser dispostas em forma de tabela como:

		Plano pessoal		**Total**
		Sim	**Não**	
Plano da Empresa	**Sim**	**200**	200	**400**
	Não	0	100	100
Total		**200**	300	**500**

Os números em negrito são as informações dadas no problema; o restante é calculado observando-se os totais de linha e de coluna.

1. O problema pede

$$\Pr(P \cup E) = \Pr(P) + \Pr(E) - \Pr(P \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

2. O problema pede

$$\Pr(\overline{P} \cap \overline{E}) = \Pr(\overline{P \cup E}) = 1 - \Pr(P \cup E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

3. O problema pede

$$\Pr(P|E) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

4. O problema pede

$$\Pr(E|P) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1$$

Exercício 9.1.

Dois dados equilibrados são lançados.

1. Encontre a probabilidade de saírem faces iguais nos dois dados.
2. Sabendo-se que a soma das faces foi menor ou igual a quatro, calcule a probabilidade de saírem faces iguais nos dois dados.
3. Calcule a probabilidade de sair cinco em pelo menos um dado.
4. Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair cinco em pelo menos um dado.

Exercício 9.2.

A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha publicitária é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.

1. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?
2. Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?
3. Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de que a diretoria a aprove?

Exercício 9.3.

Sejam A e B eventos do espaço amostral Ω tais que $\Pr(A) = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$ e $\Pr(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

1. Calcule $\Pr(A \cup B)$.
2. Calcule $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$.
3. Calcule $\Pr(A|\overline{B})$.

PROBABILIDADE CONDICIONAL COMO LEI DE PROBABILIDADE

É interessante notar que a probabilidade condicional definida acima *realmente* define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa a cada evento A de Ω o número $\Pr(A|B)$ satisfaz os axiomas de probabilidade. De fato:

Axioma 1:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \geq 0,$$

pois $\Pr(A \cap B) \geq 0$ e $\Pr(B) > 0$.

Axioma 2:

$$\Pr(\Omega|B) = \frac{\Pr(\Omega \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$$

Na verdade, como $\Pr(B|B) = \dfrac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$, toda a probabilidade condicional está concentrada em B, o que justifica considerarmos B como o novo espaço amostral para essa nova lei de probabilidade.

Axioma 3:

Sejam A_1 e A_2 dois eventos mutuamente exclusivos (veja **Figura 9.2**). Usando a propriedade distributiva, temos que

$$\Pr(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\Pr[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{\Pr(B)} = \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)}$$

Mas, como A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos, resulta que $(A_1 \cap B)$ e $(A_2 \cap B)$ também o são – esses dois eventos correspondem à parte sombreada da figura. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} + \frac{\Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \Pr(A_1|B) + \Pr(A_2|B)
\end{aligned}$$

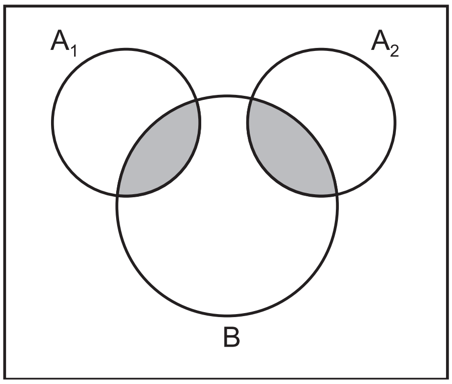

Figura 9.2: Representação do Axioma 3 da probabilidade condicional.

Sendo a probabilidade condicional uma lei de probabilidade, todas as propriedades vistas anteriormente, que eram consequência dos axiomas, valem também para a probabilidade condicional.

Propriedade 1:

$$\Pr(\varnothing|B) = 0$$

Propriedade 2:

$$\Pr(\overline{A}|B) = 1 - \Pr(A|B)$$

Propriedade 3:

$$\Pr\left[(A_1 - A_2)\,|B\right] = \Pr(A_1|B) - \Pr\left[(A_1 \cap A_2)\,|B\right]$$

Propriedade 4:

$$\Pr\left[(A_1 \cup A_2)\,|B\right] = \Pr(A_1|B) + \Pr(A_2|B) - \Pr\left[(A_1 \cap A_2)\,|B\right]$$

Propriedade 5:

$$A_2 \subset A_1 \Rightarrow \Pr(A_2|B) \leq \Pr(A_1|B)$$

Propriedade 6:

$$A \cap B \subset B \Rightarrow \Pr(A|B) \leq 1$$

!

Note que a definição de probabilidade condicional está vinculada ao evento B em que estamos condicionando, ou seja, se condicionarmos em um outro evento C, estaremos definindo uma outra função de probabilidade – a função de probabilidade condicional em C.

REGRA DA MULTIPLICAÇÃO

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como *regra da multiplicação.*

!

Regra da multiplicação para dois eventos
Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então,

$$\Pr(A \cap B) = \begin{cases} \Pr(B)\Pr(A|B) \\ \\ \Pr(A)\Pr(B|A) \end{cases}$$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra. Em tais situações, pode ser de ajuda desenhar um *diagrama de árvore* para ilustrar os eventos em questão. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 9.4.

Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02.

A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião? (Note que esses são os dois erros possíveis nesta situação.)

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &= \text{“avião presente”} \\ D &= \text{“radar detecta presença de avião”} \end{aligned}$$

Os eventos complementares são:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \text{“avião não está presente”} \\ \overline{D} &= \text{“radar não detecta avião”} \end{aligned}$$

O problema nos dá as seguintes informações:

$$\Pr(D|A) = 0,99 \qquad \Pr\left(D|\overline{A}\right) = 0,02 \qquad \Pr(A) = 0,05$$

Pela lei do evento complementar, temos que

$$\Pr\left(\overline{D}|A\right) = 0,01 \qquad \Pr\left(\overline{D}|\overline{A}\right) = 0,98 \qquad \Pr(\overline{A}) = 0,95$$

O problema pede

$$\begin{aligned} &\Pr(D \cap \overline{A}) \qquad \text{falso alarme} \\ &\Pr(\overline{D} \cap A) \end{aligned}$$

Na **Figura 9.3**, temos a ilustração desse experimento. Daí, podemos ver que as probabilidades pedidas são:

$$\Pr(D \cap \overline{A}) = \Pr\left(\overline{A}\right) \Pr\left(D|\overline{A}\right) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

$$\Pr(\overline{D} \cap A) = \Pr(A) \Pr\left(\overline{D}|A\right) = 0,05 \times 0,01 = 0,0005$$

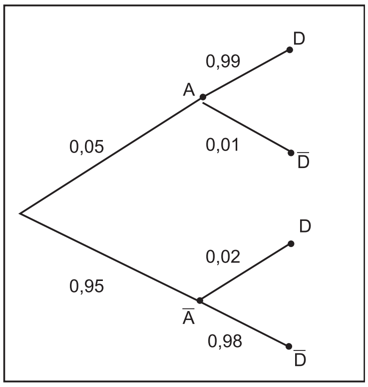

Figura 9.3: Diagrama de árvore para o problema do radar.

Note que a probabilidade de um erro é a soma dessas probabilidades.

Exemplo 9.5.

Considere que duas cartas de um baralho (13 cartas de cada um dos naipes copas, paus, ouro, espada) sejam extraídas sem reposição, uma depois da outra. Qual é a probabilidade de nenhuma das duas ser de copas?

Solução:

Para solucionar esse problema, devemos notar que as cartas no baralho são igualmente prováveis, antes e depois da primeira extração. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{ copas na primeira extração} \\ C_2 &= \text{ copas na segunda extração} \end{aligned}$$

Queremos calcular $\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right)$. Pela regra da multiplicação, temos que

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right)$$

Na primeira extração, temos 39 cartas que não são de copas, em um baralho de 52. Na segunda extração, dado que na primeira não saiu copas, temos 38 cartas que não são copas em um baralho de 51. Logo,

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_2 | \overline{C}_1\right) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

Veja a **Figura 9.4**, onde temos o diagrama de árvore para esse problema. Cada nó na árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de todos os eventos representados pelos nós anteriores no caminho correspondente.

Assim, a parte superior da árvore corresponde à ocorrência de copas na primeira extração – evento C_1 – e a parte inferior à não ocorrência de copas na primeira extração - evento $\overline{C}_1$.

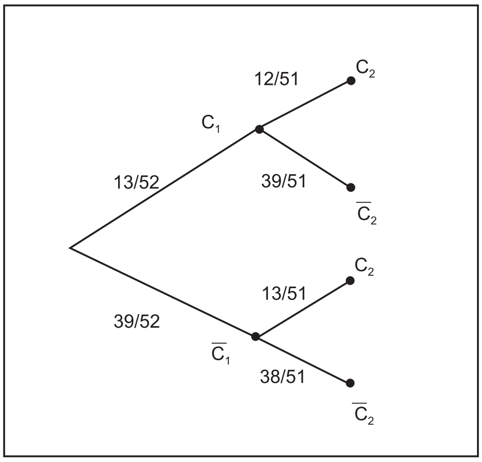

Figura 9.4: Diagrama de árvore para o experimento de extração de 2 cartas sem reposição.

Continuando com a parte superior, vemos que

$$\begin{aligned}\Pr(C_1) &= \frac{13}{52}\\ \Pr(C_2|C_1) &= \frac{12}{51}\\ \Pr\left(\overline{C}_2|C_1\right) &= \frac{39}{51}\end{aligned}$$

Note que, pela lei do complementar, $\Pr(C_2|C_1) + \Pr\left(\overline{C}_2|C_1\right) = 1$.

Na parte inferior da árvore, temos

$$\begin{aligned}\Pr\left(\overline{C}_1\right) &= \frac{39}{52}\\ \Pr\left(C_2|\overline{C}_1\right) &= \frac{13}{51}\\ \Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right) &= \frac{38}{51}\end{aligned}$$

Exemplo 9.6.

Suponhamos agora a extração de três cartas sem reposição, onde estamos interessados no mesmo evento "nenhuma de copas". Queremos $\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right)$. Como generalizar a regra da multiplicação para esse caso?

Solução:

Usando um recurso algébrico, podemos escrever (note que os termos se cancelam):

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) &= \Pr\left(\overline{C}_1\right) \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_1\right)} \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right)}{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)} = \\
&= \Pr\left(\overline{C}_1\right) \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_1\right)} \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_3 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}
\end{aligned}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, resulta que

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_2 | \overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_3 | \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)$$

Voltando ao baralho, temos, como antes, $\Pr\left(\overline{C}_1\right) = \frac{39}{52}$ e $\Pr\left(\overline{C}_2 | \overline{C}_1\right) = \frac{38}{51}$. Com o mesmo tipo de raciocínio, resulta que $\Pr\left(\overline{C}_3 | \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right) = \frac{37}{50}$. Logo,

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

Veja a **Figura 9.5**. No diagrama de árvore, o espaço amostral completo é exibido.

Algumas probabilidades são:

$$\begin{aligned}
\Pr(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{22}{1700} && \text{ramo 1} \\
\Pr(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{12}{50} = \frac{78}{1700} && \text{ramo 3} \\
\Pr(\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) &= \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} = \frac{247}{1700} && \text{ramo 6}
\end{aligned}$$

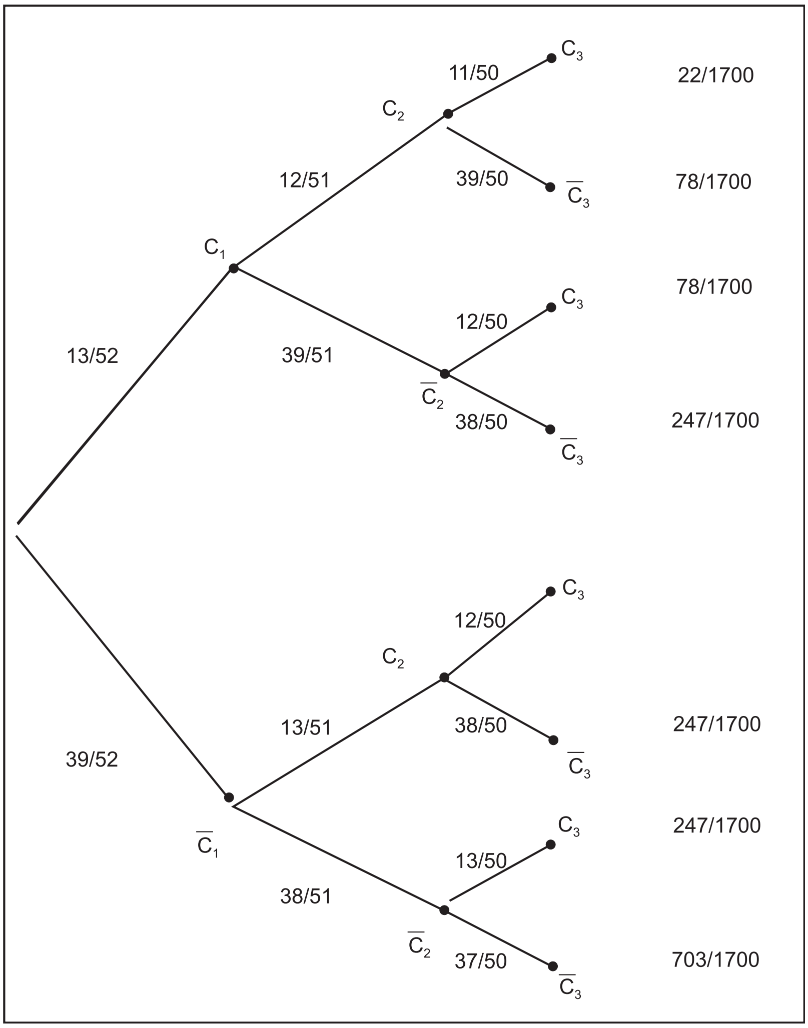

Figura 9.5: Diagrama de árvore para o experimento de extração de três cartas sem reposição.

REGRA GERAL DA MULTIPLICAÇÃO

O exemplo anterior ilustra a regra geral de multiplicação.

!

Regra geral da multiplicação

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos de um espaço amostral Ω. Então,

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\cdots\Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Exercício 9.4.

Em uma pesquisa realizada com um grupo de alunos da UFF, constatou-se que 10% dos estudantes não utilizam transporte público para ir às aulas e que 65% dos estudantes que utilizam o transporte público fazem refeições no bandejão do campus.

Selecionando-se aleatoriamente um estudante deste grupo, calcule a probabilidade de que ele use transporte público e faça refeições no bandejão.

Exercício 9.5.

As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela a seguir.

	Tipo de filme		
Sexo	**Comédia**	**Romance**	**Policial**
Masculino	136	92	248
Feminino	102	195	62

Sorteando-se ao acaso um registro de locação, pede-se a probabilidade de:

1. ser um filme policial alugado por uma mulher;
2. ser uma comédia;
3. ser de um homem ou de um romance;
4. ser de um filme policial dado que foi alugado por um homem.

Exercício 9.6.

Uma urna contém seis bolas pretas e cinco bolas amarelas. Extraem-se sequencialmente três bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as três bolas sejam de cores iguais?

INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Considere novamente um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} C &= \text{“carta é de copas”} \\ R &= \text{“carta é um rei”} \\ V &= \text{“carta é vermelha”} \end{aligned}$$

Já vimos que $\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; $\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e $\Pr(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

Vamos agora calcular as seguintes probabilidades condicionais: $\Pr(R|C)$ e $\Pr(V|C)$.

No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas.

No segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$\begin{aligned} \Pr(R|C) &= \frac{\Pr(R \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = \Pr(R) \\ \Pr(V|C) &= \frac{\Pr(V \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1 \neq \Pr(V) \end{aligned}$$

No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber ou não que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei.

Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos a probabilidade de sair carta vermelha. Como podemos ver, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta *tem* que ser vermelha.

Esses exemplos ilustram um conceito importante. No primeiro caso, dizemos que os eventos R e C são *independentes* e no segundo caso, os eventos V e C são *dependentes*. No primeiro caso, o conhecimento da ocorrência de C não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de C. No segundo caso, o conhecimento da ocorrência de C faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de V.

Definição 9.2.

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então, A e B são **independentes** se

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Essa definição tem algumas implicações importantes. A primeira delas é a seguinte:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \Rightarrow \Pr(B|A) = \Pr(B)$$

De fato,

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

$$\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \Pr(A)$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Então, temos que

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(A)} = \Pr(B)$$

A conclusão disso é a seguinte: se A e B são independentes, então B e A também o são (comutatividade).

A segunda implicação, bastante importante, é a seguinte: se A e B são independentes, então $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Mas a recíproca dessa afirmativa também é verdadeira, ou seja, se $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ então A e B são independentes:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A) \Rightarrow$$

A e B são independentes

Esse resultado nos permite estabelecer uma outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

Definição 9.3.

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então, A e B são **independentes** se

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Exemplo 9.7.

Num exemplo anterior, analisamos os dados apresentados na tabela a seguir, referentes à participação de funcionários de uma empresa em planos de aposentadoria complementar:

		Plano pessoal		Total
		Sim	**Não**	
Plano da Empresa	**Sim**	200	200	400
	Não	0	100	100
Total		200	300	500

Naquele exemplo, estudamos os eventos $E =$ "empregado tem o plano de aposentadoria complementar da empresa" e $P =$ "empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar". Vamos ver se esses eventos são independentes.

Solução:

Temos que

$$\Pr(P) = \frac{2}{5} \qquad \Pr(E) = \frac{4}{5}$$
$$\Pr(P \cap E) = \frac{2}{5} \neq \Pr(P)\Pr(E)$$

Logo, os eventos P e E não são independentes. Outra forma de ver isso é

$$\Pr(E|P) = \frac{200}{200} = 1 \neq \Pr(E) = \frac{4}{5}$$

Exemplo 9.8.

Sejam A e B eventos independentes em um espaço amostral Ω. Prove que os seguintes eventos também são independentes:

1. $\overline{A}$ e B
2. $\overline{A}$ e $\overline{B}$

Solução:

1. Temos que

$$\Pr(\overline{A} \cap B) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Como A e B são independentes, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) \\ &= \Pr(B)[1 - \Pr(A)] \\ &= \Pr(B)\Pr(\overline{A}) \end{aligned}$$

Logo, os eventos $\overline{A}$ e B são independentes.

2. Pela lei de De Morgan e pela lei do complementar, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) \\ &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

Como A e B são independentes, $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B) \\ &= [1 - \Pr(A)] - \Pr(B)[1 - \Pr(A)] \\ &= [1 - \Pr(A)][1 - \Pr(B)] \\ &= \Pr(\overline{A})\Pr(\overline{B}) \end{aligned}$$

Logo, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes.

Exercício 9.7.

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que $\Pr(A) = \frac{1}{5}$, $\Pr(B) = p$ e $\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Determine o valor de p para que A e B sejam independentes.

Exercício 9.8.

Volte ao Exercício 9.2. Verifique se os eventos considerados são independentes.

Exercício 9.9.

Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que $\Pr(A) > 0$ e $\Pr(B) > 0$.

1. Mostre que se A e B são independentes, então A e B não podem ser mutuamente exclusivos.
2. Mostre que se A e B são mutuamente exclusivos, então A e B não podem ser independentes.

Exercício 9.10.

Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Sabe-se que $\Pr(A) = 0,3$; $\Pr(B) = 0,7$ e $\Pr(A \cap B) = 0,21$.

Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras. Justifique sua resposta.

1. A e B são mutuamente exclusivos;
2. A e B são independentes;
3. A e $\overline{B}$ são independentes;

4. A e $\overline{B}$ são mutuamente exclusivos;
5. A e $\overline{A}$ são independentes.

Resumo

Nesta aula, você estudou dois conceitos fundamentais de probabilidade: probabilidade condicional e independência de eventos. Viu também, como consequência direta, a regra da multiplicação.

Probabilidade condicional do evento A dada a ocorrência do evento B:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Regra da multiplicação para dois eventos:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)\Pr(A|B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

Regra da multiplicação geral:

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$\Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Independência de eventos: Se A e B são eventos de um espaço amostral Ω, então A e B são independentes se

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

ou equivalentemente

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Exercício 9.11.

Dois dados equilibrados são lançados.

1. Calcule a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.
2. Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.
3. Os eventos "seis em pelo menos um dado" e "faces diferentes nos dois dados" são independentes?

Exercício 9.12.

Uma sala possui três soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais seis estão queimadas, retiram-se três lâmpadas ao acaso, colocando-se as mesmas nos três bocais.

Calcular a probabilidade de que:

1. pelo menos uma lâmpada acenda;
2. todas as lâmpadas acendam.

Exercício 9.13.

O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35.

O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível.

Qual é a probabilidade de se criarem 200.000 empregos nesse ano?

Exercício 9.14.

Na urna I, há cinco bolas vermelhas, três brancas e oito azuis. Na urna II, há três bolas vermelhas e cinco brancas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair três ou seis, escolhe-se uma bola da urna I; caso contrário, escolhe-se uma bola da urna II.

Calcule a probabilidade de

1. sair uma bola vermelha;
2. sair uma bola branca;
3. sair uma bola azul.

Exercício 9.15.

Joana quer enviar uma carta a Camila.
A probabilidade de Joana escrever a carta é $\frac{8}{10}$.
A probabilidade do correio não a perder é $\frac{9}{10}$.
A probabilidade do carteiro a entregar é também $\frac{9}{10}$.

1. Construa o diagrama de árvore representando o espaço amostral deste problema.
2. Calcule a probabilidade de Camila não receber a carta.

Exercício 9.16.

Sejam A e B dois eventos tais que $\Pr(A) = 0,4$ e $\Pr(A \cup B) = 0,7$. Seja $\Pr(B) = p$.

Determine o valor de p para que

1. A e B sejam mutuamente exclusivos;
2. A e B sejam independentes.

Exercício 9.17.

Sejam A e B eventos possíveis de um mesmo espaço amostral Ω. Se $P(\overline{A}|B) = 1$ verifique a veracidade das seguintes afirmativas, justificando sua resposta.

1. A e B são independentes.
2. A e B são mutuamente exclusivos.

Exercício 9.18.

Sejam A, B, C eventos de um mesmo espaço amostral. Sabe-se que

(i) B é um subconjunto de A;

(ii) A e C são independentes e

(iii) B e C são mutuamente exclusivos.

A probabilidade do complementar da união dos eventos A e C é 0,48; a probabilidade da união dos eventos B e C é 0,3 e a probabilidade do evento C é o dobro da probabilidade do evento B.

Calcule a probabilidade da união de A e B.

Exercício 9.19.

Uma comissão de dois estudantes deve ser sorteada de um grupo de 5 alunas e 3 alunos. Sejam os eventos:

$$M_1 = \text{"primeiro estudante sorteado é mulher"}$$
$$M_2 = \text{"segundo estudante sorteado é mulher"}$$

1. Construa um diagrama de árvore que represente o espaço amostral deste experimento, indicando as probabilidades.
2. Calcule $\Pr(M_1)$ e $\Pr(M_2)$.
3. Verifique se M_1 e M_2 são independentes.

Exercício 9.20.

Em um campeonato de natação, estão competindo três estudantes: Alberto, Bosco e Carlos. Alberto e Bosco têm a mesma probabilidade de ganhar, que é o dobro da de Carlos ganhar.

1. Ache a probabilidade de que Bosco ou Carlos ganhe a competição.
2. Que hipótese você fez para resolver essa questão? Essa hipótese é razoável?

Exercício 9.21.

Solicita-se a dois estudantes, Maria e Pedro, que resolvam determinado problema. Eles trabalham na solução do mesmo independentemente, e têm, respectivamente, probabilidade 0,8 e 0,7 de resolvê-lo.

1. Qual é a probabilidade de que nenhum deles resolva o problema?
2. Qual é a probabilidade de o problema ser resolvido?
3. Dado que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que tenha sido resolvido apenas por Pedro?

Exercício 9.22.

Joga-se um dado duas vezes. Considere os seguintes eventos: $A =$"resultado do primeiro lançamento é par" e $B =$ "soma dos resultados é par". A e B são independentes? Justifique.

Exercício 9.23.

Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com quatro alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola".

Qual é a probabilidade de ele acertar a questão?

SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Exercício 9.1.

1. Seja $A =$ "faces iguais". Então,

   $A = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$

   e $\Pr(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. Seja $B =$ "soma das faces menor ou igual a 4".
   Então, $B = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1)\}$
   e
   $\Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. O problema pede

   $$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

3. Seja $C =$ "5 em pelo menos um dos dados". Então,

   $$C = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$$

   e $\Pr(C) = \frac{11}{36}$.

4. Seja $D =$ "faces diferentes". Então, $\Pr(D) = \Pr(\overline{A}) = \frac{5}{6}$. O problema pede

   $$\Pr(C|D) = \frac{\Pr(C \cap D)}{\Pr(D)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$$

Exercício 9.2.

Vamos definir os eventos $P =$ "campanha pronta antes do prazo" e $A =$ "diretoria aprova campanha". O problema dá que

$$\Pr(P) = 0,6 \qquad \Pr(A) = 0,5 \qquad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

1. $\Pr(A \cup P) = \Pr(A) + \Pr(P) - \Pr(A \cap P) =$
   $0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$

2. $\Pr(\overline{A} \cap \overline{P}) = \Pr(\overline{A \cup P}) = 1 - \Pr(A \cup P) = 0,2$

3. $\Pr(A|P) = \dfrac{\Pr(A \cap P)}{\Pr(P)} = \dfrac{0,3}{0,6} = 0,5.$

Exercício 9.3.

1. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) =$
   $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$

2. $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = \frac{5}{12}$

3. $\Pr(A|\overline{B}) = \dfrac{\Pr(A \cap \overline{B})}{\Pr(\overline{B})} = \dfrac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} =$
   $= \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{8}$

Exercício 9.4.

Vamos definir os seguintes eventos: T = "aluno utiliza transporte público" e B = "aluno come no bandejão". O problema dá que

$$\Pr(\overline{T}) = 0,10 \qquad \Pr(B|T) = 0,65$$

O problema pede

$$\Pr(T \cap B) = \Pr(T)\Pr(B|T) = 0,9 \times 0,65 = 0,585$$

Exercício 9.5.

Vamos definir os seguintes eventos: C ="comédia"; R = "romance"; P = "policial"; M = "masculino"; F = "feminino".

1. $\Pr(P \cap F) = \frac{62}{835}$

2. $\Pr(C) = \frac{136+102}{835} = \frac{238}{835}$
3. $\Pr(M \cup R) = \Pr(M) + \Pr(R) - \Pr(R \cap M) =$

   $= \frac{(136+92+248)+(92+195)-92}{835} = \frac{671}{835}$
4. $\Pr(P|M) = \frac{\Pr(P \cap M)}{\Pr(M)} = \frac{248}{136+92+248} = \frac{248}{476}$

Exercício 9.6.

Vamos definir os eventos
P_i = "bola preta na extração i";
A = "bola amarela na extração i", $i = 1,2,3$.

Seja M = "3 bolas de mesma cor". Então,

$$\begin{aligned}
& \Pr(M) = \Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
= \; & \Pr(P_1) \times \Pr(P_2|P_1) \times \Pr(P_3|P_1 \cap P_2) + \\
& \Pr(A_1) \times \Pr(A_2|A_1) \times \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \\
= \; & \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \\
= \; & \frac{4}{33} + \frac{2}{33} = \frac{2}{11}
\end{aligned}$$

Exercício 9.7.

Para que A e B sejam independentes, temos que ter $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = \frac{p}{5}$, mas

$$\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} + p - \frac{p}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4p}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$$

Exercício 9.8.

Os eventos são P = "campanha pronta antes do prazo" e A = "diretoria aprova campanha" e o problema dá que

$$\Pr(P) = 0,6 \qquad \Pr(A) = 0,5 \qquad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

Como $\Pr(A \cap P) = \Pr(P)\Pr(A)$, segue que P e A são independentes.

Exercício 9.9.

1. A e B independentes $\Rightarrow$
   $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) > 0 \Rightarrow$
   A e B não são mutuamente exclusivos.

2. A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow$
   $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow \Pr(A|B) = 0 \neq \Pr(A) > 0 \Rightarrow$
   A e B não são independentes.

   Esse exercício é importante, no sentido em que ele diferencia os conceitos de eventos disjuntos e eventos independentes que, muitas vezes, são confundidos pelos alunos.

Exercício 9.10.

1. $\Pr(A \cap B) = 0,21 \neq 0 \therefore A$ e B não são mutuamente exclusivos

2. $\Pr(A \cap B) = 0,21 = \Pr(A)\Pr(B) \therefore A$ e B são independentes

3. A e B independentes $\Rightarrow A$ e $\overline{B}$ são independentes (ver exemplo resolvido)

4. A e $\overline{B}$ independentes $\Rightarrow A$ e $\overline{B}$ não são mutuamente exclusivos (ver Exercício 9.9.)

5. A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos $\Rightarrow A$ e $\overline{A}$ não são independentes (ver Exercício 9.9.)

Exercício 9.11.

Vamos definir os eventos $A =$ "face 6 em pelo menos um dado" e $B =$ "faces iguais". Então,

$$A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

1. $\Pr(A) = \frac{11}{36}$
2. $\Pr(A|\overline{B}) = \dfrac{\Pr(A \cap \overline{B})}{\Pr(\overline{B})} = \dfrac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} = \dfrac{\frac{11}{36} - \frac{1}{36}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{3} \neq \Pr(A)$
3. $\Pr(A|\overline{B}) \neq \Pr(A) \Rightarrow A$ e $\overline{B}$ não são independentes

Exercício 9.12.

Seja $A_i =$ "lâmpada i acende", $i = 1,2,3$

1. Seja $P =$ "pelo menos uma lâmpada acende". Então,

$$\overline{P} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Pr(\overline{P}) &= \Pr(\overline{A}_1) \times \Pr(\overline{A}_2|\overline{A}_1) \times \Pr(\overline{A}_3|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Pr(P) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

2. O problema pede

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2|A_1) \times \Pr(A_3|A_2 \cap A_1) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}\end{aligned}$$

Exercício 9.13.

Vamos definir os seguintes eventos: $B =$ "inflação abaixo de 3%"; $M =$ "inflação entre 3% e 4%", $A =$ "inflação acima de 4%" e $E =$ "200.000 empregos". O problema dá o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \Pr(B) & = & 0,20 \qquad \Pr(M) = 0,45 \qquad \Pr(A) = 0,35 \\ \Pr(E|B) & = & 0,6 \qquad \Pr(E|M) = 0,3 \qquad \Pr(E|A) = 0 \end{array}$$

Veja a **Figura 9.6**. Daí concluímos que

$$E = (E \cap B) \cup (E \cap M) \cup (E \cap A)$$

e, como os eventos são mutuamente exclusivos,

$$\Pr(E) = \Pr(E \cap B) + \Pr(E \cap M) + \Pr(E \cap A)$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \Pr(E) & = & \Pr(B)\Pr(E|B) + \Pr(M)\Pr(E|M) + \Pr(A)\Pr(E|A) \\ & = & 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 = 0,255 \end{array}$$

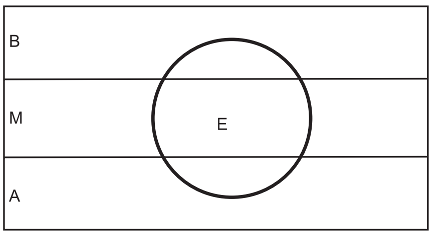

Figura 9.6: Partição do espaço amostral para o problema da inflação espanhola.

Exercício 9.14.

Veja a **Figura 9.7**, onde temos os seguintes eventos: V = "bola vermelha"; B = "bola branca"; A = "bola azul"; I = "urna I"; II = "urna II"

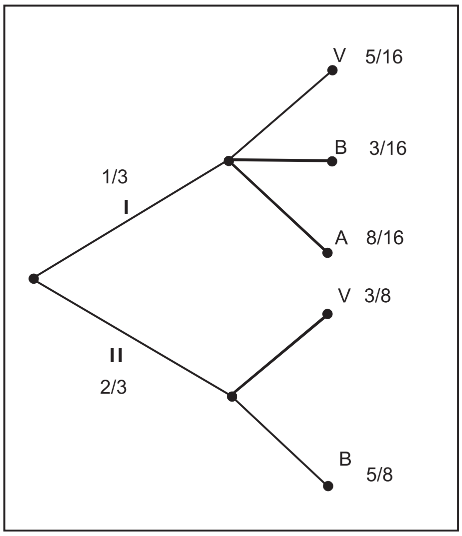

Figura 9.7: Diagrama de árvore para o Exercício 9.14.

1. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(V) &= \Pr(V \cap I) + \Pr(V \cap II) \\
&= \Pr(I)\Pr(V|I) + \Pr(II)\Pr(V|II) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \\
&= \frac{5}{48} + \frac{12}{48} = \frac{17}{48}
\end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr(B \cap I) + \Pr(B \cap II) \\
&= \Pr(I)\Pr(B|I) + \Pr(II)\Pr(B|II) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{48} + \frac{20}{48} = \frac{23}{48}
\end{aligned}$$

3. Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap I) + \Pr(A \cap II) \\ &= \Pr(I)\Pr(A|I) + \Pr(II)\Pr(A|II) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{8}{16} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{8}{48} \end{aligned}$$

Note que $\Pr(V) + \Pr(B) + \Pr(A) = 1$.

Exercício 9.15.

Veja a **Figura 9.8**, onde temos os seguintes eventos: E = "Joana escreve a carta"; C = "correio não perde a carta"; T = "carteiro entrega a carta".

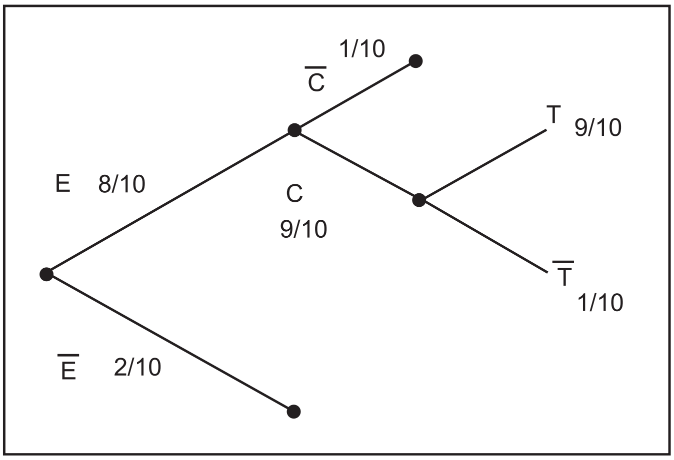

Figura 9.8: Diagrama de árvore para o Exercício 9.15.

Vamos definir o evento R = "Camila recebe a carta". O problema pede $\Pr(\overline{R})$. Mas

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{R}) &= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E \cap \overline{C}) + \Pr(E \cap C \cap \overline{T}) \\
&= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E) \times \Pr(\overline{C}|E) + \\
&\quad \Pr(E) \times \Pr(C|E) \times \Pr(\overline{T}|C \cap E) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \\
&= 0,2 + 0,8 \times 0,1 + 0,8 \times 0,9 \times 0,1 \\
&= 0,2 + 0,08 + 0,072 = 0,352
\end{aligned}$$

Exercício 9.16.

Temos que
$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \Rightarrow$
$0,7 = 0,4 + p - \Pr(A \cap B)$

1. $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$
2. $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - 0,4p \Rightarrow$

   $0,6p = 0,3 \Rightarrow p = 0,5$

Exercício 9.17.

Pelos dados do problema, temos que

$$\Pr(\overline{A}|B) = 1 \Rightarrow \frac{\Pr(\overline{A} \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\Pr(B) - \Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 0 \Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0$$

Logo, A e B são mutuamente exclusivos e, portanto, não podem ser independentes.

Exercício 9.18.

O problema dá os seguintes fatos:

$$\begin{array}{rl} B \subset A & \Pr(A \cap C) = \Pr(A)\Pr(C) \\ \Pr(B \cap C) = 0 & \Pr(\overline{A \cup C}) = 0,48 \\ \Pr(B \cup C) = 0,3 & \Pr(C) = 2\Pr(B) \end{array}$$

e pede $\Pr(A \cup B)$.

Como $B \subset A$, então $A \cup B = A \Rightarrow$
$\Pr(A \cup B) = \Pr(A)$.

$$\Pr(B \cup C) = 0,3 \Rightarrow \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) = 0,3 \Rightarrow$$
$$\Pr(B) + 2\Pr(B) - 0 = 0,3 \Rightarrow \Pr(B) = 0,1$$

Logo, $\Pr(C) = 0,2$.

$$\Pr(\overline{A \cup C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A} \cap \overline{C}) = 0,48$$

Como A e C são independentes, segue que $\overline{A}$ e $\overline{C}$ também o são. Logo,

$$\Pr(\overline{A})\Pr(\overline{C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A}) \times 0,8 = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A}) = 0,6$$

e, portanto,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) = 0,4$$

Exercício 9.19.

1. Veja a **Figura 9.9**.
2. Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= \frac{5}{8} \\ \Pr(M_2) &= \Pr(M_1 \cap M_2) + \Pr(H_1 \cap M_2) \\ &= \Pr(M_1)\Pr(M_2|M_1) + \Pr(H_1)\Pr(M_2|H_1) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

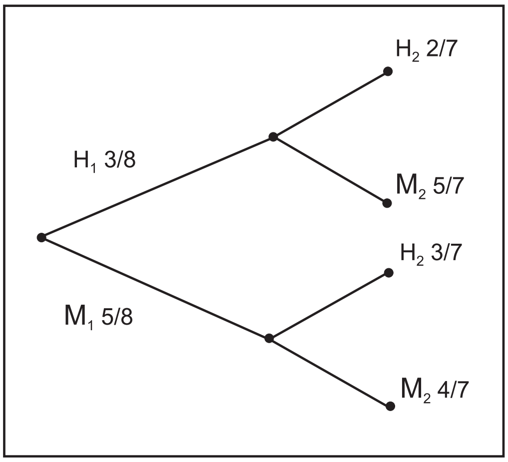

Figura 9.9: Diagrama de árvore para o Exercício 9.19.

3. Temos que

$$\Pr(M_2|M_1) = \frac{4}{7} \neq \Pr(M_2)$$

Logo, M_1 e M_2 não são independentes.

Exercício 9.20.

Sejam os eventos $A =$ "Alberto ganha"; $B =$ "Bosco ganha"; $C =$ "Carlos ganha". Como eles são os únicos competidores, temos que

$$\begin{aligned}
&\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) = 1 \Rightarrow \\
&2\Pr(C) + 2\Pr(C) + \Pr(C) = 1 \Rightarrow \\
&\Pr(C) = \frac{1}{5} \Rightarrow \Pr(A) = \Pr(B) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

1. O problema pede

$$\Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C)$$

Note que pode haver empate entre Bosco e Carlos. No entanto, é razoável supor que os eventos B e C sejam independentes, uma vez que numa competição honesta, nenhum competidor interfere no desempenho dos outros. Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(B \cup C) &= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) \\ &= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B)\Pr(C) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{13}{25} \end{aligned}$$

2. Foi necessário fazer a hipótese de independência, que é razoável, conforme explicado no item anterior.

Exercício 9.21.

Sejam os eventos $M =$ “Maria resolve o problema” e $P =$ “Pedro resolve o problema”. Sejam $\overline{M}$ e $\overline{P}$ os respectivos complementares. Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(M) &= 0,8 \qquad \Pr(P) = 0,7 \\ \Pr\left(\overline{M}\right) &= 0,2 \qquad \Pr\left(\overline{P}\right) = 0,3 \end{aligned}$$

1. O problema pede $\Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right)$. Pela hipótese de independência (sabemos que, se A e B são eventos independentes, então os seus complementares também o são) temos que

$$\Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

2. Seja $R =$ “problema resolvido”. O problema pede $\Pr(R) = \Pr(P \cup M)$. Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(R) &= \Pr(P \cup M) = 1 - \Pr\left(\overline{P \cup M}\right) = 1 - \Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right) = \\ &= 1 - 0,06 = 0,94 \end{aligned}$$

3. Seja $P_1 =$ "apenas Pedro resolve". A questão pede $\Pr(P_1|R)$. Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(P_1|R) &= \frac{\Pr(P_1 \cap R)}{\Pr(R)} = \frac{\Pr\left(P \cap \overline{M}\right)}{\Pr(R)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,2}{0,94} = 0,1489\end{aligned}$$

Exercício 9.22.

Vamos esquematizar o espaço amostral e os eventos A e B da seguinte forma:

		Dado 2					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 1	**1**	B		B		B	
	2	A	AB	A	AB	A	AB
	3	B		B		B	
	4	A	AB	A	AB	A	AB
	5	B		B		B	
	6	A	AB	A	AB	A	AB

Em cada cela colocamos a letra do evento que acontece na respectiva combinação dos dados. Então,

$\Pr(A) = \Pr(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ e

$\Pr(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \Pr(A) \times \Pr(B).$

Logo, A e B são independentes.

Exercício 9.23.

Veja a **Figura 9.10**, onde temos os eventos $S =$ "sabe a resposta" e $A =$ "acerta a resposta".

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\overline{S}) = 0,7$$

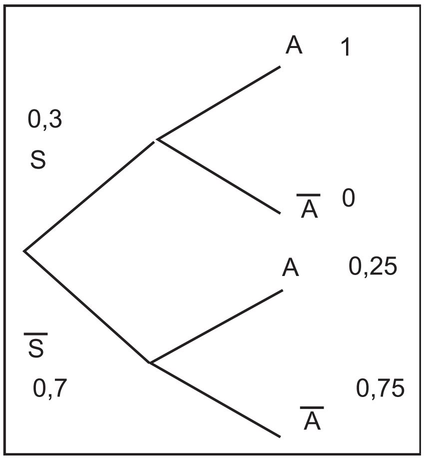

Figura 9.10: Diagrama de árvore para o Exercício 9.23.

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode "chutar" entre as quatro alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \qquad\qquad \Pr(A|\overline{S}) = 0,25$$

O problema pede $\Pr(A)$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \overline{S}) \\
&= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\overline{S}) \times \Pr(A|\overline{S}) \\
&= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475
\end{aligned}$$