# Aula 7

## REVISÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

## Objetivos

Conforme você verá na próxima aula, a definição clássica de probabilidade exige que saibamos contar o número de elementos de um conjunto.

Em algumas situações, é possível listar todos os elementos de um conjunto, mas, em geral, será necessário obter o número de elementos sem enumerá-los.

A análise combinatória consiste em um conjunto de regras de contagem, das quais veremos as principais.

Nesta aula, você estudará:

1. o princípio fundamental da adição;
2. o princípio fundamental da multiplicação;
3. o conceito de permutação;
4. o conceito de arranjo e
5. o conceito de combinação.

## PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA ADIÇÃO

Na aula anterior, vimos que dois eventos são mutuamente exclusivos, se eles não têm interseção. Podemos generalizar essa definição para uma coleção de $n$ conjuntos, olhando a interseção de dois conjuntos de cada vez. Se essa interseção for vazia para todo par $(A_i, A_j)$ com $i \neq j$, dizemos que os conjuntos são mutuamente exclusivos dois a dois.

**!**

**Princípio Fundamental da Adição**
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$ e $\#A_i = n_i$. Veja a **Figura 7.1**. Nesse caso, temos que

$$\#\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} (\#A_i) = n_1 + \cdots + n_k$$

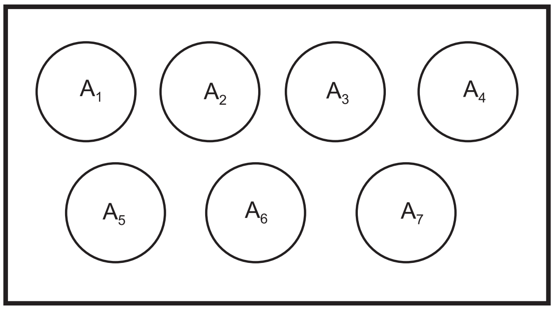


**Figura 7.1**: União de eventos mutuamente exclusivos dois a dois.

## PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA MULTIPLICAÇÃO

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere que numa sala haja três homens $(h_1, h_2, h_3)$ e cinco mulheres $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$.

Quantos casais podem ser formados com essas pessoas?

Para responder a essa pergunta, devemos notar que há cinco casais nos quais o homem é $h_1$, cinco nos quais o homem é $h_2$ e outros cinco nos quais o homem é $h_3$, perfazendo um total de $3 \times 5 = 15$ casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação*.

**!**

**Princípio Fundamental da Multiplicação**
Se temos $k$ decisões $d_1, d_2, \ldots, d_k$ que podem ser tomadas de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões $d_1$ e $d_2$ e $\cdots$ e $d_k$ é $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$

No exemplo anterior, temos duas decisões: a primeira decisão é $d_1 =$ escolha do homem, e a segunda decisão é $d_2 =$ escolha da mulher. Como há três homens e cinco mulheres, o número de casais que podemos formar é $3 \times 5 = 15$, como já visto.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_1m_5, \\ h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_2m_5, \\ h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4, h_3m_5, \end{array} \right\}$$

Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de elementos do espaço amostral formado pelos casais sem ter que fazer essa enumeração enfadonha!

**Exemplo 7.1.**

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

**Solução:**

Para o primeiro algarismo (milhar), existem nove possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram nove algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram oito algarismos. Logo, existem $9 \times 9 \times 8 = 648$ números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?)

**Exemplo 7.2.**

Um prédio possui oito portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

**Solução:**

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das oito portas. Escolhida a porta de entrada, sobram sete portas para a saída. Logo, existem $8 \times 7 = 56$ maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

**Exemplo 7.3.**

Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

**Solução:**

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Se ele termina com 2, sobram duas posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição, temos cinco possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram quatro para a segunda posição.

Pelo principio fundamental da multiplicação existem $5 \times 4 = 20$ números pares com três algarismos distintos terminando com 2. Analogamente, existem vinte que terminam com 4 e vinte que terminam com 6. Logo, o número total é 60.

**Exercício 7.1.**

De quantos modos distintos podemos colocar três livros em uma prateleira?

**Exercício 7.2.**

Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9? Desses, quantos apresentam os algarismos 1 e 3 juntos?

## PERMUTAÇÕES

Consideremos quatro objetos distintos $a_1, a_2, a_3, a_4.$ De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$$
\begin{array}{cccc}
a_1a_2a_3a_4 & a_1a_2a_4a_3 & a_1a_3a_2a_4 & a_1a_3a_4a_2 \\
a_1a_4a_2a_3 & a_1a_4a_3a_2 & a_2a_1a_3a_4 & a_2a_1a_4a_3 \\
a_2a_3a_1a_4 & a_2a_3a_4a_1 & a_2a_4a_1a_3 & a_2a_4a_3a_1 \\
a_3a_1a_2a_4 & a_3a_1a_4a_2 & a_3a_2a_1a_4 & a_3a_2a_4a_1 \\
a_3a_4a_1a_2 & a_3a_4a_2a_1 & a_4a_1a_2a_3 & a_4a_1a_3a_2 \\
a_4a_2a_1a_3 & a_4a_2a_3a_1 & a_4a_3a_1a_2 & a_4a_3a_2a_1
\end{array}
$$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande. Note que, para apenas quatro objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma consequência direta do princípio da multiplicação.

Consideremos, então, $n$ objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n.}$ Para a primeira posição, temos $n$ possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram $n-1$ objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram $n-2$ objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as $n-1$ anteriores, sobra apenas 1 objeto.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos por $P_n$ é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$, e esse número, por definição, é o fatorial de $n$. Temos, assim, o seguinte resultado.

**!**

Dados $n$ objetos distintos, o número de **permutações simples** de tais objetos é dado por

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \qquad (7.1)$$

**Exemplo 7.4.**

Quantas filas diferentes podemos formar com cinco crianças?

**Solução:**

Essa é exatamente a definição de permutação. Logo, o número de filas é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

**Exemplo 7.5.**

Temos cinco livros de Estatística, três livros de Matemática Financeira e quatro livros de Contabilidade.

De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

**Solução:**

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem $12! = 479.001.600$ maneiras de organizar os livros.

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são três assuntos, há $3! = 6$ maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há $5! = 120$ maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática Financeira, $3! = 6$ maneiras, e para os livros de Contabilidade, $4! = 24$ maneiras.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$ maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.

**Exemplo 7.6.**

Cinco moças e cinco rapazes têm que sentar em cinco bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?

**Solução:**

Comecemos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares. Logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem 2 possibilidades.

Definidas as posições das meninas, temos cinco rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de $5!$ maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3.840 \times 120 = 460.800$.

**Exercício 7.3.**

Considere a palavra TEORIA.

1. Quantos anagramas podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?
3. Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?
4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

Segundo o dicionário *Aurélio*: Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase. “E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América” (João Ribeiro, *Curiosidades verbais*, p. 76).

**Exercício 7.4.**

Quantas filas podem ser formadas por cinco moças e cinco rapazes? Se João e Maria fazem parte desse grupo, em quantas filas eles estão juntos? E em quantas filas eles estão separados?

## ARRANJOS

Na definição de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas $k$ dos $n$ objetos, onde $k \leq n$. Nesse caso, temos a definição de *arranjo simples*.

Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formar com as quatro pessoas sorteadas?

Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8, e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$. Veja o esquema na **Figura 7.2**.

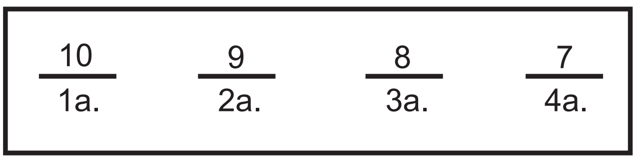


**Figura 7.2**: Arranjo de 10, tomados de 4 em 4.

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas $(10-3) = [10-(4-1)]$. Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$\begin{aligned}10\times9\times8\times7 &= \frac{(10\times9\times8\times7)\times(6\times5\times4\times3\times2\times1)}{(6\times5\times4\times3\times2\times1)}\\ &= \frac{(10\times9\times8\times7)\times6!}{6!}\\ &= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}\end{aligned}$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de arranjos de $k$ objetos dentre $n$, devemos notar que, para a primeira posição, existem $n$ possibilidades. Para a segunda, $n-1$ possibilidades. Para a $k$-ésima e última posição, já foram escolhidos $k-1$ objetos; portanto, sobram $n-(k-1)$, ou seja, para a $k$-ésima posição, há $n-(k-1) = n-k+1$ possibilidades.

Logo, o número total de arranjos de $k$ elementos, tomados dentre $n$ é $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$. Vamos denotar por $A_n^k$ esse número.

**!**

O número de **arranjos simples** de $k$ objetos dentre $n$, denotado por $A_n^k$, é

$$A_n^k = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$$

Vamos usar um pequeno artifício para simplificar essa fórmula: vamos multiplicar e dividir o resultado por

$$(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times2\times1 = (n-k)!$$

Então,

$$\begin{aligned}A_n^k &= n\times(n-1)\times\cdots\times[n-(k-1)]\times\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =\\ &= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times2\times1}{(n-k)!} =\\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (7.2)$$

É importante notar que, sendo a definição de arranjo uma generalização de permutação (note que uma permutação é um arranjo em que $k = n$), a ordem dos elementos é relevante, ou seja, $a_1a_2a_3$ é diferente de $a_3a_1a_2$.

**Exemplo 7.7.**

Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

**Solução:**

A resposta é $A_{20}^3$, pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6.840$$

**Exemplo 7.8.**

De um grupo de 10 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?

**Solução:** A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

**Exercício 7.5.**

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de três dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

**Exercício 7.6.**

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?

## COMBINAÇÕES SIMPLES

Vamos considerar agora, a situação análoga a um arranjo, mas onde a ordem não importa, ou seja, $a_1a_2a_3$ é igual a $a_3a_1a_2$.

Consideremos a situação na qual temos cinco objetos dos quais vamos tomar três. Como visto, o número de arranjos é $\frac{5!}{2!} = 60$. Vamos listá-los.

| Objetos envolvidos | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,2,3) | (1,2,4) | (1,2,5) | (1,3,4) | (1,3,5) | (1,4,5) | (2,3,4) | (2,3,5) | (2,4,5) | (3,4,5) |
| $a_1a_2a_3$ | $a_1a_2a_4$ | $a_1a_2a_5$ | $a_1a_3a_4$ | $a_1a_3a_5$ | $a_1a_4a_5$ | $a_2a_3a_4$ | $a_2a_3a_5$ | $a_2a_4a_5$ | $a_3a_4a_5$ |
| $a_1a_3a_2$ | $a_1a_4a_2$ | $a_1a_5a_2$ | $a_1a_4a_3$ | $a_1a_5a_3$ | $a_1a_5a_4$ | $a_2a_4a_3$ | $a_2a_5a_3$ | $a_2a_5a_4$ | $a_3a_5a_4$ |
| $a_2a_1a_3$ | $a_2a_1a_4$ | $a_2a_1a_5$ | $a_3a_1a_4$ | $a_3a_1a_5$ | $a_4a_1a_5$ | $a_3a_2a_4$ | $a_3a_2a_5$ | $a_4a_2a_5$ | $a_4a_3a_5$ |
| $a_2a_3a_1$ | $a_2a_4a_1$ | $a_2a_5a_1$ | $a_3a_4a_1$ | $a_3a_5a_1$ | $a_4a_5a_1$ | $a_3a_4a_2$ | $a_3a_5a_2$ | $a_4a_5a_2$ | $a_4a_5a_3$ |
| $a_3a_1a_2$ | $a_4a_1a_2$ | $a_5a_1a_2$ | $a_4a_1a_3$ | $a_5a_1a_3$ | $a_5a_1a_4$ | $a_4a_2a_3$ | $a_5a_2a_3$ | $a_5a_2a_4$ | $a_5a_3a_4$ |
| $a_3a_2a_1$ | $a_4a_2a_1$ | $a_5a_2a_1$ | $a_4a_3a_1$ | $a_5a_3a_1$ | $a_5a_4a_1$ | $a_4a_3a_2$ | $a_5a_3a_2$ | $a_5a_4a_2$ | $a_5a_4a_3$ |

Essa listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são iguais, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três objetos envolvidos.

Logo, o número de elementos em cada coluna nesse exemplo é $3! = 6$. Como só precisamos de um de cada 3!, o número total é

$$\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de $n$ elementos tomados $k$ a $k$. Dado um conjunto de $n$ elementos, a *combinação dos n elementos tomados k a k* nos dá o número de subconjuntos com $k$ elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).

**!**

O número de **combinações simples** de $n$ elementos tomados $k$ a $k$ é igual a

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \tag{7.3}$$

O número $\binom{n}{k}$ é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatório.

Note a diferença: no conceito de arranjo, estamos lidando com sequências de $k$ elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com subconjuntos. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

**Exemplo 7.9.**

De um grupo de oito homens e cinco mulheres, devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas?

**Solução:**

Os três homens podem ser escolhidos de $\binom{8}{3}$ maneiras; as três mulheres podem ser escolhidas de $\binom{5}{3}$ maneiras. Pelo princípio da multiplicação, há $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3}$ maneiras de escolher a comissão.

Note que $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = \frac{8!}{5!3!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 560$

**Exemplo 7.10.**

Um baralho de pôquer é formado pelas cartas 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei, ás de cada um dos quatro naipes. Em uma mão de pôquer, sacam-se cinco cartas sem reposição. Quantas são as extrações possíveis?

**Solução:**

Temos ao todo $4 \times 8 = 32$ cartas. Como a ordem de retirada não importa, o número total de extrações possíveis é

$$\begin{aligned}
C_{32}^{5} &= \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5! \times 27!} \\
&= \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(4 \times 8) \times 31 \times (15 \times 2) \times 29 \times 28}{(4 \times 2) \times (5 \times 3) \times 1} \\
&= 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201.376
\end{aligned}$$

**Exemplo 7.11.**

**Mega-Sena** No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de seis números, e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão.

1. Qual é o número total de jogos simples distintos?

   **Solução:**

   Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é

$$\begin{aligned}
\binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\
&= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\
&= 50.063.860
\end{aligned}$$

   Isso significa que a sua chance de acertar a sena é

$$\frac{1}{50.063.860} = 0,000000019974.$$

2. Em um cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R$ 1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?

   **Solução:**

   Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

   e, assim, o preço desse cartão é $1,50 \times 5005 = 7507,5$, e a probabilidade de se acertar a sena com um cartão desses é

$$\frac{5005}{50.063.860} = 0,00009997$$

**Exemplo 7.12.**

**Problema dos aniversários:** Em um grupo de 10 pessoas, qual é a probabilidade de que pelo menos dois façam aniversário no mesmo dia? Para simplificar, suponha que nenhuma dessas pessoas tenha nascido em ano bissexto.

**Solução:**

Note que, no caso de 10 pessoas, "pelo menos 2" significa ou 2, ou 3, ou 4, ..., ou 10. Então, podemos resolver essa versão mais simples do problema do aniversário usando a regra do complementar, ou seja, vamos calcular a probabilidade de todas as 10 pessoas fazerem aniversário em datas diferentes. Para isso, vamos usar a regra fundamental da multiplicação.

O aniversário de cada uma das 10 pessoas pode ser em um dos 365 dias do ano. Logo, o número total de possibilidades para as datas dos aniversários das 10 pessoas é $365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^{10}$ pelo princípio fundamental da multiplicação. Isso nos dá $\#\Omega$.

Consideremos, agora, o evento $A =$ "as 10 pessoas fazem aniversário em dias diferentes". Escolhida a primeira pessoa, ela pode fazer aniversário em qualquer dia; então, o número de possibilidades é 365. Para a segunda pessoa, como o aniversário tem que ser em data diferente, sobram 364 possibilidades. Para a terceira, sobram 363; continuando, para a décima pessoa, sobram $365 - 9 = 356$ possibilidades. Assim, obtemos

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 356}{365^{10}} = 0,88305$$

Logo, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia é

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = 0,11695$$

**Exercício 7.7.**

De um grupo de oito homens e cinco mulheres devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?

**Exercício 7.8.**

Três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule a probabilidade de que:

1. todas as três sejam de espadas;
2. as três cartas sejam do mesmo naipe;
3. as três cartas sejam de naipes diferentes.

**Exercício 7.9.**

Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios-de-campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios-de-campo, e 2 atacantes?

**Exercício 7.10.**

Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

**Exercício 7.11.**

Quantos são os anagramas da palavra SIMULTÂNEO

1. que começam por consoante e terminam por vogal?
2. que têm as letras S, I, M juntas nesta ordem?
3. que têm as letras S, I, M juntas em qualquer ordem?
4. que têm a letra S no primeiro lugar e a letra I no segundo lugar?
5. que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar?
6. que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar ou a letra M no terceiro lugar? *Sugestão*: Aqui você deve usar o resultado do exercício anterior.

## Resumo

Nesta aula, você estudou os seguintes conceitos básicos de Análise Combinatória:

- **Princípio Fundamental da Adição:** Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ e $\#A_i = n_i$. Então

$$\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} (\#A_i) = n_1 + \cdots + n_k$$

- **Princípio Fundamental da Multiplicação:** Se temos $k$ decisões $d_1, d_2, \ldots, d_k$ que podem ser tomadas de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões $d_1$ e $d_2$ e $\cdots$ e $d_k$ é

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

- **Permutação de $n$ elementos distintos:** Número de sequências (filas) que podemos formar com todos os elementos

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

- **Arranjos (ou permutações) de k objetos tomados dentre n objetos distintos:**

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

- **Combinações simples de k objetos tomados dentre n objetos distintos:**

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- No conceito de arranjo ou permutação, estamos lidando com sequências de $k$ elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com subconjuntos. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

## SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

**Exercício 7.1.**

Para a primeira posição, temos os três livros; escolhido o primeiro livro, sobram dois para a segunda posição. Finalmente, escolhidos os livros para as duas primeiras posições, sobra um livro para a última posição. Pelo princípio da multiplicação, o número total de escolhas é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

**Exercício 7.2.**

Para a primeira posição, temos os 5 algarismos; para a segunda, temos 4, já que os algarismos têm que ser diferentes. Continuando, para a terceira, temos 3; para a quarta, temos 2, e para a última resta apenas 1. Logo, existem

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

números com cinco algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 5, 7, 9.

Se os algarismos 1 e 3 têm que estar juntos, podemos pensar neles como um bloco, que deve ser colocado junto com os algarismos 5, 7, 9. Logo, para organizar esses 4 blocos, há

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

maneiras diferentes. Por sua vez, o bloco dos algarismos 1 e 3 pode ser organizado de 2 maneiras diferentes. Logo, o número total de possibilidades é

$$2 \times 24 = 48.$$

**Exercício 7.3.**

Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

1. Como há seis letras diferentes, o número de anagramas é $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.
2. Fixada a letra T na primeira posição, as outras cinco podem ser organizadas de $5! = 120$ maneiras diferentes.
3. Fixadas a primeira e a última letras, as outras quatro podem ser organizadas de $4! = 24$ maneiras.

4. Temos quatro vogais. Esse bloco pode ser organizado de $4! = 24$ maneiras. Para juntar esse bloco com as duas consoantes, há $3! = 6$ maneiras diferentes. Logo, o número total é $24 \times 6 = 144$.

**Exercício 7.4.**

Há um total de 10 pessoas. Logo, o número total de filas é $10! = 3.628.800$.

Se João e Maria estão juntos, podemos pensar neles como uma só pessoa. Então, há 9! maneiras de organizar a fila. Mas existem duas maneiras de organizar João e Maria. Logo, o número total de filas em que João e Maria estão juntos é $9! \times 2 = 725.760$.

Pela lei do complementar, o número de filas em que João e Maria estão separados é $3.628.800 - 725.760 = 2.903.040$.

**Exercício 7.5.**

Para abrir o cofre, ela tem que achar o arranjo correto dos três algarismos do segredo. O número total de possibilidades é $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

**Exercício 7.6.**

Os números pares com esses algarismos têm que terminar com 6 ou 8. Fixada a última posição (6 ou 8), sobram duas posições para serem preenchidas com os cinco algarismos restantes. Logo, o número total é $2 \times A_5^2 = 2 \times \frac{5!}{3!} = 40$.

**Exercício 7.7.**

O número total de comissões é $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = 560$, conforme visto no exemplo anterior à atividade. O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é $560 - 126 = 434$.

**Exercício 7.8.**

O número total de possibilidades para se extraírem três cartas sem reposição é $\#\Omega = \binom{52}{3}$.

1. Existem 13 cartas de espadas. Logo, há $\binom{13}{3}$ maneiras diferentes de se extraírem 3 cartas de espadas. Assim, se $E_3$ é o evento "3 cartas de espadas", temos que

$$\begin{aligned}\Pr(E_3) &= \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{13!}{3!10!} \times \frac{3!49!}{52!} \\ &= \frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50} \\ &= \frac{1.716}{132.600} = 0,01294\end{aligned}$$

2. O mesmo cálculo feito no item anterior vale para os 4 naipes.

   Sejam $E_3$, $C_3$, $P_3$, $O_3$ os eventos "três cartas de espadas", "três cartas de copas", "três cartas de paus" e "três cartas de ouro", respectivamente. Então,

$$\Pr(E_3) = \Pr(C_3) = \Pr(C_3) = \Pr(O_3).$$

   Logo, a probabilidade do evento $I_3 =$ "três cartas do mesmo naipe" é

$$\begin{aligned}\Pr(I_3) &= \Pr(E_3 \cup C_3 \cup P_3 \cup O_3) = \\ &= \Pr(E_3) + \Pr(C_3) + \Pr(C_3) + \Pr(O_3) \\ &= 4 \times \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = 4 \times 0,01294\end{aligned}$$

3. Note que o evento $D =$ "três cartas de naipes diferentes" não é o complementar de $I_3$, pois, por exemplo, a sequência $CCE$ pertence ao complementar de $I_3$, mas não pertence ao evento $D$.

Para calcular a probabilidade do evento $D$, note que, para a primeira carta, temos 52 possibilidades – qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos dois naipes anteriores; logo, sobram 26.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de possibilidades é $52 \times 39 \times 26$, e a probabilidade pedida é

$$\Pr(D) = \frac{52 \times 39 \times 26}{\binom{52}{3}}$$

**Exercício 7.9.**

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6.300$$

**Exercício 7.10.**

Cada jogador tem $n-1$ oponentes. Logo, existem $n(n-1)$ maneiras de selecionar dois participantes. Como a ordem dos dois selecionados não importa, o número total de partidas é $\frac{n(n-1)}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= 780 \Rightarrow n^2 - n - 1.560 = 0 \Rightarrow \\ n &= \frac{1 \pm \sqrt{1+6.240}}{2} \quad \Rightarrow \quad n = \begin{cases} 40 \\ -39 \end{cases} \end{aligned}$$

Como o número de participantes tem que ser positivo, a solução é $n = 40$ participantes.

**Exercício 7.11.**

Existem 10 letras nessa palavra, das quais cinco são vogais e cinco são consoantes.

1. Para a consoante da primeira posição, há cinco possibilidades e para a vogal da última posição há cinco possibilidades. Excluídas as duas escolhidas, sobram oito letras, que podem ser permutadas de $8!$ maneiras.

Logo, o número total de anagramas começando com consoante e terminando com vogal é $5 \times 5 \times 8! = 1.008.000$.

2. Podemos pensar no bloco SIM como uma letra, que deve ser permutada com as sete letras restantes. Então, há $8! = 40.320$ anagramas com as letras SIM juntas nesta ordem.

3. Existem $3!$ maneiras de organizar as letras SIM; logo, o número total de anagramas com as letras SIM juntas em qualquer ordem é $8! \times 3! = 241.920$.

4. Vamos denotar por $S_1$ o evento "letra S na primeira posição" e por $I_2$ o evento "letra I na segunda posição". O evento $S_1 \cap I_2$ corresponde aos anagramas que começam com as letras SI nessa ordem: há $8! = 40.320$ desses anagramas.

5. Note que nos dois eventos $S_1$ e $I_2$ estão incluídas todas as permutações que começam com SI. Tais permutações correspondem ao conjunto $S_1 \cap I_2$. Assim, ao somarmos as cardinalidades de $S_1$ e $I_2$ a interseção será contada duas vezes. O cálculo certo, então, é

$$\#(S_1 \cup I_2) = \#S_1 + \#I_2 - \#(S_1 \cap I_2)$$

O evento $S_1$ corresponde aos anagramas que começam com S e o evento $I_2$ aos anagramas com I na segunda posição. Então, $\#S_1 = \#I_2 = 9!$. Logo,

$$\begin{aligned} \#(S_1 \cup I_2) &= \#S_1 + \#I_2 - \#(S_1 \cap I_2) \\ &= 9! + 9! - 8! = 685.440 \end{aligned}$$

6. Continuando com a nossa notação, seja $M_3$ o evento "letra M na terceira posição". O problema pede $\#(S_1 \cup I_2 \cup M_3)$. Pelo exercício anterior,

$$\begin{aligned} & \#(S_1 \cup I_2 \cup M_3) \\ = \; & \#S_1 + \#I_2 + \#M_3 - \#(S_1 \cap I_2) - \#(S_1 \cap M_3) - \#(I_2 \cap M_3) + \#(S_1 \cap I_2 \cap M_3) \\ = \; & 9! + 9! + 9! - 8! - 8! - 8! + 7! \\ = \; & 3 \times 9! - 3 \times 8! + 7! \\ = \; & 1.088.640 - 120.960 + 5040 \\ = \; & 972.720 \end{aligned}$$