Programmation Linéaire
Dualité

CERI - Licence 2 Informatique

Exercice 1 : Nous reprenons le problème de production d'un marchand de sushi A partageant ses stocks avec un de ses concurrents B qui produit des makis. Rappelons nous que :

— x_1 représente le nombre de dizaines de sushis vendus par le marchand A ;
— x_2 représente le nombre de dizaines de makis vendus par le marchand B.

Les sushis sont vendus 15 euros la dizaine et les makis 20 euros la dizaine. Le marchand A souhaite maximiser son profit tout en minimisant celui de son concurrent qui lui fait de l'ombre.

Les deux marchands ont besoin de deux ingrédients pour préparer leur produit :
— du riz dont ils possèdent un stock de 20kg ;
— du saumon dont ils possèdent un stock supposé illimité mais dont 15kg périmera bientôt.

Ce problème est modélisé par le PPL suivant.

Problème 1

$$\begin{aligned} \max\ & 15x_1 - 20x_2 \\ \text{tel que}\ & \tfrac{15}{2}x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ & 3x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Coder ce modèle sur julia et le résoudre.
2. L'instruction utilisée pour la définition d'une contrainte en JuMp nous permet aussi de nommer la contrainte :

```
@constraint(m, con1, x + 3z == 50)
```

   Pour obtenir la valeur optimale de la variable duale associée à cette contrainte nous faisons :

```
dual(con1)
```

   Nommer chaque contrainte de votre modèle et obtenir la valeur de chaque variable dual associée à ce problème.
3. Comparer les valeurs obtenues par Julia avec celles obtenues avec la résolution graphique (TD de la Séance 10).

Exercice 2 : Description du problème extrait de https ://www.lirmm.fr/ bessy/PL/ExosPL.pdf

Une manufacture de piles désire ajouter deux nouveaux produits à son catalogue : la Everlast III et la Xeros dry-cell. La Everlast III contient 2g de Cadmium et 4g de Nickel, alors que la Xeros nécessite 3g de Nickel et 4g de Zinc en poudre. La quantité totale de Cadmium disponible sur le marché est de une tonne, celle de Nickel est de trois tonnes. Le Zinc est en quantité illimitée et sa pulvérisation une formalité. La production de 1000 Everlast III demande 2 heures sur une Presse Glunt II et celle de 1000 Xeros dry-cells demande 3 heures. La presse est disponible 2400 heures cette année. La compagnie escompte un bénéfice net de 1000 euros par millier d'Everlast et de 1200 euros par millier de Xeros et désire maximiser le gain de l'année.

1. Traduire ce problème par un programme linéaire. Coder votre modèle en Julia et le résoudre.
2. Interprétation économique de la dualité :
   Imaginons les deux situations suivantes :
   — *Situation 1 :* Une autre entreprise possède une presse Glunt II et nous pouvons la louer au prix de 280 euros de l'heure. Est-ce intéressant pour notre manufacture de piles ? Le cas échéant, combien d'heures supplémentaires au maximum peut-on louer la presse ?
   — *Situation 2 :* Une autre manufacture a besoin de louer une presse Glunt II. Elle contact notre manufacture de piles pour savoir si nous pouvons louer notre presse Glunt II au prix de 320 de l'heure. Est-ce intéressant pour notre manufacture de piles ? Le cas échéant, combien d'heures au maximum peut-on mettre la presse à disposition ?

Exercice 3 : Dans trois mines M_1, M_2 et M_3, les extractions journalières des minerais doivent être au minimum de 70t pour M_1 et au maximum de 500t et 300t, respectivement, pour M_2 et M_3 (t signifie tonne).

La production journalière est d'abord stockée dans un local abrité dont la contenance est de $9000m^3$. Les volumes spécifiques des trois catégories de minerais extraits des trois mines sont $9m^3/t$ pour M_1, $10m^3/t$ pour M_2 et $11m^3/t$ pour M_3.

Le lendemain, les minerais sont lavés. La laverie peut laver 80 tonnes à l'heure quand elle traite le minerai extrait de la mine M_1, 90 tonnes à l'heure quand elle traite le minerai extrait de la mine M_2 et 100 tonnes à l'heure quand elle traite le minerai extrait de la mine M_3. La laverie est opérationnelle 10 heures par jour.

Enfin les profits unitaires des trois catégories de minerais extraits des trois mines sont $4um/t$ pour M_1, $5um/t$ pour M_2 et $6um/t$ pour M_3 (um/t signifie unité monétaire par tonne).

Le problème consiste à déterminer la gestion optimale des mines, c'est à dire, l'extraction optimale de chaque minerai.

1. Traduire ce problème par un programme linéaire. Coder votre modèle en Julia et le résoudre.
2. Obtenir les valeurs des variables duales de ce problème à l'optimum.
3. Quelles informations peuvent être déduites de la valeur des variables duales de ce problème à l'optimum ?