第一次编程作业

无 36　　李思涵　　2013011187　　lisihan969@gmail.com

2015 年 10 月 13 日

目录

1 题目

某信道，输入为 M 元逻辑符号 $x : s_0, s_1, \cdots, s_{M-1}$，输出 y 为实数值。信道中发生如下事件：

- $a = f(x)$ 到实数的一一映射，当 $x = s_i$ 时，$a = iA$，A 为一给定的正实数
- $y = a + n$，n 为一服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布的独立随机变量（与 x 独立，且每次信道实现时的 n 均独立）

1. 写出信道转移概率 $p(y \mid x = s_i)$
2. 若输入信道的各符号等概出现，求该信道的互信息量
3. 画出不同信噪比下的互信息量变化的曲线，以 M 为参数，画一簇曲线（其中加上一条 AWGN 信道容量曲线作对比）
4. 调整函数 $a = f(x)$，使当 $x = s_i$ 时，$a = iA$-b ，b 也为一实常数，在 A 和 σ 不变的情况下，互信息量随 b 的变化情况是什么趋势?
5. b 的取值对互信息量随信噪比的变化曲线的影响?

2 理论推导

2.1 信道转移概率

记噪声 n 的概率密度函数为 $f(n)$，则易知

$$f(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

当 $x = s_i$ 时，$a = iA$，故 $y = a + n$ 的条件概率密度函数为

$$p(y \mid x = s_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-iA)^2}{2\sigma^2}}$$

2.2 信道的互信息量

对于 $f(n)$，其熵为

$$H(N) = \log 2\sigma\sqrt{2\pi e}\ (\mathrm{bit})$$

而 y 的概率密度函数为

$$p(y) = \sum_{i=0}^{M-1} P(X = s_i)p(y \mid x = s_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-iA)^2}{2\sigma^2}}$$

故平均互信息量为

$$I(X,Y) = H(Y) - H(N) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\log_2 p(y)dy - \log_2 \sigma\sqrt{2\pi e}\ (\mathrm{bit})$$

2.3 互信息量与信噪比的关系

噪声功率 N 满足

$$N = \sigma^2$$

信号功率 S 则满足

$$S = \sum_{i=0}^{M-1} p(x = s_i)(iA - b)^2 = \frac{A^2(M-1)(2M-1) - 6Ab(m-1) + 6b^2}{6}$$

即可得到 σ 与信噪比的关系

$$\sigma = \sqrt{\frac{A^2(M-1)(2M-1) - 6Ab(m-1) + 6b^2}{6\frac{S}{N}}}$$

将 σ 带入互信息量的表达式，即可以得到互信息量与信噪比的关系。

2.4 最大互信息量

由香农公式，我们自然有

$$I_{\max}(X,Y) = \frac{1}{2}\log_2(1 + \frac{S}{N})$$

3 数值模拟

我们在 Mathematica 10.1.0.0 中进行数值模拟。

3.1 不同信噪比下的互信息量变化

假设 A 为 1。代码如下：

```
g[snr_, m_] :=
  Hold@Module[{\[Sigma] = Sqrt[((m - 1) (2 m - 1))/(6 snr)], p},
    p = 1/
      m Sum[1/(\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi]])
         E^(-((y - i)^2/(2 \[Sigma]^2))), {i, 0, m - 1}];
    -NIntegrate[ p Log2[p], {y, -Infinity, Infinity}] -
     Log2[\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi] E]]
    ];
Plot[
 Evaluate@With[{snr = 10^(snrdb/10)},
   Append[Table[g[snr, m], {m, 2, 10, 2}],
    1/2 Log2[1 + snr]
    ]],
 {snrdb, 0, 30}, PlotPoints -> 10,
 PlotLegends ->
  Append[Table["M=" <> ToString[m], {m, 2, 10, 2}], "AWGN"],
 AxesLabel -> {"SNR(dB)", "I(X,Y)"}
 ]
```

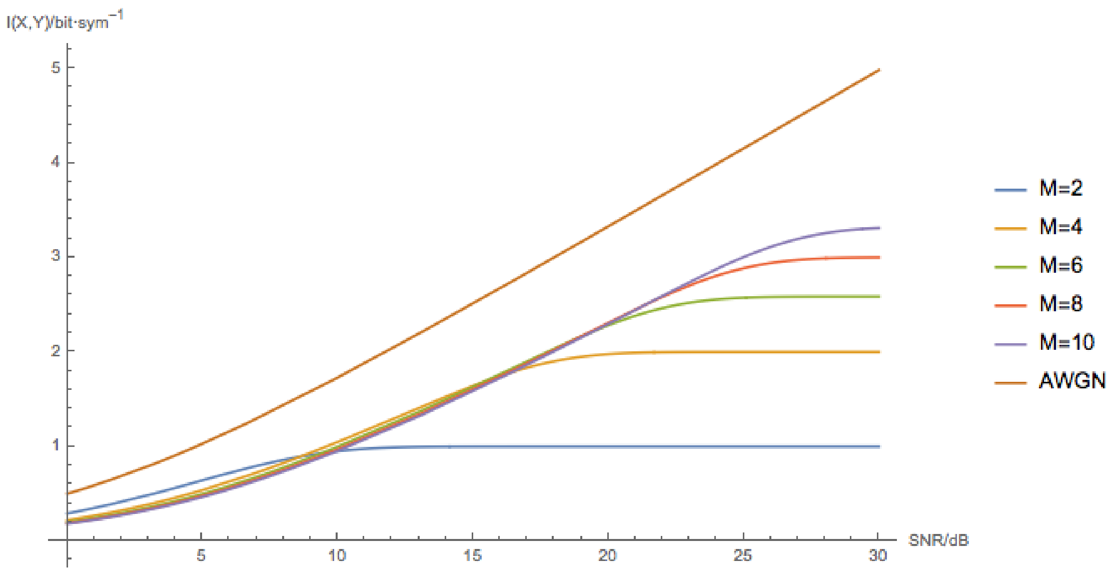

图 1: 互信息量与信噪比的关系

从图中，我们可以看出以下规律：

- 当 M 取定时，互信息量随着信噪比的增大而增大，但最终会达到一极限值。

  这是因为，在信噪比较大的时候，真正限制互信息量的是信道的容量，也就是 M 的大小。

- 互信息量的极限值随着 M 的增大而增大。

  这是因为当信噪比趋向于无穷大时，信道的容量便成了互信息量的主要限制因素。实际上，这一极限就是信道能传递的信息极限 $\log_2 M$。

- 无论 M 和信噪比如何取值，互信息量总与 AWGN 信号的互信息量有一定差距（在信噪比趋向无穷时趋向于 1）。

  这是因为，在这种编码方式下，输入信号非负，在信噪比趋向于无穷时，有一半的信道时空闲的。所以，同样信噪比下其能传递的信息便少了一半，也就是 1 比特。

- 在信噪比较小时，互信息量与 M 负相关；信噪比较大时，互信息量与 M 正相关。

  可以这样考虑：在信噪比较大时，信道容量的增加能够传递更多的信息。然而，在信噪比很小时，过大的 M 反而会增大各符号之间的干扰，使接收方无法分辨各符号，从而减少互信息量。

3.2 互信息量随 b 的变化

假设 A, σ 都为 1。代码如下：

```
f[m_, b_] := Hold@Module[{\[Sigma] = 1, p},
    p = 1/
      m Sum[1/(\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi]])
         E^(-((y - i + b)^2/(2 \[Sigma]^2))), {i, 0, m - 1}];
    -NIntegrate[ p Log2[p], {y, -Infinity, Infinity}] -
     Log2[\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi] E]]
    ];
Plot[
 Evaluate@Table[f[m, b], {m, 2, 10, 2}],
 {b, -2, 2}, PlotPoints -> 6,
 PlotLegends -> Table["M=" <> ToString[m], {m, 2, 10, 2}],
 AxesLabel -> {"b", "I(X,Y)"}
 ]
```

可以看到，互信息量完全不受 b 的影响。这一点实际上很显然。因为在 M 给定的情况下，b 的作用只是使输入符号整体平移，并没有改变它们的相对位置，所以不会给接收方带来任何信息上的变化。故不回改变互信息量。

3.3 b 的取值对互信息量随信噪比的变化曲线的影响

假设 A 为 1，M 为 5。代码如下：

```
h[snr_, b_] := Hold@Module[{m = 5, \[Sigma], p},
    \[Sigma] = Sqrt[((m - 1) (2 m - 1) - 6 b (m - 1) + 6 b^2)/(6 snr)];
```

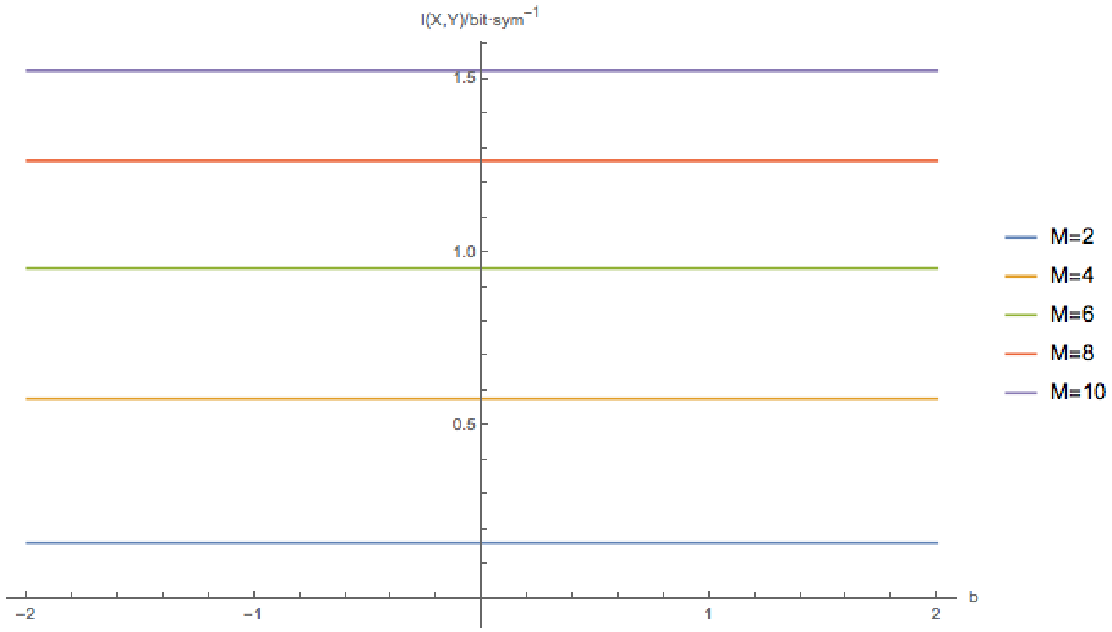

图 2: 互信息量与 b 的关系

```
    p = 1/
      m Sum[1/(\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi]])
         E^(-((y - i + b)^2/(2 \[Sigma]^2))), {i, 0, m - 1}];
    -NIntegrate[ p Log2[p], {y, -Infinity, Infinity}] -
     Log2[\[Sigma] Sqrt[2 \[Pi] E]]
    ];
Plot[
 Evaluate@With[{snr = 10^(snrdb/10)},
   Append[Table[h[snr, b], {b, -2, 2, 1}],
    1/2 Log2[1 + snr]
    ]],
 {snrdb, 0, 30}, PlotPoints -> 4,
 PlotLegends ->
  Append[Table["b=" <> ToString[b], {b, -2, 2, 1}], "AWGN"],
 AxesLabel -> {"SNR(dB)", "I(X,Y)"}
 ]
```

可以发现以下规律:

- b 对信噪比趋于无穷时的渐近线没有影响，不同 b 的取值只造成了图像的左右平移。

  正如我们前面所分析的，该渐近线是带宽有限的缘故，与 b 没有关系。实际上，b 改变的只有信号的功率，也就是互信息量不变情况下的信噪比。故函数图像之发生了左右平移。

- b 取 $\frac{m-1}{2}$ 时，互信息量达到最大，AWGN 对应的曲线成为其渐近线。

  这一点也很好解释，因为当 b 如此取值时，输入符号在零点两侧均匀分布，能量最低，

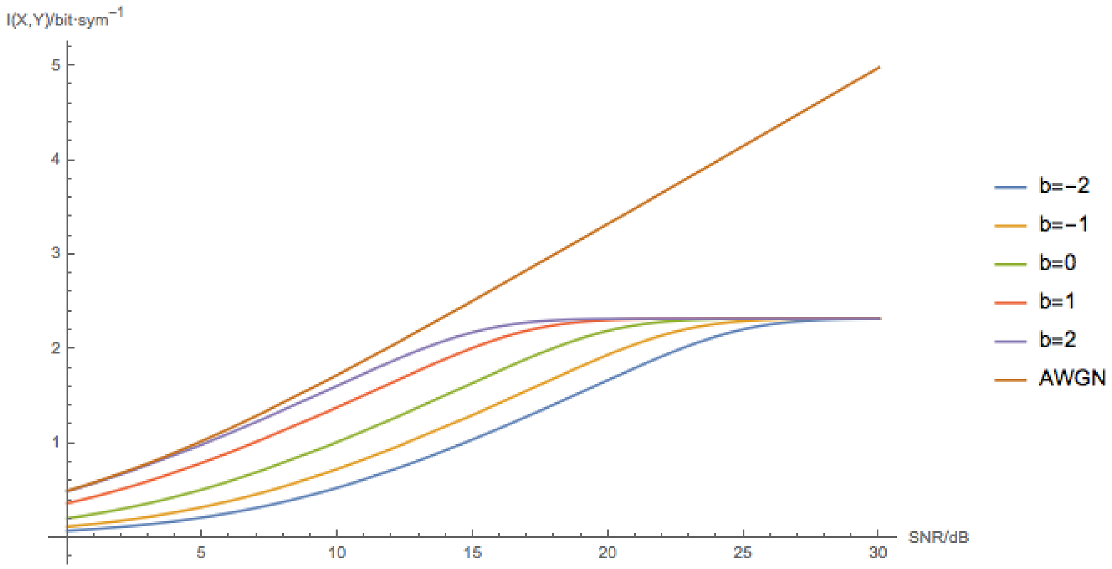

图 3: b 的取值对互信息量随信噪比的变化曲线的影响

故相同信噪比下的互信息量最大。同时，当 M 趋向于无穷大时，该信号实际上就是 AWGN，故以其为渐近线并不奇怪。

4 参考资料

1. DGrady. All curves in plot have the same style. Cannot be fixed with Evaluate[] [OL]. Mathematica Stack Exchange, 2012.
2. Wolfram Research. Wolfram 语言与系统 [OL]. Wolfram Research, 2015.
3. 曹志刚, 钱亚生. 现代通信原理 [M]. 清华大学出版社有限公司, 1992.