2013

1. X1，X2 为两个独立的随机变量，分别服从 Exp(lambda1),Exp(lambda2),求 E(X1|X1<X2)

$$\mathrm{E}(\mathrm{X1}|\mathrm{X1}<\mathrm{X2})=\int_0^\infty p(x_1|X1<X2)x_1dx_1=\int_0^\infty\frac{\int_{x_1}^\infty p(x_1,x_2)dx_2}{P(X1<X2)}x_1dx_1$$

$$=\frac{\int_0^\infty\int_{x_1}^\infty x1p(x_1,x_2)dx_2dx_1}{\int_0^\infty\int_{x_1}^\infty p(x_1,x_2)dx_2dx_1}=\frac{\int_0^\infty\int_{x_1}^\infty x_1\lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2}dx2dx1}{\int_0^\infty\int_{x_1}^\infty\lambda_1\lambda_2e^{-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2}dx_2dx_1}=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2. 抛一枚均匀的硬币 n+m 次，至少出现一次正面，问第一次正面出现在第 n 次的概率

$$\mathrm{P}(\text{第 n 次第一次出现正面}|\text{至少出现一次正面})$$

$$=\frac{P(\text{第 n 次第一次出现正面且至少出现一次正面})}{P(\text{至少出现一次正面})}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}}$$

$$=\frac{2^m}{2^{n+m}-1}$$

3. 从编号为 1~n 的卡片任抽一张，记为 k,再从编号为 1~k 的卡片中任抽一张，记第二次抽出的卡片编号为 X。求 E(X)

设第一次抽取卡片编号为 Y

$$\mathrm{E(X)}=\mathrm{E}\big(\mathrm{E(X|Y)}\big)=\mathrm{E}\left(\frac{1+Y}{2}\right)=\frac{1+E(Y)}{2}=\frac{1+\frac{1+n}{2}}{2}=\frac{n+3}{4}$$

4. X1~Xn+1 为 n+1 个独立同分布的随机变量，其中 P(Xi = 1) = p，P(Xi = 0) = 1 – p; Yi = if (Xi + X(i+1) = odd) {1} else {0} 求 sum(I = 1~n) Yi 的方差

$$\mathrm{E}(Y_i)=2p(1-p)$$

$$\mathrm{E}(Y_iY_j)=\begin{cases}2p(1-p)\ (i=j)\\ P(Y_i=1\cap Y_j=1)=p^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)\ (|i-j|=j)\\ E(Y_i)E(Y_j)=4p^2(1-p)^2\ (|i-j|>1)\end{cases}$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^nY_i\right)=E\left(\left(\sum_{i=1}^nY_i\right)^2\right)-\left(E\left(\sum_{i=1}^nY_i\right)\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^nE\left({Y_i}^2\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(Y_iY_j)-\left(\sum_{i=1}^nE(Y_i)\right)^2$$

$$=n\times2p(1-p)+2\sum_{i=1}^{n-1}E(Y_iY_{i+1})+2\times\left(\binom{n}{2}-(n-1)\right)$$

$$\times4p^2(1-p)^2-\big(n\times2p(1-p)\big)^2$$

$$=2p(1-p)[2n-1-(6n+4)p(1-p)]$$

5. X,Y 独立且都满足 N(0,1)，求 E((X-3Y)^2|2X+Y = 3)

$$E((X-3Y)^2|2X+Y=3)=\frac{\int_{2X+Y=3}(x-3y)^2p(x,y)dl}{\int_{2X+Y=3}p(x,y)dl}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}[(1+t)-3(1-2t)]^2p(1+t,1-2t)\sqrt{1^2+(-2)^2}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}p(1+t,1-2t)\sqrt{1^2+(-2)^2}dt}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(7t-2)^2e^{-\frac{(1+t)^2+(1-2t)^2}{2}}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(1+t)^2+(1-2t)^2}{2}}dt}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(7t-2)^2e^{-\frac{5t^2-2t+2}{2}}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{5t^2-2t+2}{2}}dt}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(7x-\frac{3}{5})^2e^{-\frac{5x^2}{2}}dx}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{5x^2}{2}}dx}=\frac{254}{25}$$

6. 司机在一年发生事故的次数满足参数为 lambda 的泊松分布，而 lambda 满足 miu 的指数分布 ，问某一司机上一年不发生事故，今年也不发生事故的概率

 设一年内发生事故次数为随机变量 X，则有

$$P(X=k)=\int_0^{\infty}P(X=k|\lambda=x)p_\lambda(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x^ke^{-x}}{k!}\times\mu e^{-\mu x}dx=\frac{\mu}{k!}\int_0^{\infty}x^ke^{-(\mu+1)x}dx$$

$$=\frac{\mu}{k!}\times\frac{\Gamma(k+1)}{(1+\mu)^{k+1}}=\frac{\mu}{(1+\mu)^{k+1}}$$

 则司机连续两年不发生事故的概率为(两年发生事故相互独立)

$$P=\left(\frac{\mu}{(1+\mu)^1}\right)^2=\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2$$

7. 有 n 枚硬币，他们正面朝上的概率分别为 p_1,p_2,⋯⋯,p_n。比较下面两种情况第一次出现正面抛掷次数的期望。1）任选一枚连续抛掷 2）每次抛掷后重新选择硬币

 设第一次出现正面时抛掷次数为随机变量 X，第一次选择硬币标号为 Y

 1) 任选一枚连续抛掷：

$$E(X)=E(E(X|Y))=\sum_{i=1}^{n}E(X|Y=i)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$$

 2) 每次抛掷后重新选择：

$$E(X|Y=i)=1\times p_i+(1-p_i)\sum_{k\neq i}\left(1+E(X|Y=k)\right)\frac{1}{n-1}$$

$$=1+\frac{1-p_i}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}E(X|Y=k)-E(X|Y=i)\right)$$

 从而有

$$E(X|Y=i)=\frac{n-1}{n-p_i}+\frac{1-p_i}{n-p_i}\sum_{k=1}^{n}E(X|Y=k)$$

 则对 i 再求和，最终可得

$$\sum_{k=1}^{n}E(X|Y=k)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n-p_i}}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1-p_i}{n-p_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n-p_i}}{1-\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{(n-1)}{n-p_i}\right)}$$

$$=\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}{(1-n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n-p_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}-1}$$

因而

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})\big)=\sum_{i=1}^{n}E(X|Y=i)\frac{1}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}{n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}-1\right)}$$

下面证明第二种抛法抛出正面所用次数较少，即第二个期望小于第一个：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}{n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}-1\right)}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}-1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}\ge\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}}\le 1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}-1\right)$$

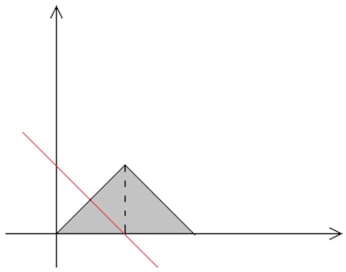
$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{n-p_i}\right)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{p_i(n-p_i)}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-p_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$$

$$\Leftrightarrow n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i$$

其中$a_i=\frac{1}{n-p_i}$与$b_i=\frac{1}{p_i}$大小排序刚好相反，因此左边为 n 个反序和，右边展开后可分为 n 组乱序和，由排序不等式即证

8. 联合分布的密度函数为 f(x,y) = if(0<=y<x&&x+y<2){Cexp{-(x+y)};}else{0;} 求 C 与 P(X+Y>=1)



$$1=\iint f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_y^{2-y}ce^{-(x+y)}dxdy=c\int_0^1e^{-y}(e^{-y}-e^{y-2})dy=\frac{1-3e^{-2}}{2}c$$

从而$c=\frac{2e^2}{e^2-3}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}\ge 1)=1-\int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}ce^{-(x+y)}dxdy=1-\frac{2e^2}{e^2-3}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-y}(e^{-y}-e^{y-1})dy$$

$$=\frac{2e-3}{e^2-3}$$

9. f(x,y) = if(x/in R&&y>0){yexp{-y(x^2/2+1)}/(sqrt{2pi/y});}else{0;} 求 Var(X)

在 y 固定时 x 分布为均值为 0 方差为 1/y 的正态分布；y 的边缘分布为Γ(2,1)分布

$$\mathrm{E(X)} = \mathrm{E}\big(\mathrm{E(X|Y)}\big) = \mathrm{E(0)} = 0$$

$$\mathrm{Var(X)} = E(X^2) - E(X)^2 = E\big(E(X^2|Y)\big) = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \times ye^{-y}dy = 1$$

10. 公交站起点站等可能发出 a,b 两班汽车，其中 a 停 m 站，b 停 n 站，车上人数服从参数为 lambda 的泊松分布，每名乘客在各站下车的概率相同，如果该站没有乘客下车，则公交车不停站。求一辆从起点站开出的公交车停站的期望与方差。

车上人数为 k，站数为 n 固定时设公交车停站数为随机变量 N，Xi 表示第 i 站是否有人下车(有人下车则为 1，无人下车则为 0，服从 p=1-(1-1/n)^k 的两点分布)

$$\mathrm{E(N)} = \mathrm{E}\left(\sum Xi\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

$$\mathrm{E}(N^2) = \sum E(Xi^2) + 2\sum\nolimits_{1\le i<\mathrm{j}\le\mathrm{n}} E(XiXj)$$

$$= n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) + 2\binom{n}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right)$$

$$= n^2 - (2n^2 - n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + (n^2 - n)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$$

站数为 n 固定时公交车停站数为 N，车上人数 K 服从泊松分布，从而

$$\mathrm{E(N)} = \mathrm{E}\big(\mathrm{E(N|K)}\big) = \mathrm{E}\left(n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= n - n\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n\left(1 - e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda}e^{-\lambda}\right) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$$

$$\mathrm{E}(N^2) = E\big(E(N^2|K)\big) = E\left(n^2 - (2n^2 - n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + (n^2 - n)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right)$$

$$= n^2 - (2n^2 - n)\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$+ (n^2 - n)\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n^2 - (2n^2 - n)e^{-\frac{\lambda}{n}} + (n^2 - n)e^{-\frac{2\lambda}{n}}$$

考虑到发车不同最终结果为：

$$\mathrm{E(N)} = \frac{1}{2}\left(n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) + m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)\right)$$

$$Var(N) = E(N^2) - E(N)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(n^2 - (2n^2 - n)e^{-\frac{\lambda}{n}} + (n^2 - n)e^{-\frac{2\lambda}{n}}\right)\right.$$

$$\left. + \left(m^2 - (2m^2 - m)e^{-\frac{\lambda}{m}} + (m^2 - m)e^{-\frac{2\lambda}{m}}\right)\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) + m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)\right)^2$$

2012

1. 已知 t^2+U*t+V=0 的两个根独立同分布，～U(-1,1)，求 p_U(u)和 p_V(v)

设两根为 t1,t2

$$p_U(u) = p_{t_1+t_2}(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1}(t)p_{t_2}(-u - t)dt = \frac{1}{4}(2 - |u|)(-2 \le u \le 2)$$

$$p_U(u)=p_{t_1t_2}(v)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{t_1}(t)p_{t_2}(v/t)\frac{dt}{|t|}=-\frac{\ln|v|}{2}(-1\le v\le 1)$$

2. 已知 V、X_1、X_2、...相互独立，V 满足参数为 λ 的泊松分布与各 X_i 独立，X_i（i=1,2,...）的特征函数为 f(t)，求 Y=X_1+X_2+...+X_V 的特征函数。

   V 分布函数的母函数(对离散型随机变量而言)为

$$\mathrm{G}_V(\mathrm{z})=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}P(V=k)z^k=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}z^k=e^{\lambda(z-1)}$$

   Y 的特征函数为

$$f_Y(t)=E\left(e^{iyt}\right)=E\left(E\left(e^{iyt}\middle|V\right)\right)=E\left(E\left(e^{it\sum_{k=1}^{v}x_k}\middle|V\right)\right)=E\left(E\left(e^{itx}\middle|V\right)^v\right)=E\left(f(t)^v\right)$$

$$=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}P(V=k)f(t)^k=G_V\left(f(\mathrm{t})\right)=e^{\lambda(f(t)-1)}$$

3. 教授办公，每天来到办公室的时间为 9AM 到 1PM 的均匀分布，来到办公室后工作时间为 0~4 小时的均匀分布，办公结束后就离开。同时，其一位学生会在 9AM 到 5PM 的均匀分布的时间拜访教授，如果当时教授不在就会立即离开，如果教授在，两人就会进行一场长度为 0~2 小时均匀分布的讨论，讨论结束后教授会立即离开，不管工作有没有做完。求教授离开办公室的平均时间。

   设教授到达办公室时间为 A，工作时间为 B，学生到达时间为 C，讨论时间为 D，教授离开时间为 F；

   若学生没见到教授，则有 F=A+B；

$$\mathrm{E}(\mathrm{F}\,|\mathrm{C}<\mathrm{A}\cup\mathrm{C}>\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{E}(\mathrm{A}+\mathrm{B}|\mathrm{C}<\mathrm{A}\cup\mathrm{C}>\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$=\frac{\iiint_{9<C<A,9<A<13,0<B<4}(a+b)p(a,b,c)dV+\iiint_{A+B<C<17,9<A<13,0<B<4}(a+b)p(a,b,c)dV}{\iiint_{9<C<A或\mathrm{A+B<C<17},9<A<13,0<B<4}p(a,b,c)dV}$$

$$=\frac{\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_9^a\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}(a+b)dc+\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_{a+b}^{17}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}(a+b)dc}{\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_9^a\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}dc+\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_{a+b}^{17}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}dc}=\frac{\frac{41}{12}+\frac{37}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=12\frac{7}{9}$$

   若学生见到了教授，则有 F=C+D(讨论时间与 A、B、C 均独立，条件期望与期望相等)；

$$\mathrm{E}(\mathrm{F}|\mathrm{A}+\mathrm{B}<\mathrm{C}<\mathrm{A})=\mathrm{E}(\mathrm{C}|\mathrm{A}<\mathrm{C}<\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{E}(\mathrm{D})$$

$$=\frac{\iiint_{A<C<A+B,9<A<13,0<B<4}cp(a,b,c)dV}{\iiint_{A<C<A+B,9<A<13,0<B<4}p(a,b,c)dV}+1$$

$$=\frac{\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_a^{a+b}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}cdc}{\int_9^{13}da\int_0^4 db\int_a^{a+b}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}dc}+1=\frac{\frac{37}{12}}{\frac{1}{4}}=12\frac{1}{3}$$

   从而离开时间的期望为

$$\mathrm{E}(\mathrm{F})=\frac{3}{4}\times 12\frac{7}{9}+\frac{1}{4}\times 12\frac{1}{3}=12\frac{2}{3}$$

   教授离开平均时间 12 点 40

4. r 个人互相抛一个球，每一次某一个人会将手上的球等可能地抛给剩下 r-1 个人中的任意一个。最开始球在甲手上，请问经过 n 次抛球后，求 P(球没有再次回到过甲手上)和 P(没有任意一个人得到过两次或更多次球)。

$$\mathrm{P}\left(\text{球没有再次回到甲手上}\right)=\frac{(r-1)(r-2)^{n-1}}{(r-1)^n}=\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{n-1}$$

$$\mathrm{P}\left(\text{没有任意一个人得到过两次或更多次球}\right)=\begin{cases}\dfrac{(r-1)(r-2)\ldots(r-n)}{(r-1)^n}(n<r)\\ 0(n\ge r)\end{cases}$$

5. 抛一枚不均匀的硬币，其正面朝上的概率为 p，连续两次正面或连续两次反面就结束。求从开始到结束的抛的次数的期望。

   设第一次抛掷结果为随机变量 X(正面为 1，反面为 0)，抛掷次数为随机变量 N

$$\mathrm{E(N|X=1)}=2\times p+\left(1+E(N|X=0)\right)\times(1-p)$$
$$\mathrm{E(N|X=0)}=2\times(1-p)+\left(1+E(N|X=1)\right)\times p$$

   以上解得

$$\begin{cases}E(N|X=1)=\dfrac{p^2-2p+3}{p^2-p+1}\\ E(N|X=0)=\dfrac{p^2+2}{p^2-p+1}\end{cases}$$

   从而

$$\mathrm{E(N)}=pE(N|X=1)+(1-p)E(N|X=0)=\frac{3}{p^2-p+1}-1$$

6. p(x,y)=if(0<=y<x<=1){axy(1-y)}else{0}，请计算出常数 a 的值，并计算 P(x>0.5|y<0.5)

$$1=\iint p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x axy(1-y)dydx=\frac{7a}{120}$$

   则 a = 120 / 7；

$$\mathrm{P(X>0.5|Y<0.5)}=\frac{P(X>0.5,Y<0.5)}{P(Y<0.5)}=\frac{\int_0^{0.5}dy\int_{0.5}^1\frac{120}{7}xy(1-y)dx}{\int_0^{0.5}dy\int_y^1\frac{120}{7}xy(1-y)dx}=\frac{15/28}{71/112}$$
$$=\frac{60}{71}$$

7. 取一截长度为 1 的木棒，等可能地任取一个点砍成 2 截，取较长的一截；再将这一截等可能地任取一个点，砍成两截，求这之中任一截的长度的方差。

   第二次为任意取一段，则第二次截取时两段长度分布相同，因此可固定取某一段计算方差即可；

   设第一次截断点坐标为 X，第一次取出较长长度为 L，第二次截断点坐标距左端为 Y，并没次始终取左边一段；

   则 X 服从 U(0,1)，在 L 固定条件下，Y 的条件分布即为 U(0,L)；

   先求 L 的期望及二阶矩：

$$\mathrm{E(L)}=\mathrm{E}\left(E(L|X)\right)=\int_0^{1/2}(1-x)\times 1dx+\int_{1/2}^1 x\times 1dx=\frac{3}{4}$$
$$\mathrm{E}(L^2)=E\left(E(L^2|X)\right)=\int_0^{1/2}(1-x)^2\times 1dx+\int_{1/2}^1 x^2\times 1dx=\frac{7}{12}$$

   求 Y 的期望及方差：

$$\mathrm{E(Y)}=\mathrm{E}\left(\mathrm{E(Y|L)}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{L}}{2}\right)=\frac{1}{2}E(L)=\frac{3}{8}$$
$$\mathrm{E}(Y^2)=E\left(E(Y^2|L)\right)=E\left(\frac{L^2}{3}\right)=\frac{1}{3}E(L^2)=\frac{7}{36}$$
$$\mathrm{Var(Y)}=\mathrm{E}(Y^2)-E(Y)^2=\frac{31}{576}$$

2011

1. 网球比赛共有 $2n$ 个选手参加，共打 n 轮，决出最终的冠军。假定赛前抽签是完全随机的，且当任意两个选手相遇时，双方有相同的取胜概率。A、B 两位选手参加了比赛，计算这两名选手在头两轮相遇的概率。

$$\mathrm{P}(\text{A、B 在第一轮相遇})=\frac{1}{2n-1}$$

$$\mathrm{P}(\text{A、B 在第二轮相遇})=\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{4n-2}$$

$$\mathrm{P}(\text{A、B 在头两轮相遇})=\frac{3}{4n-2}$$

2. A 和 B 掷同一个均匀硬币，假定 A 掷了 n+1 次，B 掷了 n 次，计算 A 掷出的正面比 B 多的概率。

A 掷出的正面比 B 多的概率与 A 掷出的反面比 B 多的概率相等，而且二者不交(否则 A 掷的次数至少比 B 多 2)且并集为全集(否则 A 掷的次数不超过 B 掷的次数)，则概率为 1/2 (推导原理：设 A 掷出正面数为 X，B 掷出正面数为 Y

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}>\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=i-1}^{0}\binom{n+1}{i}\binom{n}{n-j}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n+1}^{1}\sum_{j=n+1-i}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n+1}{n+1-i}\binom{n}{j}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{0}\binom{n}{j}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{n+1}\binom{n}{j}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}2^{n+1}2^{n}=\frac{1}{2}$$

即证)

3. 某系统包括 A、B、C、D 和 E 共 5 个子系统，系统会在两种情况之一下失效：或者 A 子系统失效，或者其他四个子系统中有至少两个失效。假定各个子系统的失效相互独立，且失效的概率均为 p。计算在已知系统失效的条件下，A 子系统失效的概率。

$$\mathrm{P}(\text{A 失效}|\text{系统失效})=\frac{P(A\text{失效且系统失效})}{P(\text{系统失效})}=\frac{p}{p+(1-p)\sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}p^{k}(1-p)^{4-k}}$$

$$=\frac{1}{-3p^4+11p^3-14p^2+6p+1}$$

4. 假设某种产品分两类，一类是好的，无论如何测试都不会出问题；一类是有缺陷的，

测试时出问题的概率为 p。如果随机抽取，抽中好产品的概率为 r。现抽出一个产品，连续测试三次，都没有出问题，计算在第四次测试出问题的概率。

$$\mathrm{P}(\text{第四次测试有问题}|\text{测试三次没问题}) = \frac{P(\text{测试前三次没问题，第四次有问题})}{P(\text{测试三次没问题})}$$

$$= \frac{P(\text{抽到坏产品且前三次测试没问题，第四次有问题})}{P(\text{抽到好产品}) + P(\text{抽到坏产品且前三次测试没问题})}$$

$$= \frac{(1-r)(1-p)^3 p}{r + (1-r)(1-p)^3}$$

5. 设 X 和 Y 为独立的非负随机变量，满足 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$，且 $\mathrm{E}(XY) = C$，C 为确定性常数，试给出 $\mathrm{Var}(XY)$的取值范围。

设 E(X)=a，E(Y)=b，则由于 X，Y 独立有 E(XY) = E(X)E(Y) = ab = C

$$\mathrm{Var(XY)} = \mathrm{E}((XY)^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - C^2$$
$$= (Var(X) + E(X)^2)(Var(Y) + E(Y)^2) - C^2 = (1 + a^2)(1 + b^2) - C^2$$
$$= 1 + a^2 + b^2 = 1 + (a-b)^2 + 2C$$

显然由于 a > 0；b > 0 则有 Var(XY)⩾0

6. 同时掷两个均匀色子，重复投掷，直到两个色子至少有一个为 6 点时停止。设停止时两个色子的点数之和为 Y，从开始到停止所用的投掷次数为 N，计算 $\mathrm{E}(Y/N)$。

每次出现至少一个 6 点的概率为 P = 1 – (5/6)^2 = 11/36，则 N 服从参数为 P 的几何分布；Y 的分布即为点数和在至少出现一个 6 的条件下的条件分布，

$$\mathrm{P(Y=k)} = \begin{cases} \dfrac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{2}{11}(k = 7,8,910,11) \\ \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{11/36} = \dfrac{1}{11}(k = 12) \end{cases}$$

可计算

$$\mathrm{E(Y)} = \frac{1}{11}\times 12 + \frac{2}{11}\sum\nolimits_{k=7}^{11} 1 = \frac{102}{11}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} = -\frac{p}{1-p}\ln\big(1-(1-p)\big) = \frac{pln(p)}{p-1} = \frac{11}{25}\ln\left(\frac{36}{11}\right)$$

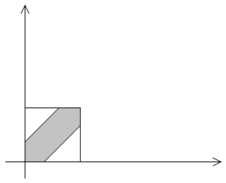
显然 Y 与 N 相互独立(最后一次结果与实验次数无关)，从而

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{N}}\right) = \mathrm{E(Y)E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \frac{102}{25}\ln\left(\frac{36}{11}\right)$$

7. A 和 B 两个人准备约会，假定两人到达约会地点的时间服从 12:00 到 13:00 之间的均匀分布，且任意一人到达约会地点后，如果另一人未到，则等待 s 分钟后离开。计算使得约会成功概率不小于 0.5 的 s 的最小值。

设 A 到达时间为 X p.m. B 到达时间为 Y p.m.

$$\mathrm{P}(\text{约会成功}) = \mathrm{P(Y - s \le X \le Y + s)} = 1 - 2\times\frac{(1-s)^2}{2} \ge 0.5$$



解得$s \geq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. A 和 B 两个通信站间存在两条并行的通信链路。两条链路的通信延迟相互独立，且都服从 0 到 1 分钟的均匀分布。假定信息通过两条链路同时传输，且从一条链路收到算作“收到”，两条链路都收到算作“完好”。请计算从“收到”到“完好”的时间间隔的分布函数。

   设两条通信链路的延时分别为随机变量 X、Y，其中较小值 A 为收到时间，较大值 B 为完好时间，有 A，B 联合分布函数为

$$\mathrm{F}(\mathrm{A} \leq \mathrm{x}, \mathrm{B} \leq \mathrm{y}) = \begin{cases} (x>y, 1 \geq y) P(X \leq y, Y \leq y)=P(X \leq y) P(Y \leq y)=y^{2} \\ (x \leq y \leq 1) P(B \leq y)-P(A>x)=P(X \leq y) P(Y \leq y)-P(x<X \leq y) P(x<Y \leq y)=y^{2}-(y-x)^{2} \end{cases}$$

   可得 A，B 的联合概率密度为

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y})=\frac{\partial F}{\partial x \partial y}=2\ (0 \leq x \leq y \leq 1)$$

   则时间间隔即 B-A 的分布函数为

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A}<\mathrm{x})=\int_{0}^{1-x} \int_{a}^{a+x} 2 d b d a+\int_{1-x}^{1} \int_{a}^{1} 2 d b d a=2 x-x^{2}(0<x<1)$$

   全实轴上值为

$$F(x)=\begin{cases} 0(x \leq 0) \\ 2 x-x^{2}(0<x \leq 1) \\ 1(x>1) \end{cases}$$

9. A 到银行存钱，假定银行内排队的顾客人数从 0 个到 2 个不等，且每种情况出现的概率相同，如果每个顾客的服务时间服从参数为 l 的指数分布，请计算 A 在银行内等待时间的分布函数。

   设银行内排队顾客数为随机变量 N 服从 0,1,2 的等概率分布，第 1,2 位等待时间分别为随机变量 X1，X2 均服从参数为 1 的指数分布

   则有等待时间 T

$$\mathrm{E}(\mathrm{T})=\mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{T} | \mathrm{N}))=\frac{1}{3}(E(T | N=0)+E(T | N=1)+E(T | N=2))$$

$$=\frac{1}{3}(0+E(X 1)+E(X 1+X 2))=\frac{1}{3}(0+1+(1+1))=1$$

10. 设随机变量 X 服从正态分布，X~N(0;σ^2)，计算 cos(X)的均值。

   随机变量 X 的特征函数为

$$f(t)=E\left(e^{i t x}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i t x} d x=\int_{-\infty}^{\infty} \cos (t x) p(x) d x+i \int_{-\infty}^{\infty} \sin (t x) p(x) d x$$

   由于 X 服从正态分布，可得

$$f(t)=e^{-\frac{\sigma^{2} t^{2}}{2}}$$

   从而

$$\mathrm{E}(\cos (X))=\int_{-\infty}^{\infty} \cos (x) p(x) d x=Re(f(1))=e^{-\frac{\sigma^{2}}{2}}$$