Solution to Exercise 1

For all EE18ers(Available after March 10, 2013)

韩衍隽

March 7, 2013

Chapter 1

热身

1.若两组点数相同需要两个色子的有序对均相同，则概率为

$$\frac{6^2}{6^6}=\frac{1}{6^4}$$

若两组点数相同只需要两个色子的无序对相同即可，则概率为

$$\frac{1}{6^6}(6+2\binom{6}{2}\times 2^2)=\frac{7}{2\cdot 6^4}$$

2.前者相当于20个可区分的小球放入5个可区分的盒子中，其概率为

$$\frac{5!S(20,5)}{5^{20}}=\frac{1}{5^{20}}\sum_{k=1}^{5}(-1)^{5-k}\binom{5}{k}k^{20}=\frac{5^{20}-5\cdot 4^{20}+10\cdot 3^{20}-10\cdot 2^{20}+5}{5^{20}}$$

而后者的概率直接计算可得

$$\frac{5}{5^{20}}=\frac{1}{5^{19}}$$

3.可以将4个人的牌按顺序全部摊开相连而将样本空间认为是52张牌的所有排列构成的集合，则所求概率为

$$\frac{4!\cdot 13^4\cdot 48!}{52!}=\frac{13^4}{\binom{52}{4}}$$

4.样本空间的元素个数显然为6^6，而可将待求事件按不同的数字数分类，故概率为

$$\frac{1}{6^6}(\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\binom{2}{1}\binom{6}{4\quad 2}+\binom{6}{3}\binom{6}{2\quad 2\quad 2})=\frac{47}{972}$$

5.将结论一般化至有n个球m个盒子的情形。若小球可区分，则样本空间元素个数为m^n。由于所有盒子都非空的事件元素数为$f(n,m)=m!S(n,m)$，故恰有$k(1\le k\le m)$个空盒子的事件元素数为

$$\binom{m}{k}f(n,m-k)=\binom{m}{k}(m-k)!S(n,m-k)$$

因此前一问中所求概率为

$$\frac{\binom{n}{1}(n-1)!S(n,n-1)}{n^n}=\frac{(n-1)!S(n,n-1)}{n^{n-1}}$$

若小球不可区分，则恰有k个空盒子的事件元素个数对应于不定方程

$$\sum_{j=1}^{m}x_j=n$$

中恰有k个$x_j(1\le j\le m)$为0的非负整数解的个数，显然其数目为

$$\binom{m}{k}\binom{n-1}{m-k-1}$$

故后一问中所求概率为

$$\frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1-1}}{\binom{2n-1}{n}}=\frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}$$

[注：前一问的结果可以被进一步简化。事实上，首先有

$$S(n,k)=0(n<k),S(n,1)=1(n>0)$$

其次，由其定义易知$S(n,k)$的下列递推公式成立（分集合$\{n\}$是否在划分中两种情况讨论）：

$$S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)$$

在上述递推公式中取$k=n$可知$S(n,n)=S(n-1,n-1)=\cdots=S(1,1)=1$，再取$k=n-1$可知

$$S(n,n-1)=n-1+S(n-1,n-2)=S(2,1)+\sum_{j=2}^{n-1}j=\binom{n}{2}$$

故前一问的结果可被简化为

$$\frac{(n-1)!(n-1)}{2n^{n-2}}$$]

Chapter 2

问题

1.注意0不能在首位，故所有可能的取法的个数为

$$\binom{9}{1}\binom{9}{4}4! = 27216$$

现在计算被495整除的各位都不相同的数的个数。而$495 = 5 \times 99$，故末位数必然为0或5。设万位与千位构成的两位数为a，百位与十位构成的两位数为b，末位数码为c，则原五位数为$1000a + 10b + c$。

若c=0，则该数被99整除的充要条件为$99|a + b$，故$a + b = 99$，为保证各位数码不同，这样的数的个数为

$$8 \times 6 = 48$$

若c=5，则该数被99整除的充要条件为$a + b \equiv 49 \pmod{99}$，即$a + b = 49$或148。这样的数的个数为

$$2 \times 4 + 2 \times 4 = 16$$

故所求概率为

$$\frac{48 + 16}{27216} = \frac{4}{1701}$$

2.不妨设所有的人与球均可区分，则易知所求概率为

$$\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$$

事实上，若球不可区分，则待求事件中的元素数为1，样本空间的元素个数对应于不定方程

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n(x_k \in \{0, 1, 2\}, 1 \leq k \leq n)$$

的解，其个数为(注意为0的个数与为2的个数相等)

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$$

故概率为

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}$$

两者结果通常不等，其中前者是对的，道理与D'Alembert出错的原因相似。

3.由热身部分第5题的结论即知其概率为

$$\frac{\binom{n}{s}f(r,n-s)}{n^r}=\frac{n!S(r,n-s)}{s!n^r}$$

4.样本空间中的元素对应于不定方程组

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{m}x_k=n_1\\ \sum_{k=1}^{m}y_k=n_2\end{cases}\quad (x_k,y_k\geq 0,1\leq k\leq m)$$

的解$(x_k,y_k)(1\leq k\leq m)$的个数，其值为

$$\binom{m+n_1-1}{n_1}\binom{m+n_2-1}{n_2}$$

而满足无空盒这一事件的元素对应于同一不定方程中满足$x_k+y_k>0(1\leq k\leq m)$的解。若用集合$A_k(k=1,2,\ldots,m)$表示满足第k个盒子为空的放法个数，则易知对于$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m$有

$$|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=\binom{m+n_1-1-k}{n_1}\binom{m+n_2-1-k}{n_2}$$

故由容斥原理可知

$$\begin{aligned}|\bigcap_{k=1}^{m}A_k^c|&=\binom{m+n_1-1}{n_1}\binom{m+n_2-1}{n_2}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}(-1)^k|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}|\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+n_1-1-k}{n_1}\binom{m+n_2-1-k}{n_2}\end{aligned}$$

所求概率即为

$$\frac{1}{\binom{m+n_1-1}{n_1}\binom{m+n_2-1}{n_2}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+n_1-1-k}{n_1}\binom{m+n_2-1-k}{n_2}$$

其中定义当$n<m$时$\binom{n}{m}=0$。

5.容易验证一个结论，即$\binom{n}{r}$中含素数p的幂等于r与$n-r$在p进制下做加法时的进位个数，因此在本题中

$$12|\binom{n}{7}\Leftrightarrow n-7\not\equiv 0,4,8\pmod{16}\&n-7\not\equiv 0,1\pmod 9)$$

故由数论中的中国剩余定理可知所求概率为

$$\frac{13 \cdot 7}{16 \cdot 9} = \frac{91}{144}$$

Chapter 3

挑战

1.这可以化简成一个非古典概型：对于某个含有n个0与n个1的0−1序列(序列中的两个数分别表示火柴的两盒),设从后往前数第一个与最后一位不同的数在第$2n-r(1\le r\le n)$位，则由情境的假设应赋其概率为$\frac{1}{2^{2n-r}}$，因此所求概率为

$$\frac{1}{2^{2n-r}}(2\cdot\binom{2n-r-1}{n-1})=\frac{\binom{2n-r-1}{n-1}}{2^{2n-r-1}}$$

[注：本题亦可以用递推方式得到，递推式为

$$\begin{aligned}
p(n,m,r)&=\frac{1}{2}(p(n-1,m,r)+p(n,m-1,r))(n,m>1,1\le r\le\max\{n,m\})\\
p(1,m,r)&=p(m,1,r)=\frac{\binom{m-r}{m-1}+1}{2^{m+1-r}}\\
\Rightarrow p(n,m,r)&=\frac{\binom{n+m-1-r}{n-1}+\binom{n+m-1-r}{m-1}}{2^{n+m-r}}
\end{aligned}$$

结论一样。]

2.考虑在$1,2,\ldots,N$中选取两个正整数使其最大公约数为k的概率，则这两个数都需要是k的倍数，故其概率为

$$\frac{s_{[\frac{n}{k}]}}{k^2}$$

而由全概率为1可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{[\frac{n}{k}]}}{k^2}=1$$

故取$n\to\infty$可知其极限s满足

$$s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1\Rightarrow s=\frac{6}{\pi^2}$$

[注1：题中采用的是极限叙述，这是因为采用以下叙述是有问题的：求任取两个正整数它们互质的概率。事实上，这是因为，在可数集上无法定义“均匀分布”（注意

两个正整数组成的数对是可数的）。假设对于可数集$\{s_1, s_2, ...\}$中定义了一个均匀分布$P\{s_k\} = q, k \geq 1$，则由概率的全一性与可数可加性有

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P\{s_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} q$$

无论q是否为零均会得到矛盾。]

[注2：证明过程中取极限一步事实上是极不严格的，它忽略了极限的存在性的证明，等等。可以构造一个严格证明如下：

记全体素数构成的集合为$\{2 = p_1 < p_2 < \ldots\}$，为计算$s_N$，用集合$\{A_k\}$表示$p_k| \gcd(m, n$的数对$(m, n)(1 \leq m, n \leq N)$的个数，则显见

$$|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}| = \lfloor \frac{N}{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}} \rfloor^2 (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N)$$

由容斥原理可知所求概率为(其中$p_u \leq N < p_{u+1}$)

$$\begin{aligned} s_N &= \frac{1}{N^2} | \bigcap_{p_k \leq N} A_k^c | \\ &= \frac{1}{N^2} [N^2 + \sum_{k=1}^{u} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq u} | \bigcap_{j=1}^{k} A_{j_k} | \\ &= \frac{1}{N^2} [N^2 + \sum_{k=1}^{u} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq u} \lfloor \frac{N}{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}} \rfloor^2] \end{aligned}$$

由于对于$1 \leq s \leq N$，有

$$0 \geq \lfloor \frac{N}{s} \rfloor^2 - \frac{N^2}{s^2} \geq \ (\frac{N}{s} - 1)^2 - \frac{N^2}{s^2} = 1 - \frac{2N}{s} \Rightarrow | \lfloor \frac{N}{s} \rfloor^2 - \frac{N^2}{s^2} | < \frac{2N}{s}$$

故代入上式即有(借助整数的唯一分解可知s不会产生重复)

$$|s_N - \prod_{p_k \leq N} (1 - \frac{1}{p_k^2})| \leq \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^{N} \frac{2N}{s} \leq \frac{2(1 + \ln N)}{N}$$

因此

$$\lim_{N \to \infty} s_N = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k^2}) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

结论一样。]

3.不妨设圆上的$2N$个位置均已编号，则样本空间中的元素个数为$2(N!)^2$。用$A_k(k = 1, 2, ...N)$ 表示编号为k的夫妻相邻的事件，并取$i_1, i_2, \ldots, i_k$ 是互不相同的k个编号，现在考虑$|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}|$。

若$k = N$，则易知其结果为$4 \cdot N!$。若$1 \leq k < N$，则可考虑以下过程：首先，固定一个编号不在$i_1, i_2, \ldots, i_k$中的丈夫，其位置的选择方法有$2N$种，由此男女座位的奇偶性便

得以确定，不失一般性可设其为1；接下来安排k对相邻的夫妻，设他们的位置编号的较小值分别为$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$，则这些数需要满足的条件是

$$a_1 > 1, a_s - a_{s-1} > 1(2 \le s \le k), a_k < 2N$$

故方法数对应于不定方程

$$\sum_{s=2}^{k}(a_s - a_{s-1} - 1) + (2N - a_k) + (a_1 - 1) = 2N - k$$

的正整数解，其个数为

$$\binom{2N-k-1}{k}$$

故再安排这些夫妻的内部位置及其他人的位置即可得到

$$|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}| = 2N \cdot \binom{2N-k-1}{k} k!(n-k)!(n-k-1)!$$

由容斥原理有

$$\begin{aligned}|\bigcap_{k=1}^{N} A_k^c| &= 2(N!)^2 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le N} |\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}| \\ &= 2(N!)^2 + \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k \binom{N}{k} 2N \cdot \binom{2N-k-1}{k} k!(n-k)!(n-k-1)! + (-1)^N 4 \cdot N \\ &= 4N! \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{N}{2N-k}\binom{2N-k}{k}(N-k)!\end{aligned}$$

故所求概率即为

$$\frac{2}{(N-1)!}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{2N-k}{k}\frac{(N-k)!}{2N-k}$$

4.从圆上任意取定一个点，认为随机取点代表被取的点与给定的点所对的圆心角服从$[0, 2\pi)$上的均匀分布（首先需要对题干随机作一种确定的假设，否则会像Bertrand悖论那样有不同的理解方式与计算结果；当然，也可以做出其它的假设）。不妨设三个圆心角分别为$x_1 \le x_2 \le x_3$，则记$y_1 = x_2 - x_1, y_2 = x_3 - x_2, y_3 = 2\pi + x_1 - x_3$，则$y_i \ge 0(i = 1, 2, 3), \sum_{i=1}^{3} y_i = 2\pi$。而锐角三角形的要求需要保证

$$y_i < \pi(i = 1, 2, 3) \Leftrightarrow y_i < y_{i+1 \bmod 3} + y_{i+2 \bmod 3}(i = 1, 2, 3)$$

故这等价于将一定长度的线段随机分为三段且这三段组成一个三角形，由例1.8可知结果为$\frac{1}{4}$。

5.直接递推，设其概率为$p(n, m)$，则对最后一个人的类型进行讨论，可知递推式为

$$\begin{aligned}p(n, m) &= \frac{n}{n+m}p(n-1, m) + \frac{m}{n+m}p(n, m-1) \\ p(n, 0) &= 1(n > 0), p(n, m) = 0(n < m)\end{aligned}$$

而后对n进行归纳即可知

$$p(n,m) = \begin{cases} 1 - \frac{m}{n+1} & n \geq m, \\ 0 & n < m. \end{cases}$$

[注：同样可以利用Catalan数直接进行计算。样本空间中的元素个数为

$$\binom{n+m}{n}$$

而借助反射原理可知待求事件中的元素个数为

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1} = (1 - \frac{m}{n+1})\binom{n+m}{n}$$

计算结果一样。]

Solution to Exercise 2

For all EE18ers(Available after March 17, 2013)

韩衍隽

March 9, 2013

Chapter 1

热身

1.不妨取样本空间为$\Omega=\{0,1\},\mathcal{B}=2^{\Omega}$。取$\mathbb{P}(\emptyset)=0$。

仅满足规范性与非负性的例子：$\mathbb{P}\{0\}=\mathbb{P}\{1\}=0,\mathbb{P}(\Omega)=1$

仅满足规范性与可数可加性的例子：$\mathbb{P}\{0\}=2,\mathbb{P}\{1\}=-1,\mathbb{P}(\Omega)=1$

仅满足非负性与可数可加性的例子：$\mathbb{P}\{0\}=\mathbb{P}\{1\}=1,\mathbb{P}(\Omega)=2$

2.显见$\mathbb{P}(\emptyset)=0$且可数可加性成立，由规范性要求知$1=\mathbb{P}(\Omega)=\alpha\mathbb{P}_1(\Omega)+\beta\mathbb{P}_2(\Omega)=\alpha+\beta$。而让其满足非负性的一个充分条件自然是$0\le\alpha\le 1$，但这个条件并不一定是必要的。

3.用A,B分别表示喜欢阅读小说、散文的同学所构成的集合，则由题设有

$$\mathbb{P}(A)=0.3,\mathbb{P}(B)=0.4,\mathbb{P}(A\bigcap B)=0.1$$

由容斥原理即知

$$\mathbb{P}(A^c\bigcap B^c)=1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\bigcap B)=0.4$$

4.

$$1\ge\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)=1-\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k^c)\ge 1-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k^c)=1\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)=1$$

5.样本空间由所有满足以下条件的元素ω构成，其中$\omega=\omega_1\omega_2\ldots$，每个$\omega_k$均为一盒扑克牌中的若干不重复元素所构成的排列，满足4张A均在该排列中且排列中的最后一个为A。

事实上，对同一实验的实验结果的理解可以有不同的方式，例如若认为ω_k为一盒扑克牌的全体的排列，也是合理的（此时上面定义的“实验结果”可认为是定义在此Ω上的随机变量）。

Chapter 2

问题

1.方法一：用A_n表示被n整除的自然数集合，则对于两两不同的正整数$i_j(j=1,2,\ldots,k)$ $\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j})=\frac{1}{lcm(i_1,i_2,\ldots,i_k)}$，用容斥原理计算$\mathbb{P}(A_2\bigcap A_5\bigcap A_3^c\bigcap A_4^c\bigcap A_6^c)$即可。

方法二：题设要求的自然数n需要满足的同余方程是$\begin{cases} n\equiv 1,2 \pmod 3\\ n\equiv 2 \pmod 4\\ n\equiv 0 \pmod 5\end{cases}$，故由中国剩余定理即知所求概率为$\frac{2\cdot 1\cdot 1}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{30}$

2.由概率测度的非负性、单调性及$\mathbb{P}(A\bigcap B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\bigcup B)\geq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1$即知所求范围为

$$\max\{0,\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1\}\leq \mathbb{P}(A\bigcap B)\leq \min\{\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)\}$$

3.样本空间为所有可能的取手套结果，则形成一个古典概型，且样本空间里元素个数为$(n!)^2$。用$A_k(1\leq k\leq n)$表示第k个人拿对手套的所有试验结果构成的集合，则对于$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$有

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j})=\left(\frac{(n-k)!}{n!}\right)^2$$

故由容斥原理知

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k^c)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{(n-k)!}{n!}\right)^2=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!}$$

4.由题设知$\Delta\in\mathcal{F}$，因此由于$\Delta\subset\Delta\in\mathcal{F}$可知$\mathbb{P}(\Delta)=1$，因此$\mathbb{P}^*(\Omega)=\mathbb{P}(\Delta)=1$，规范性成立。又因非负性显然成立，故只用证明可数可加性即可，但这由

$$A_k(k\geq 1)\text{互不相交且}A=\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Rightarrow A_k\bigcap\Delta(k\geq 1)\text{互不相交且}A\bigcap\Delta=\bigcup_{k=1}^\infty(A_k\bigcap\Delta)$$

即可得证。故$\mathbb{P}^*$是个概率，而样本空间与σ-代数仍取$(\Omega, \mathcal{F})$即可。

5.用$I_A(x)$表示示性函数$\begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$，则对于$\forall x \in \Omega$有

$$I_{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}(x) = \prod_{k=1}^{n} I_{A_k}(x) \geq \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}(x) - (n-1)$$

两边取期望便得结论。

(注：用$\mathbb{P}(A \bigcap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$及归纳法同样可得结论。)

Chapter 3

挑战

1.构造概率空间$(\Omega=\mathbb{N}_+,\mathcal{F},\mathbb{P}_n)$，其中$\mathcal{F}=2^\Omega$，而对于$A\subset\Omega$，定义$\mathbb{P}_n(A)=\frac{|A\bigcap X_n|}{n}$，其中$X_n=\{1,2,\ldots,n\}$。易知这样定义的$\mathbb{P}_n$是个概率，因此可定义所谓“任取一个正整数在$A$中的概率”为

$$\mathbb{P}(A)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_n(A)\text{若右式极限存在}$$

如此定义对多数情况而言符合直观上的结果，如取出模m余k的自然数的概率为$\frac{1}{m}$。

[**注1**：如此定义出的$\mathbb{P}$并不是一个概率，这是因为$\mathbb{P}(\Omega)=1\neq 0=\sum_{k=1}^\infty\mathbb{P}\{k\}$。]

[**注2**：如此定义出的$\mathbb{P}$并不是定义在$\mathcal{F}=2^\Omega$上的，例如取集合$A=\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{k=1}^{2^{2n-1}}\{2^{2n-1}+k\}$，则$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_n(A)$不存在。]

[**注3**：通过给每个样本点赋不同的值$q_k\geq 0(k\geq 1)$满足$\sum_{k=1}^\infty q_k=1$ 亦可以构造一个定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度，但这往往不能满足直观上感觉到的取出模m余k的自然数概率为$\frac{1}{m}$的性质。]

2.本题题干意义不清，下将其理解成求在一次试验中红桃A是在四张A中被第二个抽出来的概率。可设样本空间Ω由所有可能的一盒扑克牌的全排列构成（此时将实际抽出的结果认作随机变量，正如热身部分第5题所述），易知Ω有限。设随机变量X表示红桃A被抽出的序数，并记$A_k=\{\omega\in\Omega:X(\omega)=k\}(k=1,2,3,4)$，则$A_k(k=1,2,3,4)$ 是样本空间Ω的一个划分。又由于通过调换红桃A与其它A位置的方式可构造$A_k(1\leq k\leq 4)$间的双射，因此$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|$，即所求概率为

$$\mathbb{P}\{X=2\}=\frac{|A_2|}{|\Omega|}=\frac{1}{4}$$

3.显然样本空间的元素个数为2^n。将n次投掷中连续出现正面向上的情况进行分段，先考虑满足题设条件且有$s>0$段的情况。用$A_i(1\leq i\leq s)$表示第i段的长度不小于k的所有试验结果构成的集合，则对于$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_j\leq s$，$|\bigcap_{l=1}^j A_{i_l}|$的值对应于以下不

定方程中正整数解的个数(其中$a_u, b_u (1 \leq u \leq s)$分别表示每一段的起始与终止位置)：

$$\begin{aligned} &a_1 + \sum_{u=1}^{s}(b_u - a_u + r_u) + \sum_{u=1}^{s-1}(a_{u+1} - b_u - 1) + (n + 1 - b_s) \\ =&n + 2 - j(k-1) (r_u = \begin{cases} 2-k, & u \in \{i_1, \dots, i_j\} \\ 1, & \text{其它} \end{cases}) \end{aligned}$$

显然其值为

$$\binom{n+1-j(k-1)}{2s} (n < m\text{时定义}\binom{n}{m} = 0, \text{下同})$$

因此由容斥原理有

$$|\bigcup_{i=1}^{s} A_i| = \sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\binom{s}{j}\binom{n+1-j(k-1)}{2s}$$

故待求事件中的元素个数只需对s求和即可：

$$\begin{aligned} S :=& \sum_{s=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\binom{s}{j}\binom{n+1-j(k-1)}{2s}\right] \\ =& \sum_{j=1}^{n}\left[(-1)^{j-1}\sum_{s=j}^{\lfloor\frac{n+1-j(k-1)}{2}\rfloor}\binom{n+1-j(k-1)}{2s}\binom{s}{j}\right] \end{aligned}$$

下计算

$$f(m,n) = \sum_{s=n}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\binom{m}{2s}\binom{s}{n} = \frac{m}{2n}\sum_{s=n}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\binom{m-1}{2s-1}\binom{s-1}{n-1} (m \geq 2n)$$

用两种方法考虑$g(x) = \frac{(1+x)^{m-n-1}}{(1-x)^n} (0 < x < 1)$展开式中$x^{m-2n}$的系数。

首先，由

$$g(x) = \left[\sum_{i=0}^{m-n-1}\binom{m-n-1}{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}x^j\right]$$

可知其系数为

$$\sum_{j=0}^{m-2n}\binom{m-n-1}{m-2n-j}\binom{n+j-1}{n-1} = \sum_{j=0}^{m-2n}\binom{m-n-1}{n-1}\binom{m-2n}{j} = 2^{m-2n}\binom{m-n-1}{n-1}$$

其次，又有

$$g(x) = \frac{(1+x)^{m-1}}{(1-x^2)^n} = \left[\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n-1}x^{2j}\right]$$

故对应项系数为

$$\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-2n}{2}\rfloor}\binom{n+j-1}{n-1}\binom{m-1}{m-2n-2j}=\sum_{s=n}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\binom{s-1}{n-1}\binom{m-1}{2s-1}(s=n+j)$$

两者计算结果应相等，故

$$f(m,n)=2^{m-2n-1}\frac{m}{n}\binom{m-n-1}{n-1}$$

代入S的表达式中可知

$$S=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}2^{n-j(k+1)}\frac{n+1-j(k-1)}{j}\binom{n-jk}{j-1}$$

故所求概率为

$$p=\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}(-1)^{j-1}\frac{n+1-j(k-1)}{j2^{j(k+1)}}\binom{n-jk}{j-1}$$

4.仍然采用示性函数，则只须证对于$\forall x\in\Omega,r\in\{1,2,\dots,n\}$

$$I_{\bigcup_{k=1}^{n}B_k}(x)\leq\sum_{k=1}^{n}I_{B_k}(x)-\sum_{k\neq r}I_{B_k\bigcap B_r}(x)$$

对于某一固定的x，记$s=|\{u:x\in B_u\}|$。若$s=0$，则上式左右两边均为0，不等式成立。若$s>0$，则上式化为

$$\begin{aligned}&1\leq s-(s-1)I_{B_r}(x)\\ \Leftrightarrow&(s-1)(1-I_{B_r}(x))\geq 0\end{aligned}$$

这是显然的。证毕。

5.由题设知$\mathcal{F}=\{A:A\subset\Omega,A\text{或}A^c\text{可数}\}$，故由定义显见$\emptyset\in\mathcal{F}$，且若$A\in\mathcal{F}$，则$A^c\in\mathcal{F}$。现设$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{F}$中的一列元素，分两种情况讨论：

情形一：假设所有的$A_k(k\geq 1)$均可数，则由可数多个可数集之并仍然可数知$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$可数，故$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{F}$。

情形二：假设存在A_r满足A_r^c可数，则$(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k^c\subset A_r^c$是一个可数集的子集，它显然是至多可数的。

因此我们证明了$\mathcal{F}$是σ-代数，在其上定义非负集函数$\mathbb{P}(\cdot)$如下：

$$\mathbb{P}(A)=\begin{cases}0, & A\text{是可数的}\\ 1, & A^c\text{是可数的}\end{cases}(A\in\mathcal{F})$$

显然$\mathbb{P}(\Omega)=1$。为证$\mathbb{P}(\cdot)$是一个概率，只须验证其可数可加性即可。设$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathcal{F}$中的一列不交元素，若它们均可数，则其可数并亦可数，故在上面定义下概率均为0；

若存在一个集合，不妨设为A_r，是不可数的，那么对于$\forall s \neq r$，若A_s亦不可数，由$A_r \bigcap A_s = \emptyset$知$\mathbb{R} = A_r^c \bigcup A_s^c$是两个可数集的并进而是可数的，矛盾！因此除$A_r$外其余集合均可数，因此此时仍有

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

成立。综上，可数可加性得证，故$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega, \mathcal{F})$上的概率。

Solution to Exercise 3

For all EE18ers(Available after March 25, 2013)

韩衍隽

March 21, 2013

Chapter 1

热身

1.若X是随机变量，则由$\{\omega : |X(\omega)| < c\} = \{\omega : X(\omega) < c\} \bigcap \{\omega : X(\omega) > -c\} \in \mathcal{F}$可知$|X|$也是随机变量。反过来，取$\Omega = \{-1, 1\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}, X(\omega) = \omega(\omega \in \Omega)$，则$|X|$是随机变量但$X$不是，故逆命题不成立。

2.

$$\begin{aligned}
&\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} \\
=&\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\{\omega : X(\omega) < Y(\omega) + \frac{1}{n}\} \bigcap \{\omega : X(\omega) > Y(\omega) - \frac{1}{n}\}\right] \\
=&\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}}\left[\left(\{\omega : X(\omega) < r\} \bigcap \{\omega : Y(\omega) > r - \frac{1}{n}\}\right) \bigcap \left(\{\omega : Y(\omega) < s\} \bigcap \{\omega : X(\omega) > s\right.\right. \\
\in&\mathcal{F}
\end{aligned}$$

3.逐条验证它们是从0到1的单调递增右连续函数即可知$\lambda F + (1-\lambda)G, FG$均是分布函数。

4.验证非负性与全积分为1即可知$\lambda f + (1-\lambda)g$是密度函数。但若取密度函数$f = I_{[0,1]}, g = I_{[2,3]}$，则其乘积$fg = 0$不是密度函数，故后者不一定成立。

5.

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} ce^{-x}dx = \frac{c}{e} \Rightarrow c = e$$

Chapter 2

问题

1.若$a>0$，则Y的分布函数为

$$F_Y(x)=\mathbb{P}(Y\le x)=\mathbb{P}(aX+b\le x)=\mathbb{P}(X\le \frac{x-b}{a})=F_X(\frac{x-b}{a})$$

类似可知当$a<0$时其分布函数为$F_Y(x)=1-F_X[(\frac{x-b}{a})^-]$，$a=0$时其分布函数为$F_Y(x)=U(x-b)$。

2.记$g(x)=x+(1-x)\ln(1-x)(0\le x<1)$，则由$g'(x)=-\ln(1-x)>0, g(0)=0, \lim_{x\to 1^-}g(x)=1$即可知该函数为从0到1的单调递减右连续函数，故其为分布函数。

3.由于X是随机变量，故$Y=aI_{\{X\le a\}}+bI_{\{X\ge b\}}+XI_{\{a<X<b\}}$是随机变量进行四则运算的结果，故仍为随机变量。而由定义显然有Y的分布函数为

$$F_Y(x)=\mathbb{P}(Y\le x)=\begin{cases}0, & x<a\\ F_X(x), & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

4.

$$\mathbb{P}(X\le 2Y)=\mathbb{P}(X\le 2X^2)=\mathbb{P}(X\ge \frac{1}{2}\text{或}X\le 0)=F_X(0)+1-F_X[(\frac{1}{2})^-]=0+1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

5.记$\mu=\inf\{c:\mathbb{P}(X\le c)\ge \frac{1}{2}\}$，则由概率的连续性可知$\mu\ne\pm\infty$。此时即有

$$\mathbb{P}(X\le\mu)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X\le \mu+\frac{1}{n})\ge\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X\ge\mu)=1-\mathbb{P}(X<\mu)=1-\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X\le \mu-\frac{1}{n})\ge\frac{1}{2}$$

因此中值存在。若取$\Omega=\{0,1\},\mathcal{F}=2^\Omega,X(\omega)=\omega(\omega\in\Omega),\mathbb{P}\{0\}=\mathbb{P}\{1\}=\frac{1}{2}$，则对于$\forall c\in[0,1]$，$c$均是$X$的中值，因此中值不必唯一。
注：易证μ是中值当且仅当$\inf\{c:\mathbb{P}(X\le c)\ge\frac{1}{2}\}\le\mu\le\sup\{c:\mathbb{P}(X\ge c)\ge\frac{1}{2}\}$ 成立。

Chapter 3

挑战

1.若y满足$\mathbb{P}(X=y)>0$，则对于$\forall\epsilon>0$，$F_X(y+\epsilon)-F_X(y-\epsilon)\geq\mathbb{P}(X=y)>0$，即$y$是其支撑点。但对于$F_X(x)=xI_{[0,1]}(x)+I_{(1,\infty)}(x)$，易知对于$\forall\epsilon>0$，$F_X(\frac{1}{2}+\epsilon)-F_X(\frac{1}{2}-\epsilon)=\min\{2\epsilon,1\}>0$，故$\frac{1}{2}$是其支撑点但$\mathbb{P}(X=\frac{1}{2})=0$。

由于$\mathbb{P}(X=y)=\lim_{\epsilon\to0^+}F_X(y+\epsilon)-F_X(y-\epsilon)=F_X(y)-F_X(y-)$，故一个可行的所求条件为$F_X(y)-F_X(y-)>0$，即分布函数在该支撑点上非左连续。

2.假设全体有理数为$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，记

$$F_X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}U(x-r_n)$$

易验证$F_X(x)$是一个离散分布的分布函数，且对$\forall y\in\mathbb{R}$及任意给定的 $\epsilon>0$，由有理数集在实数集上稠密可知存在$r_k\in(y-\epsilon,y+\epsilon)$，故$F_X(y+\epsilon)-F_X(y-\epsilon)\geq\frac{1}{2^k}>0$，即所有实数均为其支撑点。

3.此时可定义$G^{-1}(x)=\inf\{u:G(u)\geq x\}(=\sup\{u:G(u)<x\})$，由分布函数的右连续性可知若$G^{-1}(x)\neq\pm\infty$则

$$G(G^{-1}(x))=\lim_{y_n\to G^{-1}(x),G(y_n)\geq x}G(y_n)\geq x$$

由上可知$\{y:G^{-1}(y)\leq x\}\subset\{y:G(x)\geq y\}$。而由下确界定义又可知反包含关系亦成立，故两集合相等，即

$$F_Y(x)=\mathbb{P}(G^{-1}(U)\leq x)=\mathbb{P}(U\leq G(x))=G(x)$$

注：分布函数的右连续性在本题中起到了重要作用，例如我们可以对偶地定义$G^{-1}(x)=\sup\{u:G(u)\leq x\}(=\inf\{u:G(u)>x\})$，但它是不可行的。

4.记$A_{FG}=\{\epsilon>0:G(x-\epsilon)-\epsilon\leq F(x)\leq G(x+\epsilon)+\epsilon,\forall x\}$，则$d_L(F,G)=\inf A_{FG}$。由于$[1,+\infty)\subset A_{FG}\subset(0,+\infty)$，故下确界存在且不为无穷。显然，$d_L(F,G)$是非负的。

先证明对称性。若$c \in A_{FG}$，则对于$\forall x$ 均有$G(x-c)-c \leq F(x) \leq G(x+c)+c$，故$G(x)-c \leq F(x+c)$ 且$F(x-c) \leq G(x)+c$ 对于$\forall x$ 成立，即$F(x-c)-c \leq G(x) \leq F(x+c)+c(\forall x)$，因此$c \in A_{GF}$，即$A_{FG} \subset A_{GF}$。同理知反向包含关系成立，故$A_{FG}=A_{GF}$，因而$d_L(F,G)=\inf A_{FG}=\inf A_{GF}=d_L(G,F)$，即对称性成立。

再证明自反性。由$F=G$导出$d_L(F,G)=d_L(G,F)$的充分性是显然的，下证明必要性。由于$d_L(F,G)=0$，则存在$\epsilon_n \downarrow 0$对于$\forall x$均有$F(x) \leq G(x+\epsilon_n)+\epsilon_n$成立。取$n \to \infty$，则借助分布函数的右连续性可知$F(x) \leq \lim_{\epsilon_n \downarrow 0} G(x+\epsilon_n)+\epsilon_n = G(x)$。由于$0=d_L(F,G)=d_L(G,F)$，故亦有$F(x) \geq G(x)$成立，故$F(x)=G(x), \forall x$。必要性得证。

最后证明三角不等式。对于$\epsilon > 0$，由下确界定义知存在$a \in A_{FG}, b \in A_{GH}$满足$a < d_L(F,G)+\epsilon, b < d_L(G,H)+\epsilon$，故对于$\forall x$有$F(x) \leq G(x+a)+a \leq H(x+a+b)+a+b, F(x) \geq G(x-a)-a \geq H(x-a-b)-a-b$，即$a+b \in A_{FH}$，故$d_L(F,H) \leq a+b < d_L(F,G)+d_L(G,H)+2\epsilon$。由$\epsilon$的任意性即知$d_L(F,H) \leq d_L(F,G)+d_L(G,H)$ 成立，三角不等式得证。

5.首先，由于

$$d_{TV}(X,Y)=\sum_{k=1}^{\infty}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}[\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(Y=k)]=2$$

故$d_{TV}(X,Y)$是良定义的（级数绝对收敛）。对于任意$A \subset \mathbb{N}$，均有

$$\begin{aligned}
d_{TV}(X,Y) &= \sum_{k=1}^{\infty}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \\
&= \sum_{k \in A}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| + \sum_{k \in A^c}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \\
&\geq |\sum_{k \in A}[\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)]| + |\sum_{k \in A^c}[\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)]| \\
&= |\mathbb{P}(X \in A)-\mathbb{P}(Y \in A)| + |\mathbb{P}(X \in A^c)-\mathbb{P}(Y \in A^c)| \\
&= 2|\mathbb{P}(X \in A)-\mathbb{P}(Y \in A)|
\end{aligned}$$

因此由A的任意性可知

$$d_{TV}(X,Y) \geq 2\sup_{A \subset \mathbb{N}}|\mathbb{P}(X \in A)-\mathbb{P}(Y \in A)|$$

反过来，对于任意$\epsilon > 0$，由绝对收敛性可设

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}[\mathbb{P}(X=k)+\mathbb{P}(Y=k)] < \epsilon$$

取$A=\{1\le k\le N:\mathbb{P}(X=k)\ge\mathbb{P}(Y=k)\}$，则

$$
\begin{aligned}
d_{TV}(X,Y) &< \sum_{k=1}^{N}|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)|+\epsilon \\
&= |\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|+|\mathbb{P}(X\in\{1,\dots,N\}\bigcap A^c)-\mathbb{P}(Y\in\{1,\dots,N\}\bigcap A^c \\
&= |\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|+|\mathbb{P}(X\in\{1,\dots,N\}^c\bigcup A)-\mathbb{P}(Y\in\{1,\dots,N\}^c\bigcup A \\
&\le 2|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|+\mathbb{P}(X\in\{1,\dots,N\}^c)+\mathbb{P}(Y\in\{1,\dots,N\}^c)+\epsilon \\
&< 2|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|+2\epsilon
\end{aligned}
$$

故由ϵ的任意性即知

$$d_{TV}(X,Y)\le 2\sup_{A\subset\mathbb{N}}|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|$$

命题即证。

Solution to Exercise 4

For all EE18ers(Available after April 7, 2013)

韩衍隽

April 1, 2013

Chapter 1

热身

1.由于

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}$$

因此所求使其最大的正整数为

$$k=\begin{cases}\lambda-1\text{或}\lambda & \lambda\text{是整数}\\ \lfloor\lambda\rfloor & \text{else}\end{cases}$$

2.

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{K-k}{k+1}\frac{n-k}{N+k-K-n+1}=\frac{(K-k)(n-k)}{(k+1)(N+k-K-n+1)}$$

因此该比值随k严格减，且

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}>1\Leftrightarrow k<\frac{(n+1)(K+1)}{N+2}-1$$

3.由于

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k(|x|<1)\Rightarrow-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}(|x|<1)$$

故

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}=C\ln 2\Rightarrow C=\frac{1}{\ln 2}$$

4.所求概率为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{(2k)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k^2}=\frac{1}{4}$$

5.由于

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{(n-k)p}{(k+1)q}<1\Leftrightarrow k>(n+1)p-1$$

因此所求使其最大的正整数为

$$k = \begin{cases} (n+1)p-1\text{或}(n+1)p & (n+1)p\text{是整数} \\ \lfloor (n+1)p \rfloor & \text{else} \end{cases}$$

Chapter 2

问题

1.由于取$K = Np, N \to \infty$时有$H(n,k,N,K) \to B(n,p)$，故再取定$nK/N = \lambda, N, K, n \to \infty$即可知$H(n,N,K) \to Po(\lambda)$。

2.用X表示抽球次数，则

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(k-1)!}{n^k}\binom{n}{k-1}(2 \le k \le n+1)$$

3.可以假想将所有硬币均抛第二次，则通过直接比较事件集的方式可以知道此概率分布与每枚硬币都抛第二次时两次均正面向上的硬币数的概率分布相同，故此概率分布即服从参数为(n,p^2)的二项分布。
注：若用X表示正面仍向上的硬币个数，Y表示第一次正面向上的硬币个数，也可直接计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{s=0}^{n} \mathbb{P}(X=k|Y=s)\mathbb{P}(Y=s) \\
&= \sum_{s=k}^{n} \binom{s}{k} p^k (1-p)^{s-k} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \\
&= (1-p)^{n-k} p^{2k} \sum_{s=k}^{n} \binom{s}{k}\binom{n}{s} p^{s-k} \\
&= (1-p)^{n-k} p^{2k} \sum_{s=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} p^{s-k} \\
&= (1-p)^{n-k} p^{2k} \binom{n}{k} (1+p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} (p^2)^k (1-p^2)^{n-k}
\end{aligned}$$

结论一样。

4.用X表示第一个指标不正常的人被查出前指标正常的人数，则

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{n-k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}(k=0,1,\ldots,n-m)$$

5.考虑把所有球一个一个都抽出来的过程，则若假设所有红球及所有其它的球都不可辨，则方法数为$\binom{N}{n}$。而第k个球是红球的方法数为$\binom{N-1}{n-1}$，因此所求概率为

$$\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n}{N}$$

Chapter 3

挑战

1.考虑一个连续独立抛掷出现正面概率为p的硬币的过程，则可直接看出等式两端事件的直观意义：$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > n\}$ 表示“第r次正面未出现在前n次抛掷中”，即“在前n次抛掷中正面出现次数少于r次”，而$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < r\}$ 显然表示同一含义，故两者概率相等。

注：亦可直接证明如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} \binom{k-n-1}{r-1-j} \right] p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} p^r (1-p)^{n-j} \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-n-1}{r-1-j} (1-p)^{k+j-n-r} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} p^r (1-p)^{n-j} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+(r-1-j)}{r-1-j} (1-p)^i (i = k+j-n-r) \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} p^r (1-p)^{n-j} (1-(1-p))^{-(r-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= \mathbb{P}(Y < r)
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k'=0}^{k} P(k-k':\lambda)Q(k':\lambda) &= e^{-2\lambda}\sum_{k'=0}^{k}\frac{\lambda^{k-k'}}{(k-k')!}\sum_{j=0}^{k'}\frac{\lambda^{j}}{j!} \\
&= e^{-2\lambda}\sum_{\substack{i+j\le k\\ i\ge 0,j\ge 0}}\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}(\text{取}i=k-k') \\
&= e^{-2\lambda}\sum_{s=0}^{k}\lambda^{s}\sum_{i=0}^{s}\frac{1}{i!(s-i)!} \\
&= e^{-2\lambda}\sum_{s=0}^{k}\lambda^{s}\frac{2^{s}}{s!} \\
&= e^{-2\lambda}\sum_{s=0}^{k}\frac{(2\lambda)^{s}}{s!} \\
&= Q(k:2\lambda)
\end{aligned}
$$

3.这由热身部分第1题（Poisson分布）与热身部分第5题（二项分布）中算出的$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$是关于$k$的非增函数即可得证。

4.通过直接比较事件集可知此概率与事件“前$n+m-1$次抛掷中硬币正面向上次数至少为n”的概率相同，而后者概率为

$$\mathbb{P}(m,n)=\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}p^{k}(1-p)^{n+m-1-k}$$

5.记$A=\{\omega\in\Omega: X(\omega)>Y(\omega)\}, B=\{\omega\in\Omega: Y(\omega)>Z(\omega)\}, C=\{\omega\in\Omega: Z(\omega)>X(\omega)\}$，则由容斥原理有

$$0=\mathbb{P}(A\bigcap B\bigcap C)\ge\mathbb{P}(A\bigcap B)+\mathbb{P}(C)-1\ge\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-2$$

故$\min\{a,b,c\}\le\frac{a+b+c}{3}=\frac{2}{3}$。

等号成立的构造：取$\Omega=\{1,2,3\},\mathcal{F}=2^{\Omega},\mathbb{P}\{k\}=\frac{1}{3}(k=1,2,3)$，并记$X(k)=k \bmod 3, Y(k)=(k-1)\bmod 3, Z(k)=(k-2)\bmod 3(k\in\Omega$其中$x\bmod 3\in\{0,1,2\})$，易验证此构造满足题意。

Solution to Exercise 5

For all EE18ers(Available after April 21, 2013)

韩衍隽

April 12, 2013

Chapter 1

热身

1.易验证对于$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，若记事件$A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$表示第$i_1, i_2, \cdots, i_n$次抛掷的点数均相同，则

$$\mathbb{P}(A_{i_1 i_2 \cdots i_n}) = \frac{1}{K^n}$$

这里K表示均匀的色子的面数（一般为6）。故由上式即可知题设事件的独立性等价于下标的不重复性（两两独立性亦同）。

2.用反证法，假设A, B非全集又非空集且相互独立，设$a = \#A, b = \#B, c = \#(A \cap B)$，则$0 < a, b < p$。由独立性知

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{p}\frac{b}{p} \Rightarrow ab = cp \Rightarrow p|ab$$

这与p是素数矛盾！

3.由题设即知X与Y独立。显然X, Y, Z只能在$\{-1, 1\}$上取值，故直接验证

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$$

即可知X, Z独立，因而X, Y, Z两两独立。然而，由于

$$\mathbb{P}(X = Y = 1, Z = -1) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = -1)$$

因此它们不独立。

4.所求概率为

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)$$

5.用A_k表示事件“高炮k命中目标”，则题设的要求为

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq 0.99 \Rightarrow 1 - (1 - 0.6)^n \geq 0.99 \Rightarrow n \geq 6$$

Chapter 2

问题

1.考虑投掷一枚均匀色子的过程，即取$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \mathbb{P}\{k\} = \frac{1}{6}(1 \leq k \leq 6)$。再记$A = \{1,3,5\}, B = \{3,6\}, C = \{3,4\}$，即可验证题设结论。

2.显然

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C) = \frac{3}{4} \\
&\mathbb{P}(AB) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(AC) = 0, \mathbb{P}(BC) = \frac{3}{8} \\
&\mathbb{P}(ABC) = 0
\end{aligned}$$

故可知A与B独立，B与C独立，A与C不独立。

3.任取m,n，考虑X_m, X_n的独立性。记集合A为$X_n(\omega)$的零点，$B = X_m(A)$，显见A, B均为有限集，故可取$a \in (-1,1)$满足$a \notin B$，并考虑$[0,1]$上的如下函数：

$$X(\omega) = X_n^2(\omega) + (X_m(\omega) - a)^2$$

由于该函数在有界闭区间$[0,1]$上连续，故它在$[0,1]$上有最小值$b \geq 0$，且由a的定义知$b \neq 0$，即$b > 0$。下记

$$M = \{\omega : |X_m(\omega) - a| < \sqrt{\frac{b}{2}}\}, N = \{\omega : |X_n(\omega)| < \sqrt{\frac{b}{2}}\}$$

则显见$\mathbb{P}\{\omega : X_m(\omega) \in M\} > 0, \mathbb{P}\{\omega : X_n(\omega) \in N\} > 0$，但由$\{\omega : X_m(\omega) \in M, X_n(\omega) \in N\} \subset \{\omega : [X_m(\omega) - a]^2 + [X_n(\omega)]^2 < b\} = \emptyset$可知$\mathbb{P}\{\omega : X_m(\omega) \in M, X_n(\omega) \in N\} = 0$，因此$X_m$与$X_n$不独立。

4.

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2$$

5.由$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty}A_k)=1$可知$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{\infty}A_k^c)=0$，因此对于$\forall n$有

$$0=\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k^c)=\mathbb{P}(\bigcap_{k>n}^{\infty}A_k^c)\prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(A_k))\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcap_{k>n}^{\infty}A_k^c)=0$$

因此

$$\mathbb{P}(A_n,\text{i.o.})=\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k>n}^{\infty}A_k)=1-\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k>n}^{\infty}A_k^c)=1$$

最后一个等号（可数多个零概率之并仍为零概率集）由概率的非负性及可数可加性即可得到证明。

Chapter 3

挑战

1.由于$Z_{n+sK}=Z_n(s\in\mathbb{Z})$，故仅考虑$0\le n\le K-1$的情况。由于$K\le 2$的情况将包含在两两独立性的判断之中，故不妨设$K\ge 3$。

首先，可计算Z_n的分布如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n=k)&=\sum_{j=0}^{K-1}\mathbb{P}(X=k-nj \bmod K, Y=j)\\&=\sum_{j=0}^{K-1}\mathbb{P}(X=k-nj \bmod K)\mathbb{P}(Y=j)\\&=\frac{1}{K}\end{aligned}$$

即Z_n服从均匀分布。因此

$$\mathbb{P}(Z_0=Z_1=\cdots=Z_{K-1}=0)=\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\frac{1}{K^2}\ne\frac{1}{K^K}=\prod_{j=1}^{K-1}\mathbb{P}(Z_j=0)$$

即它们不相互独立。为了考虑两两独立性，计算

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_i=r,Z_j=s)&=\sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}(X=r-ki \bmod K=s-kj \bmod K, Y=j)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}(X=r-ki \bmod K=s-kj \bmod K)\mathbb{P}(Y=j)\\&=\frac{f(i,j,r,s)}{K^2}\end{aligned}$$

其中$f(i,j,r,s)$表示关于k的同余方程$r-ki\equiv s-kj(0\le k<K)$的解的个数，由初等数论中的结论可知

$$f(i,j,r,s)=\begin{cases}\gcd(j-i,K), & \text{if}\gcd(j-i,K)|r-s\\0, & \text{else}\end{cases}$$

由于Z_i与Z_j的独立性要求$\mathbb{P}(Z_i=r,Z_j=s)=\mathbb{P}(Z_i=r)\mathbb{P}(Z_j=s)=\frac{1}{K^2}$，即$f(i,j,r,s)=$ 1对$\forall r,s$均成立，因此

$$Z_i,Z_j \text{ is independent} \Leftrightarrow \gcd(j-i,K)=1$$

2.取$\mathcal{A}=\{\{1,2\},\{1,3\}\},\mathcal{B}=\{\{2,3\}\}$，易验证它们独立，但$\{1\}\in\sigma(\mathcal{A}),\{2,3\}\in\sigma(\mathcal{B})$，这两个集合是不独立的，构造完毕。

3.设两个点的坐标分别为X,Y，则它们服从$[0,1]$上的均匀分布且相互独立。假设这三段的长度分别为l_1,l_2,l_3，则对于$\forall x\in[0,1]$

$$\mathbb{P}(l_1\le x)=\mathbb{P}(\min\{X,Y\}\le x)=1-\mathbb{P}(X>x,Y>x)=1-(1-x)^2$$
$$\mathbb{P}(l_3\le x)=\mathbb{P}(\max\{X,Y\}\ge 1-x)=1-\mathbb{P}(X<1-x,Y<1-x)=1-(1-x)^2$$
$$\mathbb{P}(l_2\le x)=\mathbb{P}(\max\{X,Y\}-\min\{X,Y\}\le x)=\mathbb{P}(|X-Y|\le x)$$
$$=\iint_{|r-s|\le x,0\le r,s\le 1}1drds=1-(1-x)^2$$

因此它们具有相同分布。

4.记$X_k(1\le k\le n)$为第k次投掷色子出现的点数，则对于$1\le s\le S+1\le 7$有

$$f(M,m):=\mathbb{P}(M\le S,m\ge s)=\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}\{\omega:s\le X_k(\omega)\le S\})=\prod_{k=1}^{n}\frac{S+1-s}{6}=\Big(\frac{S+1-s}{6}$$

因此对于$1\le s<S\le 6$有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(M=S,m=s)\\=&f(S,s)-f(S-1,s)-f(S,s+1)+f(S-1,s+1)\\=&\frac{(S+1-s)^n-2(S-s)^n+(S-s-1)^n}{6^n}\end{aligned}$$

故取$S=5,s=2$即知本题结果为

$$\mathbb{P}(M=5,m=2)=\frac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n}$$

5.首先，对(X,Y,Z)的一个任意排列$(p(X),p(Y),p(Z))$均有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(p(X)<p(Y)<p(Z))=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(p(X)<p(Y)=n<p(Z))=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(p(X)<n<p(Z),p(Y)\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(p(X)<n)\mathbb{P}(p(Z)>n)\mathbb{P}(p(Y)=n)\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X<n)\mathbb{P}(Z>n)\mathbb{P}(Y=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X<n<Z,Y=n)\\=&\mathbb{P}(X<Y<Z)\end{aligned}$$

而

$$
\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=Y=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-p)^{n-1}p\right]^2=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}
$$

$$
\mathbb{P}(X=Y=Z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=Y=Z=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-p)^{n-1}p\right]^3=\frac{p^3}{1-(1-p)^3}=\frac{p^2}{3-3p+p
$$

因此

$$
\mathbb{P}(X<Y<Z)=\frac{1}{3!}[1-3\mathbb{P}(X=Y)+2\mathbb{P}(X=Y=Z)]=\frac{(1-p)^3}{(2-p)(3-3p+p^2)}
$$

Solution to Exercise 6

For all EE18ers(Available after April 28, 2013)

韩衍隽

April 19, 2013

Chapter 1

热身

1.记事件A为“三次结果各不相同”，事件B为三次结果中最大为6，则所求概率为

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}2!}{\binom{6}{3}3!}=\frac{1}{2}$$

2.由题设可知$\mathbb{P}(B|A)>\mathbb{P}(B)\Rightarrow\mathbb{P}(AB)>\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$，因此有

$$\mathbb{P}(A^cB^c)=1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(AB)>1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

将上式化成条件概率的形式即证。
注：原题“倾向性”的定义式有误，这里已进行更改。

3.传递性不一定成立。反例：考虑普通的掷色子过程，记事件A为“点数大于3”，B为“点数为偶数”，C为“点数为2”，显然此时有

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}=\mathbb{P}(B),\mathbb{P}(C|B)=\frac{1}{3}>\frac{1}{6}=\mathbb{P}(C),\mathbb{P}(C|A)=0<\frac{1}{6}=\mathbb{P}(C)$$

即A不一定倾向于C。

4.用条件概率定义即可知所求概率为

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{8}}{\binom{4}{2}\binom{48}{9}}=\frac{9139}{21620}$$

注：本题或许会有其它理解方式，但以上做法是基于“恰有两张K的条件下恰有一张A”的理解上的。

5.由第二次作业的“问题”部分第二题的结论可知

$$\mathbb{P}(AB)\in[\max\{0,a+b-1\},\min\{a,b\}]$$

故本题的结果为

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}\in[\max\{0,\frac{a+b-1}{b}\},\min\{\frac{a}{b},1\}](b\neq 0)$$

Chapter 2

问题

1.记事件A为“存在一种可行的（能买到票的）方式从北京到巴黎”，事件B为“北京直飞巴黎的航班有票”，则所求概率为

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{p}{1-(1-p)[2(1-p)^2-(1-p)^4]}$$

注：本题待求事件为“在A发生的前提下其乘坐直飞航班完成旅程”，这与上面求算的事件“在A发生的前提下直飞航班有票”并不相同，但受题意表述所限仍采取这种理解方式。

2.记事件C表示“抛掷硬币过程有3次正面向上”，事件A_n表示“色子掷出n点”这一事件$(1\le n\le 6)$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n|C)&=\frac{\mathbb{P}(CA_n)}{\mathbb{P}(C)}\\&=\frac{\mathbb{P}(C|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(C|A_k)\mathbb{P}(A_k)}\\&=\frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2^n}\binom{n}{3}}{\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\frac{1}{2^k}\binom{k}{3}}\\&=\frac{1}{2^n}\binom{n}{3}\end{aligned}$$

3.由于

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)\mathbb{P}(AB)\\=&\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)-[\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)]\mathbb{P}(AB)\\=&[\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(AB)][\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)]\\\ge&0\end{aligned}$$

因而

$$\mathbb{P}(A|A\cup B)=\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A\cup B)}\ge\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A|B)$$

证毕。

4.记事件A_k表示“选中第k个罐子”($1 \leq k \leq n$)，事件B表示“抽取的2个球颜色不同”，则所求概率为

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{3n}$$

5.记A表示事件“先抛者获胜”，B表示事件“第一次出现正面”，则

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = p + (1-\mathbb{P}(A))(1-p) \\ \Rightarrow &\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

Chapter 3

挑战

1.随机选择一个电话进行拨打，若成功即试验结束，若失败，则该电话为一定不能打通的电话的概率为

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}(0+\frac{1}{2}+1)}=\frac{2}{3}$$

故第二次若仍选择该电话，则电话打通的概率为

$$\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

而若换一电话，拨打成功的概率变为

$$\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})+\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

因此，应选取的完整策略为：第一次随机选择一个电话，若成功则停止，若失败则随机地换一台电话进行拨打。在此策略下成功拨打电话的概率为

$$1-(\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})=\frac{5}{6}$$

注：上述解答认为该人有2元钱而非题设中的3元钱。若为3元钱，则只需每个电话试一次即以概率1打通电话。

2.仍然考虑普通的掷色子的情况，记事件A为“点数为2或4”，事件B为“点数为3或4”，事件C为“点数小于5”，易验证在条件C下A,B条件独立但它们并不独立。

3.用A_n表示事件“n次抛掷后正面向上次数为偶数”，则$\mathbb{P}(A_0)=1$，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_{n+1})=\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c)=(1-p)\mathbb{P}(A_n)+p(1-\mathbb{P})\\
\Rightarrow&\mathbb{P}(A_{n+1})-\frac{1}{2}=(1-2p)(\mathbb{P}(A_n)-\frac{1}{2})\\
\Rightarrow&\mathbb{P}(A_n)=\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n]
\end{aligned}$$

4.记X表示扔掉的5个球中红球的数目，A表示事件“最后抽出的球为红球”，B_k表示事件“$X=k$” $(0\le k\le 5)$，则

$$\mathbb{P}(B_k|A)=\frac{\mathbb{P}(AB_k)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=0}^{5}\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}=\frac{\frac{15-k}{15}\frac{\binom{15}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{20}{5}}}{\sum_{j=0}^{5}\frac{15-j}{15}\frac{\binom{15}{j}\binom{5}{5-j}}{\binom{20}{5}}}$$

$$=\frac{\binom{14}{k}\binom{5}{5-k}}{\sum_{j=0}^{5}\binom{14}{j}\binom{5}{5-j}}=\frac{\binom{14}{k}\binom{5}{k}}{\binom{19}{5}}$$

因此所求概率为

$$\mathbb{P}(X\ge 2|A)=1-\frac{\binom{14}{0}\binom{5}{0}+\binom{14}{1}\binom{5}{1}}{\binom{19}{5}}=\frac{11557}{12628}$$

5.用事件$A_k(1\le k\le 4)$分别表示甲、乙、丙、丁四人说谎这一事件，并记事件X 表示“甲声称乙否认丙认可丁在说谎”，则所求概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_4^c|X)=&\frac{\mathbb{P}(A_4^cX)}{\mathbb{P}(X)}\\ =&\frac{\sum_{(R_1,R_2,R_3,R_4)}\mathbb{P}(A_4^cX|R_1R_2R_3R_4)\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}(R_4)}{\sum_{(R_1,R_2,R_3,R_4)}\mathbb{P}(X|R_1R_2R_3R_4)\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}(R_4)}\end{aligned}$$

其中求和对所有满足$R_k=A_k$或$R_k=A_k^c$的所有$2^4=16$个四元组(R_1,R_2,R_3,R_4)进行，而以下结论是容易验证的（若$R_k=A_k^c$，则称之为取补项）：

$$\mathbb{P}(X|R_1R_2R_3R_4)=\begin{cases}1 & R_k(1\le k\le 4)\text{中取补项的个数为偶数,}\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

$$\mathbb{P}(XA_4^c|R_1R_2R_3R_4)=\begin{cases}1 & R_k(1\le k\le 3)\text{中取补项的个数为偶数且}R_4=A_4^c,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

而后可借助二项式定理中的下列结论：$(a+b)^n$展开式中a次数为偶数的项之和为

$$\frac{(a+b)^n+(-a+b)^n}{2}$$

因此所求概率为

$$\mathbb{P}(A_4^c|X)=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}[(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^3+(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^3]}{\frac{1}{2}[(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^4+(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^4]}=\frac{26}{41}$$

注1：本解答将“否认”“认同”均视作判定对方“说谎”与“诚实”之意，这是因为若不如此理解则可能存在无法处理的问题，例如若甲说谎，那么乙就没有否认，然后便有两种情况：或者乙进行了承认，或者乙根本没有对此事进行过评价。显然后者超出了研究范围，因此解答中直接默认为前者，亦即“非此即彼”。

注2：本题采用Bayes公式再代入全概率公式而不是直接代入全概率公式的理由可用下面一个易错的例子来解释：若“甲宣称丁说谎了”，并不能简单地因为甲说真话的概率为$\frac{2}{3}$而简单地判定丁说真话的概率为$\frac{1}{3}$，而应该如同本题解那样进行处理最后得到丁说真话的概率其实为$\frac{1}{2}$————观测到的现象提供了信息进而使后验概率不等于先验概率。

Solution to Exercise 7

For all EE18ers(Available after May 5th, 2013)

韩衍隽

May 4, 2013

Chapter 1

热身

1.首先有以下常见等式：

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}(|x|<1) \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{kx^{k-1}(1-x)+x^k}{(1-x)^2}(|x|<1)$$

所求期望为

$$\mathbb{E}(XI_{[n,+\infty]}) = \sum_{k=n}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}}{p}$$

注：若利用几何分布的无记忆性则可给出更简单的方法。由全概率公式有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XI_{[n,+\infty]}) &= \mathbb{E}(XI_{[n,+\infty]}|X\geq n)\mathbb{P}(X\geq n) = (n-1+\mathbb{E}(XI_{[1,+\infty]}|X\geq 1))\mathbb{P}(X\geq n)\\ &= (n-1+\mathbb{E}(X))\mathbb{P}(X\geq n) = (1-p)^{n-1}(n-1+\frac{1}{p})\end{aligned}$$

2.考虑两点分布：$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=a)=\frac{1}{2}$，则

$$\mathbb{E}(X)=\frac{a}{2}, Var(X)=\frac{a^2}{4}$$

取不同的a即可得到不同的情况。

3.记$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$表示$X_i(1\leq i\leq n)$中不同的数的个数，则借助条件期望有

$$\begin{aligned}g(n) :=&\mathbb{E}(f(X_1,X_2,\ldots,X_n)) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X_1,X_2,\ldots,X_n)|X_1,\ldots,X_{n-1})]\\ =&\mathbb{E}[f(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})+1-\frac{f(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1})}{365}] = \frac{364}{365}g(n-1)+1\\ \Rightarrow& g(n)-365 = \frac{364}{365}(g(n-1)-365)\\ \Rightarrow& g(n) = 365-(\frac{364}{365})^n(365-g(0)) = 365[1-(\frac{364}{365})^n]\end{aligned}$$

因此所求期望为

$$g(100) = 365[1 - (\frac{364}{365})^{100}]$$

4.用随机变量X表示所求数目，则

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}$$

因此

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{k=1}^{n-m} \binom{n-k}{m} = \frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n-m}{m+1}$$

注1：本题亦可以通过考虑第一个数据包的类型而得到递推式

$$f(n,m) = \frac{n-m}{n}(1 + f(n-1,m)), f(m,m) = 0 \Rightarrow f(n,m) = \frac{n-m}{m+1}$$

结论一样。
注2：本题亦可通过加法公式求解。若记$X_i (i \geq 1)$表示事件“前i个数据包中无TCP包”的示性函数，则利用$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{\infty} X_i)$ 可得到相同结论。
注3：玩过三国杀的应该知道这就是甄姬“洛神”技能抽牌数的期望。

5.显然

$$\mathbb{E}(X-a)^2 = a^2 - 2a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2) = (a - \mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

即可得证。

Chapter 2

问题

1.若$\mathbb{E}(X)=\infty$，则任取$M>0$均存在N满足

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X=k)>M$$

故此时

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X\geq k)\geq\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=k}^{N}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{k=1}^{N}k\mathbb{P}(X=k)>M$$

因此此时$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)=\infty$，结论成立。下设$\mathbb{E}(X)<\infty$，则任取$\epsilon>0$，存在$N>0$满足

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)<\epsilon$$

故

$$-\epsilon<-N\sum_{k=N+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\leq\mathbb{E}(X)-\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X\geq k)\leq\mathbb{E}(X)-\sum_{k=1}^{N}k\mathbb{P}(X=k)<\epsilon$$

取极限即可知

$$|\mathbb{E}(X)-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)|<\epsilon$$

由ϵ任意性即知两者相等，证毕。
推广到负整数的情况：

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\leq -k)$$

注1：本题题设有误，应将待证式的求和下标从0改为1。另外，上面证明中用了较多的分析学思想，可借以复习极限知识。

注2：对于任意非负随机变量X（不一定离散），若$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)$存在，则以下不等式常常用来进行估计其期望：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)\leq\mathbb{E}(X)\leq 1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)$$

2.定义随机变量如下：

$$X_k=\begin{cases}1 & \text{前}k\text{张购物券互不相同,}\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

则易知

$$\mathbb{E}(X_k)=\frac{k!\binom{n}{k}}{n^k}$$

故所求期望为

$$\mathbb{E}(1+\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n^k}\binom{n}{k}$$

3.用$X_i(1\leq i\leq n)$表示事件“第i个人拿对帽子”的示性函数，则

$$\mathbb{E}(X_i)=\frac{1}{n},\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{P}(X_i=X_j=1)=\begin{cases}\frac{1}{n(n-1)} & i\neq j\\ \frac{1}{n} & i=j\end{cases}$$

故所求方差为

$$Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2]-[\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}X_i)]^2=\sum_{1\leq i,j\leq n}\mathbb{E}(X_iX_j)-1$$
$$=\frac{1}{n(n-1)}\cdot n(n-1)+\frac{1}{n}\cdot n-1=1$$

4.记随机变量Y_n表示事件“$X_1\leq X_2\leq\ldots\leq X_n$”的示性函数，则由假设，$X_i$是独立同分布的连续型随机变量，故

$$\mathbb{P}(X_1\leq X_2\leq\ldots\leq X_n)=\frac{1}{n!}$$

因此所求期望为

$$\mathbb{E}(N)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(Y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$$

注：在本解答中对题设进行了如下修改：为保证两随机变量相等的概率为零，让它们均为连续型随机变量即可做到此点。此时，虽然由题设定义得到的N可能不唯一，但它可以取多值的情形为零概率集，不会影响概率的求算。

5.这题想干嘛？独立同分布岂不意味着$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$？方差最小不是应该选取$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$么？

注：一种可能的理解方式如下：对于独立同分布，均值为μ，方差为σ^2的随机变量$X_i(1 \leq i \leq n)$，若$\sum_{i=1}^n a_i = 1$，则让$\sum_{i=1}^n a_iX_i$方差最小的方式为$a_i = \frac{1}{n}(1 \leq i \leq n)$，即均值的方差最小。

Chapter 3

挑战

1.不妨设其分布函数均为

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kU(x-a_k)$$

则

$$\mathbb{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\}\geq a_i)=\mathbb{P}(X_1\geq a_i,\ldots,X_n\geq a_i)=[\mathbb{P}(X_1\geq a_i)]^n=[\sum_{a_k\geq a_i}p_k]^n$$

$$\mathbb{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\}>a_i)=[\mathbb{P}(X_1>a_i)]^n=[\sum_{a_k>a_i}p_k]^n$$

因此所求期望为

$$\mathbb{E}(\min\{X_1,\ldots,X_n\})=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\left[(\sum_{a_k\geq a_i}p_k)^n-(\sum_{a_k>a_i}p_k)^n\right]$$

2.取$\Omega=\{-1,1\},\mathcal{F}=2^{\Omega},\mathbb{P}\{-1\}=\mathbb{P}\{1\}=\frac{1}{2}$，且$X(\omega)=\omega$，则易验证$X$满足题意。

3.记X为所求最长游程长度，直接计算可知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X\geq 1)=1\\
&\mathbb{P}(X\geq 2)=1-p^3(1-p)^2-(1-p)^3p^2=1-p^2(1-p)^2\\
&\mathbb{P}(X\geq 3)=3p^3-2p^4+3(1-p)^3-2(1-p)^4\\
&\mathbb{P}(X\geq 4)=2p^4+2(1-p)^4-p^5-(1-p)^5\\
&\mathbb{P}(X\geq 5)=p^5+(1-p)^5
\end{aligned}$$

因而

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}\mathbb{P}(X\geq k)=-p^4+2p^3+8p^2-9p+5$$

注：推荐的那篇报告中提到的内容值得一看，但确实也有一定难度。这个问题的一个弱化的结果为：连续抛掷n次均匀硬币，求算连续正面向上的最大次数的期望。这个问题在第二次作业挑战题第3题里得到了结论

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} (-1)^{j-1} \frac{n+1-j(k-1)}{j2^{j(k+1)}} \binom{n-jk}{j-1}$$

故

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{1 \leq j,k \leq n, jk \leq n} (-1)^{j-1} \frac{n+1-j(k-1)}{j2^{j(k+1)}} \binom{n-jk}{j-1}$$

4.若记$f(k)$表示掷色子得到k点时的即时收益，则在本题中显见$f(1) = 0, f(k) = k(2 \leq k \leq 6)$。而若记$u(k)$为掷色子得到$k$点时采取最优策略所能得到的收益，则易知

$$u(k) = \max\{f(k), \frac{\sum_{i=1}^{6} u(i)}{6}\}(2 \leq k \leq 6), u(1) = 0$$

故求解上述方程可知

$$u(1) = 0, u(2) = \frac{15}{4}, u(3) = \frac{15}{4}, u(4) = 4, u(5) = 5, u(6) = 6$$

对应最佳策略为：若出现2或3，则继续；否则停止游戏。
注：下面考虑更为一般的“最优停时”(Optimal Stopping Time)情况，并对上面的解法给出更严密的解释。注意本题中某时刻之后的情况（包括收益）是与该时刻之前的情况是相互独立的，这个性质称为（弱）马尔可夫性((Weak) Markov Property)。考虑一个有限状态的马尔可夫链(Markov Chain)，设状态集为S，从状态x 转移到状态y 的概率为$p(x,y) \geq 0(\sum_{y \in S} p(x,y) = 1)$，状态$x$ 上的停止即时收益为$f(x)$。考虑这个游戏的最优停止策略，由其马尔可夫性只需要考虑处于某个状态时应采取的策略即可（与“历史”无关）。若用$X_n(n \geq 0)$表示n时刻的状态，T表示该最优停止策略，则我们感兴趣的是随机变量T的取值及在最优决策下的期望收益$u(x) = \sup_T \mathbb{E}(f(X_T)|X_0 = x)$。

首先考虑T需要满足的条件，那便是T需要是一个“停时”(Stopping Time)，即若记$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k : k \leq n)$，则$\{T \leq n\} \subset \mathcal{F}_n$(或等价地，$\{T \leq n\}$是$\mathcal{F}_n$可测的)。直观地来说，玩家在$n$时刻需要根据且只能根据已有的$n$时刻之前的信息作出是否停止（即$T$是否大于$n$）的判断，而不能根据未来的信息进行决策。

然后考虑该游戏需要假设的一些条件，那便是游戏需要有一种等价的“退出机制”。（数学上的说法是：该马尔可夫链是可约(reducible)的。）否则，玩家可以采取一种策略，使得最大收益的状态出现为止（本题中，正是因为出现1时游戏结束的假设才使玩家不愿意任何时候都等待6的出现）。记S_1 表示游戏立即结束的状态集合，且该马尔可夫链满足$\mathbb{P}(T < \infty) = 1$，即$T$a.s.(almost surely) 有限。

接下来进入分析阶段。考虑任意一个满足下述条件的函数$v(x) : v(x) = f(x)(\forall x \in S_1)$,

$$v(x) \geq f(x), v(x) \geq \sum_{y \in S} p(x,y)v(y)(\forall x \notin S_1)(\text{后式称为上调和性，可简记为}v(x) \geq \mathbb{P}v(x))$$

下证$u(x)\le v(x)$。由$v(x)$的上调和性(Super-harmonic)可知$\mathbb{E}(v(X_n)|\mathcal{F}_{n-1})\le v(X_{n-1})$，因此$v(X_n)$是上鞅(Supermartingale)，故加上$T$a.s.有限及$v(x)$有界（因为只有有限个取值）并运用可选抽样定理(Optional Sampling Theorem)可知$\mathbb{E}(v(X_T)|X_0)\le v(X_0)$（可选抽样定理的直观表述为：如果一个游戏是对你不利的，那么你无论采取什么策略在期望意义下都不能扭转这种不利————除非你能预见未来(You cannot beat the system!)），因此

$$u(x)=\mathbb{E}(f(X_T)|X_0=x)\le\mathbb{E}(v(X_T)|X_0=x)\le v(x)$$

即证明上述结论。下记

$$w(x)=\inf v(x)$$

其中下确界在所有满足上述条件（上调和且不小于$f(x)$）的函数$v(x)$中取，则由$u(x)\le v(x)$ 可知$u(x)\le w(x)$。先讨论$w(x)$的性质，下证

$$w(x)=f(x)(x\in S_1),w(x)=\max\{f(x),\mathbb{P}w(x)\}(x\notin S_1)$$

下面证明该结论。首先，容易证明上调和性在下确界操作中保持，即$w(x)$仍是上调和函数。用反证法，假设对某个$x_0\notin S_1$ 满足$w(x_0)>\max\{f(x_0),\sum_{y\in S}p(x_0,y)w(y)\}$，则可将$w(x_0)$单独减小一个小量而让其它值不变，得到的函数仍可上调和且不小于$f(x)$，这与$w(x)$ 的最小性相违！故上式成立。

最后我们证明$w(x)=u(x)$并寻找该最优策略。考虑如下停时策略T'：若$w(x)=f(x)$，则停止游戏，否则继续游戏，则此时(下记$a\wedge b=\min\{a,b\}$)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(w(X_{T'\wedge n})|\mathcal{F}_{n-1})\\
=&\mathbb{E}(w(X_{T'\wedge n})I_{\{T'\le n-1\}}|\mathcal{F}_{n-1})+\mathbb{E}(w(X_{T'\wedge n})I_{\{T'\ge n\}}|\mathcal{F}_{n-1})\\
=&\mathbb{E}(w(X_{T'})I_{\{T'\le n-1\}}|\mathcal{F}_{n-1})+\mathbb{E}(w(X_n)I_{\{T'\ge n\}}|\mathcal{F}_{n-1})\\
=&w(X_{T'})I_{\{T'\le n-1\}}+I_{\{T'\ge n\}}\mathbb{E}(w(X_n)|\mathcal{F}_{n-1})\\
&\text{(The property of conditional expectation: Take out what is known)}\\
=&w(X_{T'})I_{\{T'\le n-1\}}+I_{\{T'\ge n\}}w(X_{n-1})\text{(Notice the property of }w(\cdot)\text{ and }T'>n-1)\\
=&w(X_{T'\wedge(n-1)})
\end{aligned}$$

因此$w(X_{T'\wedge n})$为鞅(Martingale)，故

$$\mathbb{E}(w(X_{T'\wedge n})|X_0)=w(X_{T'\wedge 0})=w(X_0)$$

在该式中取$n\to\infty$并再次借助可选抽样定理有

$$u(x)\ge\mathbb{E}(f(X_{T'})|X_0=x)=\mathbb{E}(w(X_{T'})|X_0=x)=w(x)$$

故$u(x)=w(x)$，且上述策略为最佳策略。

以上便完成了关于本题解法的理论基础的完整证明。

5.记随机变量$Y=(X-b)I_{\{X\ge b\}}$，则$X=V+Y$，且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(VY)=\mathbb{E}(VYI_{\{Y>0\}})=\mathbb{E}(bYI_{\{Y>0\}})=b\mathbb{E}(Y),\mathbb{E}(V)\le b\\
\Rightarrow&Cov(V,Y)=\mathbb{E}(VY)-\mathbb{E}(V)\mathbb{E}(Y)=[b-\mathbb{E}(V)]\mathbb{E}(Y)\ge 0
\end{aligned}$$

因此有

$$Var(X) = Var(V+Y) = Var(V) + 2Cov(V,Y) + Var(Y) \geq Var(V)$$

由上面结论及$-U = \min\{-X, -a\}$也即可知

$$Var(X) = Var(-X) \geq Var(-U) = Var(U)$$

证毕。

Solution to Exercise 8

For all EE18ers(Available after May 26th, 2013)

韩衍隽

May 20, 2013

Chapter 1

热身

1.由概率密度函数的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=c\int_{-1}^{1}|x|(1-x^2)dx=2c\int_{0}^{1}x(1-x^2)dx=2c(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\Rightarrow c=2$$

2.由概率密度函数的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^m}dx=c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-2}(x)dx=\pi c\frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!}$$

$$\Rightarrow c=\frac{(2m-2)!!}{\pi(2m-3)!!}(m\geq 1)$$

对于$m=1$，由于

$$\mathbb{E}|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}c|x|f(x)dx=+\infty$$

故此时期望不存在；而对于$m\geq 2$,易证上述无穷积分绝对收敛，故由概率密度函数为偶函数即知期0 望值为0。

注：随机变量X的期望存在当且仅当$\mathbb{E}|X|$存在，这也是Riemann积分与Lebesgue积分在定义方式上的不同之处：Lebesgue积分存在要求函数的正部与负部均可积，但Riemann积分存在收敛但不绝对收敛的情况。

3.按照通用方式记$\phi(x)$表示标准正态分布的概率密度函数，$\Phi(x)$表示标准正态分布的分布函数，则借助$\phi'(x)=-x\phi(x)$可知所求期望为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\min(I,c)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,c)\cdot\frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x}{\sigma})dx\\&=\int_{-\infty}^{c}\frac{x}{\sigma}\phi(\frac{x}{\sigma})dx+c[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})]\\&=[\sigma\phi(\frac{x}{\sigma})]|_{-\infty}^{c}+c[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})]\\&=-\sigma\phi(\frac{c}{\sigma})+c[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})]\end{aligned}$$

4.显然

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}I_{(0,1]}(x)$$

是概率密度，但由于$f^2(x)$在$(0,1]$上积分结果为无穷可知$cf^2(x)(\forall c\in\mathbb{R})$ 不是概率密度。

5.沿用第3题中记号可知所求期望为

$$\mathbb{E}|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\sigma}\phi(\frac{x}{\sigma})dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\sigma}\phi(\frac{x}{\sigma})dx=2[-\sigma\phi(\frac{x}{\sigma})]_{0}^{+\infty}=2\sigma\phi(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

Chapter 2

问题

1.记$Y=\frac{\max(X,1-X)}{\min X,1-X}$，则显见随机变量$Y$的分布函数为

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(\frac{1}{1+y}\leq X\leq\frac{y}{1+y})=\frac{y-1}{y+1}I_{[1,\infty)}(y)$$

因此所求期望为

$$\mathbb{E}Y=\int_{-\infty}^{+\infty}ydF_Y(y)=\int_1^{+\infty}\frac{2y}{(1+y)^2}dy=+\infty$$

故期望为正无穷。
注：有一件有趣的事值得注意，即随机变量Ya.s.有限，但其期望不为有限。

2.这是容易达到的，例如定义密度函数为

$$f_X(x)=I_{[0,0.1]\cup[0.9,1]}(x)+2I_{[0.2,0.4]\cup[0.6,0.8]}(x)$$

3.Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor\leq y)=\mathbb{P}(X<\lfloor y\rfloor+1)=\Phi(\frac{\lfloor y\rfloor+1}{\sigma})$$

故所求期望为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n[\Phi(\frac{n+1}{\sigma})-\Phi(\frac{n}{\sigma})]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}[n(\Phi(\frac{n+1}{\sigma})-\Phi(\frac{n}{\sigma}))-(n+1)(\Phi(\frac{-n}{\sigma})-\Phi(\frac{-n-1}{\sigma}))]\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi(\frac{n+1}{\sigma})-\Phi(\frac{n}{\sigma})\right)\\&=\Phi(0)-\Phi(+\infty)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.本题的结论可推广到一般的非负随机变量情况（不一定是连续型）。首先假设$\mathbb{E}X^n$有限，则由分部积分公式可知

$$\int_0^M nx^{n-1}(1-F_X(x))dx = M^n(1-F_X(M)) + \int_0^M x^n dF_X(x)$$

由于

$$\mathbb{E}[X^n I_{\{X>M\}}] \geq \mathbb{E}[M^n I_{\{X>M\}}] = M^n\mathbb{P}(X>M) = M^n(1-F_X(M))$$

故$\lim_{M\to+\infty} M^n(1-F_X(M)) = 0$，即在首式中取$M\to+\infty$即知

$$\int_0^\infty nx^{n-1}(1-F_X(x))dx = \int_0^\infty x^n dF_X(x) = \mathbb{E}(X^n)$$

然后考虑$\mathbb{E}X^n = \infty$的情形，则仍由首式可知

$$\int_0^M nx^{n-1}(1-F_X(x))dx \geq \int_0^M x^n dF_X(x)$$

取$M\to+\infty$即知

$$\int_0^\infty nx^{n-1}(1-F_X(x))dx = +\infty$$

即待证式仍成立。

若推广至负值的情况，则待证式可推广为

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty nx^{n-1}(1-F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 nx^{n-1}F_X(x)dx$$

其中定义$\infty-\infty$不存在。

5.沿用通常的记号即可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] &= \int_{-\infty}^\infty \frac{x-\mu}{\sigma} g(x)\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty -\sigma g(x)d[\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})] \\
&= -\sigma g(x)\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})|_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})d[-\sigma g(x)] \\
&= 0 + \sigma^2\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma}g'(x)\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})dx \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[g'(X)]
\end{aligned}$$

取$g(x) = x^n$即可知

$$\mathbb{E}(X^{n+1}) = \mu\mathbb{E}(X^n) + n\sigma^2\mathbb{E}(X^{n-1})$$

若$\mu = 0$，则由上式即可知

$$\mathbb{E}(X^{2n-1}) = 0, \mathbb{E}(X^{2n}) = \sigma^{2n}(2n-1)!!$$

Chapter 3

挑战

1.本题结论同样对任意形式的随机变量均成立。不失一般性，不妨设$m \geq \mu$，则

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathbb{E}(X-\mu)^2 \geq \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X\geq m\}}] + \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}] \\
&\geq \mathbb{E}[(m-\mu)^2 I_{\{X\geq m\}}] + \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}] = (m-\mu)^2\mathbb{P}\{X\geq m\} + \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}] \\
&\geq \frac{1}{2}(m-\mu)^2 + \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}]
\end{aligned}
$$

由中位数的定义即知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X<\mu\} = 1 - \mathbb{P}\{X>\mu\} &\leq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}[(\mu-X)I_{\{X<\mu\}}] = \mathbb{E}[(X-\mu)I_{\{X\geq\mu\}}] &\geq \mathbb{E}[(X-\mu)I_{\{X\geq m\}}] \\
&\geq (m-\mu)\mathbb{P}\{X\geq m\} \geq \frac{m-\mu}{2}
\end{aligned}
$$

故由Cauchy-Schwartz不等式即知

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}]\mathbb{E}[I_{\{X<\mu\}}] &\geq \left(\mathbb{E}[|X-\mu|I_{\{X<\mu\}}]\right)^2 \geq \frac{(m-\mu)^2}{4} \\
\Rightarrow \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I_{\{X<\mu\}}] &\geq \frac{(m-\mu)^2}{4\mathbb{P}\{X<\mu\}} \geq \frac{(m-\mu)^2}{2}
\end{aligned}
$$

代入原式中即有

$$
\sigma^2 \geq \frac{(m-\mu)^2}{2} + \frac{(m-\mu)^2}{2} = (m-\mu)^2
$$

2.待证微分方程是显然的，且易证$R(x)$满足的微分方程为：

$$
R'(x) = xR(x) - 1
$$

记

$$
P(x) = R(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}, Q(x) = P(x) - \frac{3}{x^5}
$$

则直接代入即知

$$P'(x)=xP(x)-\frac{3}{x^4}\Rightarrow P(x)=\exp(\frac{x^2}{2})\int_x^{\infty}\frac{3}{y^4}\exp(-\frac{y^2}{2})dy>0$$
$$Q'(x)=xQ(x)+\frac{15}{x^6}\Rightarrow Q(x)=-\exp(\frac{x^2}{2})\int_x^{\infty}\frac{15}{y^6}\exp(-\frac{y^2}{2})dy<0$$

即证。

注：可以通过$R(x)$满足的微分方程得到其近似级数展开：

$$R(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{na_n}{x^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^{n-1}}-1$$
$$\Rightarrow a_{2n+1}=(-1)^n(2n-1)!!,a_{2n}=0\Rightarrow R(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{x^{2n-1}}$$

3.该元件的失效率为

$$\begin{aligned}H_Z(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbb{P}(t<T\le t+\Delta t|T>t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{\mathbb{P}(t<T\le t+\Delta t)}{\mathbb{P}(T>t)}\\&=\frac{f_Z(t)}{1-F_Z(t)}\\&=\frac{\alpha\lambda\exp(-\lambda t)+(1-\alpha)\mu\exp(-\mu t)}{\alpha\exp(-\lambda t)+(1-\alpha)\exp(-\mu t)}(t\ge 0)\end{aligned}$$

4.易验证[0，1]上的均匀分布即满足此性质。（支撑点与支撑集的定义参见Note3 中Part C挑战题1）

5.2,3维时的分布函数显然为

$$F_2(x)=\frac{\pi+2\arcsin(x)}{2\pi}(-1\le x\le 1)$$
$$F_3(x)=\frac{2\pi(x+1)}{4\pi}=\frac{x+1}{2}(-1\le x\le 1)$$

故3维时长度服从均匀分布，2维时则不是。

Solution to Exercise 9

For all EE18ers(Available after May 26th, 2013)

韩衍隽

May 26, 2013

Chapter 1

热身

1.由题设可知

$$\begin{cases} Aa+B=-1 \\ Ab+B=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} Aa+B=1 \\ Ab+B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{b-a} \\ B=-\frac{a+b}{b-a} \end{cases} \text{或} \begin{cases} A=-\frac{2}{b-a} \\ B=\frac{a+b}{b-a} \end{cases}$$

2.记$g(x)=(\sin(\frac{\pi}{2}x))^4$，则由课件中的计算方法即知

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{g(x_k)=y} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} = \sum_{g(x_k)=y,a\le x_k\le b} \frac{1}{2\pi(b-a)(\sin(\frac{\pi}{2}x))^3\cos(\frac{\pi}{2}x)} \\ &= \frac{N(y)}{2\pi(b-a)y}\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}}I_{(0,1)}(y) \end{aligned}$$

其中$N(y)$表示关于x的方程$g(x)=y, x\in[a,b]$的解数。

3.不妨设$g(x)$单调增，则题设对$g(x)$的要求是

$$\lambda\exp(-\lambda y)I_{[0,+\infty)}(y) = f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$$

故可取$g(x)$为仅定义在[-1,1]上的非负函数，则上式变成

$$\begin{aligned} &\lambda\exp(-\lambda g(x)) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2g'(x)} \\ \Rightarrow &g'(x) = \frac{\exp(\lambda g(x))}{2\lambda} \\ \Rightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\exp(-\lambda g(x))\right] = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow &\exp(-\lambda g(x)) = -\frac{x}{2}+C \\ \Rightarrow &g(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(C-\frac{x}{2}) \end{aligned}$$

为使$g(x)$的值域为$[0,\infty)$，故$C=\frac{1}{2}$，故一个合适的所求函数可以为

$$g(x)=-\frac{1}{\lambda}\ln(\frac{1-x}{2})$$

4.容易由比较判别法知

$$\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x\text{存在}\Leftrightarrow\alpha>-1$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x\text{存在}\Leftrightarrow\alpha<1$$

故所求范围为$-1<\alpha<1$。

5.由课件可知Weibull分布的高阶矩为

$$\mathbb{E}(X^n)=\lambda^n\Gamma(\frac{n}{\alpha}+1)$$

故所求衰落量为

$$\begin{aligned}AF(X)&=\frac{\mathrm{var}(X^2)}{[\mathbb{E}(X^2)]^2}=\frac{\mathbb{E}(X^4)}{[\mathbb{E}(X^2)]^2}-1=\frac{\lambda^4\Gamma(\frac{4}{\alpha}+1)}{[\lambda^2\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)]^2}-1\\&=\frac{\Gamma(\frac{4}{\alpha})}{\Gamma^2(\frac{2}{\alpha})}\cdot\frac{\frac{4}{\alpha}}{\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2}-1=2^{\frac{4}{\alpha}-1}\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{\alpha})}-1\end{aligned}$$

故衰落量与λ无关，随α的增加先减小后增加。

Chapter 2

问题

1.若记$\omega_n(r), \sigma_n(r)$分别表示半径为r的n维球的体积与表面积，首先不加证明地给出以下结论：

$$\omega_n(r) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} r^{2k}, & n = 2k \\ \frac{2^k \pi^{k-1}}{(2k-1)!!} r^{2k}, & n = 2k-1 \end{cases} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n, \sigma_n(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

故由上式可知

$$\sigma_n(r) = A_n[\omega_n(r)]^{\frac{n-1}{n}}, A_n = n\sqrt{\pi}\Gamma^{-\frac{1}{n}}(\frac{n}{2}+1)$$

故若体积服从参数为λ的指数分布，则由两者间的幂函数关系即知其表面积服从的分布为Weibull分布，其参数分别为

$$(\lambda, \alpha) = ((A_n\lambda)^{-\frac{n-1}{n}}, \frac{n}{n-1})$$

2.该函数是个单调减函数，故其概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{f_X(x)}{\frac{f_X(x)}{2F_X(x)\sqrt{-\ln F_X(x)}}} (x := g^{-1}(y))$$
$$= 2F_X(x)\sqrt{-\ln F_X(x)} = 2y\exp(-y^2) I_{[0,+\infty)}(y)$$

3.求算此最大值点等价于求算$x^{p-1}(1-x)^{q-1}$的最大值点，其一阶条件为：

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\frac{p-1}{x} - \frac{q-1}{1-x}) = 0 \Rightarrow x = \frac{p-1}{p+q-2}$$

而该值不一定在$(0,1)$开区间内，故完整结果应为：若$p < 1$或$q < 1$，则无众数；若$p = q = 1$，则众数为[0，1]；其它情况下，众数为$\frac{p-1}{p+q-2}$。

4.显见$g(x) = \ln\ln(1/x)$是关于x的减函数，故$Y = g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{-g'(g^{-1}(y))} = -g^{-1}(y)\ln g^{-1}(y) = \exp(-\exp(y) + y)$$

该分布与Pareto分布间的联系如下：Pareto分布是指数分布的指数，而该分布是指数分布的对数。（注意对于$X \sim U(0,1)$，$\ln \frac{1}{X}$服从参数为1的指数分布。）

5.显然由分布函数的定义可知

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^+ \leq y) = F_X(y) I_{[0,+\infty)}(y) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) I_{[0,+\infty)}(y) + F_X(0)\delta(y)$$

注：两个仅在零测集（零概率集）上取不同值的概率密度函数是相同的，因此可以给导数不存在的点随意赋一个值。

Chapter 3

挑战

1.由于$g(\theta)=\cos(\frac{\theta}{2})$，故由于$\theta\sim U(0,\pi)$可知所求概率密度为

$$f_X(x)=\frac{f_\Theta(g^{-1}(x))}{-g'(g^{-1}(x))}=\frac{2I_{[0,1]}(x)}{\pi\sin(\frac{g^{-1}(x)}{2})}=\frac{2}{\pi}\frac{I_{[0,1]}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

注：这里的随机取点认为是两者所对圆心角（取范围$[0,\pi]$）服从均匀分布，若用其它方式（如弦中点到圆心的距离服从均匀分布）则会得到不同的结果，这与Bertrand悖论的道理是相同的，即样本空间需要被确定。

2.显然$h(k)\in[0,1]$，因此对于任意非负整数n有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z>n)&=\mathbb{P}(\cap_{k=0}^{n}\{\omega:U_k(\omega)>h(k)\})=\prod_{k=0}^{n}\mathbb{P}(U_k>h(k))\\&=\prod_{k=0}^{n}(1-h(k))=\prod_{k=0}^{n}(1-\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X\geq k)})=\prod_{k=0}^{n}\frac{\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X\geq k)}\\&=\prod_{k=0}^{n}\frac{\mathbb{P}(X\geq k+1)}{\mathbb{P}(X\geq k)}=\frac{\mathbb{P}(X\geq n+1)}{\mathbb{P}(X\geq 0)}=\mathbb{P}(X>n)\end{aligned}$$

故二者同分布，证毕。

3.记R的坐标为$(X,0)$，其中$X\sim N(0,\sigma^2)$，则三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\\X&0&1\end{pmatrix}\right|=|X|$$

故若记$g(x)=|x|$，则S的概率密度为

$$f_S(s)=\left(\frac{f_X(-s)}{|g'(-s)|}+\frac{f_X(s)}{|g'(s)|}\right)I_{[0,\infty)}(s)=\frac{2}{\sigma}\phi(\frac{s}{\sigma})I_{[0,\infty)}(s)$$

4.不妨取X为严格正随机变量，则其概率密度$f_X(x)$需要满足的充分必要条件为

$$f_X(x)=\frac{f_X(\frac{1}{x})}{(x^{-1})^{-2}}=x^{-2}f_X(\frac{1}{x})$$

故容易验证

$$f_X(x)=\frac{c}{a(x^2+1)+bx}$$

形式的密度函数满足题设，如

$$f(x)=\frac{I_{[0,\infty)}(x)}{(1+x)^2}$$

5.考虑相互独立的服从$[0,1]$上均匀分布的随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$，用Y表示这n个随机变量中第k小的值，下面考虑Y的概率密度，即考虑$\mathbb{P}(x<Y<x+\Delta x)$。若$X_j(1\le j\le n)$中仅有一个在此范围内(记此事件为$A_1$)，则其概率为

$$\mathbb{P}(x<Y<x+\Delta x,A_1)=n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x-\Delta x)^{n-k}\Delta x$$

而若有两个以上在此范围内（记此事件为A_2），则其概率为

$$\mathbb{P}(x<Y<x+\Delta x,A_2)\le\binom{n}{2}(\Delta x)^2$$

因此概率密度为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbb{P}(x<Y<x+\Delta x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}\\&=n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\sim\mathrm{beta}(k,n-k+1)\end{aligned}$$

而若记X表示$X_j(1\le j\le n)$中小于p的个数，则显见$X\sim B(n,p)$，故

$$\mathbb{P}(Y\ge p)=\mathbb{P}\{X_j(1\le j\le n)\text{中有少于}k\text{个小于}p\}=\mathbb{P}(X<k)$$

故与题设进行比较即知$a=k,b=n+1-k$。
注：还有一种直接证明的方式如下：由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathbb{P}(X\le k-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{(k-1)\wedge i}(-1)^{i-j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\right]p^i\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\left[\sum_{j=0}^{(k-1)\wedge i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right]p^i\\&=\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}\left[\sum_{j=0}^{(k-1)\wedge i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right]p^{i-1}\end{aligned}$$

容易用归纳法证明下式：

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}=(-1)^k\binom{n-1}{j}$$

代入上式中即知

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathbb{P}(X\le k-1)&=\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}\left[\sum_{j=0}^{(k-1)\wedge i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right]p^{i-1}\\
&=\sum_{i=1}^{n}i\binom{n}{i}(-1)^{i-(k-1)\wedge i}\binom{i-1}{(k-1)\wedge i}p^{i-1}\\
&=\sum_{i=k}^{n}n\binom{n-1}{i-1}(-1)^{i-(k-1)}\binom{i-1}{k-1}p^{i-1}\\
&=-n\binom{n-1}{k-1}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n-k}{i-k}p^{i-1}\\
&=-n\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\
&=-f_Y(p)(Y\sim\mathrm{beta}(k,n+1-k))
\end{aligned}$$

而后积分即得结论。

Solution to Exercise 10

For all EE18ers(Available after June 9th, 2013)

韩衍隽

June 9, 2013

Chapter 1

热身

1.由Gamma分布的定义即知X, Y的密度函数分别为

$$f_X(t) = \frac{\alpha^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} \exp(-\alpha t) I_{[0,\infty)}(t)$$
$$f_Y(t) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \exp(-\alpha t) I_{[0,\infty)}(t)$$

故由独立随机变量和的卷积性质知

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(t) = f_X * f_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u) \mathrm{d}u \\ &= \frac{\alpha^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \exp(-\alpha t) I_{[0,\infty)}(t) \int_0^t u^{m-1}(t-u)^{n-1} du \\ &= \frac{\alpha^{m+n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \exp(-\alpha t) I_{[0,\infty)}(t) t^{m+n-1} \mathrm{B}(m,n) \\ &= \frac{\alpha^{m+n}}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1} \exp(-\alpha t) I_{[0,\infty)}(t) \end{aligned}$$

即它们的和服从$Ga(\alpha, m+n)$。
注：可以验证（借助复变函数中的留数定理）若$X \sim Ga(n, \alpha)$，则X的特征函数为

$$\phi_X(\theta) = (1 - \mathrm{i}\alpha^{-1}\theta)^{-n}$$

故由独立随机变量和的特征函数为各特征函数的乘积即同样可得Gamma分布的加成性。

2.所求概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<Y) &= \iint_{x<y} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda\mu \iint_{x<y} \exp(-\lambda x-\mu y) I_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \lambda\mu \int_0^\infty \exp(-\mu y)\int_0^y \exp(-\lambda x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \mu \int_0^\infty \exp(-\mu y)(1-\exp(-\lambda y))\mathrm{d}y \\ &= 1-\frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\end{aligned}$$

3.边缘分布为

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = cxI_{[0,1]}(x)\int_x^1 y(1-y)\mathrm{d}y = \frac{c}{6}x(2x^3-3x^2+1)I_{[0,1]}(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = cy(1-y)I_{[0,1]}(y)\int_0^y x\mathrm{d}x = \frac{c}{2}y^3(1-y)I_{[0,1]}(y)\end{aligned}$$

由全积分为1可解得$c=40$，故可得两者均值分别为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{40}{6}\left(\frac{2}{6}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \\ \mathbb{E}(Y) &= \frac{40}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

由$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$知它们不独立。

4.由题意设

$$f_X(x) = \frac{1}{2\lambda}\exp(-\frac{|x|}{\lambda}), f_Y(y) = \frac{1}{2\mu}\exp(-\frac{|x|}{\mu})$$

则X的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{\mathrm{i}\theta X}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda}\exp(\mathrm{i}\theta x-\frac{|x|}{\lambda}) \\ &= \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\mathrm{i}\theta}+\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-\mathrm{i}\theta}\right) \\ &= \frac{1}{1+\lambda^2\theta^2}\end{aligned}$$

故$X+Y$的特征函数为

$$\phi_{X+Y}(\theta) = \phi_X(\theta)\phi_Y(\theta) = \frac{1}{(1+\lambda^2\theta^2)(1+\mu^2\theta^2)}$$

因此$X+Y$的密度函数为

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{X+Y}(\theta)\exp(-\mathrm{i}\theta t)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mathrm{i}\theta t)}{(1+\lambda^2\theta^2)(1+\mu^2\theta^2)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\pi}(\mathrm{Res}(g;-\lambda^{-1}\mathrm{i})+\mathrm{Res}(g;-\mu^{-1}\mathrm{i}))(g(\theta):=\frac{\exp(-\mathrm{i}\theta|t|)}{(1+\lambda^2\theta^2)(1+\mu^2\theta^2)}) \\
&= \begin{cases} \dfrac{\lambda\exp(-\frac{|t|}{\lambda})-\mu\exp(-\frac{|t|}{\mu})}{2(\lambda^2-\mu^2)}, & \lambda\neq\mu; \\ \dfrac{(|t|+\lambda)\exp(-\frac{|t|}{\lambda})}{4\lambda^2}, & \lambda=\mu. \end{cases}
\end{aligned}$$

注；本题直接利用卷积进行求算亦可得到结果。

5.记$U=XY,V=X/Y$，则

$$X=\sqrt{UV},Y=\sqrt{\frac{U}{V}}$$

因此所求联合密度为

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= \left|\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\right| f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v)) \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \end{pmatrix}\right| I_{[0,1]}(\sqrt{uv})2\sqrt{\frac{u}{v}}I_{[0,1]}(\sqrt{\frac{u}{v}}) \\
&= \sqrt{\frac{u}{v^3}}I_{[0,\min(v,v^{-1})]}(u)I_{[0,\infty)}(v)
\end{aligned}$$

Chapter 2

问题

1.设点的坐标为(X,Y)，此最短距离为Z，则

$$\mathbb{P}(Z>t)=\mathbb{P}(t<X<1-t,t<Y<1-t)=(1-2t)^2I_{[0,\frac{1}{2}]}(t)+I_{[-\infty,0)}(t)$$

因此所求密度函数为

$$f_Z(z)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbb{P}(Z>z)=2(1-2z)I_{[0,\frac{1}{2}]}(z)$$

2.此题有误，因为

$$\begin{aligned}F_{X+Y+Z}(t)&=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(v,w,u-v-w)\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}u\\&=\left[\int_{-\infty}^{t}h(u)\mathrm{d}u\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right]\end{aligned}$$

而最后一个表达式中的积分项将为无穷，这显然矛盾！

3.记Y,Z分别是其整数部分与小数部分，考虑其联合累积分布函数，则有

$$\begin{aligned}F_{Y,Z}(y,z)=\mathbb{P}(Y\le y,Z\le z)=\sum_{k=0}^{\lfloor y\rfloor}\mathbb{P}(Y=k,Z\le z)\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor y\rfloor}\mathbb{P}(k\le X\le k+\min(z,1))I_{[0,\infty)}(z)\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor y\rfloor}[\exp(-\lambda k)-\exp(-\lambda(k+\min(z,1)))]I_{[0,\infty)}(z)\\&=\frac{(1-\exp(-\min(z,1)))(1-\exp(-\lambda(\lfloor y\rfloor+1)))}{1-\exp(-\lambda)}I_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(y,z)\end{aligned}$$

4.为使题目得到简化，假设X_1是连续型随机变量（老师的意思也是如此），则易通过积分得到

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \cdots < X_n) = \int_{x_1<x_2<\cdots<x_n} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

记

$$G_n(x) = \int_{x_1<x_2<\cdots<x_n\leq x} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

下用归纳法证明

$$G_n(x) = \frac{1}{n!}F^n(x)$$

其中F为分布函数。

$n=1$时结论显然。假设结论对$n\geq 1$成立，则

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)\left[\int_{x_1<x_2<\cdots<x_n\leq u} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x} f(u)F^n(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{F^{n+1}(u)}{n+1}\right)\Bigg|_{-\infty}^{x} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}F^{n+1}(x)
\end{aligned}$$

故由归纳法即证得该结论。由此结论立得本题所求概率为

$$\frac{F^n(+\infty)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

5.考虑如下的离散分布：

$$\mathbb{P}(X=Y=-1) = \mathbb{P}(X=Y=1) = \frac{1}{2}$$

则易验证此分布满足题设条件。

Chapter 3

挑战

1.首先，易证$\ln X$的密度函数为

$$f_{\ln X}(t)=f_X(\exp(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(t))=\exp(t)I_{(-\infty,0]}(t)$$

因此若记$M=\ln X+\ln Y$，则M的密度函数为

$$\begin{aligned}f_M(t)=f_{\ln X}*f_{\ln Y}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\ln X}(u)f_{\ln Y}(t-u)\mathrm{d}u\\&=\exp(t)I_{(-\infty,0]}(t)\int_t^0\mathrm{d}u\\&=-t\exp(t)I_{(-\infty,0]}(t)\end{aligned}$$

再记$N=ZM$，则N的密度函数求算如下(注意$M\leq 0,Z\geq 0$):

$$\begin{aligned}F_N(t)&=I_{(-\infty,0]}(t)\int_{-\infty}^0\int_{\frac{t}{m}}^{\infty}f_{M,Z}(m,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}m\\ \Rightarrow f_N(t)&=I_{(-\infty,0]}(t)\int_{-\infty}^0-\frac{1}{m}f_{M,Z}(m,\frac{t}{m})\mathrm{d}m\\&=I_{(-\infty,0]}(t)\int_{-\infty}^0-\frac{1}{m}\cdot(-m)\exp(m)I_{[0,1]}(\frac{t}{m})\mathrm{d}m\\&=I_{(-\infty,0]}(t)\int_{-\infty}^t\exp(m)\mathrm{d}m\\&=\exp(t)I_{(-\infty,0]}(t)\end{aligned}$$

因此$W=(XY)^Z=\exp(N)$的密度函数：

$$f_W(t)=f_N(\ln t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t)I_{[0,\infty)}(t)=I_{[0,1]}(t)$$

故$(XY)^Z$服从均匀分布$U(0,1)$。

2.先证明一个辅助结论。由于对于相互独立的随机变量$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，有$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$，因此若取$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1$即可知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(b-ax)\phi(x)\mathrm{d}x=\mathbb{P}(X+aY\le b)=\Phi(\frac{b}{\sqrt{1+a^2}})$$

故$U=\dfrac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_U(u)&=\mathbb{P}(X+YZ\le u\sqrt{1+Z^2})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(z)\phi(y)\Phi(u\sqrt{1+z^2}-yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\Phi(u\sqrt{1+z^2}-yz)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_Z(z)\Phi(u)\mathrm{d}z\\&=\Phi(u)\end{aligned}$$

故$f_U(u)=\phi(u)$，即U服从标准正态分布。

注：值得注意的是，本题的结论与Z的具体分布无关，只需Z与X,Y独立即可。

3.不妨取定其中一个点，另两个点与该点（按同一方向）对应的圆心角分别为$2\theta_1,2\theta_2\in[0,2\pi)$，则三角形的最大内角为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\max(\min(2\theta_1,2\theta_2),|2\theta_2-2\theta_1|,\min(2\pi-2\theta_1,2\pi-2\theta_2))\\=&\max(\min(\theta_1,\theta_2),|\theta_2-\theta_1|,\min(\pi-\theta_1,\pi-\theta_2))\end{aligned}$$

因此记$X=\min(\theta_1,\theta_2),Y=\max(\theta_1,\theta_2)$，则由课件Part B中顺序统计量的介绍可知$X,Y$的联合分布密度为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{2!}{\pi^2}I_{x<y}(x,y)$$

故记最大角为Z，其分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\iint_{x\le z,y-x\le z,\pi-y\le z}f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\pi^2}\int_{\max(\pi-z,0)}^{\pi}I_{[\frac{y}{2},\infty)}(z)\int_{\max(y-z,0)}^{\min(y,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\pi^2}I_{\max(\pi-z,0)\le\min(\pi,2z)}(z)\int_{\max(\pi-z,0)}^{\min(\pi,2z)}[\min(y,z)-\max(y-z,0)]\mathrm{d}y\\&=\begin{cases}\dfrac{(3z-\pi)^2}{\pi^2}I_{[\frac{\pi}{3},\infty)}(z), & z\le\frac{\pi}{2};\\ \min(\dfrac{6\pi z-3z^2-2\pi^2}{\pi^2},1), & z>\frac{\pi}{2}.\end{cases}\\&=\frac{(3z-\pi)^2}{\pi^2}I_{[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})}(z)+(1-\max(\frac{3(\pi-z)^2}{\pi^2},0))I_{[\frac{\pi}{2},\infty)}(z)\\ \Rightarrow f_Z(z)&=\frac{6(3z-\pi)}{\pi^2}I_{[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})}(z)+\frac{6(\pi-z)}{\pi^2}I_{[\frac{\pi}{2},\pi]}(z)\end{aligned}$$

4.对于相互独立的$X \sim Ga(\alpha,\lambda), Y \sim Ga(\beta,\lambda)$，则对于$u>0$有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq uY) &= \frac{(\alpha\beta)^\lambda}{\Gamma^2(\lambda)} \iint_{0\leq x\leq uy} (xy)^{\lambda-1}\exp(-\alpha x - \beta y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{(\alpha\beta)^\lambda}{\Gamma^2(\lambda)} \int_{u^{-1}}^{\infty}\int_0^{\infty} (x^2t)^{\lambda-1}\exp(-\alpha x - \beta tx)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,t)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t(t:=\frac{y}{x}) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^\lambda}{\Gamma^2(\lambda)} \int_{u^{-1}}^{\infty} t^{\lambda-1}\int_0^{\infty} x^{2\lambda-1}\exp(-(\alpha+\beta t)x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{(\alpha\beta)^\lambda}{\Gamma^2(\lambda)} \int_{u^{-1}}^{\infty} \Gamma(2\lambda)\frac{t^{\lambda-1}}{(\alpha+\beta t)^{2\lambda}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因此$Z=\dfrac{X}{X+Y}$的分布函数为

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(\frac{X}{X+Y}\leq z) = \mathbb{P}(X \leq \frac{z}{1-z}Y) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^\lambda\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}\int_{\frac{1-z}{z}}^{\infty}\frac{t^{\lambda-1}}{(\alpha+\beta t)^{2\lambda}}\mathrm{d}t(z\in[0,1])
\end{aligned}$$

故密度函数为

$$\begin{aligned}
f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_Z(z) &= \frac{(\alpha\beta)^\lambda\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}\frac{1}{z^2}\frac{\left(\dfrac{1-z}{z}\right)^{\lambda-1}}{(\alpha+\beta\dfrac{1-z}{z})^{2\lambda}}I_{[0,1]}(z) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^\lambda\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}\frac{(z(1-z))^{\lambda-1}}{(\alpha z+\beta(1-z))^{2\lambda}}I_{[0,1]}(z)
\end{aligned}$$

5.应用条件密度求解。首先，容易验证以下结论：对于一个服从均匀分布$U(0,t)$的随机变量X，$Y=\min(x,t-x)$的密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{2}{t}I_{[0,\frac{t}{2}]}(y) \sim U(0,\frac{t}{2})$$

因此若记R为第一次折断的较小段长度，S为第二次折断的较小段长度，则

$$f_R(r) = 2I_{[0,\frac{1}{2}]}(r), f_{S|R}(s|r) = \frac{2}{1-r}I_{[0,\frac{1-r}{2}]}(s)(0\leq r\leq\frac{1}{2})$$

而三段能构成三角形的充要条件为$R+S>\frac{1}{2}$，即所求概率

$$p = \int_0^{\frac{1}{2}} f_R(r)\int_{\frac{1}{2}-r}^{\frac{1-r}{2}} f_{S|R}(s|r)\mathrm{d}s\mathrm{d}r = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}-r}^{\frac{1-r}{2}}\frac{2}{1-r}\mathrm{d}s\mathrm{d}r = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r}{1-r}\mathrm{d}r = 2\ln 2 - 1$$

Solution to Exercise 11

For all EE18ers(Available after June 16th, 2013)

韩衍隽

June 16, 2013

Chapter 1

热身

1.直接由定义可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X-Y||Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty}|x-y|f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 |x-y|\mathrm{d}x \\ &= y^2-y+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

且上式有定义的范围为$y\in[0,1]$。

2.显然边缘密度为

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^y c\exp(-y)I_{[0,\infty)}(y)\mathrm{d}x \\ &= cy\exp(-y)I_{[0,\infty)}(y)\end{aligned}$$

故条件密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{y}I_{[0,y]}(x)(y\geq 0)$$

因而条件期望为

$$\mathbb{E}(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_0^y\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\frac{y}{2}(y\geq 0)$$

3.显然

$$
\begin{aligned}
f_{X,Z}(x,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} c\mathrm{d}y I_{x^2+z^2\le 1}(x,z) \\
&= 2c\sqrt{1-x^2-z^2} I_{x^2+z^2\le 1}(x,z) \\
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2c\sqrt{1-z^2-x^2}\mathrm{d}x I_{[-1,1]}(z) \\
&= \int_0^{\pi} 2c(1-z^2)\sin^2\theta \mathrm{d}\theta I_{[-1,1]}(z) \\
&= c\pi(1-z^2) I_{[-1,1]}(z) \\
f_{X|Z}(x,z) &= \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{2\sqrt{1-x^2-z^2} I_{[-\sqrt{1-z^2},\sqrt{1-z^2}]}(x)}{\pi(1-z^2)} (-1\le z\le 1)
\end{aligned}
$$

4.没看懂，如果是指数分布的话可以算得此期望为无穷。

5.直接求算知

$$\mathbb{E}(X|Y=1) = \mathbb{E}(X-Y|Y=1) + \mathbb{E}(Y|Y=1) = 6+1=7$$

Chapter 2

问题

1.随意取一个满足Ya.s.有限但$\mathbb{E}(Y)$为无穷的随机变量，取$X=Y$即得得到一个合适的构造。

2.条件概率为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)&=\frac{\mathbb{P}(X=k,X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\&=\frac{\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=n-j)}\\&=\frac{(1-p)^{n-2}p^2}{\sum_{j=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}p^2}\\&=\frac{1}{n-1}(1\leq k<n)\end{aligned}$$

3.定义条件方差为

$$\mathrm{Var}(X|Y)=\mathbb{E}(X^2|Y)-(\mathbb{E}(X|Y))^2$$

因而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|Y))&=\mathbb{E}[\mathbb{E}(X^2|Y)-(\mathbb{E}(X|Y))^2]=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|Y))^2]\\\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y))&=\mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|Y))^2]-[\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)]^2=\mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|Y))^2]-(\mathbb{E}(X))^2\end{aligned}$$

两者相加即证。

4.设正面向上数目为N，第k次抛掷结果为X_k(正面为1，反面为0)，则

$$\mathbb{E}(N|X_1=1)=\frac{1}{2}(1+1+\mathbb{E}(N|X_1=1))\Rightarrow\mathbb{E}(N|X_1=1)=2$$
$$\mathbb{E}(N|X_1=0)=\mathbb{E}(N)=\frac{1}{2}(\mathbb{E}(N|X_1=0)+\mathbb{E}(N|X_1=1))\Rightarrow\mathbb{E}(N|X_1=0)=2$$

因此

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(N|X_1 = 0) + \mathbb{E}(N|X_1 = 1)\right) = 2$$

5.借助指数分布的无记忆性即知

$$\mathbb{E}(X|X > 1) = 1 + \mathbb{E}(X - 1|X > 1) = 1 + \mathbb{E}(X) = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

Chapter 3

挑战

(暂略)