

Metody numeryczne 2023/2024: lista 3

- Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Zdefiniujmy macierz $\mathbf{P} = \mathbb{1} - 2 \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}$.
 - Wyznacz \mathbf{P}^{-1} .
 - Znajdź wektory i wartości własne macierzy \mathbf{P} .
 - Oblicz wyznacznik macierzy \mathbf{P} .
 - Podaj interpretację geometryczną macierzy \mathbf{P} .
- Przyjmijmy $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x} \mp \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1$, gdzie $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, \dots, 0)$. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Oblicz $\mathbf{P}\mathbf{x}$ dla macierzy \mathbf{P} z 1. zadania.
- Używając transformacji Householdera dokonaj rozkładu QR następujących macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -4 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oraz rozwiąż układy równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{B}\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$.

- Metodą obrotów Givensa znajdź faktoryzację QR następującej macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{11}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{9}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Udowodnij, że dla nieosobliwej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ (\mathbf{Q} – macierz ortogonalna, \mathbf{R} – macierz trójkątna górna) jest jednoznaczny jeśli przyjmiemy, że elementy na diagonalu macierzy \mathbf{R} są dodatnie.
- Udowodnij wzór Shermana-Morrisona

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

dla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$, $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ oraz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Do czego można ten wzór wykorzystać?

- (zadanie numeryczne NUM4) Zadana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 8 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 8 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 12 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 12 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

oraz wektor $\mathbf{b} \equiv (5, \dots, 5)^T$. Macierz \mathbf{A} ma liczby 12 na diagonalu, 8 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na $N = 80$.

- Rozwiąż numerycznie równanie $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, stosując odpowiednią metodę. **Uwaga:** algorytm należy go zaimplementować samodzielnie.
- Sprawdź swój wynik przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
- Potraktuj N jako zmienną i zmierz czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji N . Wynik przedstaw na wykresie. Czy wykres jest zgodny z oczekiwaniami?