Metod numeryczne 2023/2024: lista 5

(*numeryczne zagadnienie własne*)

1. (*metoda potęgowa*) Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą rzeczywistą symetryczną o wymiarach $N \times N$. Niech $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ oraz $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N > 0$. Wybierzmy wektor $\mathbf{y}_1$, spełniający warunek $\mathbf{y}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0$ (poza tym dowolny). Zdefiniujmy iterację:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{A}\mathbf{y}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_k}{||\tilde{\mathbf{y}}_k||} \end{cases}$$

Uzasadnij, że $\mathbf{y}_k$ zbiega do wektora własnego odpowiadającego λ_1. Przedyskutuj charakter zbieżności tej metody.

2. (*metoda Wilkinsona*) Rozważmy przypadek kiedy $\lambda_1 \approx \lambda_2$. Zmodyfikujmy macierz $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A} - p\mathbb{I}$, gdzie $\mathbb{I}$ to macierz jednostkowa. Jak należy dobrać współczynnik p, żeby poprawić zbieżność metody potęgowej?

3. Jak można zastosować metodę z zadania 1. do znalezienia *najmniejszej* wartości własnej macierzy $\mathbf{A}$ i odpowiadającego jej wektora własnego?

4. (*ogólniejsza analiza*) Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą rzeczywistą symetryczną o wymiarach $N \times N$, $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ oraz $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_N|$. Zakładamy ponadto, że nie ma takiej pary indeksów $\{i, j\}$, że $\lambda_i \neq \lambda_j$ i $|\lambda_i| = |\lambda_j|$. Wybierzmy dowolny punkt startowy $\mathbf{y}_1$ i zdefiniujmy iterację

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{A}\mathbf{y}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_k}{||\tilde{\mathbf{y}}_k||_\infty} \end{cases} .$$

Pokaż, że ciąg $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_6, \ldots$ jest zbieżny.

5. Pokaż, jak sprowadzić zagadnienie własne z macierzą hermitowską $\mathbf{H}$ do zagadnienia własnego z macierzą rzeczywistą symetryczną.

6. (*algorytm QR*) Dla zadanej macierzy $\mathbf{A}$ określmy ciąg macierzy $\mathbf{A}_k$ w następujący sposób: $\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$, $\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1}\mathbf{Q}_{i-1}$ (dla $k = 1, 2, \ldots$). Uzasadnij, że jeżeli iloczyn $\mathbf{P}_i \equiv \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \ldots \mathbf{Q}_i$ jest zbieżny dla $k \to \infty$, to ciąg $\mathbf{A}_i$ jest zbieżny do macierzy trójkątnej górnej. Znaczenie macierzy $\mathbf{Q}_i$ i $\mathbf{R}_i$ jest takie, jak w rozkładzie QR.

7. Pokaż, że macierz symetryczna zachowuje swoją strukturę po iteracji algorytmu QR.

8. Górną macierzą Hessenberga nazywamy macierz $\mathbf{A}$, dla której zachodzi $A_{ij} = 0$ dla $j < i - 1$. Niech $\det\mathbf{A} \neq 0$. Pokaż, że iteracja algorytmu QR zachowuje jej strukturę. Ponadto, uzasadnij, że rozkład QR macierzy Hessenberga o wymiarze $N \times N$ wymaga tylko $O(N^2)$ operacji.

9. Zaproponuj metodę sprowadzenia macierzy kwadratowej do postaci Hessenberga za pomocą transformacji podobieństwa. Doprowadź macierze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 & -3 \\ 4 & 14 & -3 & -8 \\ 2 & 6 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

do postaci Hessenberga.

10. **(zadanie numeryczne NUM 6)** Zadana jest macierz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Stosując metodę potęgową znajdź największą co do modułu wartość własną macierzy $\mathbf{M}$ oraz odpowiadający jej wektor własny. Na wykresie w skali logarytmicznej zilustruj zbieżność metody w funkcji ilości wykonanych iteracji.

(b) Stosując algorytm QR bez przesunięć, opisany w zadaniu nr 6, znajdź wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{M}$. Zademonstruj, że macierze $\mathbf{A}_i$ upodabniają się do macierzy trójkątnej górnej w kolejnych iteracjach. Przeanalizuj i przedstaw na odpowiednim wykresie, jak elementy diagonalne macierzy $\mathbf{A}_i$ ewoluują w funkcji indeksu i.

(c) Zastanów się, czy zbieżność algorytmu z pkt. (a) i (b) jest zadowalająca. Jak można usprawnić te algorytmy?

Wyniki sprawdź używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej.