Metody numeryczne 2023/2024: lista 6

zagadnienie interpolacji

1. Sformułuj zagadnienie interpolacji.
2. Niech funkcja $f(x)$ przyjmuje w punktach $x_0, \ldots, x_n$ wartości $y_0 = f(x_0), \ldots y_n = f(x_n)$. Udowodnij, że istnieje *dokładnie jeden* wielomian interpolacyjny stopnia nie większego niż n, który w punktach x_i przejmuje wartości y_i.
3. (Wzór interpolacyjny Lagrange'a) Przyjmijmy znów $y_i \equiv f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Zapiszmy wielomian interpolacyjny jako $W_n(x) \equiv y_0\Phi_0(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x)$, gdzie $\Phi_i(x)$ są wielomianami stopnia nie większego niż n, które spełniają warunek $\Phi_j(x_i) \equiv \delta_{ij}$. Biorąc pod uwagę, że $W_n(x_i) \equiv f(x_i)$ dla $i = 0, \ldots, n$, znajdź postać wielomianów $\Phi_i(x)$.
4. Znajdź wielomian interpolacyjny trzeciego stopnia, który w punktach $-1, 0, 1, 2$ przyjmuje wartości $2, 1, 4, 5$.
5. **(Zadanie numeryczne NUM 7)** Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1, 1\rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$ dla

   (a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$,

   (b) $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(i = 0, \ldots, n)$.

   Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić $W_n(x)$ dla różnych n na jednym wykresie). Zaproponuj również inne funkcje i znajdź dla nich wielomiany interpolacyjne dla węzłów zdefiniowanych w pkt. (a) i (b). Czy nasuwają się jakieś wnioski?

   UWAGA: Nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku). Algorytm należy zaimplementować samodzielnie.
6. Sformułuj problem interpolacji za pomocą funkcji sklejanych ("splajnów").
7. Niech zadana będzie jednorodna siatka $n+1$ punktów $x_i = a + (b-a)\cdot\frac{i}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$, dla której znamy wartości funkcji $f(x_i) \equiv y_i$. Pokaż, że funkcja zadana przedziałami w następujący sposób:

   $$s(x) \equiv \xi_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + \xi_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad \text{dla } x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle,$$

   gdzie $h \equiv (b-a)/n$, $A_i \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(\xi_i - \xi_{i-1})$, $B_i \equiv y_{i-1} - \xi_{i-1}\frac{h^2}{6}$, spełnia następujące warunki:

   (a) $s(x)$ jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$,

   (b) $s(x_i) = y_i$ dla $i = 0, \ldots, n$,

   (c) $s''(x_i) = \xi_i$,

   (d) $s(x)$ ma ciągłą drugą pochodną na przedziale $\langle a, b\rangle$.
8. Na funkcję $s(x)$ z poprzedniego zadania nałóżmy dodatkowe warunki: $s'(x_i + 0^+) \equiv s'(x_i - 0^+)$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ (tj. ciągłość pierwszej pochodnej w punktach sklejania). Wyprowadź równania na ξ_i wynikające z tego założenia. Przedyskutuj postać równań dla $\xi_0 = \xi_n = 0$. Jak można te równania efektywnie rozwiązywać?