Metody numeryczne 2023/2024: lista 1

1. Znajdź rozwinięcie binarne liczb:
   (a) 13
   (b) 175
2. Znajdź rozwinięcie binarne następujących liczb:
   (a) 1/10
   (b) 1/7
   (c) 1.5_{10} (indeks 10 oznacza, że liczba podana jest w systemie dziesiętnym)
3. Tymczasowo przyjmijmy następującą (uproszczoną) reprezentację liczb zmiennoprzecinkowych:

$$x = \underbrace{(s_m)}_{\text{znak}} \underbrace{b_{m1}b_{m2}b_{m3}b_{m4}}_{\text{mantysa}} \underbrace{(s_w)b_{w1}b_{w2}}_{\text{wykładnik}} = (-1)^{s_m}\left(\frac{b_{m1}}{2}+\frac{b_{m2}}{4}+\frac{b_{m3}}{8}+\frac{b_{m4}}{16}\right)\times 2^{(-1)^{s_w}(2\cdot b_{w1}+1\cdot b_{w2})}.$$

   Ponadto, zastosujmy najprostszą metodę zaokrąglania – przy konwersji liczb i podczas kroków pośrednich obliczeń odrzucamy wszelkie "nadmiarowe" bity (urywanie), np. (0)101011101(1)10 → (0)1010(1)10. Używając tego formatu zapisu, oblicz $r = x_1 - x_2$, gdzie $x_1 = 0.50000$ i $x_2 = 0.46875$. Porównaj rezultat z wynikiem dokładnym.
4. Załóżmy, że liczby x i y są obarczone błędami, odpowiednio δx i δy. Omów, jak te błędy wpływają na wielkości (a) $x+y$, (b) $x-y$, (c) $x\cdot y$, (d) x/y.
5. Przybliżmy pochodną funkcji f w punkcie x przez iloraz $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Przyjmij, że względne błędy wynikające z zaokrągleń są rzędu (a) 10^{-16} i (b) 10^{-7} (skąd te wartości?). Jakie są pozostałe źródła niepewności? Dobierz optymalną wartość h dla przypadków (a) i (b).
6. (**Zadanie numeryczne NUM1**) Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:
   (a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
   (b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

   Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $|D_h f(x) - f'(x)|$ dla funkcji $f(x) = \sin(x^2)$ oraz punktu $x = 0.2$ przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl $|D_h f(x) - f'(x)|$ w funkcji h w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.
7. Zadana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.000001 \end{pmatrix}.$$

   Rozwiąż dwa układy równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}_1$ i $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}_2$ przyjmując $\mathbf{y}_1 \equiv (8, 8)$ oraz $\mathbf{y}_1 \equiv (8, 8.00001)$. Porównaj i przedyskutuj wyniki. W tym celu wyznacz współczynnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$.
8. Pokaż, że norma indukowana macierzy $||\mathbf{A}||_{pq} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Ax}||_q}{||\mathbf{x}||_p}$ jest istotnie normą $(p, q = 1, 2, \infty)$.
9. Znajdź normę (indukowaną przez normę euklidesową) macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. *(trudniejsze zadanie)* Znajdź normę (indukowaną przez normę euklidesową) macierzy

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Pokaż, że współczynnik uwarunkowania $\kappa = ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{A}^{-1}||$ macierzy symetrycznej rzeczywistej $\mathbf{A}$ można wyrazić za pomocą jej wartości własnych λ_i jako $\kappa = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}$.

12. (**Zadanie numeryczne NUM2**) Zadane są macierze

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2.554219275 & 0.871733993 & 0.052575899 & 0.240740262 & 0.316022841 \\ 0.871733993 & 0.553460938 & -0.070921727 & 0.255463951 & 0.707334556 \\ 0.052575899 & -0.070921727 & 3.409888776 & 0.293510439 & 0.847758171 \\ 0.240740262 & 0.255463951 & 0.293510439 & 1.108336850 & -0.206925123 \\ 0.316022841 & 0.707334556 & 0.847758171 & -0.206925123 & 2.374094162 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2.645152285 & 0.544589368 & 0.009976745 & 0.327869824 & 0.424193304 \\ 0.544589368 & 1.730410927 & 0.082334875 & -0.057997220 & 0.318175706 \\ 0.009976745 & 0.082334875 & 3.429845092 & 0.252693077 & 0.797083832 \\ 0.327869824 & -0.057997220 & 0.252693077 & 1.191822050 & -0.103279098 \\ 0.424193304 & 0.318175706 & 0.797083832 & -0.103279098 & 2.502769647 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy wektor

$$\mathbf{b} \equiv (-0.642912346, -1.408195475, 4.595622394, -5.073473196, 2.178020609)^T$$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania macierzowe $\mathbf{A}_i\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dla $i = 1, 2$. Ponadto, rozwiąż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych, $\mathbf{A}_i\mathbf{y} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Zaburzenie $\Delta\mathbf{b}$ wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np. $||\Delta\mathbf{b}||_2 \approx 10^{-6}$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ zależą od $\Delta\mathbf{b}$ i zinterpretuj zaobserwowane różnice.