

Metody numeryczne 2023/2024: lista 2

1. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2y + 2z = 1 \\ x + z = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. Stosując metodę Doolittle'a znajdź rozkład LU dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 8 & 7 & 19 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 8 \\ -3 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

oraz oblicz ich wyznaczniki. Korzystając z uzyskanego rozkładu, rozwiąż układy równań

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Podaj przykład macierzy, która nie ma rozkładu LU.

4. Znajdź rozkład LUP dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Chcemy dokonać rozkładu LU macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & * & * & * & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} * & * & * & & & \\ * & * & * & * & & \\ & * & * & * & * & \\ \cdots & \cdots & * & * & * & * \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \end{pmatrix},$$

gdzie * oznacza niezerowy element. Jaką strukturę mają odpowiednie macierze \mathbf{L} i \mathbf{U} ?

6. Znajdź faktoryzację Cholesky'ego dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. (zadanie numeryczne NUM3) Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.15}{1^2} & & & & & & \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.15}{2^2} & & & & & \\ & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.15}{3^2} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^2} \\ & & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} \\ & & & & & & & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \dots, N)^T$. Ustalamy $N = 124$. Oblicz również wyznacznik macierzy \mathbf{A} . Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N . Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?