Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels strictement positifs.

Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

Exercice 7

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

En déduire la partie entière de :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}\right)$$

Exercice 8

Soient a et b deux réels. Montrer que :

1) $a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$

2) $E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$

Exercice 9

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée avec $\sup A > 0$.

Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 10

Soient x un nombre réel et n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$