Preuve 7

6) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

7) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Exercice 3

Démontrer la proposition précédente.

Proposition 2

1) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z=0 \\ \text{ou} \\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z \end{pmatrix}$

Exercice 4

Démontrer 1

Exercice 5

Montrer que si $z = 0$ ou s'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $z' = \alpha z$, alors $|z + z'| = |z| + |z'|$

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $|z + z'| = |z| + |z'|$. Montrer que $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

(Ind. Poser $\frac{z}{z'} = x + i\,y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$)

IV. ARGUMENT

Rappel de trigonométrie (cf. cours de géométrie)

Soit a et b deux nombres réels non tous deux nuls, c'est-à-dire tels que $a^2 + b^2 \neq 0$. On a :

1)
$$0 \leq \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$$

2) Il existe un unique réel $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3) Si deux réels θ et θ' vérifient les relations

$$\cos\theta = \cos\theta' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta = \sin\theta' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

alors il existe un entier relatif k tel que

$$\theta' - \theta = 2k\pi$$