

Remarque

On a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

Définition 2

Pour tout nombre $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) le nombre $a - bi$ est appelé le conjugué de z et est noté \bar{z}

(5) Proposition 2

Pour tout z on a :

$$\text{i) } z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z); \text{ ii) } z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$$

$$\text{iii) } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}; \text{ iv) } z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

$$\text{v) } z \cdot \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$$

Preuve

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$
 $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2 \text{Re}(z)$
 $z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi = 2i \text{Im}(z)$
 Si $z \in \mathbb{R}$, $b = 0$, donc $z = a = \bar{z}$
 Si z est imaginaire pur, $a = 0$, donc $z = bi = -\bar{z}$
 $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$

III. MODULE

Définition 1

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), on appelle module de z le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(7) Proposition 1

$$1) \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0,$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C}, (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0) : |z| = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$3) \forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = z \bar{z} : z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\text{En particulier, pour tout } z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} : |z| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$4) \forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z| : |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$5) \forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z| |z'| : |zz'| = |(a + bi)(a' + bi)| = |(aa' - b'b) + i(ab' + ba')| = \sqrt{(aa' - b'b)^2 + (ab' + ba')^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| |z'|$$