Définition 1

Pour tout nombre complexe non nul $z = a + b\,i$ (a, b $\in \mathbb{R}$), l'ensemble

$$\{\theta \in \mathbb{R};\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$$

est appelé l'argument de z et est noté Arg (z). Par abus de notation, on appelle aussi argument de z n'importe quel élément de l'ensemble précédent.

Remarque

L'argument de 0 n'est pas défini

Forme trigonométrique

Définition 2

Soit z un nombre complexe non nul. On a :

$$z = |z|\,(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)))$$

Cette écriture est appelée la forme trigonométrique de z

Les propriétés suivantes sont à démontrer dans le cadre du cours de géométrie.

Propriétés

1) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \begin{cases} \mathrm{Arg}(z) = 0\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^* \\ \mathrm{Arg}(z) = 0\ (\mathrm{mod.}\ \pi) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \\ \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in i\,\mathbb{R}^* \end{cases}$

2) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}(z)\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$

4) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$

5) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z')\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$

Définition 3

Pour tout réel θ on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$