Carlos Méndez DNI:96103939

TP1: Ejercicio 1

Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f_{XY} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4{,}56}}\right) e^{-\frac{1}{2}[x-1\ \ y]\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}}$$

a) ¿Qué distribución sigue el vector (*XY*)?

La normal bivariada parece el candidato para esta distribución, y la misma se encuentra definida de la siguiente manera

$$f_{XY} = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\right) e^{-\frac{1}{2}[\bar{x}-\bar{\mu}\,]\Sigma^{-1}[\bar{x}-\bar{\mu}\,]^T}$$

Donde

$$\Sigma_{2x2}\ definida\ positiva$$
$$\bar{x} = (x, y)$$
$$\bar{\mu} = (\mu_1\ \mu_2)$$[1]

Con $\Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & COV(X,Y) \\ COV(Y,X) & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix}$

Se tiene que $COV(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$

Por lo que validamos que Σ sea definida positiva, para ello debe cumplirse que para todo (*x* , *y*)

$$(x, y)\Sigma(x, y)^T > 0$$

Donde $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{pmatrix}$ para nuestro, entonces

$$(x, y)\begin{pmatrix} 2 & -6/5 \\ -6/5 & 3 \end{pmatrix}(x, y)^T > 0$$

Esto conduce a

$$2x^2 - \frac{12}{5}xy + 3y^2$$

Dividiendo entre dos y completando cuadrados

$$x^2 - \frac{12}{10}xy + \frac{12^2}{20^2}y^2 - \frac{12^2}{20^2}y^2 + 3y^2 = \left(x - \frac{12}{10}y\right)^2 + \left(\frac{3x20^2}{20^2} - \frac{12^2}{20^2}\right)y^2 > 0$$

Por ser la suma de dos números positivos, luego Σ es definida positiva.

Dado que la matriz Σ es definida positiva entonces Σ^{-1} existe.

Se tiene además que $(\det(\Sigma) = 4{,}56$

Luego $f_{XY} \sim N(\mu, \Sigma)$

b) Hallar las distribuciones marginales de X e Y

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces se tiene que $X_i \sim N(\mu_i, {\sigma_i}^2)$ son distribuciones normales para cada *i*

---

[1] Para nuestro caso $\bar{\mu} = (1, 0)$

Por lo tanto $X\sim\ N(1{,}2)$ y $Y\sim\ N(0{,}3)$

c) Calcular E[X], E[Y], var(X), var(Y), y cov(X,Y)

Tomando en consideración que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & COV(X,Y) \\ COV(Y,X) & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_2\sigma_1 & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_2\sigma_1 & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$E(X) = 1$$

$$E(Y) = 0$$

$$E(X) = 1$$

$$\mathrm{Var(X)} = 2$$

$$\mathrm{Var(Y)} = 3$$

$$\mathrm{COV(X,Y)} = -1{,}2$$

d) Dado un valor específico a para la variable aleatoria X, expresar de forma analítica la función de densidad condicional fY |X(y|x) de la variable aleatoria Y dado que X = a.

La distribución condicional viene dada por $f_{Y|X}(y|x=a) = \frac{f_{XY}}{f_X}$

Luego $f_{Y|X}(y|x=a) = \frac{f_{XY}}{f_{X(x=a)}} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{4{,}56}}\right)e^{-\frac{1}{2}[x-1\ \ y]\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(a-1)^2}{2}\right)}}$