**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL**
***CAMPUS* DE ARAPIRACA**
**MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**CLEMERSON OLIVEIRA DA SILVA MENEZES**

# O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH

**ARAPIRACA - AL**
**2013**

**CLEMERSON OLIVEIRA DA SILVA MENEZES**

# O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), *Campus* de Arapiraca, como pré-requisito parcial à obtenção do título de Graduado em Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof.º Me. José Arnaldo dos Santos.

**ARAPIRACA - AL**
**2013**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
*CAMPUS* DE ARAPIRACA
MATEMÁTICA - LICENCIATURA

CLEMERSON OLIVEIRA DA SILVA MENEZES

O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), *Campus* de Arapiraca, como pré-requisito parcial à obtenção do título de Graduado em Licenciatura Plena em Matemática.

Data de Aprovação: ___/___/___

**Banca Examinadora**

---

Prof.º Me. José Arnaldo dos Santos
Universidade Federal de Alagoas – UFAL
*Campus* de Arapiraca
Orientador

---

Prof.º Me. Eben Alves da Silva
Universidade Federal de Alagoas – UFAL
*Campus* de Arapiraca
Examinador

---

Prof.º Me. Moreno Pereira Bonutti
Universidade Federal de Alagoas – UFAL
*Campus* de Arapiraca
Examinador

*À Cleuma Maria, minha magnífica mãe, e à Nayara Kelman, minha célebre irmã.*

## AGRADECIMENTOS

Ao finalizar este singelo trabalho, é com grande prazer que apresento agradecimentos aos meus grandes amigos e orientadores José Arnaldo dos Santos, por sua inestimável orientação e nossas valiosas conversas sobre inúmeros assuntos dos quais me adicionaram maturidade à vida e a Matemática; ao meu orientador de monitoria Eben Alves da Silva, por sua graciosa amizade e não menos obstante, suas valiosas palavras de incentivo. Palavras estas que me motivaram a prosseguir e concluir este período de minha vida; ao atencioso amigo Moreno Pereira Bonutti, por suas valiosas sugestões, e a André Luiz Flores, por motivar-me, inspirar-me e direcionar-me a carreira acadêmica, pois suas orientações foram, sem dúvida, indispensáveis a minha formação.

Gostaria de estender meus agradecimentos a José da Silva Barros, por sua competência como coordenador e por seus valiosos esforços despendidos na melhoria do curso e no incessante apoio aos acadêmicos de matemática da Universidade Federal de Alagoas - *Campus* de Arapiraca; ao grande mestre Wagner Filho pela grande amizade oferecida a minha pessoa; aos meus grandes amigos de graduação Ricardo Bruno, Mayra Tais e Clewerton dos Santos, pelos vários dias de luta e dias de glória; aos freqüentadores do Lab - Matemática, Emenson Feliciano, Jenival, Sillas, Bruno, Cristiano Marinho, Mirtes, Cássia, Phelps, Luciano Pontes, André, Dalvam, Toninho e Lilo; aos Físicos Gustavo Camelo e Fábio Zanetti, por seus perfis teóricos que muito me inspiram e nossas poucas conversas, porém muito produtivas para mim; aos professores Alcindo Teles Galvão, Ornam Felipe, Fábio Boia e Rinaldo, por acrescentarem, diretamente ou indiretamente, ao corpo de conhecimento adquirido por mim nesta fase de minha vida; e não menos obstante, agradeço a todos que não acreditaram que este dia chegaria pois, eles são responsáveis pelo sentimento insaciável de superação que em mim habita e que ajudou-me na construção do conhecimento necessário a minha formação.

Por fim, gostaria de deixar minha grata satisfação e agradecimentos a todos que fazem a Universidade Federal de Alagoas - *Campus* de Arapiraca, e os mais importantes personagens dessa maravilhosa fase de minha vida, minha mãe e minha irmã, Cleuma Maria de Oliveira e Nayara Kelman respectivamente, pois sem estes personagens eu nada seria.

*“A única coisa perfeita é o conjunto vazio”*

(Elon Lages Lima)

**RESUMO**

O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar o Princípio da Contração de Banach e evidenciar algumas de suas aplicações à Matemática. Particularmente, tal princípio será utilizado na demonstração do teorema de Picard-Lindelöf, o qual é um conhecido resultado que garante a existência e unicidade de solução para um problema de valor inicial envolvendo uma equação diferencial ordinária. Este princípio também será utilizado na demonstração do Teorema de Stampacchia, nos estudos sobre equações integrais do tipo Fredholm e na demonstração do Método de Newton para determinação de zeros de funções.

**Palavras - chave:** Espaços métricos completos. Contração. Ponto fixo de Banach.

# ABSTRACT

THE PRINCIPLE OF CONTRACTION OF BANACH

The present work aims to demonstrate the Banach Contraction Principle and highlight some of its applications to mathematics. Particularly, this principle will be used in the proof of the theorem of Picard-Lindelöf, which is a known result that guarantees the existence and uniqueness of solution to an initial value problem involving an ordinary differential equation. This principle is also used in the statement of Theorem Stampacchia, in studies of integral equations of Fredholm type and statement of Newton's method for the determination of zeros of functions.

**Keywords:** Complete metric spaces. Contraction. Banach fixed point.

## SUMÁRIO


**Introdução** 9

**1 Noções Topológicas** 11

1.1 Espaços Topológicos . . . . . 12

1.2 Espaços Métricos . . . . . 13

1.3 Bolas e Esferas . . . . . 17

1.4 Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados . . . . . 18

1.5 Continuidade Uniforme . . . . . 19

1.6 Espaços Métricos Completos . . . . . 20

**2 O Princípio da Contração de Banach** 24

**3 Aplicações do Princípio da Contração de Banach** 28

3.1 Aplicações à Teoria das Equações Integrais . . . . . 28

3.1.1 Equações Integrais de Fredholm . . . . . 29

3.2 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias . . . . . 30

3.3 Aplicação ao Teorema de Stampacchia . . . . . 33

3.4 Aplicação ao Método de Newton . . . . . 37

**4 Conclusão** 39

**Referências** 40

**A Espaços Métricos Compactos** 41

## Introdução

Seja $X$ um espaço topológico não vazio. Dada uma aplicação contínua $f : X \to X$, uma pergunta natural de se fazer é a seguinte: Existem pontos em $X$ que são fixados por $f$, isto é, existem pontos $x \in X$ tais que $f(x) = x$ ?

Os pontos que satisfazem essa equação são chamados de *pontos fixos* da aplicação $f$, e em geral denota-se por $Fix(f)$ o conjunto de todos os ponto fixos de $f$. Na prática, inferir que uma tal função $f$ admite ponto fixo pode afigurar-se difícil. Muitas vezes estamos interessados em saber quantos pontos fixos há e, frequentemente, gostaríamos de garantir que há um e apenas um ponto fixo de uma dada função (a chamada "unicidade da solução").

Teoremas que garantem a existência e, por vezes, unicidade de soluções de equações de pontos fixos são chamados de *Teoremas de Ponto Fixo.* Há vários teoremas de tal tipo na literatura matemática, como por exemplo, o teorema do ponto fixo de Brouwer, teorema do ponto fixo de Lefschtez-Hopf, teorema do ponto fixo de Schauder e vários outros, todos com pressupostos distintos sobre o conjunto $X$ e sobre a função $f$.

Neste trabalho, expõe-se um teorema de ponto fixo extremamente útil em diversos ramos da matemática conhecido como *Teorema do ponto Fixo de Banach.* Este é de longe o teorema de ponto fixo com mais aplicações, sendo que sua influência se estende aos domínios das equações integrais, equações diferenciais, equações numéricas e de muitos outros ramos da Matemática.

Desse modo, no capítulo 1 apresentam-se alguns conceitos topológicos que servirão de base para os capítulos posteriores. Por exemplo, na seção 1.1, a definição de espaço topológico é exposta enfatizando-se tal conceito com alguns exemplos. Na seção 1.2, apresenta-se o conceito de espaço métrico e, novamente, tal conceito é enfatizado com uma gama de exemplos que serão de grande relevância para os capítulos seguintes. Os conceitos de bolas, esferas, conjuntos abertos, conjuntos fechados e continuidade uniforme, são os temas das próximas seções. Por fim, na seção 1.6, os espaços métricos completos ocupam um lugar de destaque. É nesta seção que um número significativo de resultados sobre espaços métricos completos são expostos. Tais resultados farão o trabalho fluir elegantemente.

O capítulo 2 é considerado o foco deste trabalho. Neste capítulo, o Princípio da Contração de Banach é apresentado e demonstrado. Este Princípio possibilitará resolver alguns problemas apresentados no capítulo seguinte. Por exemplo, na verificação da existência e unicidade de solução da equaçõe integral não-linear de Fredholm.

Por fim, e não menos obstante, no capítulo 3 expõe-se algumas das várias aplicações do Princípio da Contração de Banach. Com isso, na seção 3.1 evidencia-se, segundo o Princípio da Contração Banach, a possibilidade de existência de soluções das equações integrais do tipo

Fredholm. Na seção 1.2, o Princípio da Contração de Banach é utilizado com o objetivo de demonstrar o célebre Teorema de Picard - Lindelöf. Teorema este que garante a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Na seção 3.3 o Princípio da Contração de Banach tem fundamental importância na demonstração do Teorema de Stampacchia. Finalizando este último capítulo, na seção 3.4 expõe-se uma abordagem do Método de Newton para zeros de funções via ponto fixo de Banach.

# Capítulo 1

## Noções Topológicas

Uma das ideias mais importantes da Matemática é a de continuidade, a qual se acha estritamente relacionada com os conceitos de convergência e limite. Dada uma aplicação $\varphi : A \to B$, definida num conjunto $B$, diz-se que $\varphi$ é contínua em $a \in A$ quando é possível tornar $\varphi(x)$ arbitrariamente próximo de $\varphi(a)$, desde que se tome $x$ suficientemente próximo de $a$. Analogamente, diz-se que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos pertencentes a um conjunto $A$, converge para o ponto $a \in A$ quando é possível tornar $a_n$ arbitrariamente próximo de $a$, desde que se tome $n$ suficientemente grande.

Notemos que as definições de continuidade e convergência não têm sentido em conjuntos quaisquer $A$ e $B$. Para que elas signifiquem algo é necessário que nos conjuntos em questão exista alguma estrutura que permita falar em "proxmidade de pontos". Tais conjuntos são chamados espaços topológicos. Neles são definidas e tomam valores as funções contínuas.

Intuitivamente, a maneira mais natural de verificar qual de dois pontos $x, y$ pertencentes a um conjunto $A$, está mais próximo de um ponto $a \in A$ é medir as distâncias de $x$ e $y$ ao ponto $a$. Isto porém, só será possível se existir a noção de distância já previamente definida no conjunto $A$. Assim, os conjuntos onde tem sentido falar na distância entre dois pontos se apresentam imediatamente como espaços métricos, isto é, espaços topológicos munidos de uma métrica.

Tanto na Análise como na Geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudamos de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de "distância entre dois pontos" ou conceitos derivados dessa noção, como o de "vizinhança de um ponto", por exemplo. Assim, parece lógico quando se busca uma generalização das noções analíticas ou geométricas, visando resolver problemas mais amplos, busca-se antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de "espaços" em que intervêm tal noção.

Outro fato notório é, que a maioria dos espaços topológicos normalmente encontrados na Matemática vem munido de uma métrica. Além disso, a topologia que deriva da noção de distância deixa pouca margem para a especulação de exemplos artificiais que desviam a atenção do principiante dos fatos fundamentais. Por tais motivos, faremos dos espaços métricos o tema central deste capítulo.

### Seção 1.1 Espaços Topológicos

Uma *topologia* num conjunto $X$ é uma coleção $\Gamma$ de partes de $X$, chamados os *abertos* da topologia, com as seguintes propriedades:

1. *Os conjuntos* $\varnothing$ *e* $X$ *pertencem a* $\Gamma$;
2. *Se* $A_1, ..., A_n \in \Gamma$ *então* $\bigcap_{i=1}^{n} \in \Gamma$;
3. *Dada uma família arbitrária* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *com* $A_\lambda \in \Gamma$ *para cada* $\lambda \in L$, *tem-se* $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \Gamma$.

Em outras palavras, uma topologia é uma família de subconjuntos de $X$ tais que o conjunto vazio e o conjunto $X$ devem pertencer a topologia; a interseção finita e a reunião arbitrária de elementos da topologia devem pertencer à topologia.

Um *espaço topológico* é um par $(X, \Gamma)$ onde $X$ é um conjunto e $\Gamma$ é uma topologia em $X$. É comum fazer-se referência ao conjunto $X$ como "espaço topológico $X$," deixando subentendida a topologia $\Gamma$.

**Exemplo 1.1.** Todo conjunto $X \neq \varnothing$ possui as seguintes topologias:

- $\Gamma_{ind} = \{\varnothing, X\}$, chamada topologia indiscreta ou caótica. Desse modo, os únicos subconjuntos abertos de $X$ são os triviais.
- $\Gamma_{dis} := \wp(X)$, onde $\wp(X)$ denota o conjunto das partes de $X$. $\Gamma_{dis}$ diz-se uma topologia discreta e todos os subconjuntos de $X$ são considerados abertos.

**Exemplo 1.2.** Seja $X = \mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Define-se uma topologia em $\mathbb{R}$ pondo-se:

$$\Gamma = \{\varnothing, A \subset \mathbb{R}\},$$

onde $A \in \Gamma$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $(a,b)$ em $A$ tal que $x \in (a,b) \subset A$. Esta topologia é chamada euclidiana ou usual. De fato, o primeiro axioma de espaço topológicos é satisfeito pois, os conjuntos $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ pertencem a $\Gamma$.

Para a verificação do segundo axioma, seja $\{A_\lambda \in \Gamma \mid \lambda \in L\} \in \wp(\mathbb{R})$. Afirmamos que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \Gamma$. com efeito, seja $x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe pelo menos um $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda \in \Gamma$; logo existe um aberto $(a,b) \subset A_\lambda$ com

$$x \in (a,b) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Por fim, sejam $B_1, B_2 \in \Gamma$; então, considerando aleatoriamente $x \in B_1 \cap B_2$, existem intervalos $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ em $B_1$ e $B_2$ respectivamente, tais que $x \in (a_1, b_1) \subset B_1$ e $x \in (a_2, b_2) \subset B_2$. Se denotarmos por $a = max\{a_1, a_2\}$ e $b = min\{b_1, b_2\}$, obtemos

$$x \in (a,b) \subset B_1 \cap B_2.$$

Por indução verifica-se que; se $B_1, B_2, ..., B_n \in \Gamma$, então $\bigcap_{\lambda=1}^{n} B_\lambda \in \Gamma$. $\square$

As topologias exposta no exemplo 1.1 são admitidas artificialmente. Elas ilustram a enorme variedade de situações patológicas a que pode conduzir a liberdade dos axiomas de espaço topológico. Por isso, nos restringiremos aos casos de espaços metrizáveis. Em estudos mais aprofundados, há necessidade de considerar topologias que não provém de métricas mas, num estágio introdutório, espaços métricos são o suficiente. Eles têm a vantagem de darem lugar a muito menos patologias.

### Seção 1.2 Espaços Métricos

Uma *métrica* num conjunto $M$ é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ associa um número real $d(x,y)$, chamado a distância de $x$ a $y$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y e z \in M$ :

1. $d(x,x) = 0$;

2. *Se* $x \neq y$ *então* $d(x,y) > 0$;

3. $d(x,y) = d(y,x)$;

4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Um *espaço métrico* é um par $(M,d)$, onde $M$ é um conjunto não vazio e $d$ é uma métrica em $M$. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvidas, diremos simplesmente o "espaço métrico $M$", deixando subentendida qual a métrica que está sendo considerada. Em contra partida, os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitraria: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre os pontos de $M$.

Os seguintes exemplos de espaços métricos são considerados, em relação a este trabalho, importantes pois, os mesmos serão utilizados nos capítulos seguintes:

**Exemplo 1.3. (A reta.)** Ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é um dos exemplos mais importantes de espaços métricos. A distância entre dois elementos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x,y) = |x-y|$. As condições $1, 2$ e $3$ que fazem de $d$ uma métrica são facilmente verificadas. Portanto, a única condição que verificaremos é a desigualdade triangular. Com efeito, notemos inicialmente que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ temos que

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad e \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Com isso, temos o seguinte fato:

$$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y| \leq |x|+|y|.$$

Agora, notemos que a seguinte igualdade é verdadeira para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$ :

$$(x-y) = (x-z)+(z-y).$$

Usando $|x+y| \leq |x|+|y|$ , para qualquer $x,y \in \mathbb{R}$ temos que

$$|x-y| \leq |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y|.$$

Como queríamos demonstrar.

O próximo exemplo possui, em relação a este trabalho, uma função especial na demonstração do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias e na demosntração do Teorema de Stampancchia pois, o mesmo será o espaço do qual ambos os teoremas serão desenvolvidos.

**Exemplo 1.4. (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.)** Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1,...,x_n)$ onde cada uma das $n$ coordenadas $x_i$ é um números real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1,...,x_n)$ e $y = (y_1,...,y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, escrevemos:

- $d_1(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$;
- $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;
- $d_3(x,y) = \underset{1\leq i\leq n}{Max}|x_i-y_i|$.

A métrica $d_1(x,y)$ é chamada *euclidiana* e naturalmente se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual. As métricas $d_2$ e $d_3$ apesar de não parecerem tão naturais, pelo menos num primeiro momento, do ponto de vista prático são visivelmente vantajosas. A verificação de que realmente se tratam de métricas em $\mathbb{R}^n$ só apresenta dificuldades no caso da métrica $d_1$ com relação ao axioma 4. Com isso, vejamos sua demonstração:

*Demonstração.* De fato, sejam $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n)$ e $z = (z_1,...,z_n)$ pontos arbitrários do $\mathbb{R}^n$. Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned}(d_1(x,z))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2.\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha_i = x_i - y_i$ e $\beta_i = y_i - z_i$, obtêm-se

$$\begin{aligned}(d_1(x,z))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i + y_i - z_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2.\end{aligned}$$

Para concluir a demostração, basta mostrar que o termo $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$ da última igualdade acima é menor do que ou igual a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{1/2}.$$

Isto é, precisamos estabelecer a *desigualdade de Cauchy-Schwarz:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right). \tag{1.2.1}$$

De fato, sejam $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e $\lambda$ um número real arbitrário. Tomando-se o vetor $\alpha - \lambda\beta$ teremos a seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \lambda\beta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2.$$

Seja qual for $\lambda \in \mathbb{R}$, o trinômio do lado direito, em $\lambda$, não muda de sinal, e é sempre positivo ou igual a zero, porque o número $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i - \lambda\beta_i)^2$ é não negativo:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 \geq 0,$$

o que implica que o seu discriminante seja menor ou igual a zero,

$$\triangle = \left(2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right) \leq 0,$$

como desejamos. □

Uma característica importante da noção abstrata de métrica é que a mesma aplica-se também a espaços outros que não os familiares espaços $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, seja $X$ um conjunto arbitrário, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos com $\beta(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. Como a soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas, definimos em $\beta(X;\mathbb{R})$ uma métrica pondo, para cada $f,g \in \beta(X;\mathbb{R})$ arbitrárias

$$d_\infty(f,g) = \underset{x\in X}{Sup}|f(x)-g(x)|.$$

Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme* ou *métrica do sup*. A verificação das condições que fazem de $d_\infty$ uma métrica só apresenta "dificuldades" para o axioma 4. Façamos a prova:

Inicialmente notemos que $|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$ é uma cota superior de $|f(x)-g(x)|$ para todos $f,g,h$ em $\beta(X;\mathbb{R})$ e $x \in X$ pois,

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|.$$

Assim, temos que

$$d_\infty(f,g) = Sup\ |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|.$$

Como $f-h$ e $h-g$ são limitadas, segue-se que $|f(x)-h(x)| \leq Sup\ |f(x)-h(x)|$ e $|h(x)-g(x)| \leq Sup\ |h(x)-g(x)|$. Com isso, concluímos que

$$Sup\ |f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq Sup\ |f(x)-h(x)|+Sup\ |h(x)-g(x)|.$$

Isto é,

$$d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g).$$

No caso em que $X = \{1,...,n\}$ toda função $f: X \to \mathbb{R}$ é limitada e se identifica a uma lista $(x_1,...,x_n)$, onde $x_i = f(i)$ com $1 \leq i \leq n$. Assim, para $X = \{1,...,n\}$, temos $\beta(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ e a métrica do sup reduz-se à métrica $d_3$, introduzida no exemplo 1.4.

Afim de generalizar o exemplo acima, considere uma aplicação $f: X \to M$, definida num conjunto arbitrário $X$ e tomando valores num espaço métrico $M$. Dizemos que $f$ é *limitada* quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de $M$. Com isso, indiquemos com a notação $\beta(X;M)$ o conjunto das funções limitadas $f: X \to M$.

Desse modo, dadas as funções $f,g \in \beta(X;M)$, as distâncias $d_M(f(x),g(x))$, quando $x$ varia em $X$, formam um conjunto limitado de números reais $\geq 0$, pois o conjunto $f(X)\cup g(X) \subset M$ é limitado. Assim, podemos definir a distância entre duas funções limitadas $f,g: X \to M$ pondo:

$$d(f,g) = \underset{x\in X}{Sup}\, d_M(f(x),g(x)).$$

Obtemos então uma métrica em $\beta(X;M)$, a qual denominamos *métrica da convergência uniforme,* ou *métrica do sup.*

**Exemplo 1.5. (O espaço de funções contínuas.)** Denotemos por $C([a,b];\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas reais definidas no intervalo não degenerado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Munindo $C([a,b];\mathbb{R})$

com a métrica da convergência absoluta,

$$d_\infty(f,g) = \underset{x\in[a,b]}{Sup} |f(x) - g(x)|,$$

vê-se que $C([a,b];\mathbb{R})$[1] adquire *Status* de espaço métrico.

### Seção 1.3 Bolas e Esferas

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Com isso, seja $a$ um ponto no espaço métrico $M$. Dado um número real $r > 0$, definimos:

- *A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a,r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,*

$$B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}.$$

- *A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B[a,r]$, formado pelos elementos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Ou seja*

$$B[a,r] = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}.$$

- *A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a,r)$ dos pontos $x \in M$ que estão a uma distância igual a r do ponto a. Isto é,*

$$S(a,r) = \{x \in M : d(x,a) = r\}.$$

Evidentemente, tem-se que $B[a,r] = B(a,r)\dot{\cup}S(a,r)$. Em outras palavras, a bola fechada de centro $a$ e raio $r$ é formada pela união disjunta da bola aberta de centro em $a$ e raio $r$ e pela esfera de centro em $a$ e raio $r$.

Embora seja conveniente lembrar o exemplo de $\mathbb{R}^3$ como modelo geométrico para as situações abstratas que surgirão, é bom notar, desde logo, que bolas e esferas às vez adquirem aspectos inesperados. Vejamos os seguintes exemplos:

**Exemplo 1.6.** Se $M$ é um espaço métrico munido da métrica "Zero-Um", $d : M \times M \to \mathbb{R}$, tal que $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x,y) = 0$ se $x = y$, então para cada $a \in M$, tem-se que $B(a,r) = B[a,r] = M$ se $r > 1$ e $B(a,r) = B[a,r] = \{a\}$ se $r < 1$. Por outro lado, $B(a,r) = \{a\}$ e $B[a,r] = M$. Consequentemente, $S(a,r) = \varnothing$ se $r \neq 1$, enquanto $S(a,1) = M - \{a\}$.

A métrica que acabamos de definir acima é bastante simples e útil para contra - exemplos. Desse modo, qualquer conjunto não vazio munido dessa métrica, torna-se um espaço métrico.

---

[1] O fato de munirmos $C([a,b];\mathbb{R})$ com a métrica da convergência uniforme está diretamente relacionado com o fato de que toda função em $C([a,b];\mathbb{R})$ é limitada. Veja o Teorema A.1 na página 42

**Exemplo 1.7.** Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola aberta de centro $a$ e raio $r$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$, pois a condição $|x-a| < r$ equivale a $-r < x-a < r$, ou seja: $a-r < x < a+r$. Analogamente, $B[a,r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a "esfera" $S(a,r)$ tem apenas dois pontos: $a-r$ e $a+r$.

Outro fato que evidencia a importância do conceito de bola aberta é o seguinte: sejam $\beta(X;M)$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to M$ e $\beta_\alpha(X;M)$ o conjunto das funções $\varphi : X \to M$ cuja distância $d(\varphi, \alpha) = \underset{x \in X}{Sup}\, d_M(\varphi(x), \alpha(x))$ é finita para alguma função $\alpha : X \to M$ em $\beta_\alpha(X;M)$. Com isso, notemos que $\beta(X;M) = \beta_c(X;M)$, onde $c : X \to M$ é qualquer constante; com efeito, uma aplicação $f : X \to M$ é limitada se, e somente se, sua imagem $f(X)$ está contida numa bola $B(c;r) \subset M$. Isto significa que $d(f(x), c) < r$ para todo $x \in X$ e portanto $f \in \beta_c(X;M)$.

## Seção 1.4 Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados

Seja $X$ um subconjunto do espaço métrico $M$. Um ponto $a \in X$ diz-se um ponto *interior* a $X$ quando é centro de uma bola aberta contida em $X$, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x,a) < r \Rightarrow x \in X$. Chama-se o *interior* de $X$ em $M$ ao conjunto $int\, X$ formado pelos pontos interiores a $X$.

Dizer que um ponto $b \in X$ não é interior a $X$ significa, então, afirmar que toda bola aberta de centro $b$ contém algum ponto que não pertence a $X$. Neste caso, o ponto $b$ pertence a fronteira de $X$. A fronteira de $X$ pode também conter pontos que não estão em $X$, de acordo com a definição abaixo.

A *fronteira* de $X$ em $M$ é o conjunto $\partial X$, formado pelos pontos $b \in X$ tais que toda bola aberta de centro $b$ contém pelo menos um ponto de $X$ e um ponto do complementar $M \setminus X$.

Um subconjunto $A$ de um espaço métrico $M$ diz-se *aberto* em $M$ quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $intA = A$. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \varnothing$. Por exemplo, em qualquer espaço métrico $M$, uma bola aberta $B(a;r)$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B(a;r)$. Então $d(a,x) < r$ e portanto $s = r - d(a,x)$ é um número positivo. Afirmamos que $B(x;s) \subset B(a;r)$. De fato, se $y \in B(x;s)$ então $d(x,y) < s$ e portanto

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r,$$

isto é, $y \in B(a;r)$.

Com isso, notemos que todo espaço métrico $M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço topológico, no qual a coleção $\Gamma$ é formada pelos subconjuntos abertos de $M$ no sentido da definição acima.

Paralelamente à noção de conjunto aberto em um espaço métrico existe a noção de conjunto fechado em um espaço métrico: se $M$ é dotado de uma métrica $d$, um conjunto $A \subset M$ é dito ser *fechado* em relação à métrica $d$ se seu conjunto complementar $A^c = M \setminus A$ for aberto em relação à métrica $d$.

**Exemplo 1.8.** O conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto em $\beta(M;N)$. Mais precisamente, dado $a \in M$, seja $D_a$ o conjunto das aplicações limitadas $f : M \to N$ que são descontínuas no ponto $a$. Mostraremos que $D_a$ é aberto. Para isto, tomemos $f \in D_a$. Existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ podemos obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq 3\varepsilon$. Afirmamos que se $g \in \beta(M;N)$ e $d(g,f) < \varepsilon$ então $g \in D_a$. Com efeito, nestas condições, para todo $\delta > 0$ temos:

$$3\varepsilon \leq d(f(x_\delta), f(a)) \leq d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), g(a)) + d(g(a), f(a)).$$

Ora, na soma acima, a primeira e a terceira parcelas são $< \varepsilon$ e a soma das três é $\geq 3\varepsilon$. Assim, a segunda parcela é $\geq \varepsilon$. Logo $g \in D_a$. Seja agora $D$ o conjunto de todas as aplicações limitadas descontínuas $f : M \to N$. Temos $D = \bigcup\limits_{a \in M} D_a$. Logo $D$ é aberto em $\beta(M;N)$. De modo análogo se mostra que, dada $f : M \to N$, o conjunto das aplicações $g : M \to N$ que estão a uma distância finita de $f$ e são descontínuas é aberto no espaço métrico $\beta_f(M;N)$.

Uma observação de extrema importância é notar que “fechado” não é o contrário de “aberto”. Quando um conjunto não é fechado, não se pode concluir daí que ele seja aberto. por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado nem abeto em $\mathbb{R}$.

## Seção 1.5 Continuidade Uniforme

Sejam $M$ e $N$ espaços métricos. Diz-se que uma aplicação $f : M \to N$ é *contínua* no ponto $a \in M$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Se $f$ é contínua em todo ponto de $M$, diz-se simplesmente que $f : M \to N$ é contínua.

A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de $f$ nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em $M$ uma bola $B$, de centro $a$, tal que a restrição de $f$ a $B$ seja contínua no ponto $a$, então $f : M \to N$ é contínua no ponto $a$.

Um aplicação $f : M \to N$, onde $M$ e $N$ são espaços métricos, diz-se *uniformemente contínua* quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$ tem-se que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Evidentemente, toda aplicação uniformemente contínua é particularmente uma aplicação contínua, para a qual a escolha de $\delta$ a partir de $\varepsilon$ dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade. Ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente.

*Observação* 1.9. Continuidade não implica em continuidade uniforme. De fato, seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. A função $f$ é contínua, mas não é uniformemente contínua pois há pontos $x, -x$; tão próximo um do outro quanto se queira, com $|f(x) - f(-x)| = 2$.

## Seção 1.6 Espaços Métricos Completos

Uma sequência $(x_n)$ num espaço métrico $M$ chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Afim de que uma sequência $(x_n)$ seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,x_{n+p}) < \varepsilon$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. ( Basta chamar de $n$ o menor dos $m,n$ da definição anterior e por $m = n+p$. )
Intuitivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice $n$.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência; depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Assim, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em $M$ se, e somente se, é de Cauchy em $N$.

Quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproxima-se uns dos outros. A seguinte proposição evidencia está afirmação:

**Proposição 1.10.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Demonstração.* Se $lim x_n = a$ no espaço métrico $M$ então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se tomarmos $m,n > n_0$ teremos

$$\begin{array}{rcl} d(x_m,x_n) & \leq & d(x_m,a) + d(x_n,a) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{array}$$

logo, $(x_n)$ é de Cauchy. □

Uma observação de extrema relevância é que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isto, tomemos uma sequência de números racionais $x_n$ convergindo para um número irracional $a$. (Por exemplo, $x_1 = 1, x_2 = 1,4, x_3 = 1,41, x_4 = 1,414...$, com $lim x_n = \sqrt{2}$.) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da proposição 1.11 que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente $(x_n)$ não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Um subconjunto $X$ de um espaço métrico $M$ chama-se *limitado* quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c$ para quaisquer $x,y \in X$. O menor desses números $c$ será chamado o diâmetro de $X$. Ora, dizer que $x,y \in X \Rightarrow d(x,y) \leq c$ significa afirmar que $c$ é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x,y)$ entre pontos de $X$. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Logo, podemos definir o *diâmetro* de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real

$$diam(X) = Sup\,\{d(x,y) : x,y \in X\}.$$

**Proposição 1.11.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico $M$. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro $\leq 1$. Segue-se que

$$\{x_1,x_2,...,x_n,...\} = \{x_1,x_2,...,x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1},x_{n_0+2},...\}$$

é limitado. □

Mais uma vez, notemos que nem toda sequência limitada é de Cauchy. O exemplo mais simples é dado por $(1,0,1,0,...)$ na reta real. Embora limitada, esta sequência não é de Cauchy pois $d(x_n,x_{n+1}) = 1$ para todo $n$.

Dizemos que um espaço métrico $M$ é completo quando toda sequência de Cauchy em $M$ é convergente. Por exemplo, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. Esta proposição é devido a Cauchy e dentre os espaços métricos completos é considerado um dos mais importantes. Outro exemplo importante de espaço métrico completo é o espaço euclidiano $n$ - dimensional $\mathbb{R}^n$ (LIMA, 2007, p. 165).

**Proposição 1.12.** *Seja $[a,b]$ um conjunto não degenerado da reta real $\mathbb{R}$. O conjunto $C([a,b];\mathbb{R})$ das funções contínuas reais é um espaço métrico completo em relação a métrica da convergência uniforme.*

*Demonstração.* Como o intervalo $[a,b]$ é compacto[2], toda função $f$ contínua nele definida é limitada, pois $|f|$ é contínua e possui máximo e mínimo em $[a,b]$. Assim, a métrica $d_\infty$ da convergência absoluta está definida para todas $f,g \in C([a,b];\mathbb{R})$. Desse modo, seja $(f_n)$ uma sequência de Cauchy em $C([a,b];\mathbb{R})$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro positivo $N(\varepsilon)$ tal que $\underset{x\in[a,b]}{Sup}\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, sempre que $n$ e $m$ sejam maiores do que $N(\varepsilon)$. Isto significa que para cada $x \in [a,b]$ tem-se $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ sempre que $n$ e $m$ sejam maiores do que $N(\varepsilon)$. Assim, para cada $x \in [a,b]$ fixo, a sequência numérica $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, segue que cada sequência $f_n(x)$ é convergente. Vamos denotar por $f(x)$ seu limite.

Agora, definiremos a seguinte função: $x \to f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Essa função $f$ é um forte candidato a ser o limite da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na métrica $d_\infty$. Precisamos agora mostrar que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aproxima essa função $f$ na métrica $d_\infty$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Vamos definir uma sequência crescente de números inteiros e positivos $N_k(\varepsilon)$, $k = 1,2,3...$ com

[2]Veja conceitos e resultados na página 42

$N_{k+1}(\varepsilon) > N_k(\varepsilon)$, da seguinte forma: $N_k(\varepsilon)$ é tal que $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon/2^k$ para todos $m,n > N_k(\varepsilon)$. Note que uma tal sequência $N_k(\varepsilon)$ sempre pode ser encontrada pois, por hipótese, $f_m$ é uma sequência de Cauchy em $d_\infty$. Vamos agora escolher uma sequência crescente de índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ tais que $n_k > N_k(\varepsilon)$. A essa sequência está associada a subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Note que, pela definição, tem-se $d(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) < \varepsilon/2^j$, pois $n_j$ e $n_{j+1}$ são maiores do que $N_j(\varepsilon)$.

Com essas definições, teremos que, para todo $k > 1$,

$$f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \left[ f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \underset{x\in[a,b]}{Sup} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| = \sum_{j=1}^{k-1} d_\infty(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) \\
&< \varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right).
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que para cada $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{n_1}(x)| &= |f(x) - f_{n_k}(x) + f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| \\
&\leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_1}(x)| \\
&< |f(x) - f_{n_k}(x)| + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| < |f(x) - f_{n_k}(x)| + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right).$$

O lado esquerdo desta expressão independe de $k$. Tomando-se o limite $k \to \infty$ e lembrando que a sequência numérica $(f_{n_k})$ converge a $f(x)$, concluímos que $|f(x) - f_{n_1}(x)| < \varepsilon$. Como isso vale para todo $x$, segue que

$$d(f, f_{n_1}) = \underset{x\in[a,b]}{Sup} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| < \varepsilon.$$

Demonstrando que a sequência $f_n$ converge a $f$ em relação a métrica $d_\infty$.

Agora provaremos que $f$ é contínua. Para tal, notemos que para quaisquer $x, y \in [a,b]$,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |f(x)-f_{n_1}(x)+f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)+f_{n_1}(y)-f(y)| \\
&\leq |f(x)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)|+|f_{n_1}(y)-f(y)| \\
&\leq \underset{x\in[a,b]}{Sup}|f(x)-f_{n_1}(x)|+|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)|+\underset{x\in[a,b]}{Sup}|f_{n_1}(y)-f(y)| \\
&= 2d_\infty(f,f_{n_1})+|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)| \\
&\leq 2\varepsilon+|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)|.
\end{aligned}
$$

Notemos agora que $f_{n_1}\in C([a,b];\mathbb{R})$ e é, portanto, uma função contínua. Logo, pela definição de continuidade de funções, para $x$ fixo, existe um número positivo $\delta$ tal que $|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)|<\varepsilon$ para todo $y$ tal que $|x-y|<\delta$.

Assim, concluímo que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo $y$ tal que $|x-y|<\delta$ tem-se $|f(x)-f(y)|<3\varepsilon$. O que nos diz precisamente que $f$ é contínua, como queríamos demosntrar. □

**Proposição 1.13.** *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

*Demonstração.* Seja $A\subset M$ fechado, com $M$ completo. Dada uma sequência de Cauchy $(x_n)$ em $A$, existe $lim x_n=a\in M$. Como $A$ é fechado em $M$, tem-se $a\in A$. Logo $A$ é completo. Por outro lado, se $M\subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n\in M$, com $lim x_n=a\in N$, a sequência $(x_n)$ é de Cauchy, pela proposição 1.9. Logo, existe $b\in M$ tal que $lim x_n=b$. Pela unicidade do limite, tem-se $a=b$ e portanto $m$ é fechado em $N$. □

Seja $X$ um conjunto, $M$ um espaço métrico e $\alpha: X\to M$ uma aplicação. A seguinte proposição terá fundamental importância na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias.

**Proposição 1.14.** *Se o espaço métrico $M$ é completo então $\beta_\alpha(X;M)$ é completo, sejam quais forem $X$ e $\alpha: X\to M$.*

*Demonstração.* Seja $(f_n)$ uma sequência de Cauchy em $\beta_\alpha(X;M)$. Esta sequência é limitada; logo existe uma constante $c>0$ tal que $d(f_n(x),\varphi(x))\leq d(f_n,\varphi)\leq c$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in X$. Fixando-se arbitráriamente $x\in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $M$. Como $M$ é completo, existe, para todo $x\in X$, o limite desta sequência. Escreveremos $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\in M$. Isto define uma aplicação $f: X\to M$, que é o limite simples da sequência $(f_n)$. De $d(f_n(x),\varphi(x))\leq c$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $x\in X$, concluímos, fazendo $n\to\infty$, que $d(f(x),\varphi(x))\leq c$ para todo $x\in X$. Logo $f\in\beta_\alpha(X;M)$. Resta provar que $f_n\to f$ uniformemente em $X$. Ora, dado $\varepsilon>0$, existe $n_0$ tal que $m,n>n_0\Rightarrow d(f_m(x),f_n(x))<\varepsilon$ para qualquer $x\in X$. Fazendo $m\to\infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n>n_0\Rightarrow d(f(x),f_n(x))\leq\varepsilon$ para todo $x\in X$. Ou seja, $f_n\to f$ uniformemente, como desejamos. □

# Capítulo 2

## O Princípio da Contração de Banach

O Princípio da Contração de Banach estabelecido por S. Banach em 1922[1], é um dos resultados sobre espaços métricos completos bastante simples conceitualmente, e que tem inúmeras aplicações à Matemática. Muitas destas aplicações ocorrem em espaços normados[2] e não se restringem às transformações lineares.

Uma das razões que torna este princípio um resultado de significativa importância reside no fato de fornecer, junto com seu enunciado, um método iterativo de determinação aproximada do ponto fixo, método este que é muito eficiente. Outra razão é o fato de o princípio reunir condições que garantem a unicidade do ponto fixo. Deste modo, este capítulo dedica-se inteiramente a demonstração deste princípio.

Inicialmente, consideremos a seguinte e importante definição que será de fundamental importância para a demonstração do Princípio da Contração de Banach: *Seja $X$ um espaço topológico. Um ponto $x \in X$ diz-se um ponto fixo de uma aplicação $f : X \to X$ se $f(x) = x$.*

Analisemos um exemplo bem simples. Seja $X = [-1,1]$ o intervalo dos números reais $-1 \leq x \leq 1$. Considere $f : X \to X$ uma aplicação contínua qualquer. Se $f(-1) = -1$ ou $f(1) = 1$, então $f$ tem um ponto fixo. Suponhamos que os extremos do intervalo não sejam pontos fixos. Então temos que $f(-1) > -1$ e $f(1) < 1$. Considere a aplicação $g : X \to X$ definida por $g(x) = f(x) - x$, para todo $x \in [-1,1]$, temos então que $g(-1) > 0$ e $g(1) < 0$.

Como $g$ é contínua e assume valores positivos e negativos, temos pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe um número real $-1 \leq x_0 \leq 1$, tal que $g(x_0) = 0$. Mas então temos $f(x_0) = x_0$. Isto é, $f$ tem um ponto fixo no interior do intervalo $X$. Provamos assim que o intervalo $[-1,1]$ tem a propriedade do ponto fixo.

Muitos problemas matemáticos se reduz a determinação de pontos fixos de alguma aplicação. Assim, torna-se importante dar condições que garantam a existência de tais pontos.

Dada uma aplicação $F$ de um espaço métrico $M$ nele mesmo, uma tentativa para se obter

---

[1] "Sur les opérations dans ensembles abstraits et leurs applications intégrales". Fund. Math. 3, 133-181 (1922).

[2] Uma norma em um espaço vetoria $E$ é uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado a norma de $x$, de modo a serem cumpridas as seguintes condições abaixo, para quaisquer $x, y \in E$ e todo $\lambda$ escalar:

1. Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$;
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

pontos fixos é partir de um ponto qualquer $x_0 \in M$ e aplicar $F$, sucessivamente, isto é,

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & F(x_0) \\ x_2 & = & F(x_1) = F^2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & F(x_{n-1}) = F^n(x_0) \end{array}$$

e, tomando o limite $n \to \infty$. Se essa sequência $(x_n)_{n \in I}$ converge a algum $\zeta$ e $F$ é contínua, então realmente obtêm-se um ponto fixo, pois

$$\zeta = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} F(x_{n-1}) = F(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = F(\zeta).$$

Esta ideia é chamada de *método das aproximações sucessivas*. No caso de espaços métricos completos, uma condição que garante a convergência desses iterados é a seguinte definição:

*Seja $M$ um espaço métrico. Uma função $F : M \to M$ diz-se uma contração se existir um número $0 < \mu < 1$ tal que para todos $x, y \in M$ valha a desigualdade:*

$$d(F(x), F(y)) \leq \mu d(x, y),$$

*onde a constante $\mu$ é por vez denominada constante de Lipschitz.*

A definição acima será de fundamental importância na demonstração do Princípio da Contração de Banach. Outro fato importantíssimo relacionado a noção de contração é o de continuidade uniforme, isto é, se uma aplicação $F$ entre espaços métricos $(M, d_M)$ e $(N, d_N)$ é uma contração, então $F$ é uniformemente contínua. De fato, se $d_N(F(x), F(y)) \leq \mu d_M(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, então, dado $\varepsilon > 0$, nós tomamos $\delta = \varepsilon / \mu$. De $d_M(x, y) < \delta$ segue-se

$$d_N(F(x), F(y)) \leq \mu d_M(x, y) < q\delta = \varepsilon,$$

como desejamos.

**Teorema 2.1. (Princípio da Contração de Banach)** *Toda contração $F : M \to M$, de um espaço métrico completo $M$, possui um único ponto fixo. Além disso, dado qualquer ponto $x_0 \in M$, a sequência $F(x_0), F^2(x_0), \ldots, F^n(x_0), \ldots$ converge para o ponto fixo de $F$.*

*Demonstração.* Tomando arbitrariamente $x_0 \in M$, ponhamos $x_n = F^n(x_0)$, isto é, definimos uma sequência iterativa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & F(x_0) \\ x_2 & = & F(x_1) = F^2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & F(x_{n-1}) = F^n(x_0). \end{array}$$

Agora, provaremos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. De fato, pela definição de contração e observando a definição de $(x_n)$ temos:

$$\begin{array}{rcl} d(x_{m+1},x_m) & = & d(F(x_m),F(x_{m-1})) \\ & \leq & \mu d(x_m,x_{m-1}) \\ & = & \mu d(F(x_{m-1}),F(x_{m-2})) \\ & \leq & \mu^2 d(x_{m-1},x_{m-2}) \\ & \vdots & \vdots \\ & \leq & \mu^m d(x_1,x_0). \end{array}$$

O que implica, segundo a desigualdade triangular e a fórmula da soma da progressão geométrica que, para $n > m$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_m,x_n) & \leq & d(x_m,x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) \\ & \leq & \mu^m d(x_1,x_0) + \mu^{m+1} d(x_1,x_0) + \cdots + \mu^{n-1} d(x_1,x_0) \\ & = & \left(\mu^m + \mu^{m+1} + \cdots + \mu^{n-1}\right) d(x_0,x_1) \\ & = & \mu^m \left(\dfrac{1-\mu^{n-m}}{1-\mu}\right) d(x_0,x_1) \\ & \leq & \mu^m \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i\right) d(x_0,x_1) \\ & = & \dfrac{\mu^m}{1-\mu} d(x_0,x_1). \end{array}$$

Como $0 < \mu < 1$, segue que $1 - \mu^{n-m} < 1$, consequentemente

$$d(x_m,x_n) \leq \frac{\mu^m}{1-\mu} d(x_0,x_1) \tag{2.0.1}$$

para $n > m$. Agora, novamente usando o fato que $0 < \mu < 1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n_0$ tem-se que

$$\frac{\mu^m}{1-\mu} d(x_0,x_1) < \varepsilon. \tag{2.0.2}$$

Portanto, se $n > m > n_0$, então das desigualdades 2.0.1 e 2.0.2, segue que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, ou seja, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Como $M$ é completo concluímos que $(x_n)$ converge, digamos $x_n \to a$, com $a \in M$.

Agora, mostraremos que este limite $a$ é um ponto fixo da aplicação $F$. Com efeito, segue da continuidade de $F$[3] que

$$F(a) = F(\lim_{x \to \infty} x_n) = \lim_{x \to \infty} F(x_n) = \lim_{x \to \infty} x_{n+1} = a.$$

Suponhamos agora que $b$ seja outro ponto fixo de $F$, isto é, $F(b) = b$. Da definição de contração obtemos

$$d(a,b) = d(F(a), F(b)) \leq \mu d(a,b), \tag{2.0.3}$$

isto implica que $d(a,b) = 0$, pois $\mu < 1$. Portanto $a = b$, o que mostra que o ponto fixo de $F$ é único. □

A demonstração do Princípio da Contração de Banach é construtiva, fornecendo aproximações para o ponto fixo e uma estimativa superior para o erro cometido a cada iteração. Aparentemente foram E. Picard e G. Peano (por volta de 1890) os primeiros a considerar sistematicamente esse método das aproximações sucessivas, mas ainda no caso particular de equações diferenciais. Em sua tese, por volta de 1920, Banach apresentou a formulação abstrata desse método e o princípio aqui discutido; resultados relacionados foram obtidos na mesma época por R. Caccioppoli.

[3]Veja no capítulo 3 a definição de função Lipschitziana e a verificação de continuidade da mesma.

# Capítulo 3

## Aplicações do Princípio da Contração de Banach

O Princípio da Contração de Banach tem duas de suas importantes aplicações em espaços de funções, a saber, na demonstração do Teorema da Função Inversa e no Teorema de Existência e Unicidade de soluções de uma equações diferenciais ordinárias.

No entanto, neste capítulo apenas um dos teoremas citados acima será demonstrado, O Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias. Desse modo, para "compensar" a exclusão do Teorema da Função Inversa, apresentamos algumas aplicações do Princípio de Banach na determinação de solução de equações integrais do tipo Fredholm, na demonstração do teorema de Stampacchia e na exposição do Método de Newton.

Geralmente, a dificuldade em aplicar o princípio de Banach é encontrar espaços ou normas em que o operador de interesse seja um contração. Com isso, iniciaremos este capítulo com a seguinte definição:

> *Uma função $\varphi : M \to N$ entre espaços métricos diz-se Lipschitziana quando existe uma constante $k > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que*

$$d_N(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k d_M(x, y) \ \forall x, y \in M.$$

Neste caso, $\varphi$ é contínua (em cada ponto $a \in M$). De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Então, obtêm-se

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(\varphi(x), \varphi(a)) \leq k d_M(x, a) < k\delta = \varepsilon.$$

### Seção 3.1 Aplicações à Teoria das Equações Integrais

Na presente seção estudam-se métodos iterativos de obtenção de solução para um tipo de equação integral, a chamada equação integral de Fredholm[1]. Esta equação aparece em problemas de Física - Matemática (por exemplo, surge no problema de Sturm - Liouville. (SOTOMAYOR, 1978, P. 106)).

A razão de tratarmos da equação integral citada acima está na possibilidade de utilizarmos o Princípio de Banach para estudar a existência de soluções de tal equação. O mesmo princípio fornece, também neste caso, um poderoso método iterativo de solução de grande importância prática.

[1] Erik Ivar Fredholm $(1866 - 1927)$.

### Subseção 3.1.1 Equações Integrais de Fredholm

Sejam $I = [a,b]$ um intervalo da reta não degenerado, $\lambda$ um número real e $f : I \to \mathbb{R}$ e $K : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em seus respectivos domínios. Com isso, a chamada *equação integral não linear de Fredholm,* ou simplesmente equação integral de Fredholm, é a seguinte:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y,u(y))dy.$$

Acima $u : I \to \mathbb{R}$ é a função incógnita. Note que $K$, chamada de *núcleo* da equação integral, é uma função de três variáveis e que a incógnita $u(x)$ aparece na posição de seu terceiro argumento dentro da integral.

Seja $C(I;\mathbb{R})$ o espaço métrico completo de todas as funções contínuas de $I$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do sup,

$$d_\infty(h,l) = \underset{x\in I}{Sup}\left|h(x) - l(x)\right|,$$

onde $h$ e $l$ pertencem a $C(I;\mathbb{R})$. Se considerarmos $T$ a aplicação que leva $C(I;\mathbb{R})$ em si mesmo dada por

$$T(h)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y,h(y))dy,$$

e $h$ uma aplicação contínua em $I$, então $T(h)$ também é contínua em $I$. Com isso, a equação integral de Fredholm pode ser então entendida como a equação de ponto fixo em $C(I;\mathbb{R})$ dada por $u = T(u)$.

É natural, portanto, procurar condições que façam de $T$ uma contração no espaço métrico completo $C(I;\mathbb{R})$, pois assim poderemos evocar o Princípio da Contração de Banach. É neste momento que a condição de Lipschitz se faz útil. Vamos supor que a função $K$ satisfaça a condição de Lipschitz para a terceira variável, isto é, existe $\mu > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ e todo $z, \bar{z} \in \mathbb{R}$ valha

$$\left|K(x,y,\bar{z}) - K(x,y,z)\right| \leq \mu\left|\bar{z} - z\right|. \tag{3.1.1}$$

Então, pelo menos no caso em que $\mu(b-a) < 1$, a aplicação $T$ é uma contração em $C(I;\mathbb{R})$ com relação à métrica $d_\infty$ dada. Para provar isso, usamos que, para duas funções arbitrárias $h, l \in C(I;\mathbb{R})$ temos

$$T(h)(x) - T(l)(x) = \lambda \int_a^b \left[K(x,y,h(y)) - K(x,y,l(y))\right]dy,$$

donde tiramos que

$$\begin{aligned} |T(h)(x) - T(l)(x)| &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,y,h(y)) - K(x,y,l(y))|\, dy \\ &\leq |\lambda|\, \mu \int_a^b |h(y) - l(y)|\, dy \\ &\leq |\lambda|\, \mu(b-a) Sup\, |h(y) - l(y)| \\ &= |\lambda|\, \mu(b-a) d_\infty(h,l). \end{aligned}$$

Assim, vimos que sob as hipóteses acima, $T$ é uma contração se $|\lambda| < \dfrac{1}{\mu(b-a)}$. Essa condição, se satisfeita, garante, pelo Princípio da Contração de Banach, que há uma, e somente uma função $u$ em $C(I;\mathbb{R})$ que é solução da equação integral de Fredholm. Com isso, a solução pode ser aproximada partindo-se de qualquer ponto $u_0 \in C(I;\mathbb{R})$ através da sequência iterada $u_n = T(u_{n-1}), n \in \mathbb{N}$.

## Seção 3.2 Aplicações à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias

Agora trataremos de uma das mais importantes aplicações do Princípio da Contração de Banach, a saber, na demonstração do célebre Teorema de Picard[2] - Lindelöf[3] que fornece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Originalmente, a demonstração de existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em equações diferenciais é devido a Lindelöf. Entretanto, o método que aplicamos aqui para a sua demonstração, fazendo uso explícito do Princípio da Contração de Banach, é devido a Picard. Esses trabalhos datam da década de 90 do século XIX.

Vamos considerar, nesta seção, o caso geral de equações diferenciais ordinárias em $\mathbb{R}^n$. Com isso, sejam $\Omega$ um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times E$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $E = \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano $n$-dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times E$ será denotado por $(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, ..., x_n)$ em $E$; salvo menção em contrário, adotaremos em $\mathbb{R} \times E$ a norma: $|(t,x)| = Max\{|t|, |x|\}$, onde $|x|$ denota uma norma em $E$.

Seja $f : \Omega \to E$ uma aplicação contínua e seja $I$ um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo[4] de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. Uma função diferenciável $\varphi : I \to E$ chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{3.2.1}$$

no intervalo $I$ se:

[2] Charles Émile Picard $(1856 - 1941)$

[3] Ernst leonard Lindelöf $(1870 - 1946)$

[4] Uma *cisão* de um espaço métrico $M$ é uma decomposição $M = A \cup B$, de $M$ como reunião disjunta de dois subconjuntos abertos de $M$. Se um dos abertos $A$ ou $B$ é vazio, dizemos que a cisão é trivial. Desse modos, um espaço métrico $M$ chama-se *conexo* quando a única cisão possível em $M$ é a trivial.

1. o gráfico de $\varphi$ em $I$, isto é, $\{(t,\varphi(t)) : t \in I\}$ está contido em $\Omega$ e
2. $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t,\varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se $t$ é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação 3.2.1 chama-se *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotada abreviadamente por

$$\dot{x} = f(t,x).$$

Sejam $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ as componentes de $f$; $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ onde $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de $\dot{x} = f(t,x)$ para cada $1 \leq i \leq n$ se, e somente se, cada $\varphi_i$ é diferenciável em $I$, $(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d\varphi_1}{dt}(t) & = & f_1((t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)) \\
\frac{d\varphi_2}{dt}(t) & = & f_2((t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{d\varphi_n}{dt}(t) & = & f_n((t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))
\end{array}$$

para todo $t \in I$.

Por esta razão diz-se que a equação "vetorial" 3.2.1 é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,x_1,...,x_n),$$

para cada $i = 1,2,...,n$.

Fixemos um ponto $(t_0,x_0) \in \Omega$ e uma solução $\varphi : I \to E$ de $\dot{x} = f(t,x)$. Se $t_0 \in I$ e também $\varphi(t_0) = x_0$, dizemos que essa solução satisfaz a *condição inicial* $x(t_0) = x_0$ ou, então, o *problema de valor inicial* comumente conhecido como *Problema de Cauchy*

$$\dot{x} = f(t,x) \quad e \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.2.2}$$

Note que a equação 3.2.2 é equivalente a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{3.2.3}$$

Isto é, se $t_0 \in I$, uma função contínua $\varphi : I \to E$ cujo gráfico está contido em $\Omega$ é solução de 3.2.3 se e só se é solução de 3.2.2. Isto decorre do Teorema Fundamental do Cálculo.

A existência de soluções de equações diferenciais ordinárias em $E$ é geralmente garantida pela continuidade de $f$. Para a unicidade de soluções satisfazendo uma dada condição inicial, a continuidade apenas não é suficiente, como mostra o exemplo clássico $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ em $\mathbb{R}$

(LOPES, A. O.; DOERING, C. I, 2005.), porém basta exigir adicionalmente, por exemplo, a continuidade da aplicação derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ em $\Omega$, ou seja, a continuidade em $(t,x)$ de todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)$, com $1 \leq i, j \leq n$.

**Teorema 3.1. (O Teorema de Picard - Lindelöf)** *Seja $f$ contínua e Lipschitziana com relação a segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$ onde $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in E : |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em $\Omega$, existe uma e única solução*

$$\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

*em $I_\alpha$, onde $\alpha = Min\{a, \frac{b}{M}\}$.*

*Demonstração.* Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \underset{t \in I_\alpha}{Sup} \left| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \right|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \to E$ definida por:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, t \in I_\alpha.$$

Assim, a correspondência $\varphi \to F(\varphi)$ define uma função $F$ com as seguintes propriedades:
1. $F(X) \subset X$;
2. $F^n$ é uma contração, para $n$ suficientemente grande.
Ou seja, $F : X \to X$ é uma função tal que $F^n$ é uma contração. De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$|F(\varphi) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto prova $(1)$.

Quanto a $(2)$, para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$,

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{k^n |t - t_0|}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), t \in I_\alpha,$$

onde $k$ é a constante de Lipschitz de $f$. Verificamos esta desigualdade por indução em $n$. Para $n = 0$ ela é óbvia. Suponhamos que é válida para $k$. Então,

$$
\begin{aligned}
\left|F^{k+1}(\varphi_1)(t)-F^{k+1}(\varphi_2)(t)\right| &= \left|F(F^k(\varphi_1))(t)-F(F^k(\varphi_2))(t)\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}\left|f(s,F^k(\varphi_1)(s))-f(s,F^k(\varphi_2)(s))\right|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}k\left|F^k(\varphi_1)(s)-F^k(\varphi_2)(s)\right|ds\right| \\
&\leq k\left|\int_{t_0}^{t}\frac{k^k(s-t_0)^k}{k!}d(\varphi_1,\varphi_2)ds\right| \\
&= \frac{k^{k+1}\left|t-t_0\right|^{k+1}}{(k+1)!}d(\varphi_1,\varphi_2).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$d(F^n(\varphi_1),F^n(\varphi_2)) \leq \frac{k^n\alpha^n}{n!}d(\varphi_1,\varphi_2)$$

e, para $n$ grande, $\frac{k^n\alpha^n}{n!} < 1$, pois este é o termo geral de uma série cuja soma é $e^{k\alpha}$, donde $F^n$ é uma contração em $X$. Pelo Princípio da Contração de Banach, existe uma única aplicação $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. De fato, o ponto fixo $\varphi$ é de classe $C^1$ e isto prova o teorema. □

## Seção 3.3 Aplicação ao Teorema de Stampacchia

Nesta seção, o Princípio da Contração de Banach terá um papel crucial na demostração do Teorema de Stampacchia, o qual é útil na teoria das equações diferenciais parciais elípticas. Desse modo, iniciaremos esta seção com alguns conceitos e resultados clássicos da teoria dos espaços de Hilbert, que serão necessários para a apresentação do Teorema de Stampacchia.

Seja $E$ um espaço vetorial real ou complexo. Dizemos que $E$ é um *espaço de Banach* se o mesmo for um espaço normado e completo[5]. Por exemplo, o espaço euclidiano $n$ - dimensional $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. Se além disso, $E$ for munido de um produto interno,[6] passaremos a chamá-lo de *espaço de Hilbert.* Por exemplo, o espaço euclidiano $n$ - dimensional $\mathbb{R}^n$, munido com o produto interno dado por $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ é um espaço de Hilbert.

Os espaços de Hilbert formam a classe mais importante de espaços de Banach; além da norma, aparece também a noção de produto interno, uma generalização de produto escalar em

[5] $E$ é um espaço métrico se definirmos uma métrica pondo-se $d(x,y) = \|x-y\|$, para todo $x,y \in E$.

[6] Um *produto interno* no espaço vetorial $E$ é uma forma bilinear simétrica definida positiva, isto é, uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to K$ que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $x,y,z \in E$ e $\alpha,\lambda \in K$,

1. $\langle x,x\rangle \geq 0$ e $\langle x,x\rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$;
3. $\langle \alpha x+\lambda y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \lambda\langle y,x\rangle$.

$\mathbb{R}^3$. Porém, foi J. Von Neumann quem, por volta de 1930, introduziu a definição abstrata de espaço de Hilbert, a qual foi necessária na formulação matemática da Mecânica Quântica.

Ao que segue, passaremos a denotar por $H$ um espaço de Hilbert sobre os reais em que está definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cuja norma associada $\|\cdot\|$ torna $H$ um espaço de Banach. Denotaremos por $H^*$ o *espaço dual topológico de* $H$, isto é, o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos de $H$, e usaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^* \times H}$ para o produto de dualidade.

**Proposição 3.2. (Vetor que minimiza a distância)** *Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não - vazio. Para todo $x \in H$ existe um único $y \in K$ tal que*

$$\|x - y\| = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

*Além disso, $y$ se caracteriza pela seguinte propriedade: $y \in K$ e $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ para todo $z \in K$.*

*Demonstração.* Denote $d = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ e considere uma sucessão $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ minimizante para a distância, isto é,

$$\|x - y_k\| = d_k \to d.$$

O ponto essencial a estabelecer é que esta sucessão é uma sucessão de Cauchy para podermos usar a completude dos espaços de Hilbert, o fato de $K$ ser fechado e a continuidade da norma para garantir que a sucessão é convergente. De fato, dados dois termos da sucessão $y_j$ e $y_k$, tem-se que pela convexidade de $K$, que o ponto médio $\frac{y_k + y_j}{2}$ é um elemento de $K$ que verifica

$$\left\| \frac{y_k + y_j}{2} - x \right\| \geq d.$$

Aplicando a identidade do paralelogramos ( de "lado" $x - y_j$ e $x - y_k$) obtêm-se

$$2\left\|x - y_j\right\|^2 + 2\left\|x - y_k\right\|^2 = \left\|2\left(x - \frac{y_k + y_j}{2}\right)\right\|^2 + \left\|y_j - y_k\right\|^2$$

donde

$$\begin{aligned} \left\|y_j - y_k\right\|^2 &= 2\left\|x - y_j\right\|^2 + 2\left\|x - y_k\right\|^2 - \left\|2\left(x - \frac{y_k + y_j}{2}\right)\right\|^2 \\ &\leq 2\left\|x - y_j\right\|^2 + 2\left\|x - y_k\right\|^2 - 4d^2 \to 0 \end{aligned}$$

quando $j, k \to \infty$ pelo que se trata efetivamente de uma sequência de Cauchy. $\square$

Dados $x$ e $K$ como na proposição anterior, passaremos a designar por $P_K(x)$ o elemento $\eta \in K$ cuja igualdade $\|x - \eta\| = \inf_{w \in K} \|x - w\|$ é satisfeita. A aplicação $P_K$ não é em geral linear mas é contínua, mais precisamente lipschitziana.

**Proposição 3.3.** *Se $K$ possui as mesmas propriedades da proposição anterior, então*

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H.$$

*Demonstração.* Veja (BRÉZIS, 1983, p. 79 à 81). □

Uma aplicação $\mathscr{L} : H \times H \to \mathbb{R}$ com $H$ um espaço vetorial real diz-se *bilinear* se para se para todos $x, y, z \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tivermos:

1. $\mathscr{L}(\lambda x, y) = \mathscr{L}(x, \lambda y) = \lambda \mathscr{L}(x, y)$;

2. $\mathscr{L}(x+z, y) = \mathscr{L}(x, y) + \mathscr{L}(y, z)$ e $\mathscr{L}(x, y+z) = \mathscr{L}(x, y) + \mathscr{L}(x, z)$.

Se adicionalmente $H$ for normado a forma bilinear $\mathscr{L}$ diz-se:

- *contínua* se existir $C \geq 0$ tal que $|\mathscr{L}(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in H$;

- *coerciva* se existir $\alpha > 0$ tal que $|\mathscr{L}(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2$, para todo $x \in H$.

O seguinte resultado é um famoso teorema de Riesz, o qual mostra que todo espaço de Hilbert é naturalmente identificado com seu dual topológico.

**Teorema 3.4. (Teorema da Representação de Riesz - Fréchet)** *Seja $H$ um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H^*$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{H^* \times H} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

*Além disso, $\|f\| = \|\varphi\|_{H^*}$.*

*Demonstração.* Veja (BRÉZIS, 1983, p. 79 à 81). □

**Teorema 3.5. (Stampacchia)** *Seja $\mathscr{L}(x, y)$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $K$ um conjunto convexo, fechado e não - vazio. Dado $\varphi \in H^*$ existe um único $x \in K$ tal que para todo $y \in K$,*

$$\mathscr{L}(x, y-x) \leq \langle \varphi, y-x \rangle_{H^* \times H}. \tag{3.3.1}$$

*Além disso, se $\mathscr{L}$ é simétrica, então $x$ se caracteriza pela propriedade*

$$\begin{cases} x \in K \\ \frac{1}{2}\mathscr{L}(x, y) - \langle \varphi, x \rangle_{H^* \times H} = \min_{y \in K} \left\{ \frac{1}{2}\mathscr{L}(y, y) - \langle \varphi, y \rangle_{H^* \times H} \right\}. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

*Demonstração.* Pelo Teorema de Representação de Riesz - Fréchet existe $f \in H$ único tal que

$$\langle \varphi, y \rangle_{H^* \times H} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Por outro lado, para todo $x \in H$ fixo a aplicação $v \to \mathscr{L}(x, v)$ é uma forma linear contínua sobre $H$, e novamente pelo Teorema de Representação de Riesz - Fréchet existe um elemento de $H$, denotado por $Ax$, tal que $\mathscr{L}(x, v) = \langle Ax, v \rangle$ para todo $v \in H$. É claro que $A$ é um operador linear de $H$ em $H$ e que

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq C \|x\| \quad \forall x \in H \\ \langle Ax, x \rangle &\geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in H. \end{aligned}$$

Nosso problema consiste, portanto, em encontrar $x \in K$ tal que

$$\langle Ax, v-x\rangle \geq \langle f, v-x\rangle \;\; \forall v \in K.$$

Seja $\rho > 0$ uma constante que fixaremos mais tarde. A última igualdade equivale a

$$\langle \rho f - \rho Ax + x - x, v - x\rangle \leq 0 \;\forall v \in K$$

isto é,

$$x = P_K(\rho f - \rho Ax + x).$$

Para todo $v$ em $K$ definamos $Sv = P_K(\rho f - \rho Ax + x)$. Mostremos que se $\rho > 0$ é convenientemente escolhido, então $S$ é uma contração estrita, isto é, existe $\mu < 1$ tal que

$$\|Sv_1 - Sv_1\| \leq \mu \|v_1 - v_2\| \;\; \forall v_1, v_2 \in K.$$

Com efeito, pela proposição 3.3 temos que

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|$$

e então

$$\begin{aligned} \|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2\right). \end{aligned}$$

Fixando $\rho > 0$ tal que $\mu^2 = 1 - 2\rho\mu + \rho^2 C^2 < 1$ ( tomar $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$ ) vemos que $S$ admite um único ponto fixo. Suponhamos agora que a forma $\mathscr{L}(x,y)$ é simétrica. Então define um novo produto escalar em $H$, cuja norma associada é equivalente a norma $\|\cdot\|$. Assim, $H$ é também um espaço de Hilbert para este produto escalar. Aplicando mais uma vez o Teorema de Representação de Riesz - Fréchet, obtemos $g \in H$ tal que

$$\mathscr{L}(g,v) \leq \langle \varphi, v\rangle_{H^* \times H} \;\; \forall v \in H.$$

Logo, a desigualdade 3.3.1 se escreve

$$\mathscr{L}(g-x, v-x) \leq 0 \;\; \forall v \in H,$$

isto é, $x = P_k g$, onde a projeção é tomada com relação ao produto escalar definido pela forma bilinear simétrica $\mathscr{L}$. De acordo com a proposição 3.2 equivale a achar $x \in K$ onde se atinge

$$\min_{v \in K} \mathscr{L}(g-v, g-v)^{1/2}.$$

Isto é, minimizar sobre $K$, $\mathscr{L}(g-v,g-v)$ ou

$$\mathscr{L}(v,v)-2\mathscr{L}(g,v),$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}(v,v)-\langle\varphi,v\rangle_{H^*\times H}\,.$$

$\square$

### Seção 3.4 Aplicação ao Método de Newton

O bem conhecido método de Newton de determinação de zeros de funções reais pode ser estudado sob a luz do Princípio da Contração de Banach. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função da qual desejamos determinar um zero, ou seja, uma solução da equação $f(\chi)=0$. Notemos que essa equação é (trivialmente) à equação

$$\chi=\chi-\frac{f(\chi)}{\dot{f}(\chi)},$$

pelo menos se $\dot{f}(\chi)\neq 0$. Colocado dessa forma o problema torna-se um problema de ponto fixo para a aplicação $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x):=x-\frac{f(x)}{\dot{f}(x)}.$$

Isto motiva a seguinte proposição.

**Proposição 3.6.** *Se $f$ for pelo menos duas vezes diferenciável, então $f$ possuirá um zero $\chi$, único, num dado intervalo $[a,b]$ não degenerado se existir $0\leq\lambda<1$ tal que*

$$\left|\frac{f(x)\ddot{f}(x)}{(\dot{f}(x))^2}\right|\leq\lambda\ \ \forall x\in[a,b]\,, \tag{3.4.1}$$

*e se*

$$\left|\frac{f(\bar{x})}{\dot{f}(\bar{x})}\right|\leq(1-\lambda)\zeta, \tag{3.4.2}$$

*onde $\bar{x}:=\frac{a+b}{2}$ e $\zeta:=\frac{b-a}{2}$. Nesse caso, tem-se $\chi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, onde a sequência $x_n\in[a,b]$ é determinada iterativamente por*

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\dot{f}(x_n)},\ \ n\geq 0,$$

*sendo $x_0\in[a,b]$, arbitrário. Ter-se-á,*

$$|\chi-x_n|\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|F(x_0)-x_0|\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}(b-a),\ \ n\geq 0. \tag{3.4.3}$$

*Se adotarmos $x_0=\bar{x}$ teremos ainda $|\chi-x_n|\leq\zeta\lambda^n, n\geq 0$, por* 3.4.2.

*Demonstração.* Sejam $x,y \in [a,b]$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
F(y)-F(x) &= y-\frac{f(y)}{\dot f(y)}-x+\frac{f(x)}{\dot f(x)} \\
&= \int_x^y \frac{d}{dt}\left(t-\frac{f(t)}{\dot f(t)}\right)dt \\
&= \int_x^y \frac{f(t)\ddot f(t)}{\left(\dot f(t)\right)^2}dt.
\end{aligned}
$$

Assim, 3.4.1 garante que

$$|F(y)-F(x)| \leq \lambda\,|y-x|.$$

Isso estaria dizendo-nos que $F$ é contração. Precisamos, porém, garantir que $F$ leva pontos de $[a,b]$ em $[a,b]$. Isso equivale a garantir que $|F(x)-\bar{x}| \leq \zeta$ para todo $x \in [a,b]$, ou seja, para todo $x$ tal que $|x-\bar{x}| \leq \zeta$. Uma maneira de impor isso usando 3.4.1 é supor válida a condição 3.4.2. De fato,

$$
\begin{aligned}
|F(x)-\bar{x}| = \left|F(x)-F(\bar{x})+\frac{f(\bar{x})}{\dot f(\bar{x})}\right| &\leq |F(x)-F(\bar{x})|+\left|\frac{f(\bar{x})}{\dot f(\bar{x})}\right| \\
&\overset{por\ (3.7)}{\leq} \lambda\,|x-\bar{x}|+\left|\frac{f(\bar{x})}{\dot f(\bar{x})}\right| \\
&\overset{por\ (3.8)}{\leq} \lambda\,|x-\bar{x}|+(1-\lambda)\zeta \\
&\overset{pois\ x\in[a,b]}{\leq} \lambda\zeta+(1-\lambda)\zeta \\
&= \zeta.
\end{aligned}
$$

Com isso, provamos que $F$ é uma contração que mapeia o espaço métrico completo $[a,b]$ em si mesmo. Desse modo, pelo Princípio da Contração de Banach, $F$ admite um único ponto fixo em $[a,b]$. □

Notemos que a condição 3.4.1 é importante por garantir a contratividade de $F$, enquanto que 3.4.2 é suficiente para garantir que $F$ leva pontos de $[a,b]$ em $[a,b]$, podendo ser eventualmente substituída por outra condição que garanta o mesmo.

# Capítulo 4

## Conclusão

Das várias ferramentas desenvolvidas palos matemáticos para a racionalização de problemas em diversas áreas da Ciência, em particular, dos próprios problemas existentes em Matemática, este trabalho proporcionou-me uma ínfima, porém valiosa, parte do conhecimento teórico produzido pelos matemáticos e expostos em uma grande quantidade de trabalhos produzidos sobre Teoria de Pontos Fixos e questões relacionadas.

Conclui-se então que, para contribuirmos significativamente ao corpo de conhecimento denominado Ciência, em particular, Ciências Naturais e Ciências Exatas, deve-se necessariamente, mas não suficientemente, dominar boa parte do conhecimento existente neste corpo, para só então avançarmos de modo satisfatório.

# REFERÊNCIAS


BARATA, J. C. A. *Curso de Física: Matemática*, Versão de 15 de maio de 2008. Departamento de Física - Matemática USP. Disponível em: <http://www.denebola.if.usp.br/jbarata/Notas de aula/notas de aula.html>. Acesso em: 15 jan. 2013, 16:30:30.

BRÉZIS, H. *Analyse Fonctionnelle*. Paris: Masson, 1983.

HÖNIG, C. S. *Aplicações da Topologia à Análise*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1976.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis With Application*. United States of America: Wiley Classics Library, 1978.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: Textos Universitários, SBM, 2009.

LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2007.

LIMA, E. L. *Curso de Análise, Volume 2*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1981.

LOPES, A. O.; DOERING, C. I. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Matemática Universitária, IMPA, 2005.

MUNKRES, J. R. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 1975.

SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, CNpq, 1978.

# APÊNDICE A - Espaços Métricos Compactos

Neste apêndice são apresentados alguns resultados sobre espaços métricos compactos. Resultados utilizados neste trabalho, ora implicitamente ora explicitamente.

Seja $X$ um subconjunto de um espaço métrico $M$. Uma *cobertura* de $X$ é uma família $\ell = (C_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de $M$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Se porém, existir um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda$ em $L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda\in L'} C_\lambda$, então a subfamília $\ell' = (C_\lambda)_{\lambda\in L'}$ chama-se uma *subcobertura de* $\ell$.

Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ diz-se *aberta* quando cada conjunto $A_\lambda, \lambda \in L$, é aberto em $M$. A cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} C_\lambda$ diz-se *finita* quando $L$ é um conjunto finito Neste caso, temos $L = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup ... \cup C_{\lambda_n}$.

Um espaço métrico $M$ chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita. Noutros termos, $M$ compacto significa que se $M = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$, onde cada $A_\lambda$ é aberto em $M$, então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$.

Um subconjunto $K$ de um espaço métrico $M$ chama-se um *subconjunto compacto* quando o subespaço métrico $K$ é compacto. Isto significa que de toda cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A'_\lambda$, por meio de abertos $A'_\lambda$ em $X$ se pode extrair uma subcobertura finita $X = \cup_{i=1}^n A'_{\lambda_i}$. Como, para cada $\lambda \in L, A'_\lambda = X \cap A_\lambda$, onde $A_\lambda$ é aberto em $M$, vemos que

$$X = \cup A'_\lambda \Leftrightarrow X \subset \cup A_\lambda.$$

Logo, o subconjunto $X \subset M$ é compacto se, e somente se, de cada cobertura $X \subset \cup A_\lambda$, por aberto $A_\lambda \subset M$, se pode extrair uma subcobertura finita $X \subset A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}$.

**PROPOSIÇÃO A.1** *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

*Demonstração.* Veja. LIMA. E. L, *Espaços Métricos*. pag. 211. □

**COROLÁRIO A.1** *Todo espaço métrico compacto é completo.*

*Demonstração.* Com efeito, se $M$ é compacto, então $M$ é um subconjunto fechado denso do seu complemento $\hat{M}$. Logo, $M = \hat{M}$. □

**PROPOSIÇÃO A.2** *Todo espaço métrico compacto é limitado.*

*Demonstração.* Se $M$ é compacto, da cobertura aberta $M = \bigcup_{x\in M} B(X;1)$ podemos extrair umma subcobertura finita

$$M = B(X_1;1) \cup ... \cup B(X_n;1),$$

logo $M$ é limitado. □

**PROPOSIÇÃO A.3** *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

*Demonstração.* Sejam $f : M \to N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dada uma cobertura aberta $f(K) \subset \cup A_\lambda$, obtemos a cobertura aberta $K \subset \bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda)$, da qual extraímos uma subcobertura fina $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_{\lambda_n})$ e daí

$$f(K) \subset ff^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup ff^{-1}(A_{\lambda_n}) \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}.$$

Logo $f(K)$ é compacto. □

**COROLÁRIO A.2** *Se $M$ é compacto, toda aplicação contínua $f : M \to N$ é fechada, isto é, $F \subset M$ fechado $\Rightarrow f(F) \subset N$ fechado.*

*Demonstração.* Com efeito, $F \subset M$ fechado $\Rightarrow F$ compacto $\Rightarrow f(F)$ compacto $\Rightarrow f(F)$ fechado em $N$. □

**COROLÁRIO A.3** *Se $M$ é compacto, então toda aplicação contínua $f : M \to N$ é limitada.*

*Demonstração.* Com efeito, $f(M) \subset N$, sendo compacto é limitado. □

Assim, quando $K$ é compacto, o conjunto $C(K;N)$ de todas as aplicações contínuas $f : K \to N$ é um espaço métrico, com a métrica da convergência uniforme. Assim, podemos considerar $C(K;N)$ um subespaço de $\beta(K;N)$ das funções limitadas $\varphi : K \to N$.

**TEOREMA A.1 (Weierstrass)** *Se $M$ é compacto, toda função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em $M$. Mais precisamente, existem $x_0$ e $x_1$ em $M$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para qualquer $x$ em $M$.*

*Demonstração.* A imagem $f(M)$ é um subconjunto compacto em $\mathbb{R}$. Logo, é limitado e fechado. Assim, $f$ é limitada e, pondo-se $\alpha = inf\, f(M)$, $\beta = sup\, f(M)$, temos $\alpha, \beta \in f(M)$. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que $f(x_0) = \alpha$ e $f(x_1) = \beta$. Portanto $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in M$. □

**TEOREMA A.2 (Borel - Lebesgue)** *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de $F$ por meio de abertos admite uma subcobertura finita: $F \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$.*

*Demonstração.* Sendo $F$ fechado, $A = \mathbb{R} - F$ é aberto. E sendo $F$ limitado, existe um intervalo limitado $[a,b]$ que contém $F$. Temos

$$[a,b] \subset \left( \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup A.$$

Daí se extrai uma subcobertura finita $F \subset [a,b] \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n} \cup A$. Como nenhum ponto de $F$ está em $A$, obtemos $F \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$, como queríamos demonstrar. □