Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне

Лебедев Ярослав Борисович

2022 Feb 18th

Содержание

Цель работы

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени)
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Задание

Вариант 15. Задача о погоне: На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 8,1 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [2].

Выполнение лабораторной работы

Примем за $t0 = 0$, $xл0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $xk0 = 8,1$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки [1].

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $xл0$ ($\theta = xл0 = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис.1).

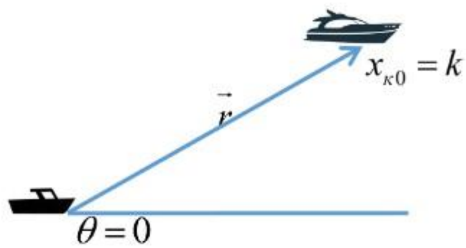

Рис.1. Положение катера и лодки в начальный момент времени

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер k-x (или k+x, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или (k-x)/3.2v (во втором случае (k+x)/3.2v). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения: в первом случае: x/v = (k-x)/(3.2*v), или во втором: x/v = (k+x)/(3.2*v). Отсюда мы найдем два значения x1 = k/4.2 и x2 = k/2.2, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: vr - радиальная скорость и vt - тангенциальная скорость (рис.2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, vr = dr/dt. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем dr/dt = v. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости dθ/dt на радиус r, vt = r * dθ/dt.

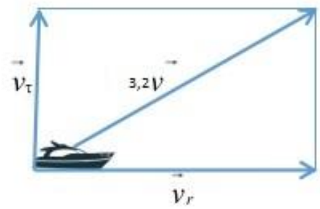

Рис.2. Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Учитывая, что радиальная скорость равна v, из рисунка видно, что по можно выразить катет vt как vt = sqrt(10.24-1)*v = sqrt(9.24)*v. Тогда получаем следующее равенство: r * dθ/dt = sqrt(9.24)*v.

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений с начальными условиями для двух случаев, где можно исключить из полученной системы производную по t и перейти к одному дифференциальному уравнению (рис.3). Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{9.24}v \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x2 \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{9.24}}$$

Рис.3. Система дифференциальных уравнений. Начальные условия для двух случаев. Дифференциальное уравнение

Для этого напишем код в Scilab для первого случая (рис.4), и для второго (рис.5).

Lebedev_lab02(1).sce | Lebedev_lab02(2).sce

```
s=8.1;// начальное расстояние от лодки до катера
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
 dr=r/sqrt(9.24);
endfunction;

//начальные условия в случае 1
r0=s/4.2;
tetha0=0;
tetha=0:0.01:2*%pi;

r=ode(r0,tetha0,tetha,f);

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
function xt=f2(t)
 xt=tan(fi)*t;
endfunction

t=0:1:800;

polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории движения катера в полярных координатах
plot2d(t,f2(t),style = color('red'));
```

Рис.4. Код для первого случая

Lebedev_lab02(1).sce | Lebedev_lab02(2).sce

```
s=8.1;// начальное расстояние от лодки до катера
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
 dr=r/sqrt(9.24);
endfunction;

//начальные условия в случае 2
r0=s/2.2;
tetha0=-%pi;
tetha=0:0.01:2*%pi;

r=ode(r0,tetha0,tetha,f);

//функция, описывающая движение лодки браконьеров
function xt=f2(t)
 xt=tan(fi)*t;
endfunction

t=0:1:800;

polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории движения катера в полярных координатах
plot2d(t,f2(t),style = color('red'));
```

Рис.5. Код для второго случая

Получим такие результаты: в первом случае пересекутся на расстоянии 11,9 км (рис.6), во втором случае пересекутся на расстоянии 63 км (рис.7).

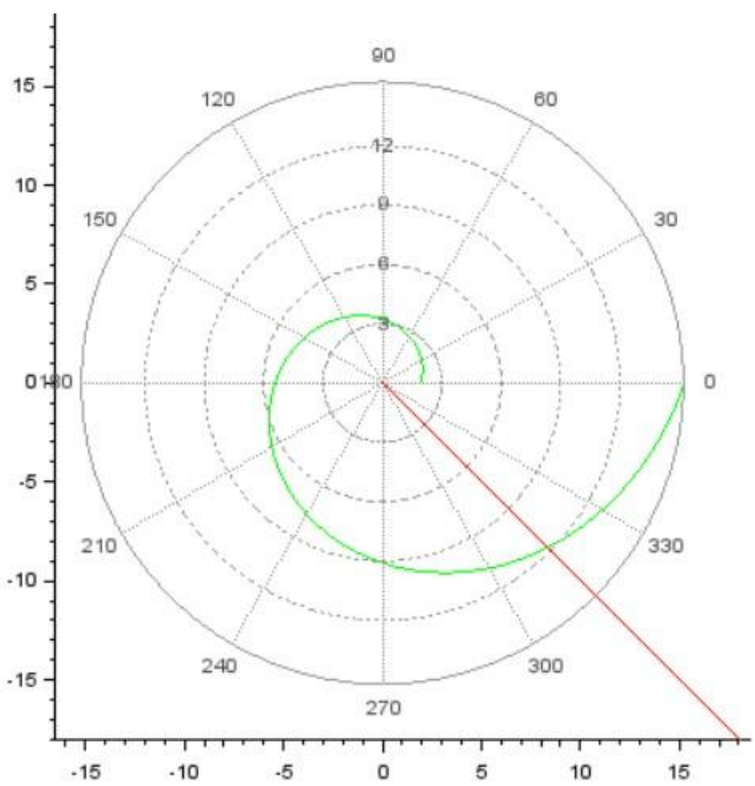

Рис.6. Результат в первом случае

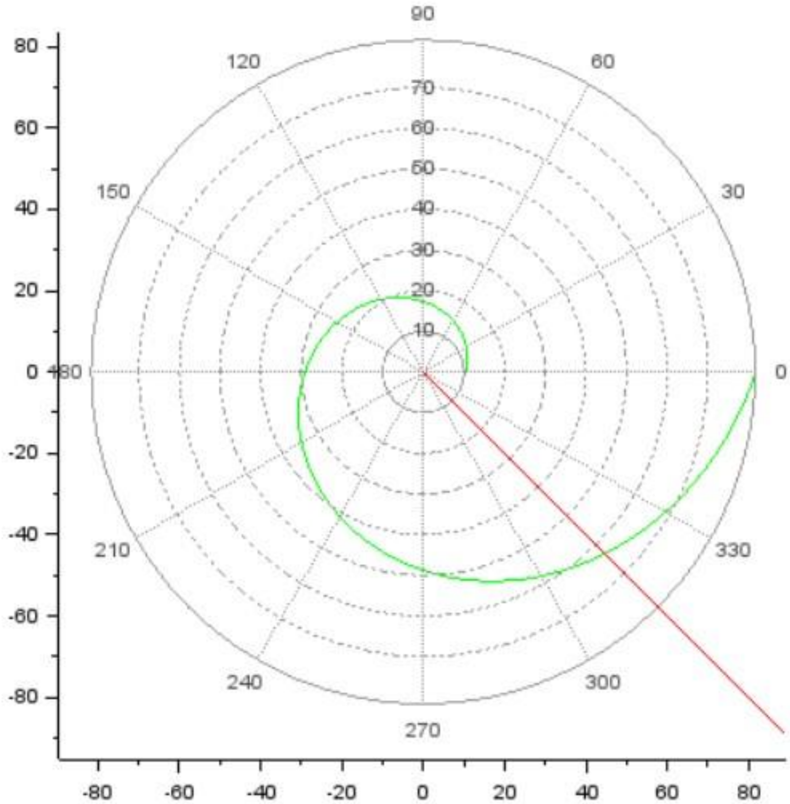

Рис.7. Результат во втором случае

Выводы

Записано уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени). Построена траектория движения катера и лодки для двух случаев. Найдены точки пересечения траектории катера и лодки для двух случаев

Список литературы

1. Методические материалы курса
2. Кривая погони (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B8)