

Отчет по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва

Лебедев Ярослав Борисович

2022 Mar 10th

Содержание

Цель работы	3
Задание	4
Теоретическое введение	5
Выполнение лабораторной работы	7
Выводы	10
Список литературы	11

Цель работы

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв. Найти стационарное состояние системы. Для этого написать программу в OpenModelica.

Задание

Вариант 15. Для модели «хищник-жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = -0.22x(t) + 0.066x(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.66y(t) - 0.022x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$x_0 = 7, y_0 = 15$$

. Найдите стационарное состояние системы [1].

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры [2]. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Формула (1)

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

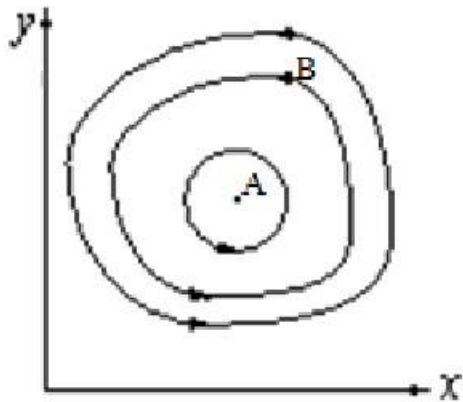


Рис.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на Рис.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$$

. Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Выполнение лабораторной работы

Работу я выполнял в OpenModelica. Для решения поставленной задачи необходимо было написать программу (Рис.2).

```
1 model lab5
2   parameter Real a = -0.22;
3   parameter Real b = -0.066;
4   parameter Real c = -0.66;
5   parameter Real d = -0.022;
6   parameter Real x_01 = 7;
7   parameter Real y_01 = 15;
8   parameter Real x_02 = c/d;
9   parameter Real y_02 = a/b;
10  Real x(start = x_01);
11  Real y(start = y_01);
12  //Real x(start = x_02);
13  //Real y(start = y_02);
14  equation
15    der(x) = a*x - b*x*y;
16    der(y) = -c*y + d*x*y;
17 end lab5;
```

Рис.2. Программа

Результаты выполнения программы: график зависимости численности хищников от численности жертв (Рис.3), графики изменения численности хищников и численности жертв (Рис.4), стационарное состояние системы (Рис.5).

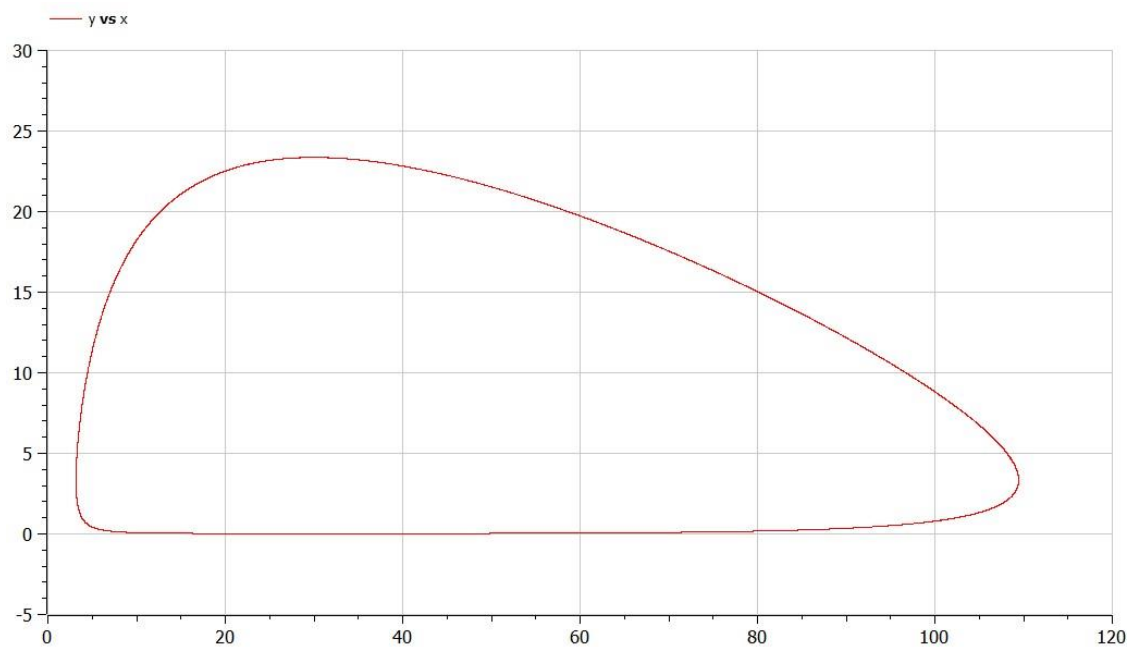


Рис.3.График зависимости численности хищников от численности жертв

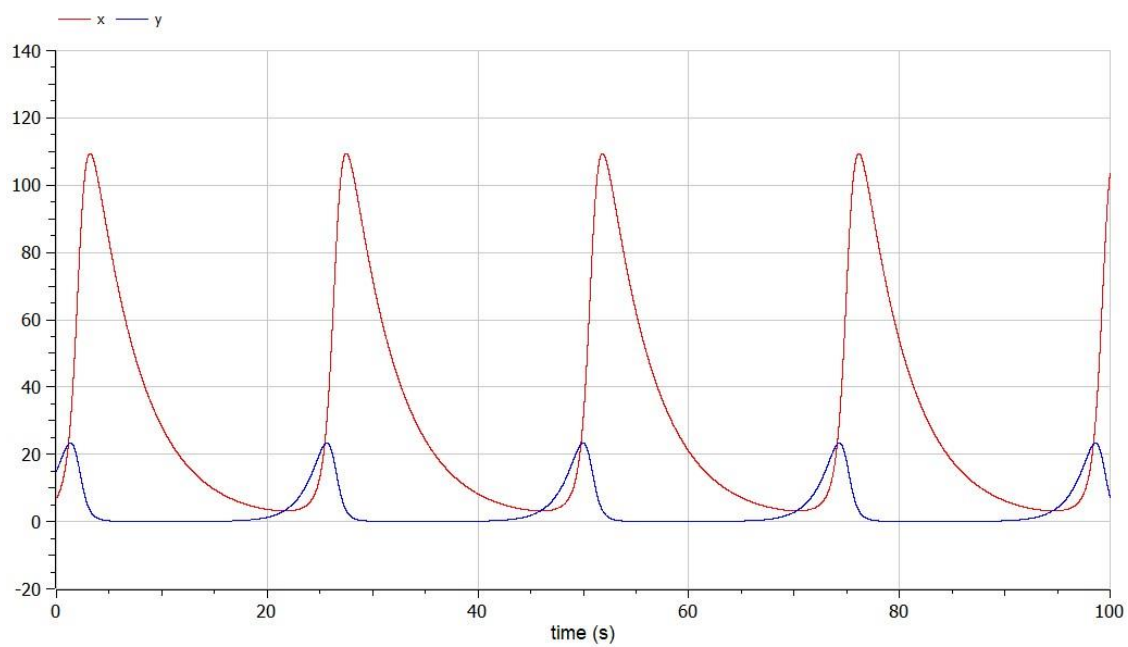


Рис.4. График изменения численности хищников и численности жертв

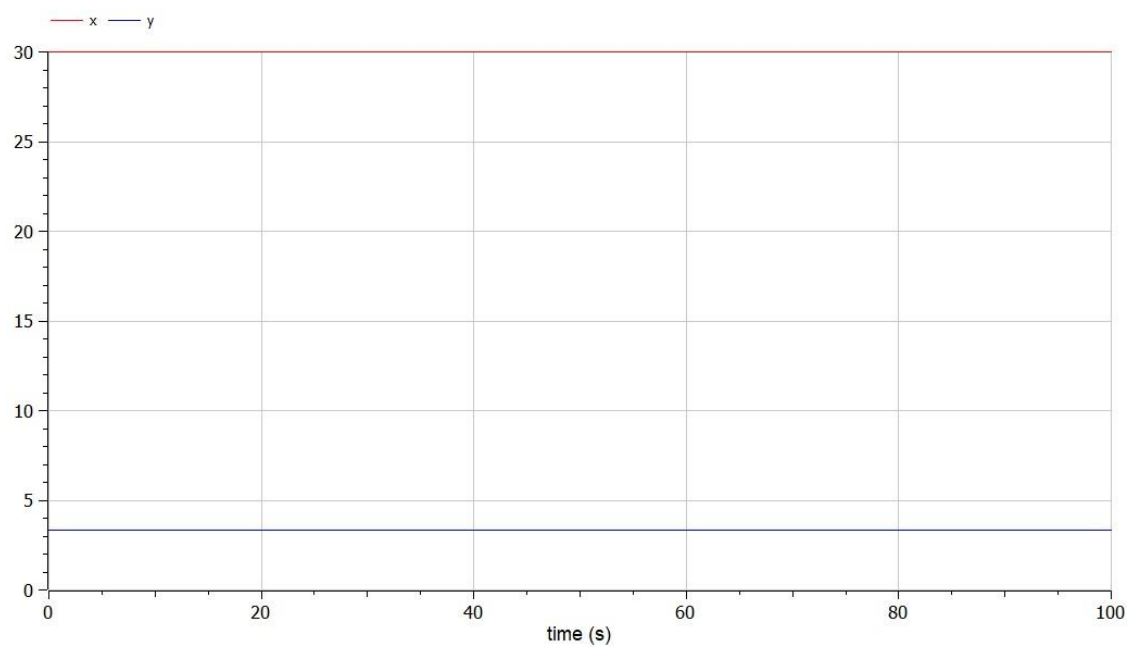


Рис.5. Стационарное состояние системы

Выводы

Построен график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график изменения численности хищников и численности жертв. Найдено стационарное состояние системы. Для этого написана программа в OpenModelica.

Список литературы

1. Методические материалы курса
2. Модель Лотки — Вольтерры, URL:
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%9B%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B8_%E2%80%94%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%80%D1%8B