数学建模课程论文

组员 1: 陈铭硕

组员 2: 唐铭泽

组员 3: 尹贝尔

人员分工：

唐铭泽 模型设计、绘图、论文编写、排版

罗浩宇 模型设计、论文编写

陈子轩 资料收集、模型设计

繁花曲线的分析与绘制

摘要

关键字：疫情防控　图论　网络流　最短路

目录

一、 问题重述

1.1 问题的提出

二、 问题分析

2.1 总体分析

一个居民小区通常由一些单元与道路组成。每个单元都有一定数量的人居住，每条道路都有一定的通过时间。此外，我们可以把道路的交叉点与核酸检测点的候选位置看作没有人居住的单元。于是我们可以把居民小区抽象为一张无向图，点权为居住人数，边权为边的通过时间，把核酸检测点的规划转化成图论问题进行求解。

2.2 问题一分析

定义图上两点的花费为两点的最短路径长度乘上起始点的点权。

建立核酸检测点位置要使居民总体方便，那么建立核酸检测点的位置有两种选择：一种是使得居民到达核酸检测点的总花费最短，另一种是使得到达核酸检测点的最大的花费最小；并且需要考虑建立的位置是否会给居民的正常生活造成影响。

2.3 问题二分析

2.4 问题三分析

三、 模型假设

四、 符号说明

符号	意义
n	图的点数
m	图的边数
w_i	第 i 个点的点权
e_i	第 i 条边的边权
u_i	第 i 条边的起点
v_i	第 i 条边的终点
$d_{i,j}$	第 i 个点和第 j 个点最短路径长度
$rk_{i,j}$	第 i 到其他所有结点中第 j 小的结点编号

五、 模型建立、求解与分析

5.1 问题一

5.1.1 选择一

使得居民到达核酸检测点的总花费最短。

5.1.2 选择二

使得到达核酸检测点的最大的花费最小。

提出一个概念叫 图的绝对重心，定义为到所有点的花费距离的最大值最小的点，那我们的核酸检测点应建立在绝对重心上。

接下来考虑如何求解绝对重心。

假设图的绝对重心在边上，枚举每一条边 (u_k, v_k)，钦定图的绝对重心 c 在这一条边上，假设其距 u_k 的距离为 $x(x \le e_k)$，那么它距离 v_k 的距离为 $e_k - x$。

如图绝对重心 c 与一点 i 的关系图:

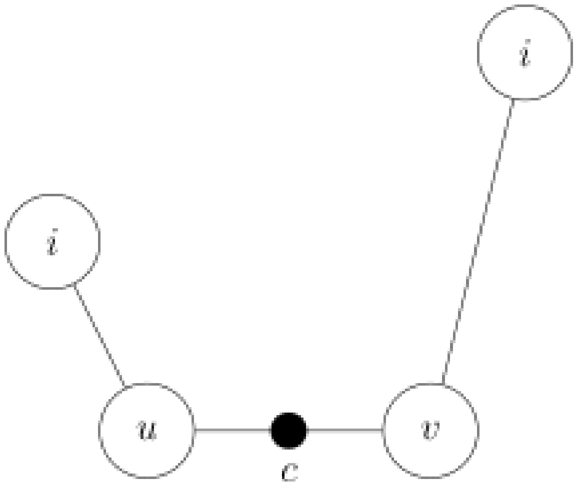

图 1　图的绝对中心与一点的位置关系 [?]

那么 $d_{c,i} = \min\{w_i \times (d_{u_k,i} + x), w_i \times (d_{v_k,i} + e_k - x)\}$。
随着 c 从 u_k 到 v_k 的移动 $d_{c,i}$ 的变化如图可以画到一个平面直角坐标系上：

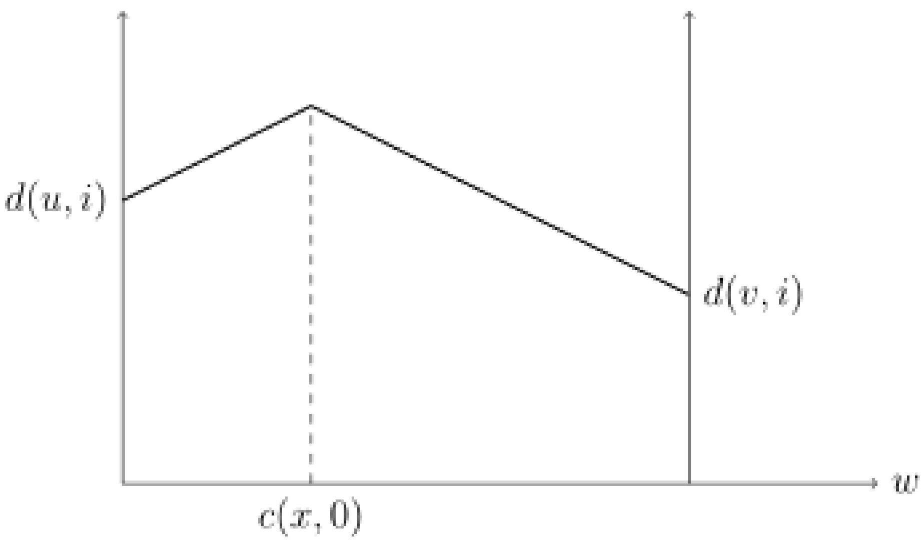

图 2　图的绝对中心变化的影响 [?]

然后显然可以发现图像会是两条斜率相同的一次函数所构成。
接下来将对于每一个点 i 都画像这样的图像就可以得到：

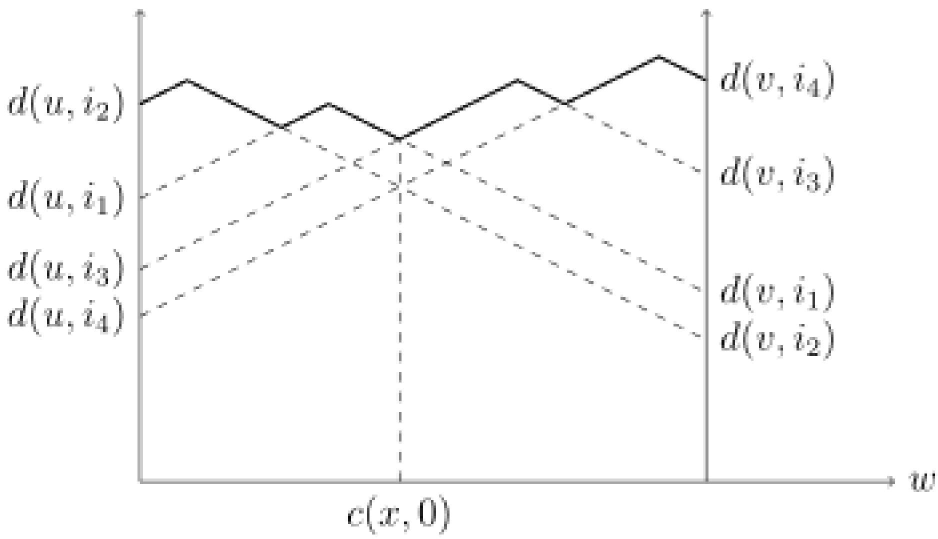

图 3　图的绝对中心变化的影响 [?]

这些折线交点中的最低点，横坐标就是图的绝对中心的位置。

对于绝对中心在一个点上，那么就枚举一下那个节点，再用与其距离最远的节点更新一下就行了。

对于每一条边，每一个点都这样做一下就可以了。

总结一下过程：

1. 使用最短路算法求出 $d_{i,j}$;
2. 求出 $rk_{i,j}$;
3. 对于绝对中心在点上更新答案；
4. 对于绝对中心在边上，枚举每一条边更新答案；

如果使用堆优化的 Dijkstra 求解最短路、邻接表存图，时间复杂度为 $\Theta(n^2\log m + nm)$

5.2 问题二

我们发现

六、 模型评价