



---

# Application des équations de Lagrange

---

Compte rendu de TP



ENSIL-ENSCI

07 octobre 2025



**Étudiants :**

BARETTA Valentin  
CARDAILLAC Amandine  
LABORIE Armand  
LARIVIERE Colin  
LEMOINE Thomas  
MARQUES Artur  
RENAUD Dorian

AMBLARD Macéo  
BOURRANDY Pierre  
JANKEE Purvesh  
HORIL Yogesh  
FAU Axel  
GRZYBOWSKI Raphaël  
DELMAS Antonin

**Encadrant :**

GROSSOLEIL David

## Table des matières

I.	Introduction.....	3
II.	Étude technique de l'hélicoptère .....	1
1.	Schéma paramétré .....	1
2.	Matrice d'inertie.....	1
III.	Frottements aérodynamiques.....	1
IV.	Contact au sol.....	2
V.	Groupe motopropulseur .....	3
1.	Motoréducteurs .....	4
	Modélisation.....	4
	Détermination des paramètres .....	4
2.	Modélisation des hélices.....	5
3.	Modélisation du groupe motopropulseur.....	6
VI.	Barre de Bell .....	7
VII.	Equations de Lagrange .....	8
VIII.	Simulateur 1D.....	10
IX.	Simulateur 3D.....	11
X.	Conclusion .....	15

## I. Introduction

Au cours de ce TP, l'objectif est d'étudier et de modéliser le comportement dynamique d'un hélicoptère miniature radiocommandé afin de concevoir un simulateur de vol 3D sous MATLAB/Simulink. La modélisation repose sur les équations de la mécanique lagrangienne, permettant de décrire précisément les mouvements de l'appareil.

Afin de modéliser le comportement de l'hélicoptère miniature radiocommandé nous divisons le travail en plusieurs parties.

Dans un premier temps, un schéma paramétré de l'hélicoptère a été établi afin d'identifier les variables et paramètres nécessaires à la modélisation. Cela donne une base commune aux différents sous-groupes qui permet de remonter à la matrice d'inertie de l'appareil et aux équations de Lagrange. En parallèle, des mesures expérimentales ont été réalisées pour caractériser les paramètres physiques de l'hélicoptère tels que le poids, les dimensions et les propriétés des groupes motopropulseurs. Ces données ont servi à élaborer les modèles dynamiques des différents sous-groupes constituant le schéma-bloc.

La modélisation a été effectuée sous MATLAB/Simulink, d'abord en une dimension pour valider les équations, puis à travers un simulateur 3D permettant de représenter le vol et l'atterrissage. Cette approche a permis d'analyser la dynamique du système et de visualiser son comportement de manière réaliste. Ce rapport présente les principales étapes de modélisation et d'analyse de l'hélicoptère miniature, ainsi que les résultats obtenus. Tous ces résultats sont complétés par des vues du Matlab/Simulink.

## II. Étude technique de l'hélicoptère

Colin, Valentin

Dans cette partie nous établirons le schéma de l'hélicoptère pour déterminer les différentes parties le composant ainsi que la matrice d'inertie de ce dernier.

### 1. Schéma paramétré

Valentin

Nous représentons le schéma de l'hélicoptère avec les notations du TP comme suit sur la Figure 1 :

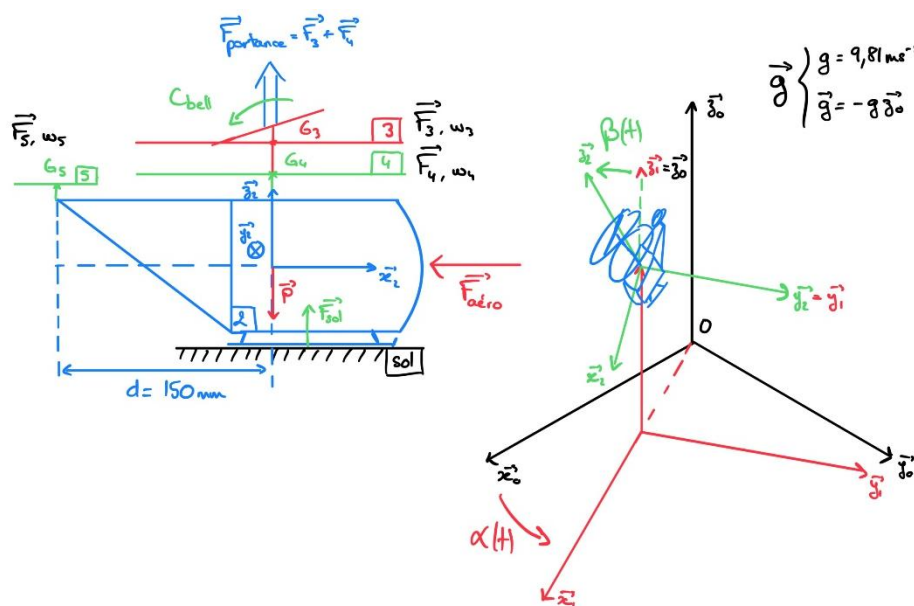


Figure 1 : Schéma paramétré de l'hélicoptère

Le système étudié est :  $\Sigma = \{2,3,4,5\}$

### 2. Matrice d'inertie

Colin, Valentin

Afin de déterminer les coefficients de la matrice d'inertie de l'hélicoptère nous réalisons la même mesure que dans le premier TP avec la méthode du pendule. Il faut réaliser cette opération dans chaque axe  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  pour pouvoir trouver les 3 coefficients A, B et C.

Nous rappelons que la formule du coefficient de la matrice d'inertie est :

$$C_i = \frac{mgL_i}{\omega_0^2} - mL_i^2$$

Avec L la distance entre le point de pivot du pendule et le centre de gravité de l'objet et  $\omega_0^2 = 2\pi f_0$ .

## III. Frottements aérodynamiques

Amandine, Armand, Arthur, Thomas

Maintenant, nous allons déterminer les frottements aérodynamiques de notre hélicoptère. Nous avons 3 entrées qui sont les vitesses  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$  ainsi que 3 sorties, les composantes de la force aérodynamique projetés dans  $R_0$ .

Pour ce faire, nous avons fait le choix de modéliser l'hélicoptère comme une sphère. Cela nous a permis de pouvoir estimer un coefficient de traînée  $C_x = 0.47$ . De plus, nous savons que norme de la force aérodynamique est de la forme :

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|\vec{V}\|^2 \cdot S \cdot Cx$$

- $Cx$  : Coefficient de traînée,  $Cx = 0.47$  (sans unité)
- $\rho$  : Masse volumique de l'air,  $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $S$  : Surface de contact,  $S = \pi \cdot R^2$  en  $\text{m}^2$

Ainsi, nous avons donc  $\vec{F}_{aero} = F_{aero} \cdot \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|\vec{V}\|^2 \cdot S \cdot Cx \cdot \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

Soit finalement :  $\vec{F}_{aero} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|\vec{V}\| \cdot \vec{V}$ , avec  $\|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

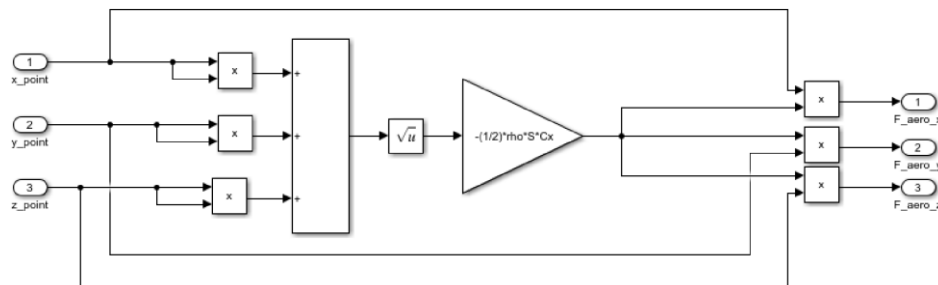


Figure 2 : Schéma bloc représentant les forces de frottements aérodynamiques sur l'hélicoptère

Nous câblons le schéma bloc comme sur la Figure 2.

#### IV. Contact au sol

Amandine, Armand, Macéo, Pierre

Pour pouvoir obtenir une bonne simulation finale, nous devons modéliser un sol pour que l'hélicoptère puisse se poser. Nous décidons donc de modéliser le sol comme un ressort-amortisseur. Nous avons ainsi  $\vec{F}_{sol} = k_{sol}(z_g - z)\vec{z} + a_{sol} \cdot \dot{z}$  lorsque l'hélicoptère atteint le sol avec  $z_g = 30 \text{ mm}$ , la distance entre le centre de gravité de l'hélicoptère et le point où ses patins touchent le sol. Nous pouvons maintenant simuler le fonctionnement de notre sol à l'aide du schéma bloc présenté sur la Figure 3 :

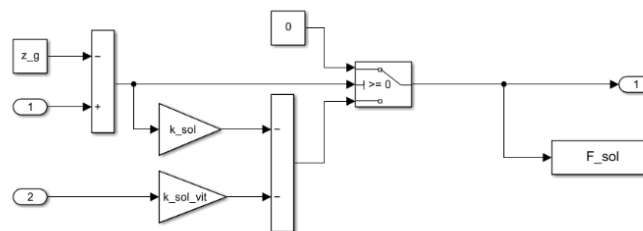


Figure 3 : Schéma-bloc de la modélisation du sol

Pour identifier les paramètres de ce modèle, nous lâchons l'hélicoptère d'une certaine hauteur. Après plusieurs essais et différents paramètres variables et en analysant le nombre de rebond, nous pouvons donc identifier par simulation une raideur  $K_{sol} = 100 \text{ N/m}$  et un amortissement  $a_{sol} = 10 \text{ N.s/m}$ .

Après réglage de tous ces paramètres dans notre modèle, nous observons la réponse suivante du système après une chute d'un mètre, sur la Figure 4 :

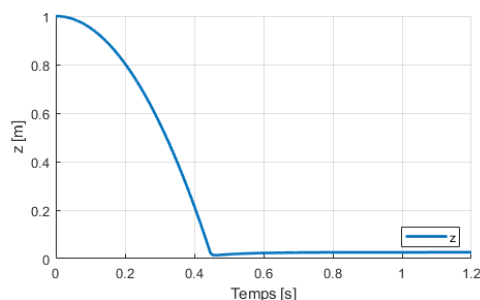


Figure 4 : Réponse de l'hélicoptère après une chute d'un mètre sur le sol

Nous observons ainsi que l'hélicoptère chute depuis son altitude initiale jusqu'à atteindre le sol et s'y stabilise. Le léger décalage entre l'altitude de l'hélicoptère et l'altitude de 0 m s'explique par le fait que sa position en  $z$  est donnée à son centre de gravité et que ses patins, qui entrent en contact avec le sol, sont situés à 30 mm de ce dernier.

## V. Groupe motopropulseur

Yogesh, Purvesh, Axel, Raphaël, Macéo, Pierre

Dans cette partie nous cherchons à déterminer la force de poussée générée par les hélices, nous devons donc modéliser les trois groupes motopropulseurs, chacun composés d'un moteur ainsi que d'une hélice, et identifier leurs paramètres internes.

Nous venons alimenter dans un premier temps les 2 moteurs principaux et nous faisons varier la tension pour obtenir différentes vitesses de rotation des hélices à l'aide d'un tachymètre laser et de catadioptrés. La tension et le courant sont obtenus par lecture sur l'alimentation et nous récupérons l'image de la force de poussée grâce à une balance (précise au gramme) en mesurant la différence de poids entre l'hélicoptère au repos et avec les hélices en rotation. Le protocole est le même pour les mesures sur l'hélice de queue.

Nous retrouvons dans le Tableau 1 et le Tableau 2, les mesures de tension  $U$ , de courant  $I$ , de vitesse de rotation des hélices  $n$  et de l'image de la force de poussée des hélices  $M$ .

Tableau 1 : Mesures des hélices 3 et 4

$U_{34}$ (V)	0	0,4	0,7	1,0	1,3	1,5	1,7	2,1	2,4	2,8	3
$I_{34}$ (A)	0	0,08	0,12	0,18	0,24	0,29	0,34	0,42	0,52	0,62	0,69
$n_{34}$ (rpm)	0	600	1024	1395	1751	1970	2163	2526	2882	3169	3362
$M_{34}$ (g)	0	-1	-2	-3	-4	-6	-7	-9	-11	-14	-16

Tableau 2 : Mesures de l'hélice 5

$U_5$ (V)	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3
$I_5$ (A)	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,12	0,15	0,17	0,18	0,22
$n_5$ (rpm)	0	2960	6500	8660	10500	12100	13000	14850	15770	16600	17300
$M_5$ (g)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Les moteurs 3 et 4 étant câblés en parallèle, la tension  $U_{34}$  à leurs bornes est la même tandis que le courant  $I_{34}$  est à diviser entre les deux. Nous supposons qu'ils ont une consommation identique. De même, la différence de masse  $M_{34}$  est produite par les 2 hélices en simultanés. Nous considérons qu'elles produisent une poussée équilibrée divisons donc  $M_{34}$  par deux. Enfin, les vitesses de rotations ont été mesurées avec 2 tops par tour. Nous les divisons par 2 pour obtenir les vraies vitesses de rotation. Nous trouvons alors  $\omega_{34}$  et  $\omega_5$  tel que :  $\omega = n * 0,5 * 2\pi/60$ .

À partir de ces données, nous allons pouvoir identifier l'ensemble des paramètres des modèles des moteurs et des hélices.

## 1. Motoréducteurs

Yogesh, Purvesh, Axel, Raphaël, Macéo, Pierre

### Modélisation

Les motoréducteurs sont constitués d'un moteur à courant continu accouplé à un réducteur à engrenage. Le système prend une tension continue en entrée et renvoi une vitesse de rotation en sortie. Nous modélisons alors le système comme suit :

$$\Omega_H = \frac{\left\{ \frac{U_T - k_v \Omega_H}{R + Lp} \right\} k_i - C_r}{Jp}$$

Avec :

$\Omega_H$  : vitesse de rotation a la sortie (rad/s)

$U_T$  : tension continue d'alimentation à l'entrée (V)

$R$  : résistance interne du moteur ( $\Omega$ )

$L$  : inductance interne du moteur (H)

$k_i$  : constante de couple (Nm/A)

$k_v$  : constante de vitesse (V/(rad/s))

$C_r$  : Couple résistant (Nm)

$J$  : Inertie de la charge ( $kg.m^2$ )

Nous pouvons ainsi modéliser et simuler le fonctionnement de nos motoréducteurs à l'aide du schéma bloc présenté sur la Figure 5 :

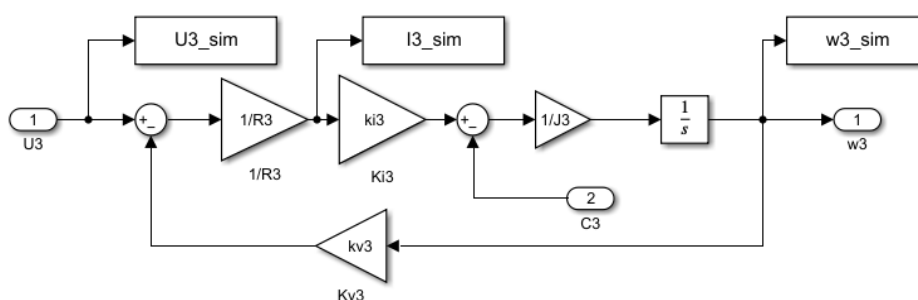


Figure 5 : Schéma bloc du motoréducteur 3

### Détermination des paramètres

La constante de vitesse  $k_v$  correspond à la pente du tracé de la force contre-électromotrice  $U - Ri$  en fonction de la vitesse de rotation des hélices  $\omega$ , tel que :

$$k_v = \frac{U - Ri}{\Omega}$$

Nous traçons donc les caractéristiques pour les 3 motoréducteurs à partir des mesures (Figure 6) :

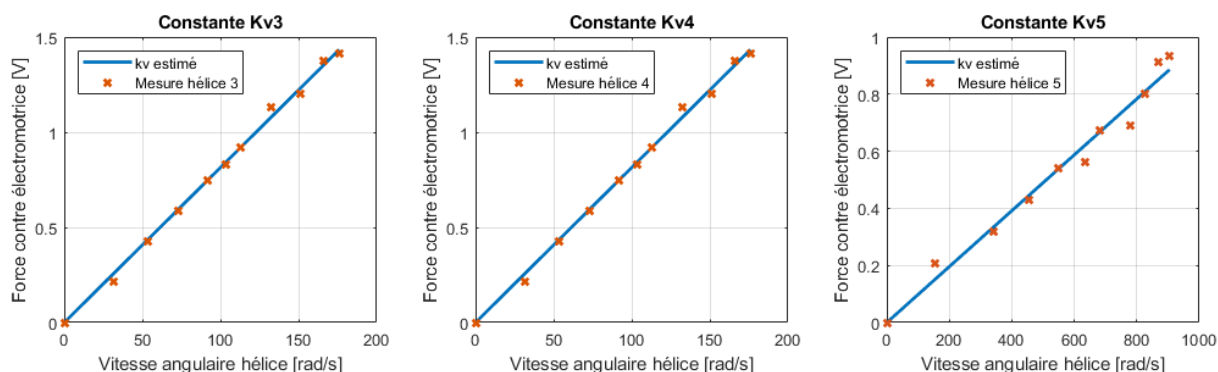


Figure 6 : Paramètres  $k_v$  des moteurs

Nous remarquons que nos mesures s'alignent sur une droite passant par l'origine du repère, ce qui colle à notre modèle. Nous relevons alors la pente de chacune des droites pour trouver les  $k_v$  respectifs, présentés dans le Tableau 3 :

Tableau 3 : Constantes  $k_v$  des motoréducteurs

$K_{v3}$	$8,1.10^{-3}$
$K_{v4}$	$8,1.10^{-3}$
$K_{v5}$	$9,79.10^{-4}$

Par ailleurs, pour de si petits moteurs, nous réalisons l'approximation :

$$k_v \approx k_i$$

Pour l'inertie de la charge, nous prenons celle des hélices qui est majoritaire devant celle des pignons ou de l'axe du moteur. Nous modélisons ces dernières comme des poutres minces rectangulaires. Nous nous intéressons à leur inertie autour de l'axe Z. Voir Figure 7.

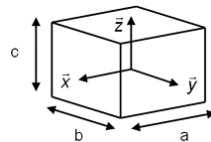


Figure 7 : Paramétrage pour calcul de l'inertie d'un pavé dans un repère cartésien

Nous savons que l'inertie autour de l'axe Z se calcule telle que :  $J = \frac{m(b^2 + a^2)}{12}$

Au vu de notre hypothèse de barre mince, nous avons  $a \gg b$ . Nous négligeons donc la grandeur  $b$  et retiendrons :

$$J = \frac{ma^2}{12}$$

Ce calcul est valable pour les 3 hélices mais une subtilité intervient sur l'hélice 3 car elle est accouplée à la barre de Bell, qui vient ajouter une inertie supplémentaire. Nous aurons donc  $J_3 = J_4 + J_{bell}$ .

Finalement, nous calculons nos inerties (Tableau 4) :

Tableau 4 : Inerties des charges tournantes

	Hélice 5	Hélice 4	Barre de Bell
$a$ (m)	$3.10^{-2}$	$1,95.10^{-1}$	$1,3.10^{-1}$
$M$ (kg)	$3,1.10^{-4}$	$2.10^{-3}$	$2.10^{-3}$
$J$ (kg.m <sup>2</sup> )	$2,32.10^{-8}$	$6,34.10^{-6}$	$2,82.10^{-6}$

Ainsi que  $J_3 = J_4 + J_{bell} = 9,15.10^{-6}$

## 2. Modélisation des hélices

Macéo, Pierre

À l'aide des mesures réalisées, nous allons venir caractériser nos hélices. Nous cherchons à obtenir les lois liant la force de poussée ainsi que le couple résistant produits en fonction de la vitesse de rotation des hélices. Dans notre expérience, purement verticale, nous calculons la force de poussée produite par les hélices telle que :  $F = M * g$ . Le couple résistant induit par cette poussée est quant à lui image du courant tiré par les moteurs tel que :  $C = k_i * I$ . Nous venons tracer ces 2 grandeurs en fonction de la vitesse de rotation des moteurs sur la Figure 8 :

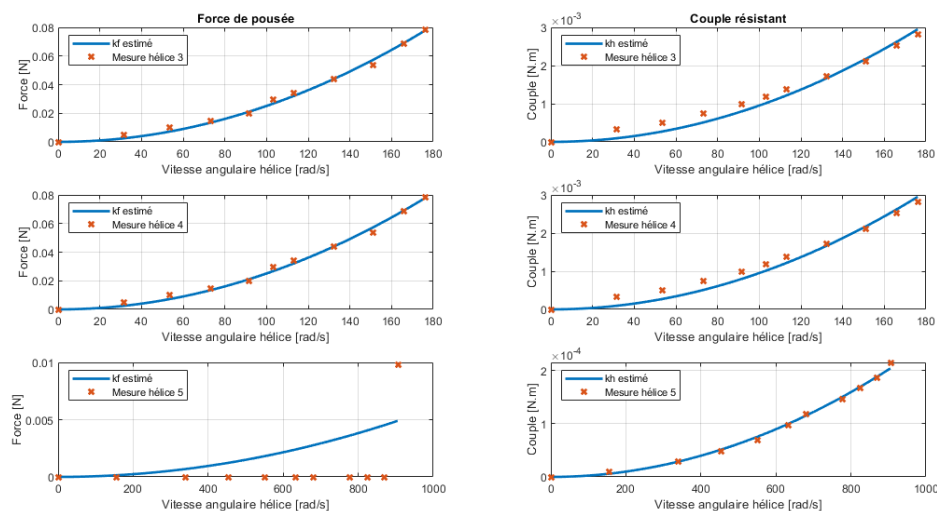


Figure 8 : Forces et Couples générés par les hélices en fonction de la vitesse de rotation

Nous remarquons, à la fois pour la poussée et pour le couple résistant, que les mesures semblent coller à des paraboles centrées et sans terme constant. Nous modélisons donc l'évolution de la force de poussée et du couple résistant par des polynômes d'ordre 2 sans terme d'ordre 1 ni d'ordre 0 (tracés bleus sur la Figure 8 **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Nous avons donc  $F = k_f * \omega^2$  ainsi que  $C = k_c * \omega^2$ , avec  $k_f$  le coefficient de poussée et  $k_c$  le coefficient de couple résistant. Pour la modélisation sur Simulink, nous remplaçons  $\omega^2$  par la fonction  $|\omega| * \omega$ , cela nous permet de prendre en compte une potentielle rotation dans le sens inverse des hélices afin de produire une force négative. Cela est vrai pour l'hélice 5 car elle a profil symétrique cependant, les hélices 3 et 4 ne sont pas symétriques et il faudrait modéliser F et C dans un sens de rotation puis dans l'autre pour être exacts.

Nous venons faire la moyenne sur tous nos points,  $k_{ci} = \frac{C_i}{\omega_i^2}$ , pour obtenir les 3 valeurs de  $k_c$  pour chacune des hélices. Pour l'hélice de queue, du fait de la précision de la balance au gramme, nous déduisons que la dernière valeur de  $M_5$  est en réalité 0,5 g et nous ne pouvons baser  $k_{f5}$  que sur la dernière valeur. Nous faisons l'hypothèse que sa poussée suit malgré tout une loi polynomiale similaire aux autres.

Pour simuler le fonctionnement de l'hélice, nous réalisons un schéma bloc Simulink prenant en entrée la vitesse de rotation des motoréducteurs et renvoyant en sortie une force de poussée ainsi qu'un couple résistant (ce dernier permettant d'alimenter le modèle des motoréducteurs). Cela nous donne la Figure 9 :

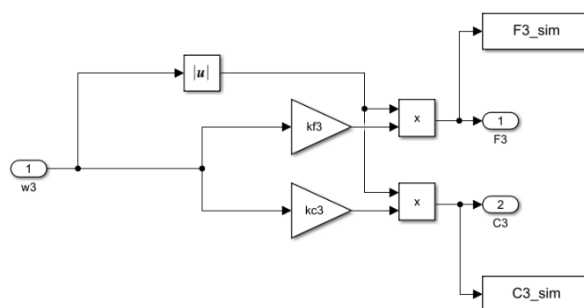


Figure 9 : Schéma bloc de l'hélice 3

Ce bloc est dupliqué à trois reprises pour chacune des 3 hélices, avec les paramètres associés.

### 3. Modélisation du groupe motopropulseur

Macéo, Pierre

Nous pouvons désormais accoupler les blocs motoréducteurs et hélices correspondants pour obtenir un schéma bloc avec une tension d'alimentation en entrée et une force de poussée ainsi qu'un couple résistant en sortie, comme on le voit sur la Figure 10 :

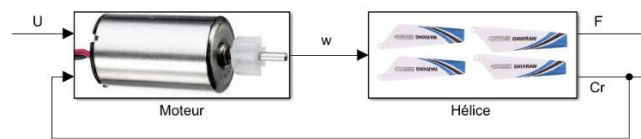


Figure 10 : Schéma bloc de l'accouplement motoréducteur-hélice

Cet ensemble est dupliqué en trois exemplaires pour chaque couple motoréducteur + hélice, avec les paramètres associés.

Pour la loi de portance, nous voyons sur la Figure 10 que la force générée par l'hélice 5 est négligeable face aux deux autres hélices, donc nous modélisons la force de portance comme constitué de la somme des forces de portance des hélices 3 et 4. La portance de l'hélice 5 n'aura pour unique effet que de déséquilibrer l'hélicoptère pour induire un angle de tangage  $\beta$ .

## VI. Barre de Bell

Antonin, Dorian

Pour simplifier la modélisation de la barre de Bell, nous supposons qu'elle est de type boîte noire. Le but est de trouver une fonction de transfert qui approxime le comportement réel, sans considérer les équations physiques qui régissent le système. Les entrées sont l'angle de tangage de l'hélicoptère  $\beta(t)$  et sa vitesse angulaire de tangage  $\dot{\beta}(t)$ . La sortie est le couple résistant  $C_{Bell}$ , exercé sur l'hélicoptère pour le ramener à la stabilité. Pour identifier cette fonction transfert, nous enregistrons une vidéo de l'hélicoptère en vol stationnaire. Par des impulsions manuelles répétées, un angle est donné à l'appareil afin de provoquer une instabilité et d'observer son temps de retour à l'horizontale. Au regard des images capturées, nous choisissons d'approximer le comportement de l'hélicoptère à un système du premier ordre. Nous mesurons un temps de réponse moyen de 220 ms.

Par la suite, avec Matlab, un modèle de type ressort-amortisseur du deuxième ordre est choisi pour décrire le comportement de la barre de Bell. Les constantes  $k_{Bell}$  de raideur,  $a_{Bell}$  d'amortissement et  $B$  d'inertie sur  $y_2$  (calculées précédemment), amènent à l'équation physique en rotation sur  $y_2$  :

$$B\ddot{\beta} = -k_{Bell}\beta - a_{Bell}\dot{\beta} = C_{Bell}$$

Ce qui s'écrit sous la forme de fonction de transfert :

$$\frac{1}{\frac{B}{k_{Bell}}p^2 + \frac{a_{Bell}}{k_{Bell}}p + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1} = 0$$

Par identification, nous en déduisons :

$$k_{Bell} = B \omega_0^2 \quad a_{Bell} = \frac{2\xi}{\omega_0} k_{Bell}$$

Nous choisissons un amortissement  $\xi = 0,7$  car un dépassement se produit lors du retour à la position stationnaire de l'hélicoptère. Le temps de réponse à 95% étant  $Tr_{95} = 220\text{ms}$ , nous en déduisons la constante de temps  $\tau = \frac{Tr_{95}}{3}$  et la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ .

La Figure 11 est le modèle Simulink ressort-amortisseur décrivant la barre de Bell, issu de l'équation physique précédente.

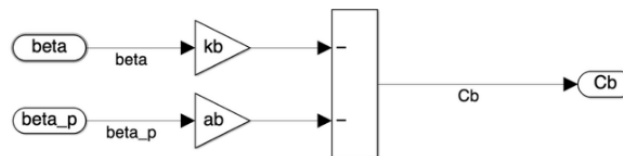


Figure 11 : Modèle Simulink de la barre de Bell prenant en entrées  $\beta$  et sa vitesse angulaire  $\dot{\beta}$  ( $k_b$  et  $a_b$  sont égaux aux coefficients  $k_{Bell}$  et  $a_{Bell}$ ). La sortie  $C_b$  est le couple résistant  $C_{Bell}$

Finalement, nous testons le modèle grâce au Simulink de la Figure 12, qui nous permet de tracer l'évolution du couple résistant imposé par la barre de Bell  $C_{Bell}$  [Nm] et l'angle de l'hélicoptère  $\beta$  [rad] (Figure 13). Un angle initial de  $20^\circ$  est paramétré dans le second intégrateur.

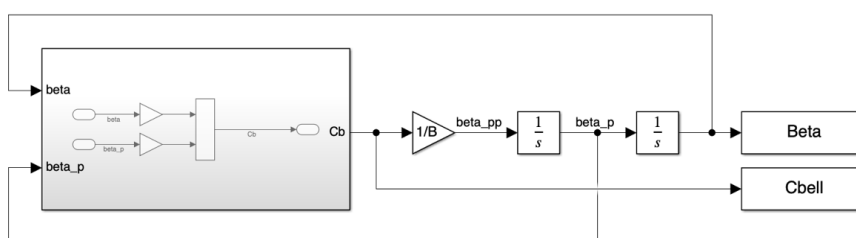


Figure 12 : Test du modèle Simulink

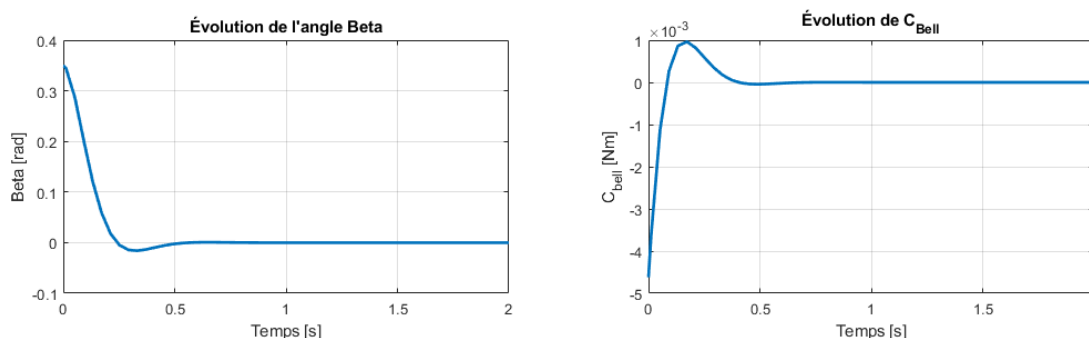


Figure 13 : Évolution temporelle de l'angle de tangage de l'hélicoptère  $\beta$  et du couple résistant  $C_{Bell}$  avec un angle initial de  $20^\circ$

Nous constatons que la valeur absolue du couple résistant est maximale au départ pour ramener l'hélicoptère à sa position stationnaire  $\beta = 0$ , qui est bien la valeur vers laquelle tend la courbe de  $\beta$ . Un dépassement léger se produit, sans engendrer plus d'une période d'oscillation significative avant stabilisation. Le couple  $C_{Bell}$  est nul lorsque l'hélicoptère est stable. Enfin, le temps de réponse est similaire à celui de la réalité. Le modèle est donc satisfaisant.

## VII. Equations de Lagrange

Colin, Valentin, Yogesh, Purvesh

Le système est  $\Sigma = \{2,3,4,5\}$

Soit la vitesse du système :  $\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{R_0}$  et la rotation du système :  $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_1}$

La puissance extérieure au système s'écrit :

$$P_{ext} = P_{portance} + P_{aéro} + P_5 + P_{sol} + P_{poids}$$

Tout d'abord la portance :

$$\vec{F}_{portance} = (F_3 + F_4) \cdot \vec{z}_2$$

On projette  $\vec{z}_2$  dans la base  $B_0$  :

$$\vec{F}_{portance} = (F_3 + F_4)(\cos(\beta) \cdot \vec{z}_0 + \sin(\beta) \cdot (\cos(\alpha) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\alpha) \cdot \vec{y}_0))$$

D'où la puissance de la force de portance :

$$P_{portance} = (F_3 + F_4)(\cos(\beta) \cdot \dot{z} + \sin(\beta) \cdot (\cos(\alpha) \cdot \dot{x} + \sin(\alpha) \cdot \dot{y}))$$

Nous exprimons la puissance aérodynamique comme :  $P_{aéro} = \begin{pmatrix} F_{aéro_x} \dot{x} \\ F_{aéro_y} \dot{y} \\ F_{aéro_z} \dot{z} \end{pmatrix}_{R_0}$

Nous notons la puissance de l'hélice 5 telle que :  $P_5 = F_5 \cdot d \cdot \dot{\beta} = C_5 \dot{\beta}$

Enfin la puissance du sol sur le système est nul :  $P_{sol} = 0$

La puissance intérieure est nulle car toutes les liaisons entre solides sont considérées parfaites.

Ainsi :

$$Q_{\dot{x}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = (F_3 + F_4) \sin(\beta) \cos(\alpha) + F_{aéro\_x}$$

$$Q_{\dot{y}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{y}} = (F_3 + F_4) \sin(\beta) \sin(\alpha) + F_{aéro\_y}$$

$$Q_{\dot{z}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = (F_3 + F_4) \cos(\beta) + F_{aéro\_z}$$

$$Q_{\dot{\alpha}} = 0$$

$$Q_{\dot{\beta}} = \frac{\partial P}{\partial \dot{\beta}} = C_5$$

Nous écrivons désormais le Lagrangien T-U

Ce qui nous donne :

$$L = 12m_{helico}(x^2 + y^2 + z^2) + 12B\dot{\beta}^2 + 12C\dot{\alpha}^2 - m_{helico}gz$$

Et obtenons les 5 équations suivantes décrivant notre système :

$$L_x \rightarrow m_{helico}\ddot{x} = F_{aéro\_x} + \sin(\beta) \cos(\alpha)(F_3 + F_4)$$

$$L_y \rightarrow m_{helico}\ddot{y} = F_{aéro\_y} + \sin(\beta) \sin(\alpha)(F_3 + F_4)$$

$$L_z \rightarrow m_{helico}\ddot{z} = F_{aéro\_z} + \cos(\beta)(F_3 + F_4) + F_{sol} - m_{helico}g$$

$$L_{\alpha} \rightarrow [A\sin^2(\beta) + C\cos^2(\beta)]\ddot{\alpha} = \cos(\beta)(C_3 + C_4) - 2\dot{\beta}\dot{\alpha}\cos(\beta)\sin(\beta)(A - C)$$

$$L_{\beta} \rightarrow B\ddot{\beta} - \cos(\beta)\sin(\beta)(A - C)\dot{\alpha}^2 = C_{Bell} + C_5$$

## VIII. Simulateur 1D

Armand, Macéo, Pierre

Pour le simulateur 1D, nous allons seulement jouer sur la variable  $Z$ , représentant la hauteur de l'hélicoptère, les interactions entre les 5 degrés de liberté seront implémentées dans le simulateur 3D.

Celle-ci est directement image de la force de poussée des hélices puisqu'aucun angle ne s'applique pour le moment. Nous venons réguler cette commande avec un correcteur PID tel que montré sur la Figure 14 :

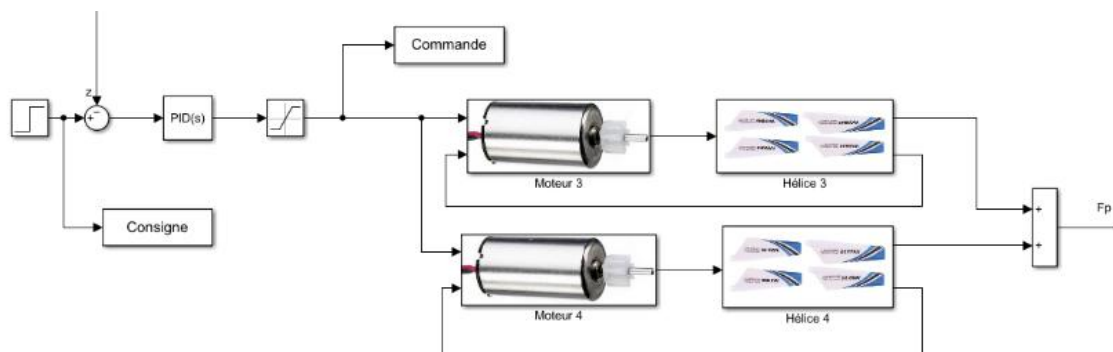


Figure 14 : Régulateur PID du simulateur 1D

Nous faisons partir l'hélicoptère de 1m à  $t=0s$  et appliquons une consigne de vol stationnaire d'1m à partir de  $t=1s$ . Nous réglons un gain proportionnel important de 15 pour s'assurer que l'hélicoptère ait la puissance nécessaire au décollage et un gain dérivé de 4 pour limiter les oscillations. Le comportement de l'hélicoptère est alors comme suit (Figure 15) :

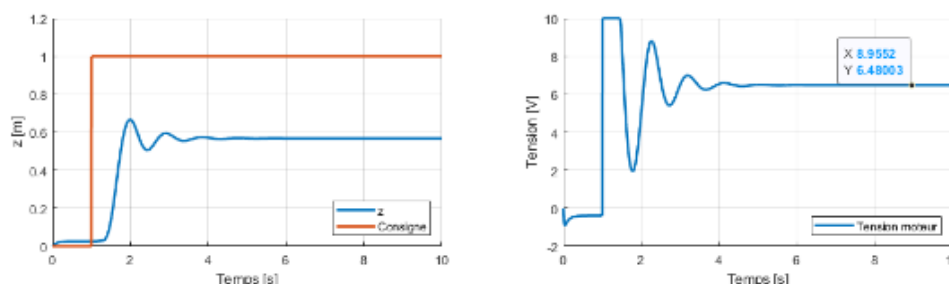


Figure 15 : Modélisation en 1 dimension de l'hélicoptères – PID non ajusté

Nous remarquons que pour maintenir un vol stationnaire, notre hélicoptère nécessite une tension de 6,5V. Nous réglons alors notre gain proportionnel à 7 en se basant sur cette valeur. Par ailleurs, nous avons une erreur statique sur l'altitude. Nous ajoutons alors un gain intégral afin d'atteindre le comportement désiré. Les gains ajustés sont présentés dans le Tableau 5.

Tableau 5 : Gains du régulateurs PID 1D

	Régulateur en Z
$K_p$	7
$K_i$	5
$K_D$	4

Le comportement est alors le suivant (Figure 16) :

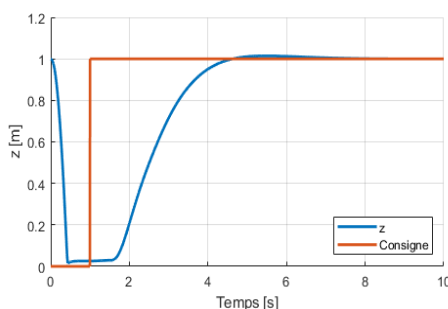


Figure 16 : Modélisation en 1 dimension de l'hélicoptère – PID ajusté

Nous obtenons ainsi un hélicoptère stable en hauteur et qui atteint sa cible.

## IX. Simulateur 3D

Macéo, Pierre

Pour le simulateur 3D, nous allons modéliser le système au travers des 5 équations de Lagrange précédemment déterminées auxquelles nous couplons tous les sous-systèmes qui agissent sur le système, à savoir : les frottements aérodynamiques, la réaction du sol, les groupes motopropulseurs, la barre de Bell ainsi que la force de gravité. Finalement nous obtenons le schéma bloc montré sur la Figure 17.

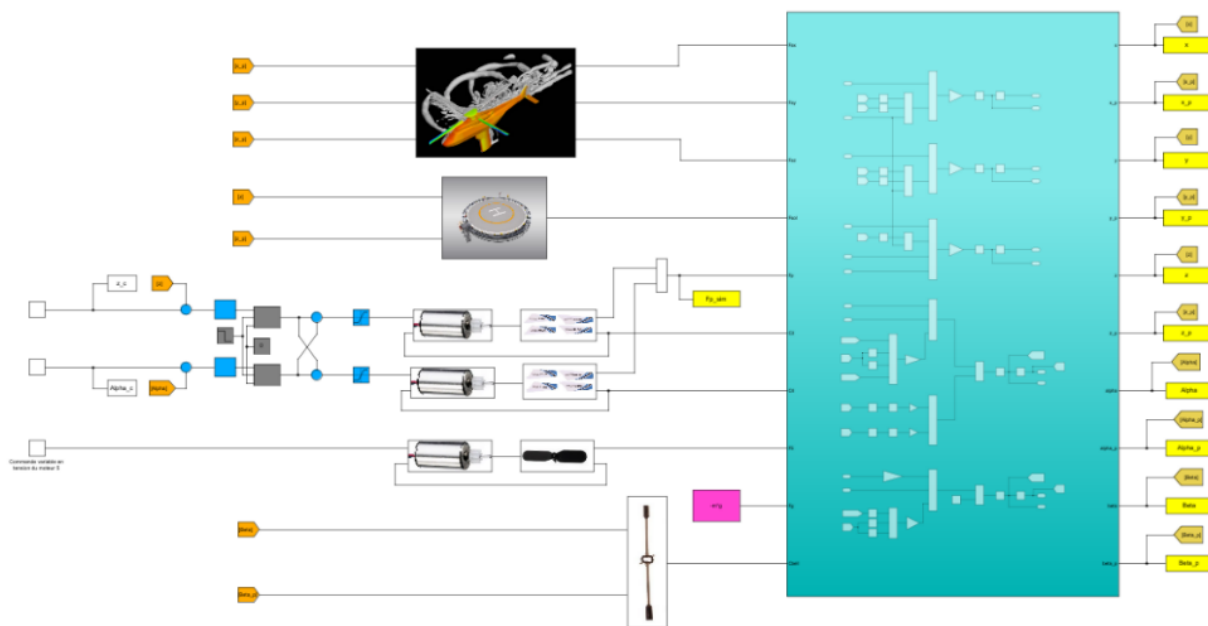


Figure 17 : Schéma bloc complet de l'hélicoptère

Nous allons désormais tenter de faire suivre un plan de vol à notre hélicoptère. Pour cela, nous cherchons à asservir sa trajectoire. Pouvoir asservir intégralement le système sur ses coordonnées X, Y, Z et ses angles  $\alpha$  et  $\beta$ , il conviendrait probablement de passer par des méthodes de modélisation non linéaires ainsi que par de la représentation d'états, ce qui sort du cadre de ce TP. Nous nous contenterons donc d'asservir 2 variables : l'altitude Z de l'hélicoptère ainsi que son angle de lacet  $\alpha$ . Nous ajouterons alors ponctuellement une commande en tension au moteur 5 pour le faire avancer ou reculer.

Nous mettons ainsi en place deux régulateurs PID. Le premier, à partir d'une consigne en altitude, donne une tension à appliquer aux moteurs pour atteindre et maintenir l'altitude désirée. Le second va venir, à partir d'une consigne de lacet, créer une différence de tension entre les 2 moteurs afin d'engendrer un déséquilibre des couples contre rotatif produits par les hélices et ainsi entraîner une rotation de l'hélicoptère sur lui-même. Pour cela, il vient ajouter cette différence de tension au moteur 3 et la soustraire au moteur 4. Notre régulateur est ainsi construit comme sur la Figure 18 :

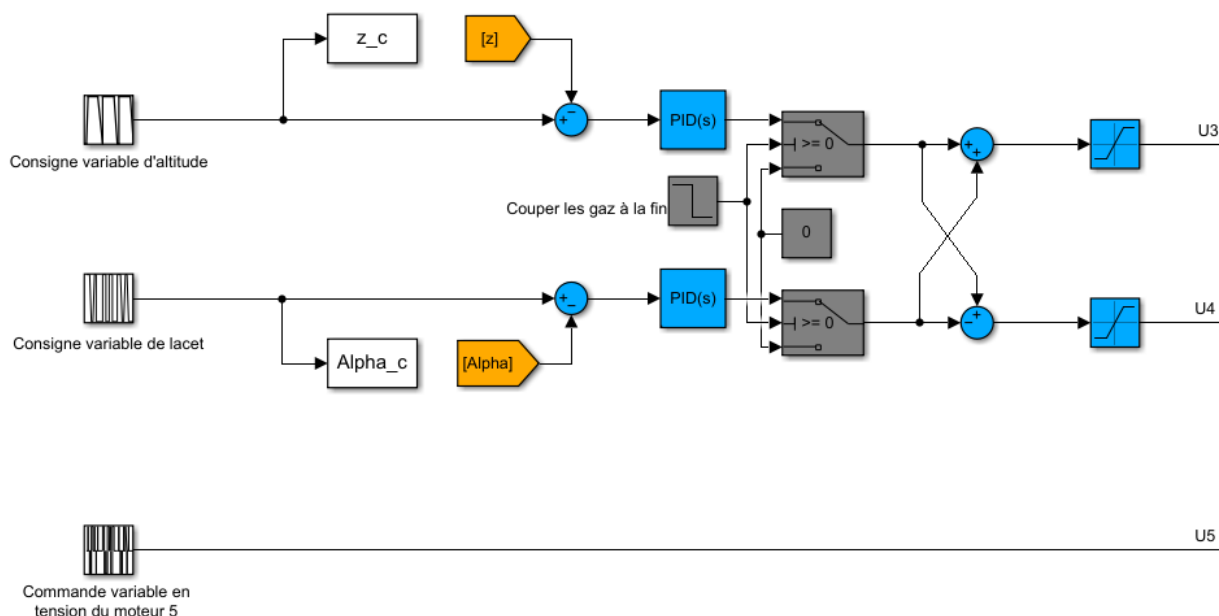


Figure 18 : Schéma bloc de la régulation mise en place

Nous ajoutons par ailleurs des saturateurs, en vert, en amont des moteurs afin de limiter la tension qui pourra être demandée par les régulateurs. Nous mettons également en place un bloc, représenté en gris, qui coupe complètement l'alimentation des moteurs à l'atterrissage afin d'éviter tout emballement des PID.

Pour établir un plan de vol, nous utilisons des blocs nous permettant de définir des séquences de trapèzes. Notre vol se décompose alors comme suit :

Décollage jusqu'à l'altitude de 2m → Avance pendant 7s → Arrêt → Virage à 90° sur la droite → Marche arrière pendant 8s → Arrêt → Virage à 90° sur la gauche → Avance pendant 5s → Arrêt → Virage à 45° sur la droite → Avance pendant 4s → Continue d'avancer et diminue l'altitude jusqu'à atterrissage.

Le régulateur sur l'altitude est paramétré avec les gains trouvés dans la partie précédente tandis que celui du lacet l'est par itérations. Les gains retenus sont notés dans le Tableau 6.

Tableau 6 : Gains des régulateurs PID 3D

	Régulateur en Z	Régulateur en $\alpha$
$K_p$	7	1
$K_i$	5	0
$K_d$	4	1

Les variables asservies répondent alors à notre plan de vol comme le montre la Figure 19 :

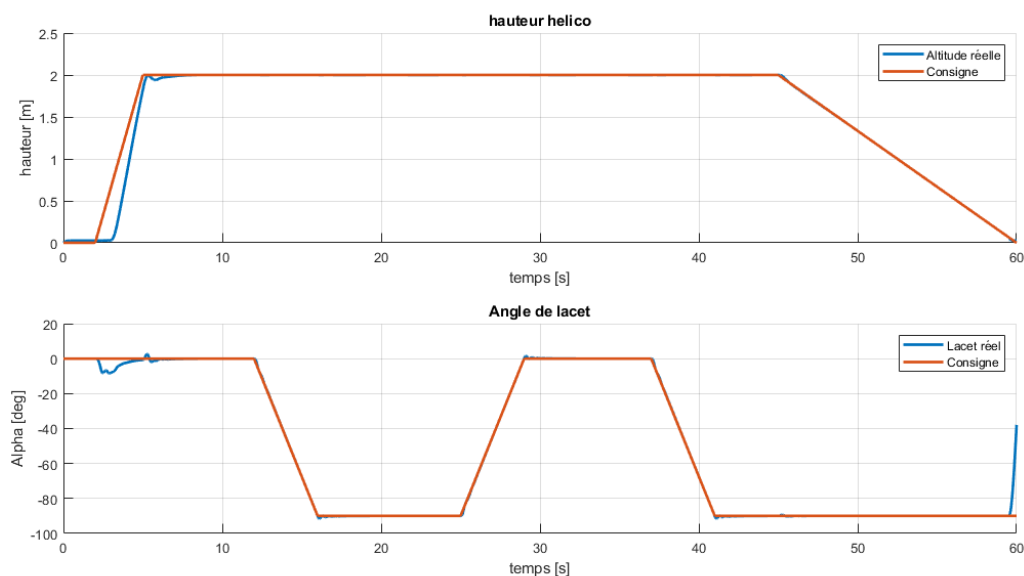


Figure 19 : Réponses des variables asservies au plan de vol imposé

Nos réglages des régulateurs permettent ainsi aux variables  $Z$  et  $\alpha$  de coller assez fidèlement à leurs consignes. On notera malgré tout de même une erreur de traînage lors de la prise d'altitude de l'hélicoptère, pour des raisons de limitation en tension. De plus, on remarque une variation de l'angle de lacet au démarrage des hélices. Cela vient du fait que les hélices 3 et 4 n'ont pas la même inertie à cause de la barre de Bell. Ainsi, pour une même commande, du fait de sa plus faible inertie, l'hélice 4 gagne en vitesse de rotation plus rapidement que l'hélice 5. Leurs couples contre rotatifs ne se compensent alors plus et un angle de lacet apparaît.

En ajoutant des commandes sur le moteur 5, nous pouvons faire avancer notre hélicoptère et donc le faire se déplacer dans l'espace en 3 dimensions. Selon notre plan de vol, nous obtenons la trajectoire suivante (Figure 20) :

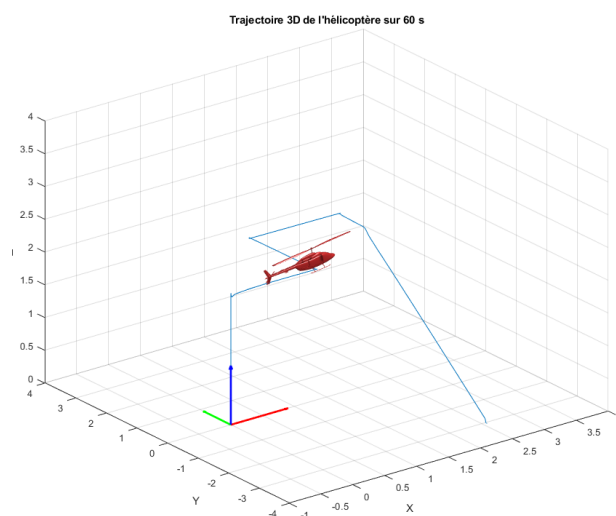


Figure 20 : Trajectoire en 3 dimensions de l'hélicoptère

Une vidéo de son vol est disponible au lien suivant : <https://youtu.be/C3m0J9K8cA4>. (L'angle de tangage est visuellement amplifié d'un rapport x10 pour mieux le visualiser)

L'évolution des coordonnées X, Y, Z ainsi que des angles  $\alpha$  et  $\beta$  est alors la suivante (Figure 21) :

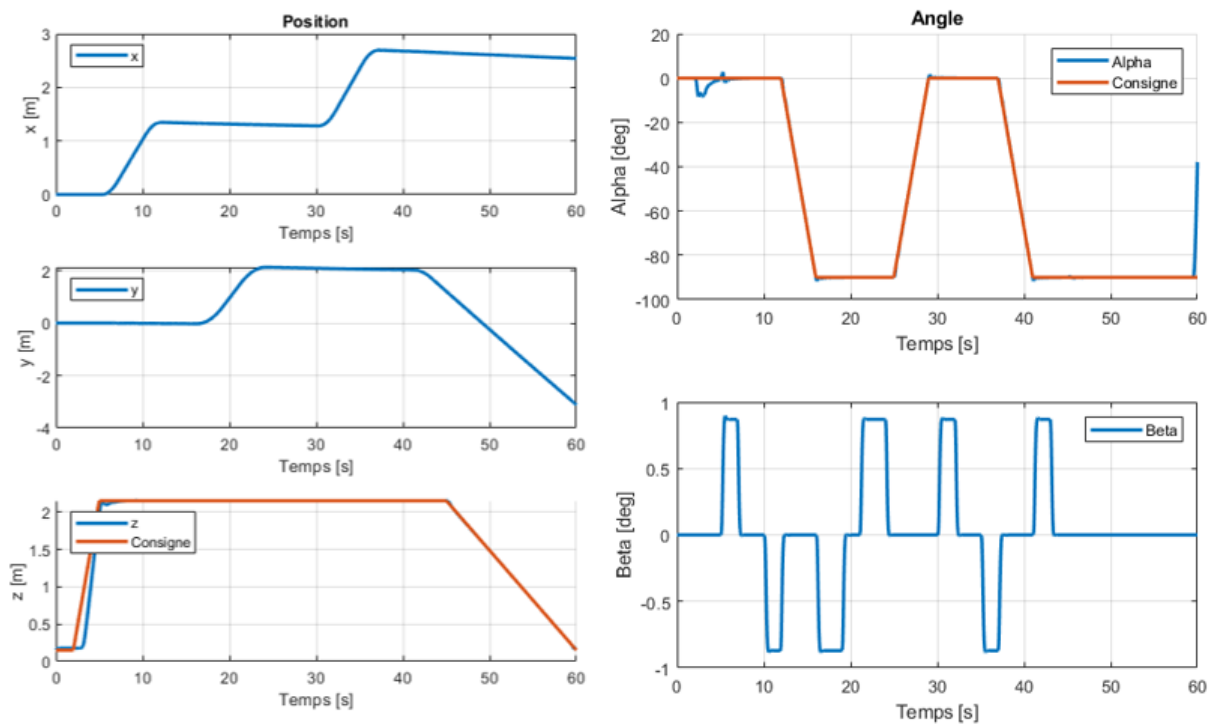


Figure 21 : Évolution des coordonnées X, Y, Z et des angles  $\alpha$  et  $\beta$

Nous remarquons que les consignes de trajectoires sont plutôt bien suivies mais il apparaît tout de même certains artéfacts lors des déplacements. Nous voyons les limitations à ce type de contrôle simple qui ne permet pas une réponse exacte sur tous les degrés de liberté. Et nous notons aussi que nous sommes dans un cas idéal sans perturbations.

## X. Conclusion

La modélisation de la dynamique d'un hélicoptère télécommandé à travers l'approche de la mécanique lagrangienne nous a montré de nouveaux aspects du contrôle des systèmes. À travers les différentes étapes de ce travail, nous avons abordé divers aspects de la modélisation, depuis le paramétrage du problème jusqu'à l'obtention des équations de la dynamique. Le paramétrage initial du problème et les mesures expérimentales ont constitué la base de la construction de notre modèle.

Nous retrouvons donc les blocs constitutifs du modèle avec les frottements aérodynamiques, le contact avec le sol, les groupes motoréducteurs, la force de gravité et la barre de Bell. Ces blocs sont liés par l'intermédiaire des équations de Lagrange qui mettent en évidence les influences des blocs sur les variables de sorties, ainsi que les influences internes entre ces sorties.

La simulation 3D élaborée avec Matlab et Simulink a permis une visualisation du mouvement de l'hélicoptère, ainsi que de son atterrissage. Ces outils de simulation ont été utiles pour valider et analyser le comportement de notre modèle, en démontrant l'efficacité de l'approche basée sur la mécanique lagrangienne pour la modélisation de systèmes complexes tels que l'hélicoptère étudié.

Notons toutefois que dans notre modèle, nous saturons la tension à 10V pour son fonctionnement, tandis que l'hélicoptère réel possède une batterie fournissant 4.2V au maximum. Cela est notamment dû à des incohérence sur les résultats expérimentaux vis-à-vis de la réalité. En effet, nous observons que la portance engendre une différence massique maximale de 16 grammes pour une alimentation de 3.0 volts, tandis que l'hélicoptère pèse 40 grammes. Selon ces résultats, l'hélicoptère ne devrait pas être en mesure de décoller. Cela est pourtant le cas. Cette incohérence pourrait potentiellement provenir d'un biais de mesure, d'un phénomène aérodynamique complexe non pris en considération, ou encore d'une restriction logicielle sur la commande des moteurs centraux émise par le contrôleur de vol de l'hélicoptère en l'absence de mouvement de celui-ci.