

2022春 过程控制系统

过程控制系统

授课教师：苗子博

第5章

被控过程的数学模型

本章学习重点

1. 被控过程数学模型的作用与要求、建立被控过程数学模型的方法

2. 机理法建模

a. 单容过程建模

b. 多容过程建模

3. 测试法建模

第5章 被控过程的数学模型

数学模型的作用：

- 1、设计过程控制系统及整定控制参数的重要依据；
- 2、指导生产工艺及其设备的设计与操作；
- 3、对被控过程进行仿真研究；
- 4、培训运行操作人员；
- 5、工业过程的故障检测与诊断。

数学模型的要求：

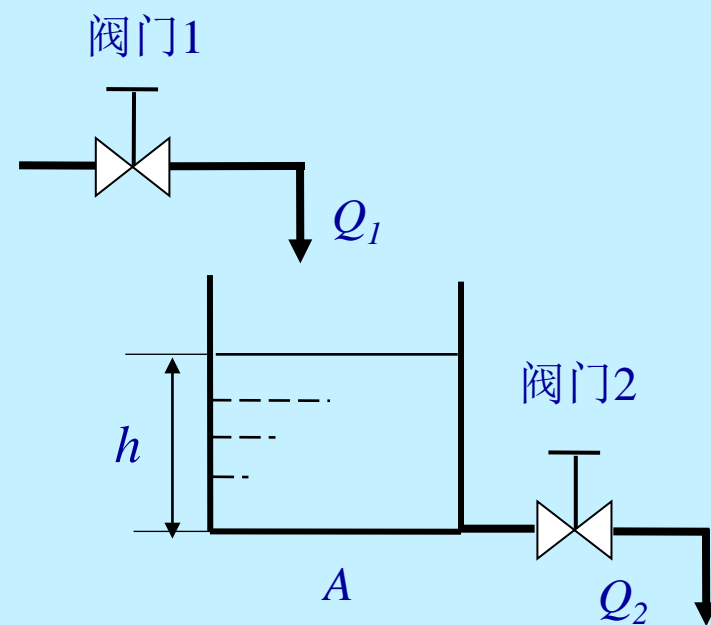
总得原则：一是尽量简单，二是正确可靠。

第5章 被控过程的数学模型

5.3.2.1 单容贮液箱液位过程I

如图是一个水槽，水经过阀门1不断地流入水槽，水槽内的水又通过阀门2不断流出。工艺上要求水槽的液位 h 保持一定数值。在这里，水槽就是被控对象，液位 h 就是被控变量。

如果想通过调节阀门1来控制液位，就应了解进水流量 Q_1 变化时，液位 h 是如何变化的。



第5章 被控过程的数学模型

假定某一时刻，阀门1突然开大 $\Delta\mu_1$ ，则 Q_1 突然增大，不再等于 Q_2 ，于是 h 也就开始变化。 Q_1 与 Q_2 之差被囤积在水槽中，造成液位上升。

!!! 画出系统方框图

$$(\Delta Q_1 - \Delta Q_2) / A = d\Delta h / dt$$

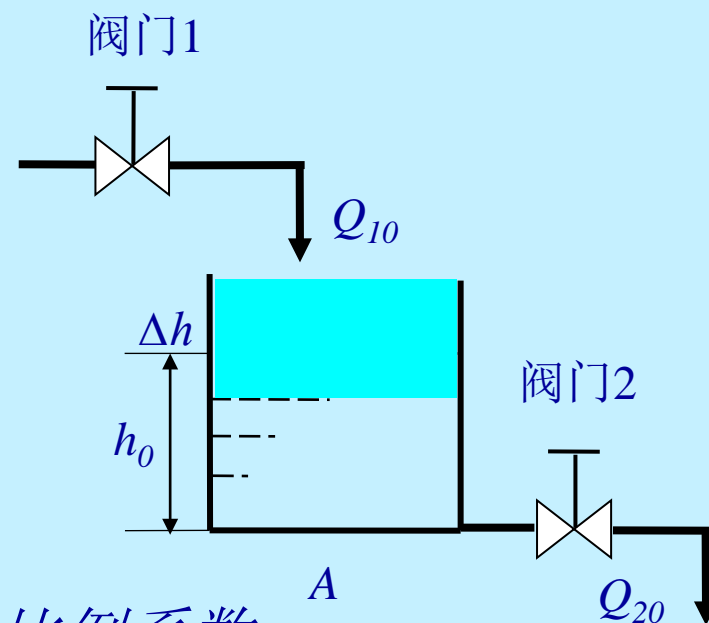
$$\Delta Q_2 = \frac{\Delta h}{R_s}$$

$$\Delta Q_1 = K_\mu \Delta\mu_1$$

式中：

R_s ——阀门2阻力系数； K_μ ——阀门1比例系数；

μ_1 ——阀门1的开度； A ——容器底面积



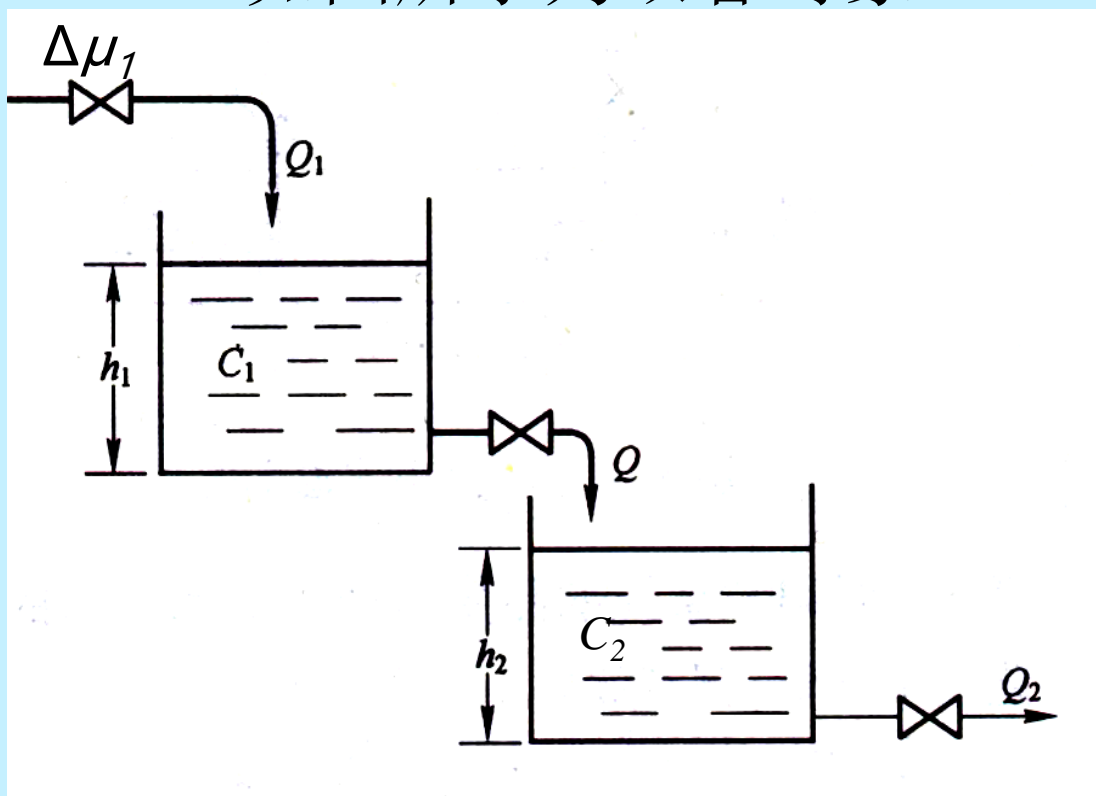
第5章 被控过程的数学模型

5.3.3 多容过程建模

有一个以上贮蓄容量的过程称为多容过程。

5.3.3.1 多容液位过程

如图所示为双容对象。



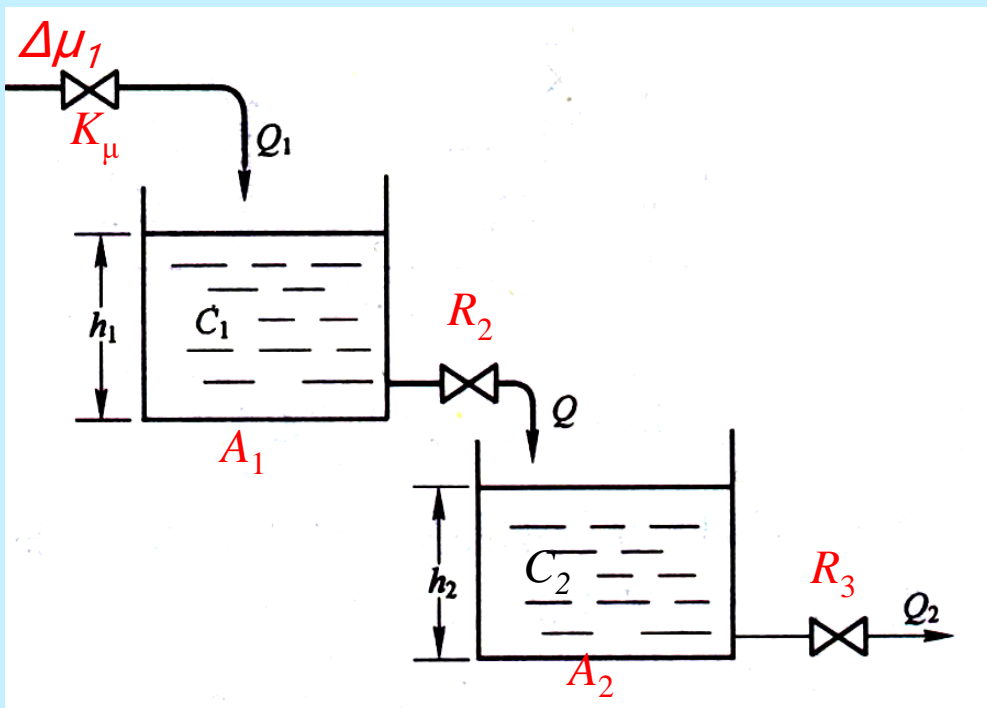
由两个一阶惯性环节串联起来，操纵变量是 $\Delta\mu_1$ ，被控变量是第二个水槽的水位 h_2 。

第5章 被控过程的数学模型

可以求出传递函数：

$$W(s) = \frac{H_2(s)}{\mu_1(s)} = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

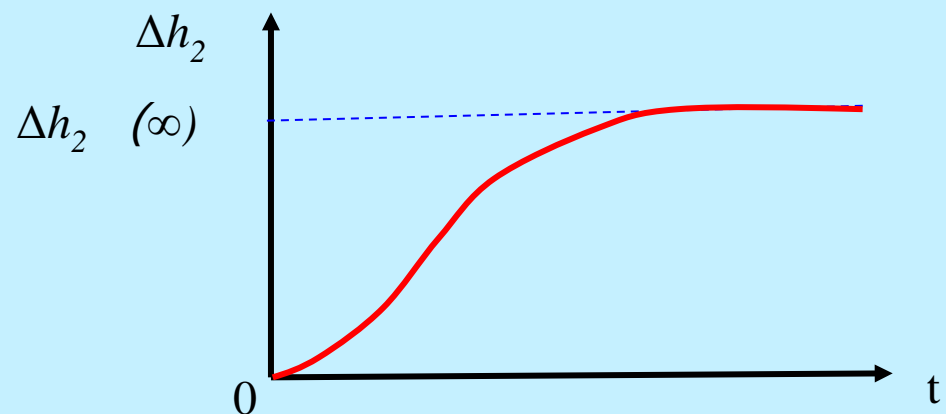
式中： $T_1 = A_1 R_2$ $T_2 = A_2 R_3$ $K = K_\mu R_3$



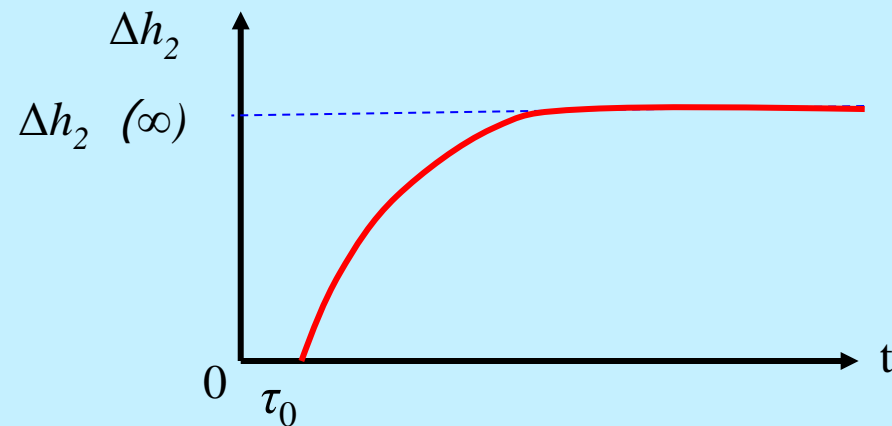
由两个一阶惯性特性乘积而成。又称二阶惯性。

第5章 被控过程的数学模型

当输入量是阶跃增量 $\Delta\mu_1$ 时，被控变量 Δh_2 的反应（飞升）曲线呈S型。



为简化数学模型，可以用带滞后的单容过程来近似。



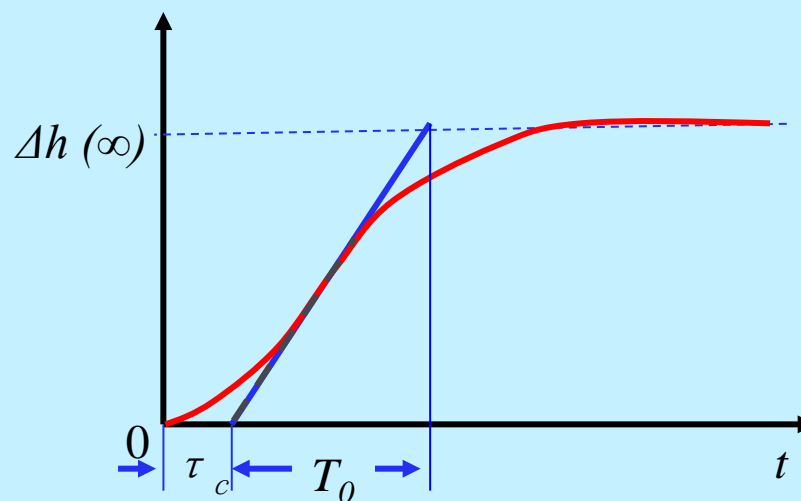
所谓**滞后**是指被控变量的变化落后于扰动变化的时间。

第5章 被控过程的数学模型

在S形曲线的拐点上作一切线，若将它与时间轴的交点近似为反应曲线的起点，则曲线可表达为带滞后的一阶特性：

$$\Delta h_2(t) = \begin{cases} K_0 \Delta \mu_1 (1 - e^{-\frac{-(t-\tau_c)}{T_0}}) & t \geq \tau_c \\ 0 & t < \tau_c \end{cases}$$

$$W(s) = e^{-s\tau_c} \frac{K_0}{T_0 s + 1}$$



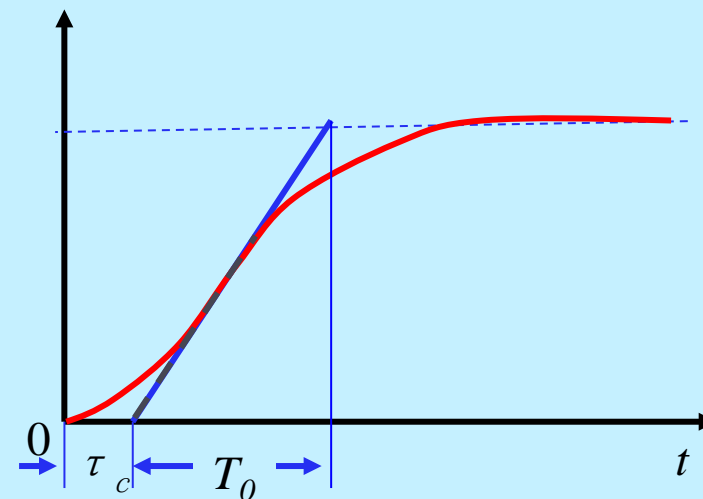
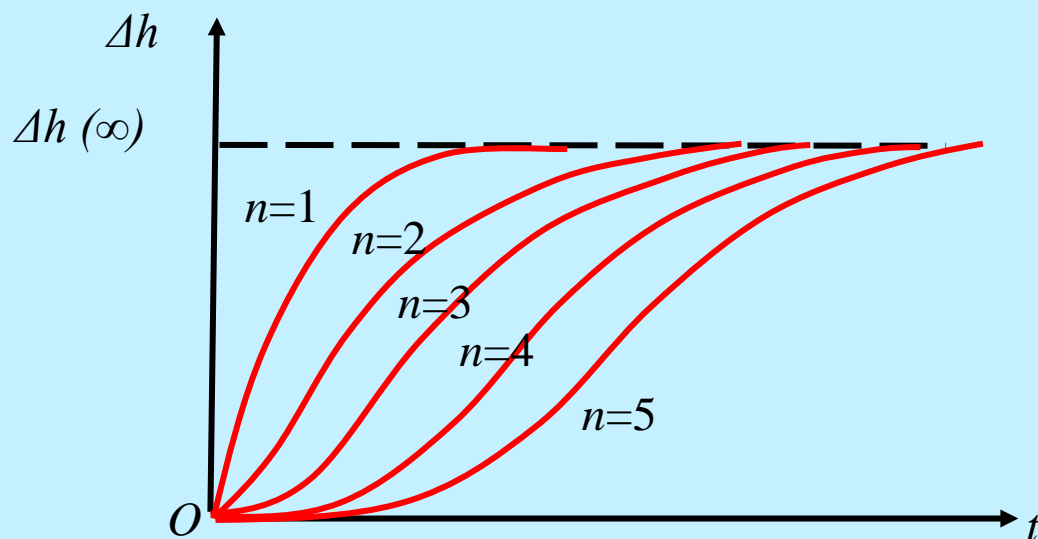
第5章 被控过程的数学模型

5.3.3.2 容量滞后与纯滞后

1. 容量滞后

切线在时间轴上截出的时间段 τ_c 为容量滞后。

被控过程的容量系数 C 越大， τ_c 越大；容量个数越多（阶数 n 越多），阶跃响应曲线上升越慢。



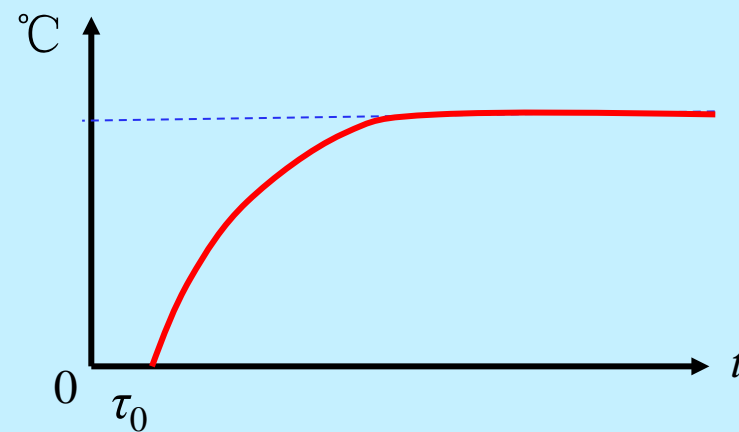
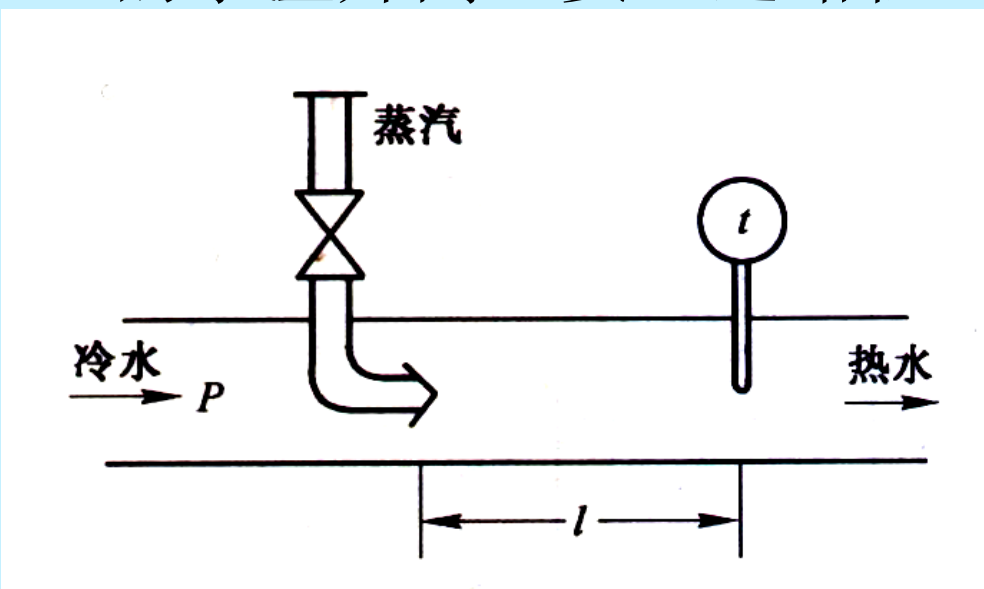
第5章

被控过程的数学模型

2. 纯滞后

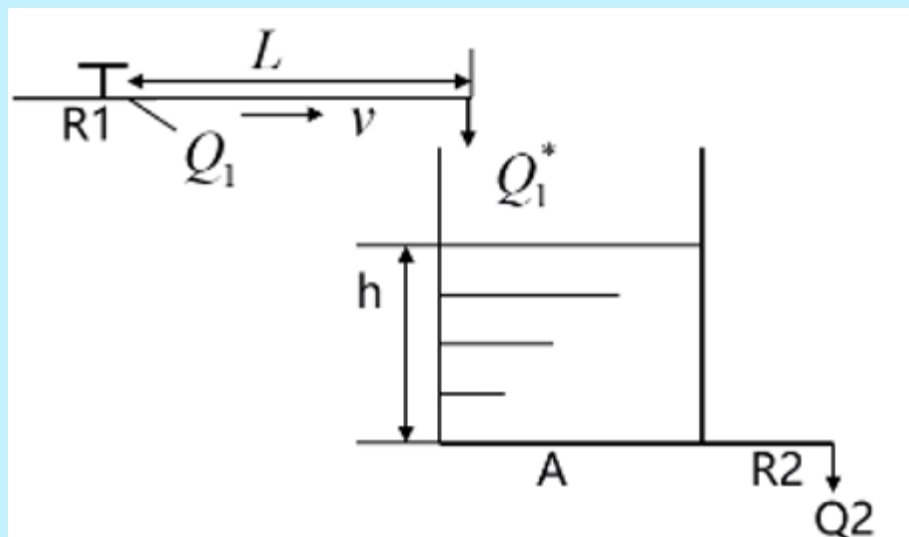
由信号或能量的传输时间造成的滞后现象，是纯粹的滞后。

如图是一个用蒸汽来控制水温的系统。蒸汽作用点与被调量测量点相隔 l 距离，蒸汽量阶跃增大引起的水温升高，要经过路程 l 后才反应出来。



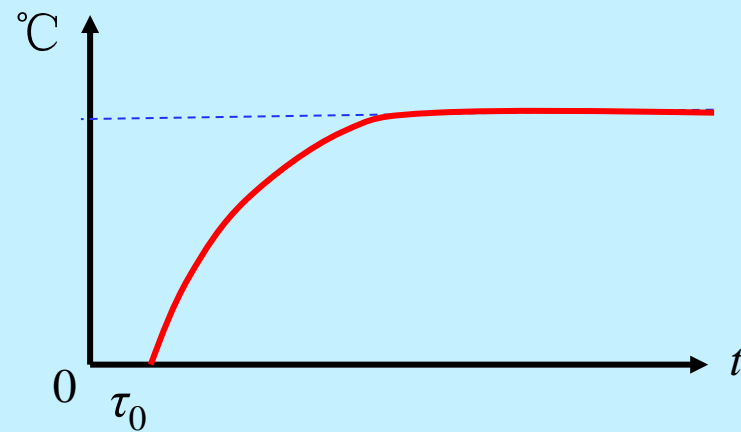
第5章

被控过程的数学模型



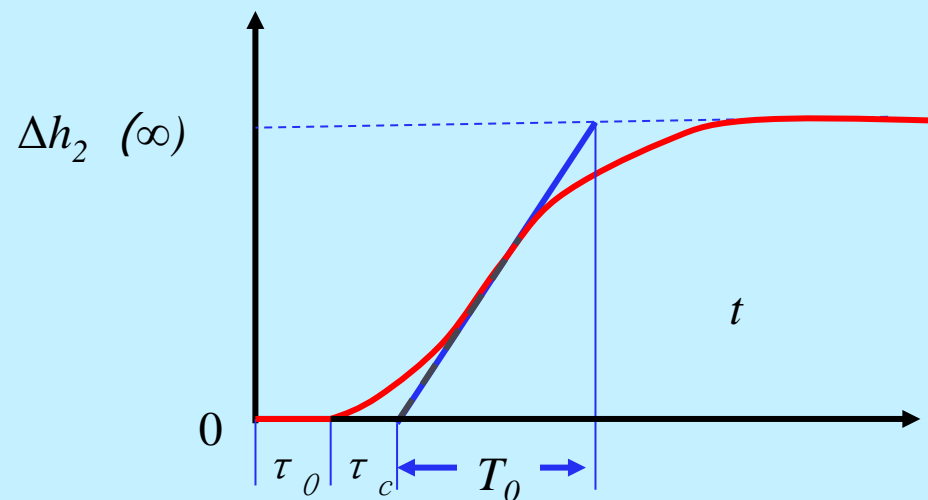
纯滞后时间 $\tau_0 = \frac{l}{v}$

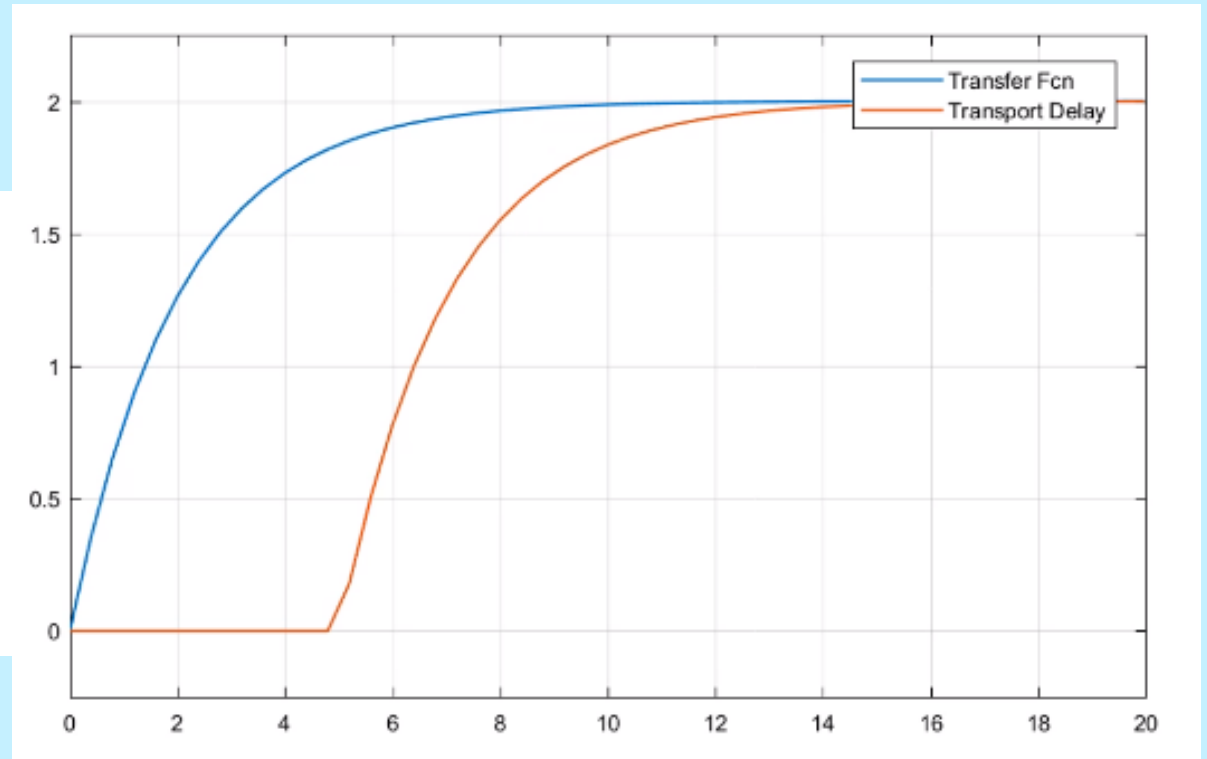
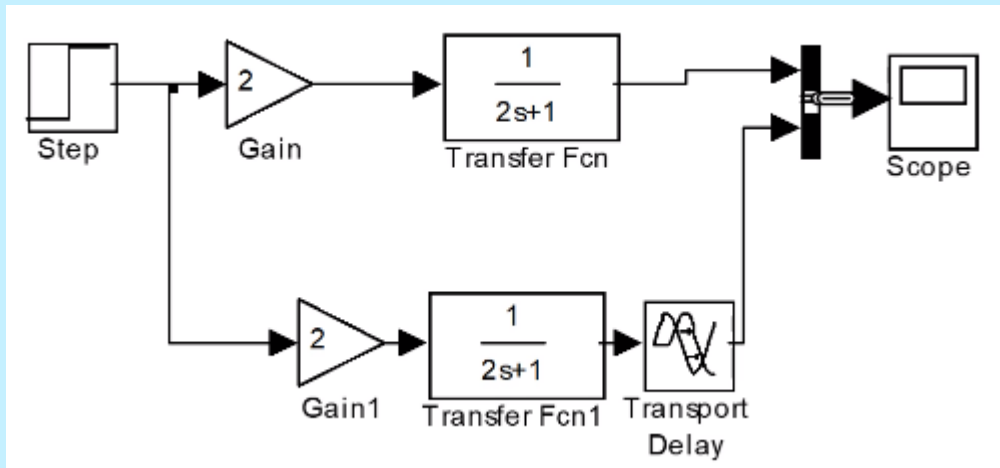
v —— 水的流速;



❖ 有些对象容量滞后与纯滞后同时存在，很难严格区分。常把两者合起来，统称为滞后时间 τ 。

$$\tau = \tau_0 + \tau_c$$





第5章 被控过程的数学模型

5.4测试法建模

根据工业过程中某因果变量的实测数据，进行数学处理后得到的数学模型。

测定对象特性的实验方法主要有三种：

（1）时域法——输入阶跃或方波信号，测对象的飞升曲线或方波响应曲线。

（2）频域法——输入正弦波或近似正弦波，测对象的频率特性。

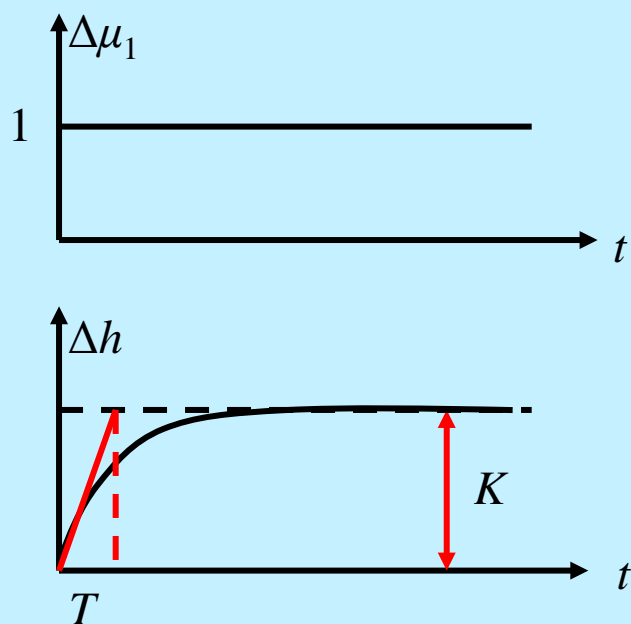
（3）统计相关法——输入随机噪音信号，测对象参数的变化。

第5章 被控过程的数学模型

5.4.1 阶跃响应曲线法建模

给对象输入一阶跃信号或方波信号测其输出响应。

1. 阶跃响应曲线的直接测定



在被控过程处于开环、稳态时，将选定的输入量做一阶跃变化（如将阀门开大），测试记录输出量的变化数据，所得到的记录曲线就是被控过程的阶跃响应曲线。

第5章 被控过程的数学模型

为了得到可靠的测试结果，应注意以下事项：

1、合理选择阶跃信号的幅度

一般阶跃扰动量取为被控过程正常输入信号的5%-15%.

2、试验时被控过程应处于相对稳定的工况

3、仔细记录阶跃曲线的起始部分

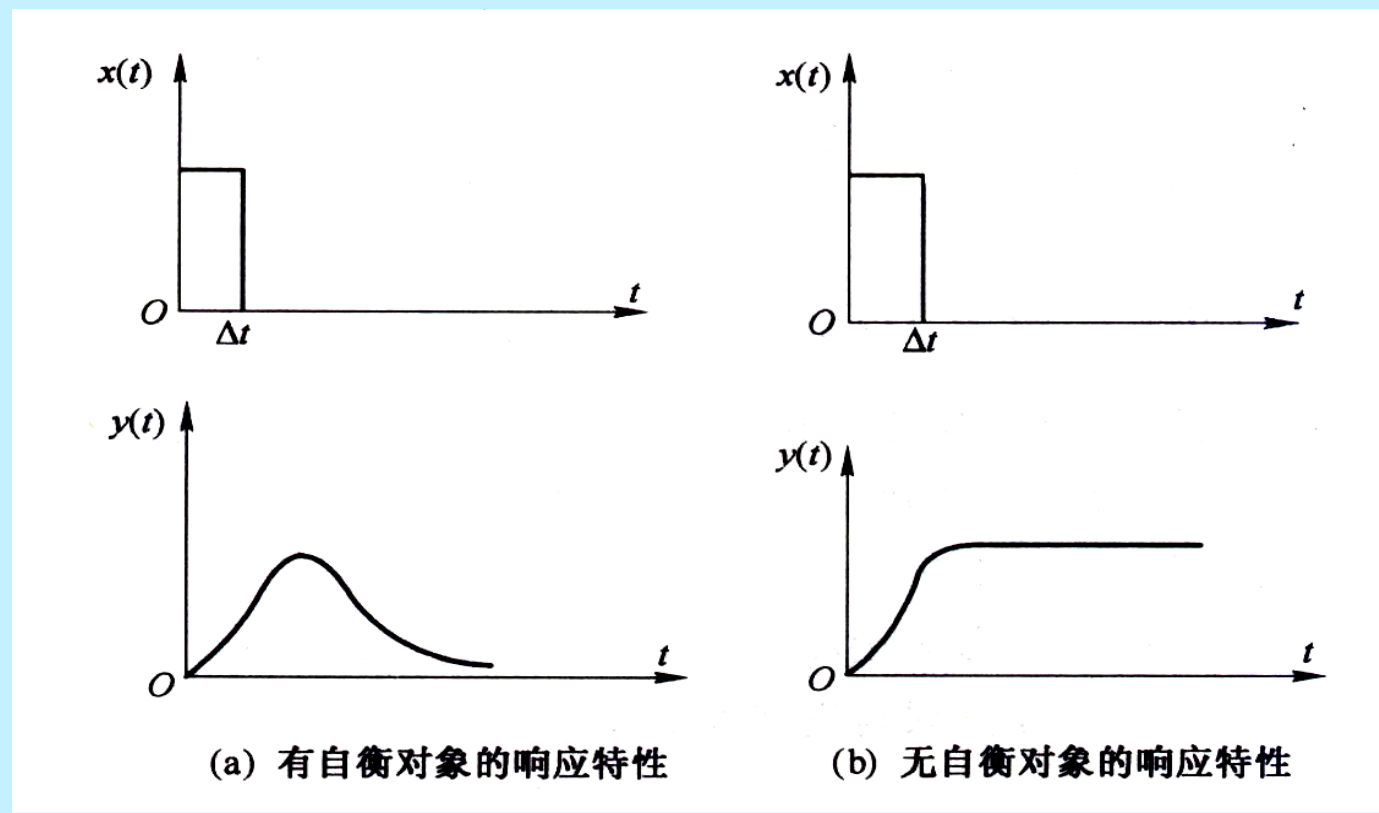
对**有自衡能力**的被控过程，试验过程应在输出信号达到新的稳定值时结束；对**无自衡能力**的被控过程，则应在输出信号变化速度不再改变时结束。

4、多次测试，消除非线性

第5章 被控过程的数学模型

2. 矩形脉冲法测定被控过程的阶跃响应曲线

有些工艺对象不允许长时间施加较大幅度的扰动，那么施加脉宽为 Δt 的方波脉冲，得到的响应曲线称为“方波响应”。



第5章 被控过程的数学模型

方波响应可以转换成飞升曲线。

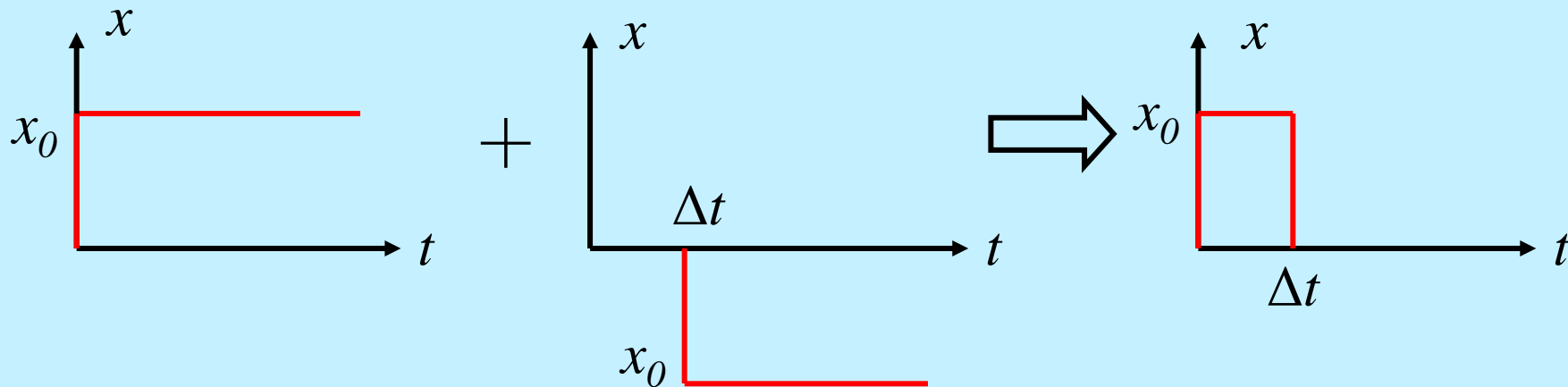
原理：方波信号是两个阶跃信号的代数和。

一个是在 $t = 0$ 时加入的正阶跃信号 $x_1(t)$

另一个是在 $t = \Delta t$ 时加入的负阶跃信号 $x_2(t)$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\text{其中, } x_2(t) = -x_1(t - \Delta t)$$

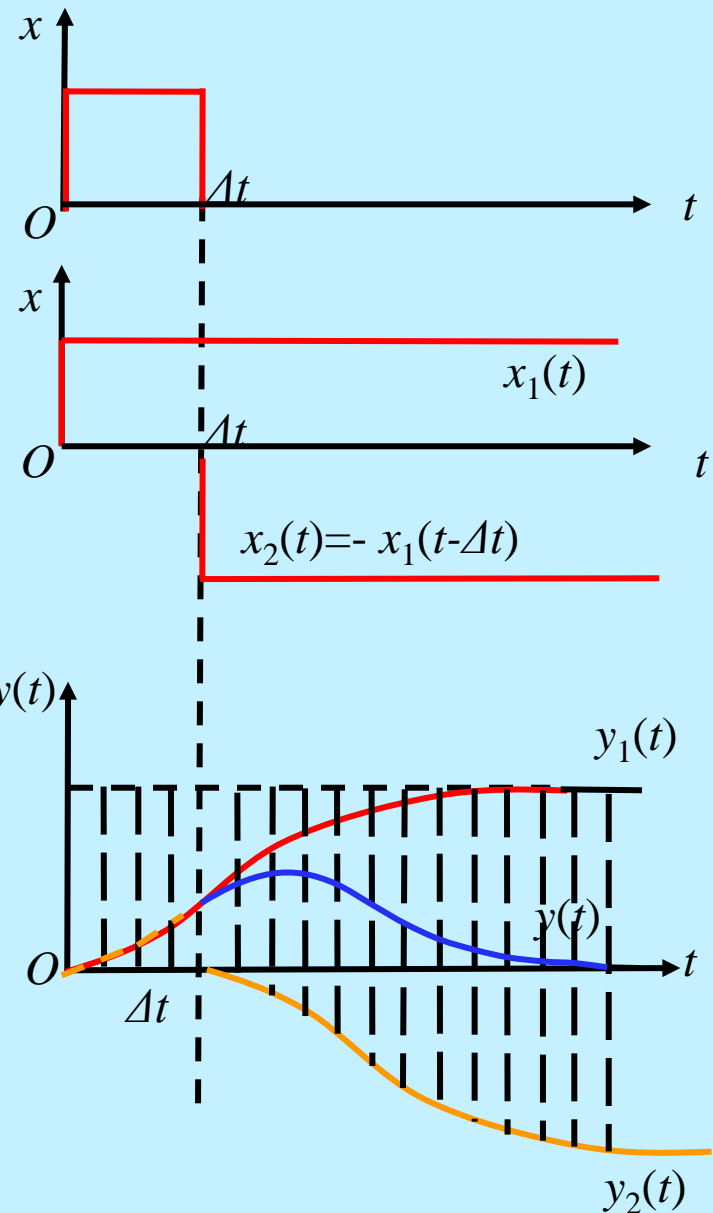


第5章 被控过程的数学模型

对应的响应也为两个阶跃响应之和：

$$\begin{aligned}y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= y_1(t) - y_1(t - \Delta t)\end{aligned}$$

根据此式，方波响应可逐点拆分为飞升曲线 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 。



第5章 被控过程的数学模型

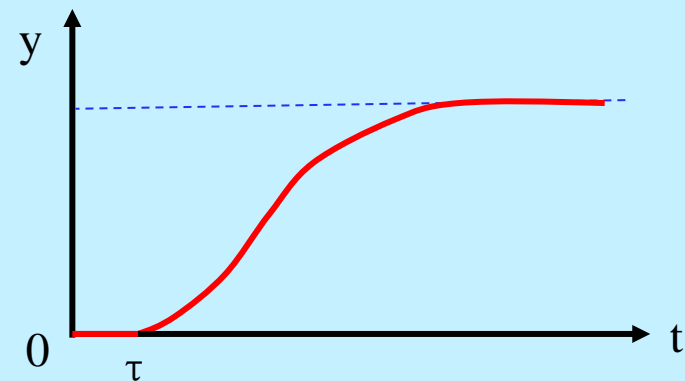
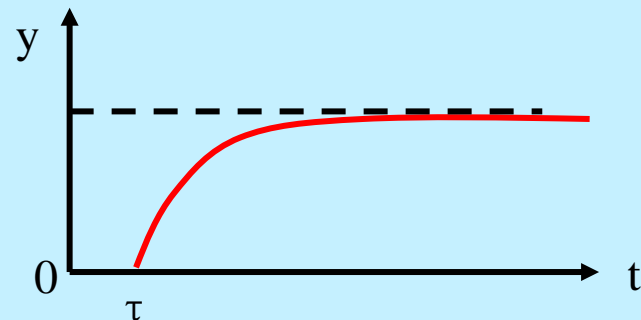
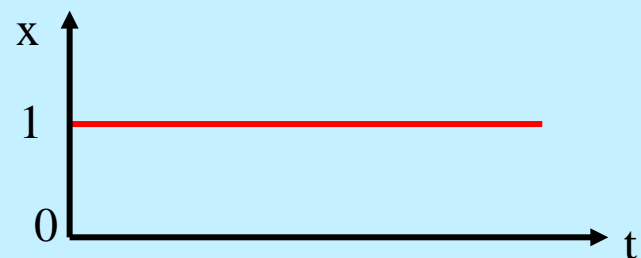
5.4.1.2 由阶跃响应曲线确定被控过程传递函数

大多数工业对象的特性可以用具有纯滞后的一阶或二阶惯性环节来近似描述：

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(Ts + 1)^n}$$



第5章 被控过程的数学模型

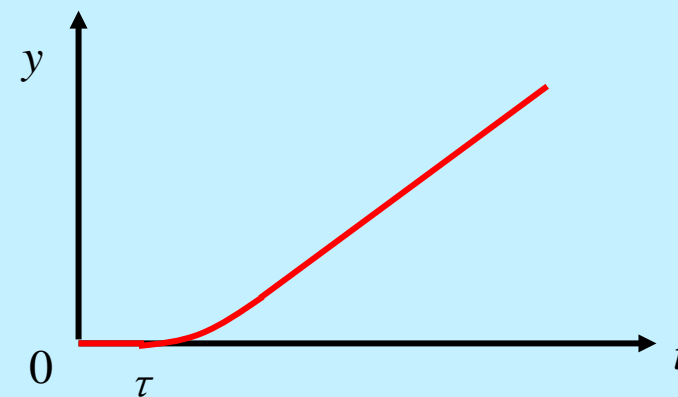
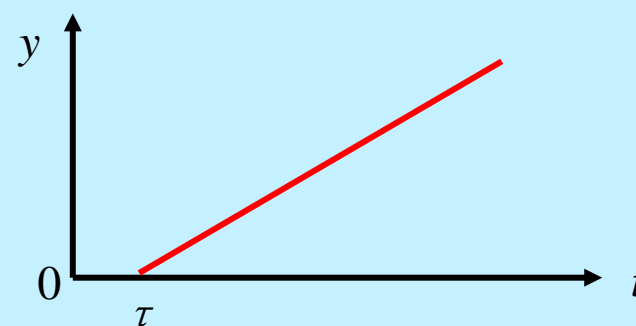
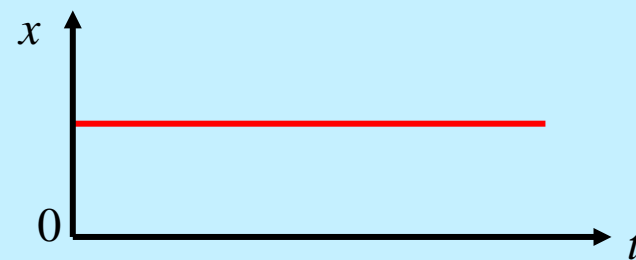
对于少数无自衡特性的对象，可用带滞后的积分特性近似描述：

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts}$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{T_1 s(T_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{T_1 s(T_2 s + 1)^n}$$

由对象的阶跃响应曲线基本可以辨识对象的特性模型结构和特性参数。



第5章 被控过程的数学模型

1. 由阶跃响应曲线确定一阶惯性加滞后环节模型

一阶对象的特性参数都具有明显的物理意义：

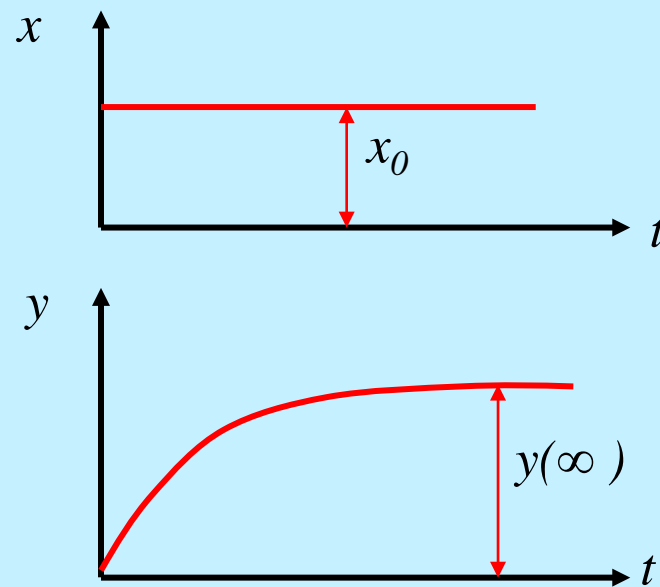
$$W(s) = e^{-s\tau} \frac{K_0}{T_0s + 1}$$

❖ 放大倍数 K 的物理意义

K 表明了稳态时，输出对输入的放大倍数。求法：

$$K = y(\infty) / x_0$$

❖ K 越大，表示对象的输入对输出的影响越大。

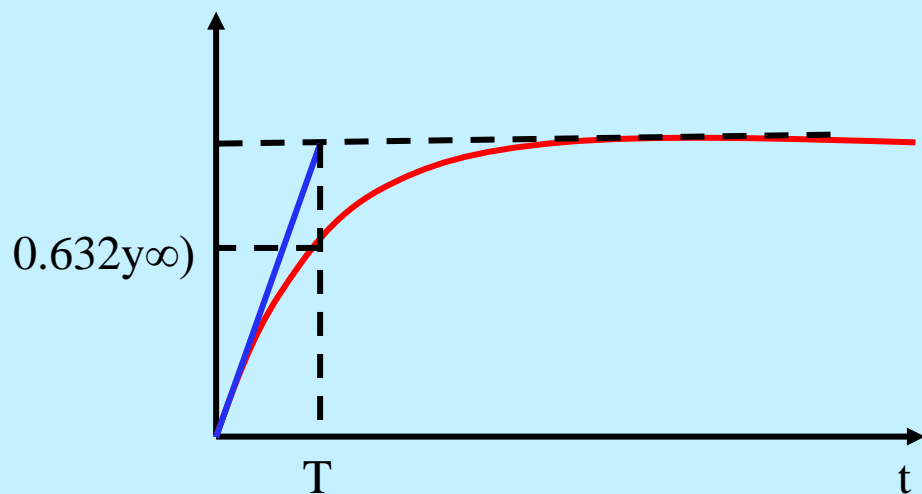


第5章 被控过程的数学模型

❖ 时间常数的物理意义

对象受到阶跃输入后，输出达到新的稳态值的63.2%所需的时间，就是时间常数 T 。

或对象受到阶跃输入后，输出若保持初始速度变化到新的稳态值所需时间就是时间常数。



求法：

$$y(t) = [Kx_0(1 - e^{-\frac{t}{T}})]_{t=T}$$

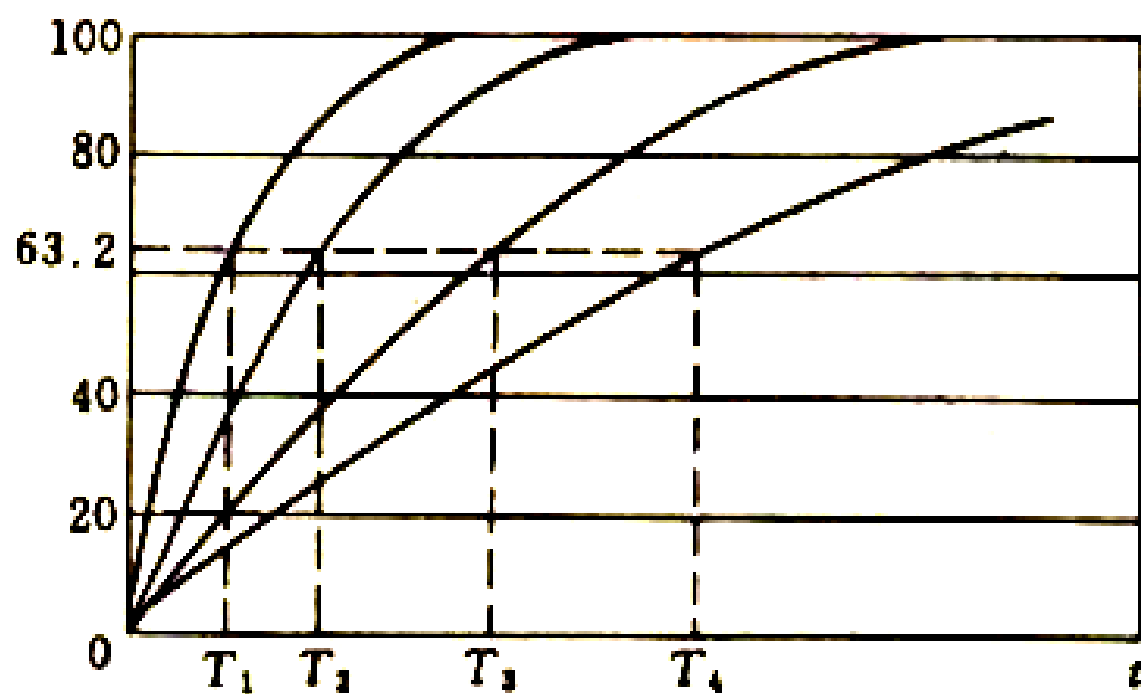
$$\begin{aligned} y(T) &= Kx_0(1 - e^{-1}) \\ &= 0.632Kx_0 \end{aligned}$$

第5章 被控过程的数学模型

❖ T 反映了对对象输出对输入的响应速度

T 越大，响应越慢。如水槽对象中 $T=AR_S$ ，说明水槽面积越大，水位变化越慢。

在相同的阶跃输入作用下，对象的时间常数不同时，被控变量的响应曲线如图所示。



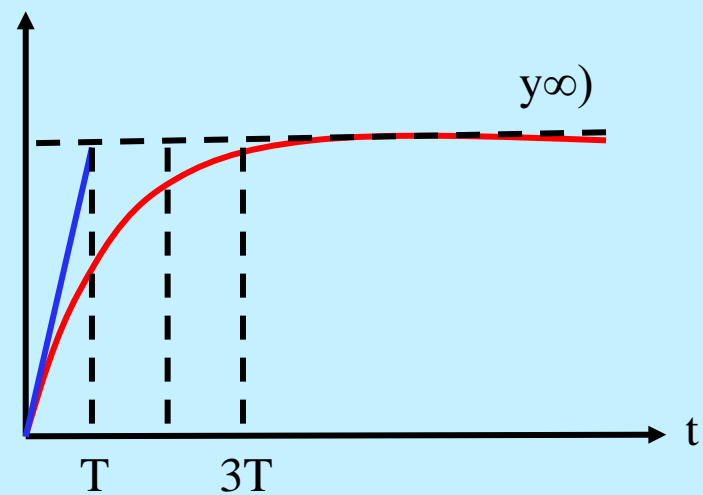
不同时间常数下的反应曲线

第5章 被控过程的数学模型

❖ T 也反映了过渡过程时间

被控变量变化到新的稳态值所需要的时间理论上需要无限长。

$$y(t) = Kx_0(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



当 $t \rightarrow \infty$ 时，才有 $y = Kx_0$ ，但是当 $t = 3T$ 时，便有：

$$y(3T) = Kx_0(1 - e^{-3}) \approx 0.95Kx_0 = 0.95y(\infty)$$

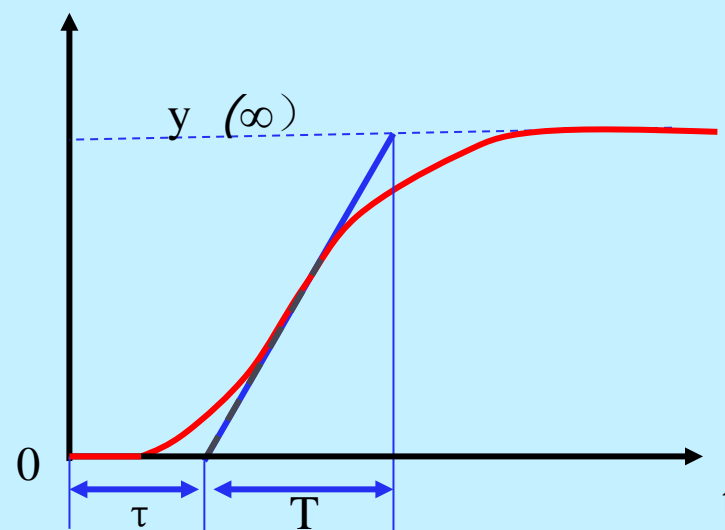
即：经过 $3T$ 时间，输出已经变化了满幅值的95%。
这时，可以近似地认为动态过程基本结束。

第5章 被控过程的数学模型

例：被控过程的单位阶跃响应是一条 S 形单调曲线，用有纯滞后的一阶环节近似描述该过程的特性。

作图法：

- 1) 在响应曲线的拐点处作一条切线，该切线与时间轴的交点切出 τ ；
- 2) 以 τ 为起点，与 $y(\infty)$ 的交点切出的时间段为 T ；
- 3) $K = y(\infty)/x_0$



$$W(S) = e^{-s\tau} \frac{K}{TS + 1}$$

第5章 被控过程的数学模型

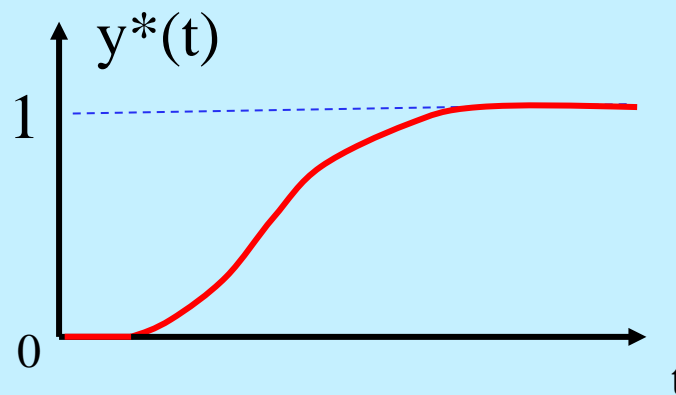
由于阶跃响应曲线的拐点不易找准，切线的方向也有较大的随意性，因而作图法求得的 T 、 τ 值误差较大。可以用算法来求特性参数。

算法的原理是根据曲线上的已知两点解方程。

两点法：

先将 $y(t)$ 转换成无量纲的形式 $y^*(t)$ 。

$$y^*(t) = \frac{y(t)}{Kx_0} = \frac{y(t)}{y(\infty)}$$



第5章 被控过程的数学模型

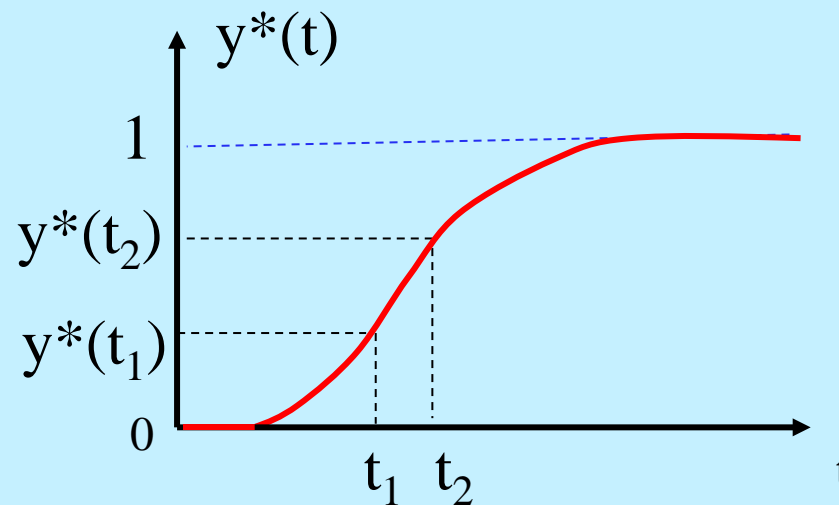
有滞后的一阶惯性环节，单位阶跃响应为：

$$y^*(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} & t \geq \tau \end{cases}$$

在无量纲飞升曲线上，选取 t_1 、 t_2 两时刻的响应 $y^*(t)$ 的坐标值：

$$\begin{cases} y^*(t_1) = 1 - e^{-\frac{t_1-\tau}{T}} \\ y^*(t_2) = 1 - e^{-\frac{t_2-\tau}{T}} \end{cases}$$

解方程组



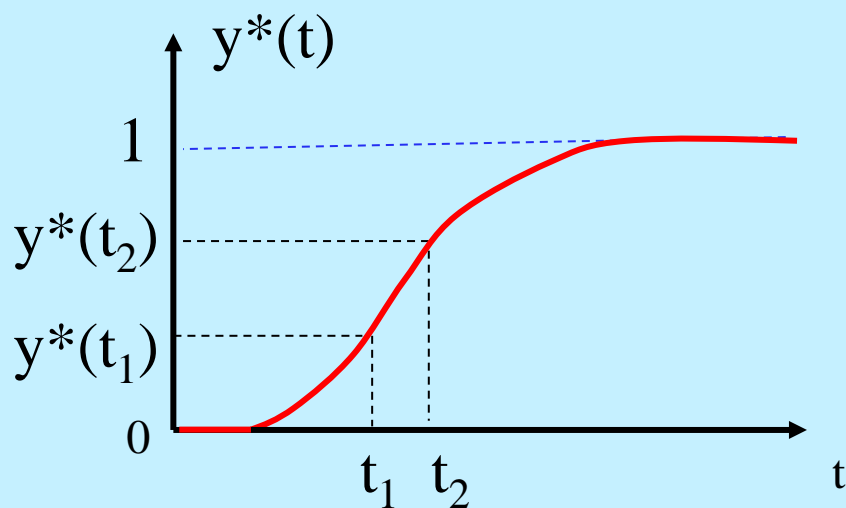
第5章 被控过程的数学模型

得

$$\tau = \frac{t_2 \ln[1 - y^*(t_1)] - t_1 \ln[1 - y^*(t_2)]}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]}$$

$$T = \frac{t_1 - t_2}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]}$$

为计算方便，取特殊两点：



$$y^*(t_1) = 0.39$$

$$y^*(t_2) = 0.632$$

则

$$\tau = 2 t_1 - t_2$$

$$T = 2 (t_2 - t_1)$$

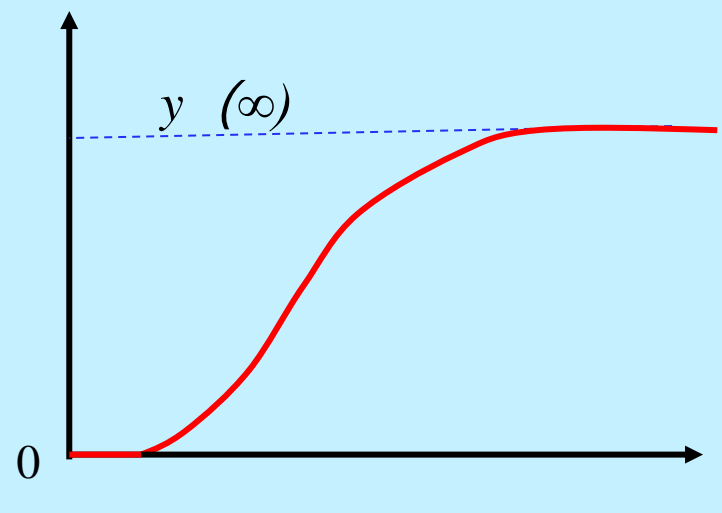
第5章

被控过程的数学模型

2、由阶跃响应曲线确定二阶及高阶模型特性参数 K, T_1, T_2, τ

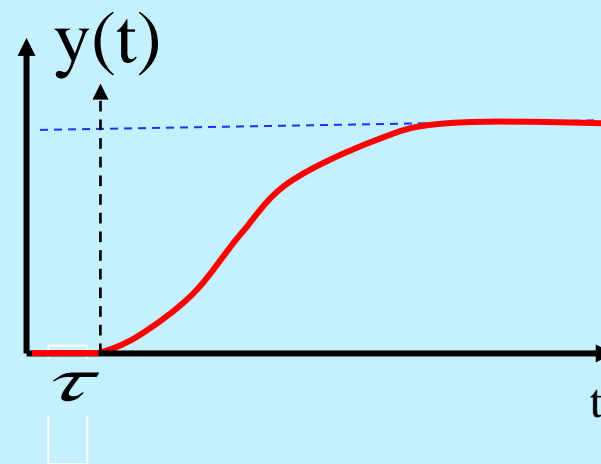
若用 $G(s) = \frac{Ke^{-\tau}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$

来近似如图所示的阶跃响应曲线。



放大倍数 K 为: $K = y(\infty) / x_0$

纯滞后时间 τ 可根据阶跃响应曲线开始出现变化的时刻来确定。



第5章 被控过程的数学模型

在时间轴上截去纯滞后 τ ，化为无量纲形式的阶跃响应 $y^*(t)$

截去纯滞后并化为无量纲形式后可得到：

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad T_1 > T_2$$

与上式对应的单位阶跃响应为：

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

可利用阶跃响应曲线上两个点的数据确定 T_1 和 T_2 ，一般选取 $y^*(t_1) = 0.4$ ， $y^*(t_2) = 0.8$ 两点，再从曲线上确定对应的 t_1 和 t_2 。

第5章

被控过程的数学模型

可得到方程组：

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_2}} &= 0.6 \\ \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_2}} &= 0.2 \end{aligned} \right\}$$

可求出近似解：

$$T_1 + T_2 \approx \frac{1}{2.16} (t_1 + t_2)$$

$$\frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \approx 1.74 \frac{t_1}{t_2} - 0.55$$

第5章

被控过程的数学模型

当 $0.32 < t_1/t_2 < 0.46$ 时，被控过程可近似为二阶惯性环节；
当 $t_1/t_2 < 0.32$ 时，被控过程可近似为一阶惯性环节；
当 $t_1/t_2 = 0.32$ 时，被控过程可近似为一阶惯性环节，
时间常数为：

$$T_1 = \frac{t_1 + t_2}{2.12}, \quad T_2 = 0$$

当 $t_1/t_2 = 0.46$ 时，被控过程可近似为

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2}$$

时间常数为：

$$T_1 = T_2 = \frac{t_1 + t_2}{2 \times 2.18}$$

当 $t_1 / t_2 > 0.46$ 时，被控过程应采用高于二阶的环节近似，即

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n}$$

时间常数为：

$$T = \frac{t_1 + t_2}{2.16n}$$

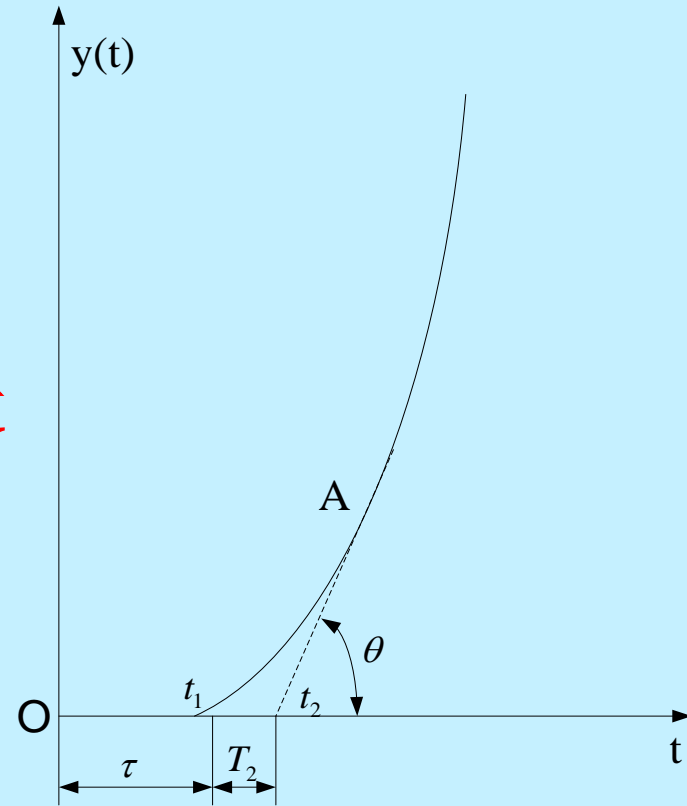
式中的 n 可根据 t_1 / t_2 查表。

3、由阶跃响应曲线确定无自衡被控过程数学模型的特性参数

无自衡被控过程的阶跃响应随时间 $t \rightarrow \infty$ 将无限增大，但其变化率会趋于一个常数。

若用 $G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_S}$ 来近似右图的阶跃响应曲线，为了确定时间常数 T ，作阶跃响应曲线的渐近线与时间轴交于 t_2 ，与时间轴的夹角为 θ 。可得到

$$\tau = t_2, y'(\infty) = \tan \theta = \frac{y(t)}{t - \tau}, t > \tau$$



则有 $T = \frac{x_0}{\text{tg}\theta}$

上述方法比较简单，但在 t_1 到A这一段误差较大。若要求保证这一段的精确度，可采用

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_1 s (T_2 s + 1)}$$

来近似被控过程的传递函数。

在 $0 \sim t_1$ 之间 $y(t) = 0$ ，可取纯滞后 $\tau = t_1$ 。在阶跃响应达到稳态时主要是积分作用为主，则有

$$T_1 = \frac{x_0}{\text{tg}\theta}$$

在 $t_1 \sim A$ 时间段，惯性环节起作用，可取 $T_2 = t_2 - t_1$

检验，设阶跃输入为 $x(t) = x_0 u(t)$ ，则

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{x_0}{T_1 s^2 (T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x_0}{T_1} ((t - \tau) - T_2(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_2}})) u(t - \tau) \\ &= tg\theta((t - \tau) - T_2(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_2}})) u(t - \tau) \end{aligned}$$

在 $t = 0 \sim t_1$ 之间， $y(t) = 0$;

当 $t \rightarrow \infty$ 时， $y(t) \rightarrow tg\theta(t - t_2) = \frac{x_0}{T_1} (t - t_2)$

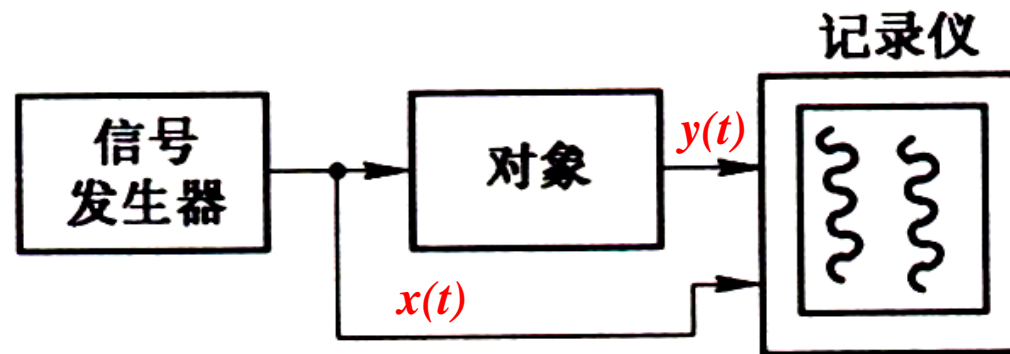
当 $t = t_2$ 时，
$$\begin{aligned} y(t_2) &= \frac{x_0}{T_1} ((t_2 - \tau) - T_2(1 - e^{-\frac{t_2-\tau}{T_2}})) \\ &= \frac{x_0 T_2}{T_1} e^{-1} = 0.368(t_2 - t_1)tg\theta \end{aligned}$$

5.4.2 测定动态特性的频域法

被控过程的动态特性也可用频率特性来表示：

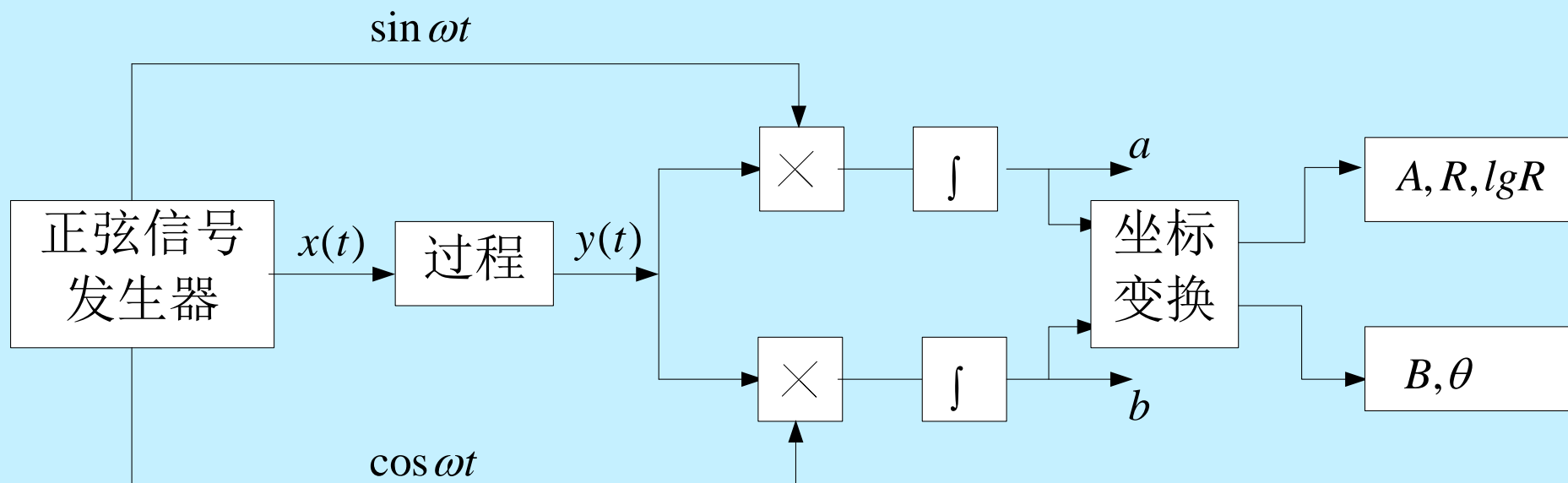
$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

方法：在对象的输入端加特定频率的正弦信号，同时记录输入和输出的稳定波形（幅度与相位）。在选定范围的各个频率点上重复上述测试，便可测得该对象的频率特性。



优点：能直接从记录曲线上求得频率特性。

频率特性测试装置的工作原理：对激励输入信号进行波形变换，得到幅值恒定的正余弦参考信号，把参考信号与被测信号进行相关处理，所得常值部分保存了被测信号基波的幅值和相角信息。



被测过程频率特性 $G(j\omega)$ 的同相分量 $A = \frac{a}{R_1}$

正交分量 $B = \frac{b}{R_1}$

幅值 $|G(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2}$

相角 $\angle G(j\omega) = \arctan \frac{b}{a}$

5.4.3测定动态特性的统计相关分析法

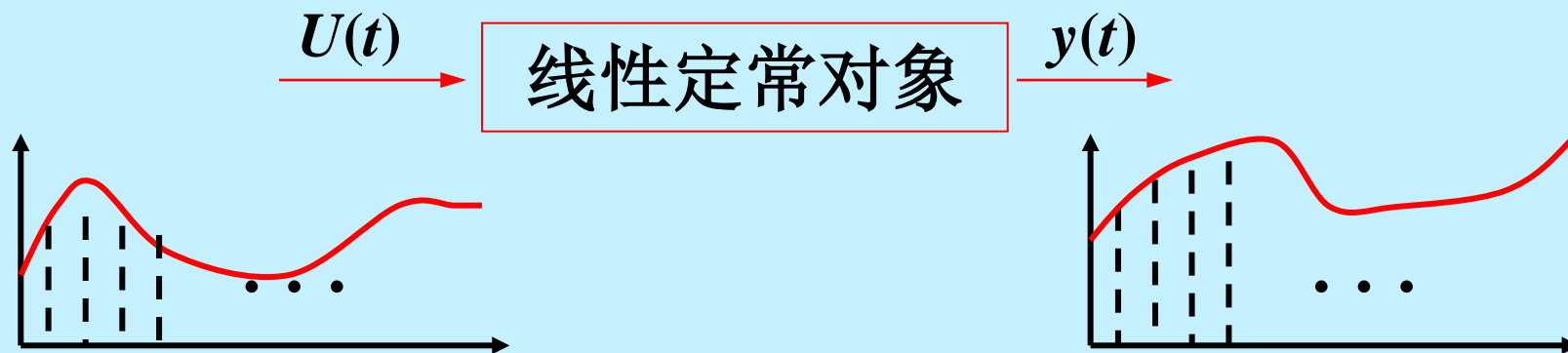
相关分析法是在生产正常进行中，向被控过程输入一种对正常生产过程影响不大的特殊信号——伪随机测试信号，通过对被控过程的输入、输出数据进行相关分析得到被控过程的数学模型；有时也可以不加专门信号，直接利用生产过程正常运行时所记录的输入、输出数据，进行相关分析得到数学模型。

这种方法对系统运行干扰程度低。若系统备有计算机在线工作，整个试验可由计算机完成。

5.4.4最小二乘法建立被控过程的数学模型

前面讨论的方法都是建立连续时间数学模型。为了适应计算机控制技术的发展，需要建立被控过程的离散时间数学模型。

如果对被控过程的输入信号 $u(t)$ 、输出信号 $y(t)$ 进行采样，则可得到一组输入序列 $u(k)$ 和输出序列 $y(k)$ ：



输入序列和输出序列之间的关系总可用差分方程进行描述（纯滞后时间已剔除）。

$$\begin{aligned} y(k) &+ a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) \\ &= b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

式中: k —— 采样次数; n —— 模型阶数

在确定了模型的阶数 n 后; 还需要确定上述模型中的参数 a_i 、 b_i 。

最小二乘法就是在 n 和 τ_0 已知的前提下, 根据输入、输出数据, 推算模型参数 a_1, a_2, \dots, a_n 及 b_1, b_2, \dots, b_n 的方法。

小结

机理法建模

单容对象

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$$



双容对象

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

测试法建模

时域法

频域法

统计法

作图法

计算法



练习题

