Науково-практичний звіт на тему:

**Тріангуляція Делоне поверхні зіркового многогранника**

Панченко Л.В., студентки 3-го курсу, групи МІ

***Покращити анотацію***

***Анотація***: у роботі “модифіковано або реалізовано” метод тріангуляції Делоне поверхні зіркового многогранника за принципом “розділяй та володарюй”.

***Abstract***: in the paper was proposed method Delaunay triangulation for star-shaped polyhedra by “divide and conquer” principle

***1. Вступ***

**Постановка задачі**

Роглядається задача триангуляції Делоне поверхні невипуклого многогранника. Задача триангуляції поверхні має фундаментальне значення для комп’ютерної графіки, оскільки трикутник має ряд зручних властивостей:

* трикутник однозначно задає грань у просторі
* найзручніший та найефективніший для обробки і виконання задач рендерингу
* будь-яка область гарантовано триангулюється
* трьох найближчих сусідів з’ясувати досить просто. [3]

За допомогою триангуляції можна розв’язувати задачі моделювання рельєфу, а також швидко обробляти поверхню, досягаючи найбільшої реалістичності.

Триангуляція Делоне вирізняється тим, що при її застосуванні виходить уникати довгих і вузьких трикутників. Такі трикутники незручні в обробці, тому що при рендерингу вони викликають нерівні стики, злами і порушують цілісність і гладкість оброблюваної поверхні. Див. Додаток 1.

**Аналіз існуючих підходів та методів розв’язання – розширити аналіз: імена, дати, посилання**

Наразі проблема побудови алгоритму двовимірної триангуляції Делоне вважається закритою, так як розв’язана за допомогою багатьох підходів, включно з принципом “Розділяй і володарюй”[1,4,5].

Для представлення триангуляції Делоне використовуються структури:

1. “Вузли з сусідами”
2. “Подвійні ребра”
3. “Вузли і трикутники”
4. “Вузли, ребра і трикутники”
5. “Вузли, прості ребра і трикутники” [1]

Серед алгоритмів побудови триангуляції Делоне вирізняють такі:

1. Ітеративні
   * Простий – *O(N\*N),* базується на пошуку наступного трикутника з використанням вже доданих до триангуляції.
   * Індексований пошук трикутників – *O(NlogN)*, кожний трикутник при додаванні заноситься в деяку структуру, що дозволяє шкидко шукати трикутники, яким належать задані точки площини.
   * Кешування пошуку трикутників – приблизно *O(N)*, схожі на індексованого пошуку. Для пошуку трикутника, близького до заданого використовується кеш, пошук відбувається за *О(1)*.
   * Триангуляція зі зміненим порядком додавання точок
2. Злиттям – розбити множину точок на підмножини і об’єднювати результати
   * “Розділяй і володарюй” – *O(NlogN),* множина точок розділяється горизонтальними і вертикальними лініями.
   * Рекурсивний з розрізанням по діаметру – відрізняється від РіВ способом розділення можини точок.
   * Смугові алгоритми злиття – *O(N),* лінеаризація за рахунок того, що позбуваємось рекурсії
3. Прямої побудови – відразу будувати трикутники, що задовольняють критерію Делоне, а тому не потребують перебудови. *O(N\*N)*
   * Покроковий
   * Покроковий з прискоренням пошуку сусідів
4. Двопрохідні – на першому проході і побудові початкової триангуляції умова Делоне ігнорується. А так як перевірка умови і перебудова вимагає найбільше часу, то швидкість таких алгоритмів – *O(N)*
   * Модифікований ієрархічний
   * Лінійний
   * Віялом
   * Рекурсивного розщеплення
   * Стрічковий
5. З обмеженнями

Особливістю триангуляції Делоне є однозначна відповідність діаграмі Вороного, побудованій на тому самому наборі точок. Суттєвим фактом у побудові алгоритму є те, що триангуляція Делоне зазвичай будується для опуклих многокутників і многогранників [1]. Частовживаним способом побудови триангуляції Делоне для двовимірного є двоетапний метод – побудова довільної триангуляції і перетворення її у триангуляцію Делоне послідовним проходженням по всіх парах трикутників таким чином: якщо пара трикутників утворює опуклий чотирикутник і при цьому не задовольняє критерію Делоне, то їх потрібно замінити парою дуальних трикутників – переставити внутрішнє ребро чотирикутника (так званий “фліп”)[6].

**Ідея методу – ідея! а не алгоритм. “Ідея використання М структури даних дозволяє...”**

Ідея методу полягає у використанні оптимальної структури даних, що підтримує триангуляцію.

\*Полягає в розділенні процесу триангуляції на етапи:

1. Розбиття многогранника на окремі грані для подальшої триангуляції кожної грані окремо
2. Розбиття неопуклих граней-многокутників на трикутники і опуклі многокутники
3. Остаточна *довільна* триангуляція грані
4. Перевірка критерію Делоне для кожного трикутника грані з подальшим редагуванням у разі необхідності
5. Виконання пункту 4 для кожної грані
6. Злиття триангуляції кожної грані в остаточну триангуляцію многогранника \*

**Мета роботи**

Створити алгоритм оптимальної побудови триангуляції Делоне для поверхні зіркового многогранника і з’ясувати його обчислювальну складність

***2. Основна частина – додати поняття і теореми. Внести параграф “алгоритм” і змінити нумерацію пунктів. Додати аргументацію***

**Основні поняття**

Уведемо поняття “*жорсткого*” і “*м’якого*” ребра.

*Жорстким* *ребром* будемо називати ребро грані.

*М’яким* - ребро триангуляції.

“*Жорсткі*” ребра носять обов’язковий характер. Якщо “*м’яке*” ребро вступає у конфлікт з “*жорстким*” ребром, то перевага надається “*жорсткому*” ребру. (Примітка: у прикладі “*жорсткі*” ребра бузкового кольору, “*м’які*” – зеленого, оранжевою хвилькою - “*м’які*” ребра, що належать знищенню).

Триангуляція Делоне

Зірковий многогранник

Опуклий многокутник

Неопуклий многокутник

Теорема. Критерій Делоне (1)

Лема. Критерій Делоне (2)

Фліп ребра

**Геометрична постановка задачі**

Нехай дано многогранник , що задається своїми гранями . Кожна грань задається точками Розбити поверхню заданого многогранника на трикутники, що задовольняють критерію Делоне, тобто, якщо провести навколо трикутника коло, то жодна точка грані , окрім тих точок що є вершинами трикутника, не лежить всередині кола або на колі.

Обговоримо критерій Делоне. Означення триангуляції Делоне для площини звучить так:

Нехай дана множина точок N. Триангуляція Делоне (Критерій Делоне) – це така триангуляція, що якщо навколо довільного трикутника ∆ABC, де , побудувати коло, то жодна точка з N, окрім тих, що є вершинами ∆ABC, не буде належати колу і кругу, обмеженому колом.

По суті, для побудови трикутника на точці ми вибираємо дві найближчих до неї точки. Практично такий критерій незастосовний, адже для кожного трикутника потрібно побудувати коло і перевірити входження точки в коло, а це суттєво збільшує складність алгоритму – вона перетворюється на квадратичну. Тому ми обираємо інший підхід до розв’язку задачі. Критерієм Делоне виступатиме перевірка суми протилежних кутів для кожної пари трикутників, що утворюють чотирикутник [1]. Якщо цей критерій виконується, то діагональ чотирикутника є локальним ребром Делоне. За лемою Делоне [4], якщо кожне ребро триангуляції є локальним ребром Делоне, то вся триангуляція є триангуляцією Делоне.

**Алгоритм**

*A. Розділення на підзадачі*

Підзадачами поставленої задачі доречно зробити:

1. Розбиття многогранника на грані для обробки
2. Обробка грані окремо
3. Злиття результатів обробки кожної грані в єдине ціле

*B. Підзадача 1. Розбиття многогранника на грані*

Ця задача цілком залежить від способу, яким задається многогранник. Найзручнішим для обробки буде задання многогранника у вигляді списку граней, кожна з яких задається списком вершин. Тоді розбиття виконується за час, необхідний для отримання списку вершин і граней – лінійний.

Будемо вважати, що многогранник задається гранями, а кожна грань задається точками в порядку обходу.

*C.* *Підзадача 2. Обробка окремо кожної грані*

Два послідовних проходи вершин грані: для побудови базової триангуляції і для коригування триангуляції, щоб привести її до триангуляції Делоне. Перший прохід потребуватиме *O(n)* часу, де *n* – кількість вершин грані – просто розбиття фігури на трикутники:

1. Допоки кожна група точок має більше 6 точок, множина точок грані ділиться на 2 групи рекурсивно:
   * Якщо грань має *n* точок, то групи матимуть *[n/2]* і *n-[n/2]* точок
   * Якщо *n < 7*, то поточна група триангулюється без розбиття
2. Кожна група триангулюється окремо
3. Зливається результат триангуляції кожної групи.

Другий прохід виконуватиметься так:

1. обиратимемо пару трикутників
2. перевірятимемо умови Делоне для чотирикутника
3. якщо умова Делоне не виконується, то робимо фліп ребра.
4. виконувати послідовно для кожної пари трикутників

Другий прохід виконуватиметься також за лінійний час. **Чому?**

*D. Підзадача 3. Злиття результатів*

По суті, структуризація одержаної триангуляції в зручну для зберігання структуру. За умови, що триангуляція – це деякий тип даних, з яким ми працюємо як з об’єктом, то злиття результатів аналогічне до об’єднання триангуляцій груп точок на кожній грані. А враховуючи, що грані триангулюються окремо і мова йде про триангуляцію поверхні зіркового многогранника, то ця частина алгоритму виконується сама собою. Наприклад, триангуляція кожної грані буде записуватися в список триангуляцій.

***3. Обгрунтування складності методу – має бути теорема і її доведення***

**Теорема:**

Оцінка складності методу – *O(n\*m)* , де *n* – середня кількість вершин грані, а *m* – кількість граней.

*Доведення:*

Доведемо, що оцінка складності справедлива. Використовуючи попередньо отримані результати [1], зафіксуємо, що оцінка складності *Підзадачі 2. Обробка окремо кожної грані*, або, по суті, триангуляції Делоне довільного опуклого многокутника методом розділяй і володарюй,

*\**Така оцінка складності тим, що другий етап методу (обробка грані), виконується для кожної грані, тобто, за квадратичний час і останній етап теж виконується для всіх вершин всіх граней.\*

***5. Практична частина – написати + оформити + лістінг + скріни***

***5. Висновки – Розширити висновок так, щоб це таки був висновок***

Розроблено достатньо ефективний алгоритм триангуляції Делоне поверхні зірчастого многогранника, а також проведена оцінка складності цього алгоритму.

***6. Використана література – щонайменше 10 пунктів, особливо, для аналізу***

1. Скворцов А.В. C 42 Триангуляция Делоне и её применение. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
2. Терещенко В.М. Побудова триангуляції Делоне для планарних графів. // Вісник київського університету. Cерія: фіз.-мат. науки. – 2014. – вип 2. – с. 206-209.
3. <http://grafika.me/node/12>
4. <http://dcglab.uniyar.ac.ru/sites/default/files/group_files/DGGN/garber/Edelsbrunner_translation.pdf>
5. Pavel Maur. Delaunay Triangulation in 3D, Technical Report No. DCSE/TR-2002-02. University of West Bohemia in Pilsen
6. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы

***7. Додаток 1. Результат використання довгих і вузьких трикутників***