Aufgabe 5.1

a) $2y'(x) + 3y(x) + \sin 5x = 0$ oder $y'(x) = -\frac{3}{2}y(x) - \frac{1}{2}\sin 5x$

Anfangsbed.: $y(0) = \frac{1}{2}$

1. Schritt. Die allgemeine Lösung $y_H(x)$ der zugehörigen homogenen DG

$$y'(x) = -\frac{3}{2}y(x)$$

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$$

2. Schritt. Eine spezielle Lösung der inhomogenen DG:

$$y_s(x) = c_0 \cdot \sin 5x + c_1 \cdot \cos 5x$$

Setzen wir $y_s(x)$ in die inhomogene DG ein:

$$2 \cdot 5 \cdot c_0 \cos 5x + 2 \cdot 5 \cdot c_1 \cdot (-\sin 5x) = -3c_0 \cdot \sin 5x - 3c_1 \cos 5x - \sin 5x$$

$$\begin{matrix} \cos 5x: \\ \sin 5x: \end{matrix} \begin{cases} 10c_0 = -3c_1 \\ -10c_1 = -3c_0 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = -\frac{3c_1}{10} \\ -10c_1 = \frac{9c_1}{10} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = -\frac{3}{109} \\ c_1 = \frac{10}{109} \end{cases}$$

$$y_s(x) = -\frac{3}{109} \sin 5x + \frac{10}{109} \cos 5x$$

3. Schritt

$$y(x) = c \cdot e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{109} \sin 5x + \frac{10}{109} \cos 5x$$

$$y(0) = \frac{1}{2} = c + \frac{10}{109} \Rightarrow c = \frac{89}{218}$$

$$y(x) = \frac{89}{218} \cdot e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{109} \sin 5x + \frac{10}{109} \cos 5x$$