$$X_k^{(i+1)} = D^{-1}\cdot\left(b-(L+U)\cdot X^{(i)}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 13 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -19 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \text{dann} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$L+U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1^{(i+1)} \\ X_2^{(i+1)} \\ X_3^{(i+1)} \\ X_4^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ X_3^{(i)} \\ X_4^{(i)} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\cdot X_1^{(i)} + a_{12}\cdot X_2^{(i)} + a_{13}\cdot X_3^{(i)} + a_{14}\cdot X_4^{(i)} \\ a_{21} X_1^{(i)} + 0\cdot X_2^{(i)} + a_{23} X_4^{(i)} + a_{24} X_4^{(i)} \\ a_{31} X_1^{(i)} + a_{32} X_2^{(i)} + 0\cdot X_3^{(i)} + a_{34} X_4^{(i)} \\ a_{41} X_1^{(i)} + a_{42} X_2^{(i)} + a_{43} X_3^{(i)} + 0\cdot X_4^{(i)} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{4} (a_{1j}\cdot X_j^{(i)}) \\ b_2 - \sum_{j\neq 2}^{4} (a_{2j}\cdot X_j^{(i)}) \\ b_3 - \sum_{j\neq 3}^{4} (a_{3j}\cdot X_j^{(i)}) \\ b_4 - \sum_{j\neq 4} (a_{4j}\cdot X_j^{(i)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}\cdot\left(b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{4} (a_{1j}\cdot X_j^{(i)})\right) \\ \frac{1}{a_{22}}\cdot\left(b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{4} (a_{2j}\cdot X_j^{(i)})\right) \\ \frac{1}{a_{33}}\cdot\left(b_3 - \sum_{j\neq 3} (a_{3j}\cdot X_j^{(i)})\right) \\ \frac{1}{a_{44}}\cdot\left(b_4 - \sum_{j\neq 4}^{4} (a_{4j}\cdot X_j^{(i)})\right) \end{pmatrix}$$

$$x_k^{(i+1)} = \frac{1}{a_{k,k}} \cdot \left(b_k - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (a_{k,j}\cdot x_j^{(i)})\right) =$$

$$= -\frac{1}{a_{k,k}} \cdot \left(-b_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (a_{k,j}\cdot x_j^{(i)})\right), \quad n=4$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 13 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -19 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad b = (3,-2,7,9)^T.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 17 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 13 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -19 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -41830$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 13 & 1 & 6 \\ 7 & -3 & -19 & 2 \\ 9 & 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -21110.$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 17 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & -19 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 33440$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 17 & 3 & 3 & -3 \\ 4 & 13 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -100$$

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 17 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 13 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -19 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -44420$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-21110}{-41830} = 0,50466172$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{+33440}{-41830} = -0.79942624$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-100}{-41830} = 0.00239062$$

$$x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{-44420}{-41830} = 1.06191728$$

Hier werden die Ergebnisse der berechneten Vektoren für die jeweilige Iteration($x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}...$) und verschiedenen Startwerten $x^{(0)}$ im Vergleich zu der symbolisch bestimmten Lösung x^* grafisch dargestellt.

x^* = (0.504661726033946, -0.799426249103514, 0.002390628735357398, 1.061917284245756)

Die Einträge des symbolisch bestimmten Vektors und der entsprechenden iterativ berechneten Vektoren werden wie folgend abgebildet:

x = (x_1, x_2, x_3, x_4)

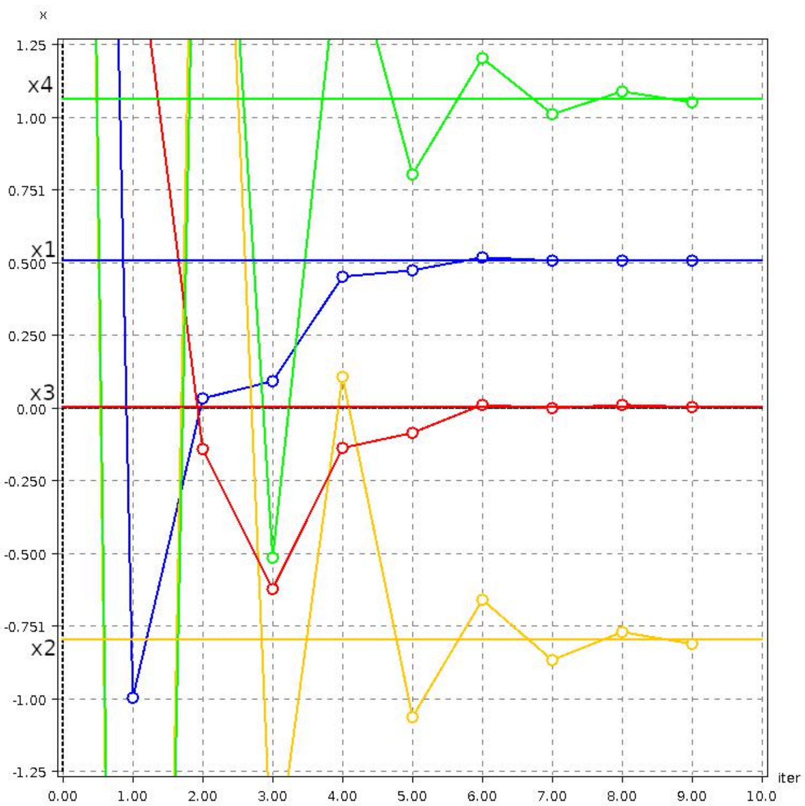
x_1- blau

x_2- orange

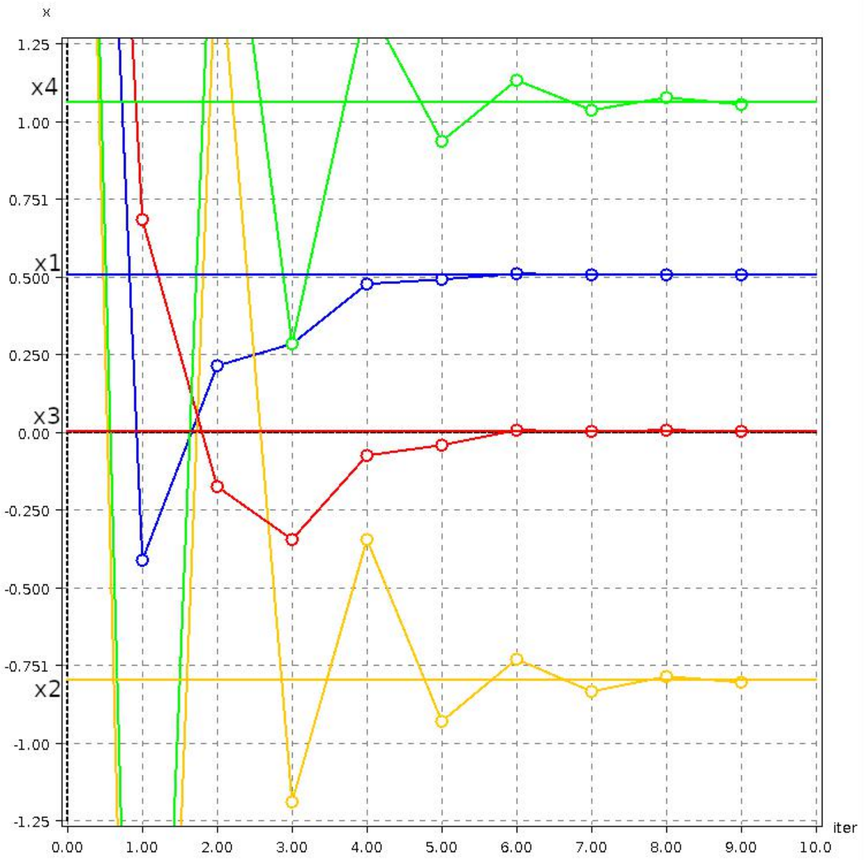
x_3- rot

x_4- grün

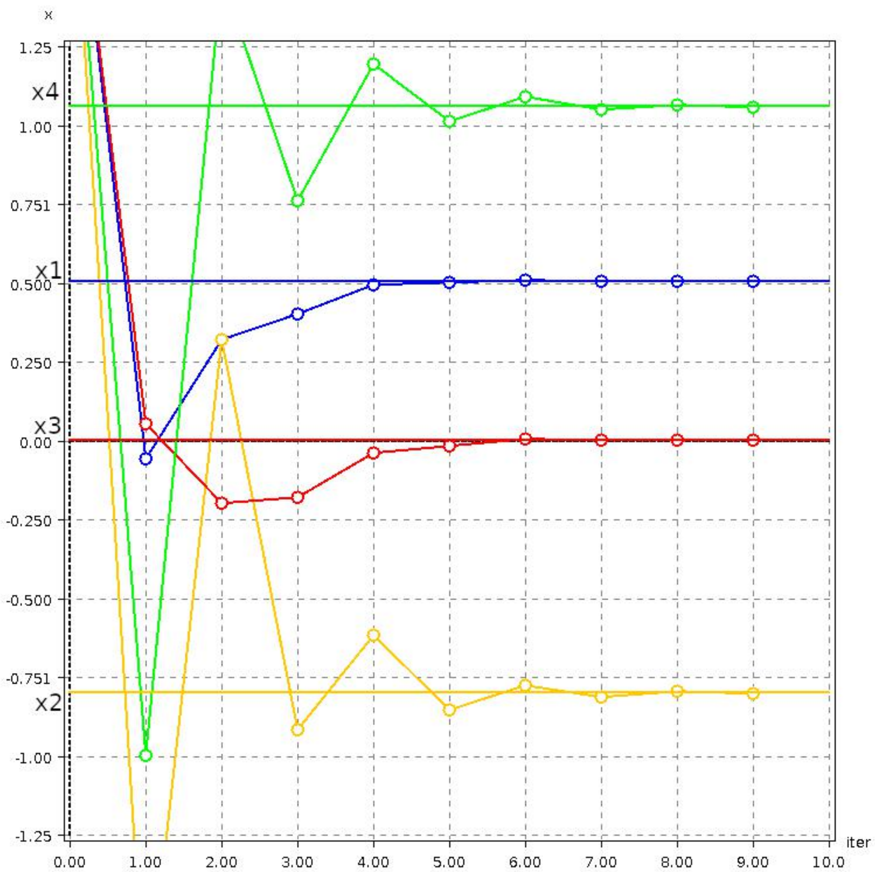
1. $x^{(0)}$= (10, 10, 10, 10)



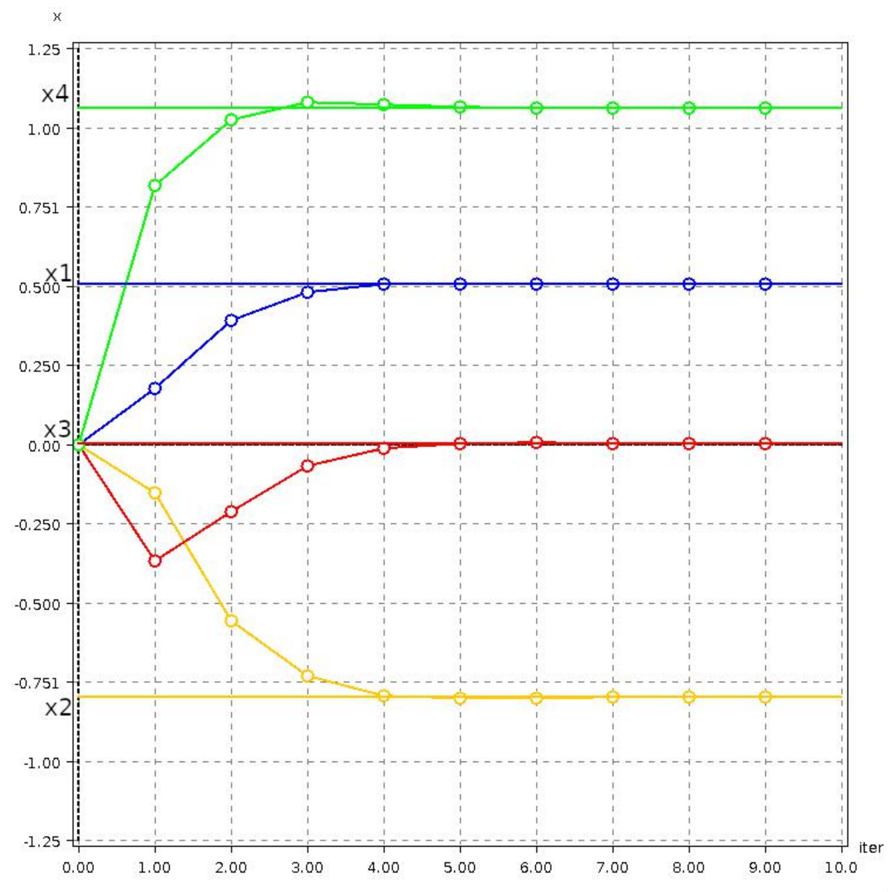
2. $x^{(0)}$= (5, 5, 5, 5)



3. $x^{(0)}$= (2, 2, 2, 2)



3. $x^{(0)}$= (0, 0, 0, 0)



Aus den Graphen lässt sich feststellen, dass je näher der Startvektor dem LÖsungsvektor ist, desto weniger Iterationen sind erforderlich, um den LÖsungsvektor zu erreichen