

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**ОПТИМАЛЬНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

Курсовая работа

Швырёв Владислав Игоревич  
студента 3 курса,  
специальность «прикладная  
математика»

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	4
1.1 Оптимальное управление в реальном времени . . . . .	4
1.2 Теория управления по прогнозирующей модели. . . . .	7
<b>ГЛАВА 2 НАЗВАНИЕ ГЛАВЫ</b> . . . . .	8
2.1 Название раздела 1 . . . . .	8
2.2 Название раздела 2 . . . . .	8
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	9
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	10

## ВВЕДЕНИЕ

Объем введения для дипломных работ не менее 1 стр. Для магистерских диссертаций 2-3 стр.

Описать исследуемую в работе проблему, отметить актуальность и новизну задачи или подхода к ее решению.

Еще раз подчеркнуть цель работы (не повторять указанную в реферате).

Кратко изложить содержание работы, примерно в таком виде: В частности, в разд. 1 обосновано . . . . В разд. 2 исследуется . . . . В разд. 3 продолжается исследование задач . . . . В разд. 4 эффективность предложенных методов иллюстрируется численными примерами. . . В заключении приводятся краткие выводы по результатам проведенной работы и даются рекомендации о перспективах дальнейших исследований по исследуемой тематике.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящем обзоре приводятся основные сведения о современных подходах в теории управления динамическими системами, в частности, обсуждается принцип управления в режиме реального времени и основанная на нем реализация оптимальной обратной связи в реальном времени. Также обсуждаются задачи оптимального управления и возможные формулировки оптимизационных задач, которые решаются при реализации указанного принципа управления.

### 1.1 Оптимальное управление в реальном времени

Центральной проблемой теории оптимального управления является синтез оптимальных управлений типа обратной связи. В классическом смысле синтез подразумевает построение обратной связи в явном виде, т.е. как формулы, выражающей обратную связь как функцию от позиции процесса управления, либо таблицы, в которой явно указаны значения связи для дискретно выбранных позиций. Построить обратную связь в классическом понимании удастся только для отдельных классов задач. Например, получены решения линейных задач быстрогодействия на плоскости, линейно-квадратичных задач. Современная теория управления направлена на построение реализаций обратных связей с использованием вычислительной техники. А именно, обратная связь не строится заранее, а непрерывно вычисляется в процессе управления в соответствии с получаемой информацией о реализующихся состояниях. Остановимся подробнее на использовании принципа управления в реальном времени при реализации оптимальной обратной связи на примере следующей терминальной задачи оптимального управления детерминированной системой

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_f],$$

где  $X_f \subseteq \mathbb{R}^n$  — терминальное множество,  
 $U \subset \mathbb{R}$  — множество доступных значений управляющего воздействия  
 $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы (1.1) в момент времени  $t$ ;  
 $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$  — значение управляющего воздействия в момент времени  $t$ ;  
 $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, b(t) \in \mathbb{R}^n$  — заданные кусочно-непрерывные матричная и векторные функции;

**Определение 1.1** Управляющее воздействие  $u(t) \in U, t \in T$ , называется программой, если соответствующая ему траектория  $x(t), t \in T$ , математической модели (1.1) удовлетворяет условию  $x(t_f) \in X_f$ .

**Определение 1.2** Программа  $u^0(t), t \in T$ , называется оптимальной (программным решением задачи (1.1)), если критерий качества на нем достигает минимального значения:

$$J(u^0) = \min J(u),$$

где минимум ищется среди всех программ.

Для определения позиционного решения погрузим задачу (1) в семейство задач:

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = z,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_f],$$

зависящее от  $\tau \in [t_0, t_f], z \in \mathbb{R}^n$ .

Пара  $(\tau, z)$  Называется позицией процесса управления.

Пусть  $u^0(t | \tau, z), t \in T^0$  — оптимальная программа задачи (1.1) для позиции  $(\tau, z)$ .

Функция :

(1.3)

$$u^0(\tau, z) = u^0(t | \tau, z), \tau \in [t_0, t_f], z \in \mathbb{R}^n,$$

называется оптимальной обратной связью. Подстановка обратной связи из (1.3) в систему (1.1) называется замыканием системы управления. Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x(t)), x(t_0) = x_0,$$

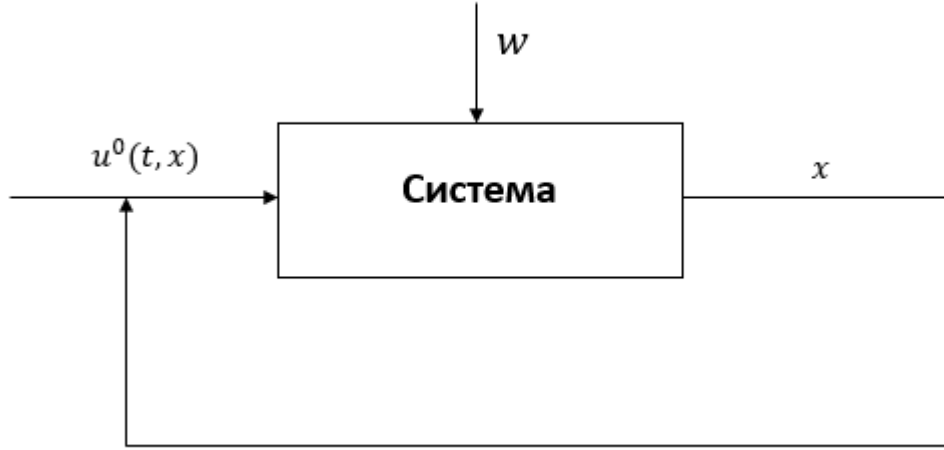


Рис. 1.1:

и изображена на рисунке 1.1:

Построение обратной связи (1.3) называется синтезом оптимальной системы управления (позиционным решением задачи (1.1)). Применение оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления проиллюстрируем на примере задачи оптимального управления линейной системой (1.1) в классе дискретных управляющих воздействий.

**Определение 1.3** Управляющее воздействие  $u(t) \in U, t \in T$ , называется дискретным, если  $u(t) \equiv u(\tau), t \in [\tau, \tau + h[, \tau \in T_h, T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}, h = (t_f - t_0)/N, N \in \mathbb{N}, N > 1, h$  - период квантования.

Рассмотрим решение задачи (1.1) для позиции  $(t_0, x_0)$ . Подадим на вход объекта управляющее воздействие  $u^*(t_0) = u^0(t_0, x_0)$ . В момент времени  $t = h$  объект перейдет в состояние  $x^*(h)$  под действием управляющего воздействия и возмущения. Для позиции  $(h, x^*(h))$  подсчитываем управляющее воздействие  $u^*(t) = u^0(h, x^*(h)), t \in [h, 2h[$ . Продолжая процесс управления, получим управляющие воздействия  $u^*(t), t \in T$ , и последовательность состояний объекта  $x^*(\tau), \tau \in T_h$ , которые соответствуют управляющему воздействию. Функция

$$u^*(\tau), \tau \in T_h,$$

называется реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления. Процесс управления осуществляется в реальном времени, если для каждого  $\tau \in T_h$  текущее значение  $u^*(\tau)$  вычисляется за время  $s(\tau)$ , не превышающее  $h$ . Устройство, выполняющее эту работу, называется оптимальным регулятором. При отсутствии в системе (1.1) возмущений, реализация  $u^*(t), t \in T$ , оптимальной обратной связи (1.4) совпадет с оптимальной про-

граммой  $u^0(t|t_0, x_0), t \in T$ , что является следствием принципа оптимальности [7].

## 1.2 Теория управления по прогнозирующей модели

В западной литературе (см. [33, 44, 51]) управление в реальном времени представлено теорией управления по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (MPC), также называемая Receding Horizon Control (RHC). Основными приложениями теории являются задачи стабилизации динамических систем. Современная теория нелинейного MPC предлагает основанные на решении задач оптимального управления методы построения обратных связей для нелинейных объектов.

Главная идея MPC — использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Поясним на примере модели нелинейного процесса управления

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.4)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние модели в момент времени  $t$ ;  $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$  — значение управляющего воздействия;  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  — заданная функция, обеспечивающая существование и единственность решения (1.4) при любом допустимом управляющем воздействии.

.....

Каждая глава завершается краткими выводами. Разумный способ написания выводов — переписать (это значит использовать те же мысли, но не копировать фразы!) в утвердительной форме (рассмотрено, получено и т.д.) то, что написано во врезке.

## ГЛАВА 2

### НАЗВАНИЕ ГЛАВЫ

(Врезка) ...

#### 2.1 Название раздела 1

.....

#### 2.2 Название раздела 2

.....

Не забываем делать выводы.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе/ магистерской диссертации рассмотрена задача... .  
Для исследуемой задачи сформулированы/доказаны/предложены... Проведен  
анализ... Результаты проиллюстрированы численными экспериментами для  
...

Привести краткие выводы и рекомендации по дальнейшему развитию  
или использованию результатов.

Объем примерно 0,7-1 стр.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Агаев, Р.П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев // УБС. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 470–505.
- 2 Асеев С. М., Кряжжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.
- 3 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
- 4 Балашевич, Н.В. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838-859.
- 5 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 6 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
- 7 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах оптимального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.
- 8 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.
- 9 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.
- 10 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

- 11 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.
- 12 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.
- 13 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.
- 14 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.
- 15 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.
- 16 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии
- 17 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.
- 18 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996
- 19 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.
- 20 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.
- 21 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.
- 22 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.
- 23 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы

коллективного управления в группах роботов // М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

24 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

25 Кряжковский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжковский, Н.В. Стрелковский // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

26 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

27 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

28 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

29 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе // Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

30 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

31 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

32 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

33 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

34 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

35 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

- 36 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.
- 37 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.
- 38 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.
- 39 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.
- 40 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.
- 41 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.
- 42 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.
- 43 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.
- 44 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.
- 45 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.
- 46 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009
- 47 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.
- 48 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

- 49 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.
- 50 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.
- 51 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 52 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.
- 53 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.
- 54 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.
- 55 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479-487.
- 56 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.