МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра методов оптимального управления

ОПТИМАЛЬНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Курсовая работа

Швырёва Владислава Игоревича
студента 3 курса,
специальность «прикладная математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача оптимального управления половинной моделью автомобиля с неточным измерениям их выходных сигналов, которую требуется за конечное время перевести с гарантией,т.е. независимо от реализации возмущения, на терминальное множество,задаваемое совокупностью линейных ограничений неравенств.

Актуальность задачи обоснована явным учетом возмущений, которые могут включать неточности и упрощения математического моделирования, неточности реализации управляющих воздействий, что даёт возможность реалистично описывать процесс управления.

В курсовой работе рассматривается один из подходов к получению гарантированного результата в поставленной задаче – построение априорной программы.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данной главе приводятся основные сведения о современных подходах в теории управления динамическими системами, в частности, обсуждается принцип управления в режиме реального времени и основанная на нем реализация оптимальной обратной связи в реальном времени.

1.1 Синтез оптимальных систем

Синтез оптимальных управлений типа обратной связи является главной проблемой теории оптимального управления. Но что такое синтез? Синтез это построение обратной связи в явном виде, а именно формулы, выражающие обратную связь как функцию от позиции процесса управления, в которой явно указаны значения связи для дискретно выбранных позиций. Это классический смысл проблемы синтеза.

Только в отдельных классах задач нам удастся построить обратную связь в классическом понимании. Это такие задачи как, линейные задачи быстродействия на плоскости или линейно-квадратичные задачи.

Нынче подход к построению обратных связей отличается от того, что было раньше, в связи с развитием вычислительной техники. Теперь обратная связь не строится заранее, а непрерывно вычисляется в процессе управления в соответствии с получаемой информацией о реализующихся состояниях.

Для того, чтобы пояснить принципа управления в реальном времени при реализации оптимальной обратной связи введем основные определения, и в первую очередь дадим классическое определение оптимальной обратной связи и постановку проблемы синтеза оптимальной системы. Сделаем это на примере следующей задачи оптимального управления линейной детерминированной системой управления

$$J(u) = c'x(t_f) \to \min, \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \ x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_f],$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (1.1) в момент времени t;

$u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ — значение управляющего воздействия в момент времени t;
$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — заданные кусочно-непрерывные матричная и векторные функции;
$X_f \subseteq \mathbb{R}^n$ — терминальное множество;
$U \subset \mathbb{R}^r$ — множество доступных значений управляющего воздействия.

Определение 1.1 Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется программой, если соответствующая ему траектория $x(t)$, $t \in T$, математической модели (1.1) удовлетворяет условию $x(t_f) \in X_f$.

Определение 1.2 Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется оптимальной (программным решением задачи (1.1)), если критерий качества на нем достигает минимального значения:

$$J(u^0) = \min J(u),$$

где минимум ищется среди всех программ.

Для определения позиционного решения погрузим задачу (1.1) в семейство задач:

$$J(u) = c'x(t_f) \to \min, \tag{1.2}$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(\tau) = z,$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t_f],$$

зависящее от $\tau \in T, z \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1.3 Пара (τ, z), состоящая из момента времени $\tau \in T$ $z \in \mathbb{R}^n$ называется позицией процесса управления.

Пусть $u^0(t \mid \tau, z)$, $t \in T$ — оптимальная программа задачи (1.1) для позиции (τ, z).

Определение 1.4 Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau \mid \tau, z),\ \tau \in [t_0, t_f],\ z \in \mathbb{R}^n,$$

называется оптимальной обратной связью.

Построение данной функции называют синтезом оптимальной системы управления.

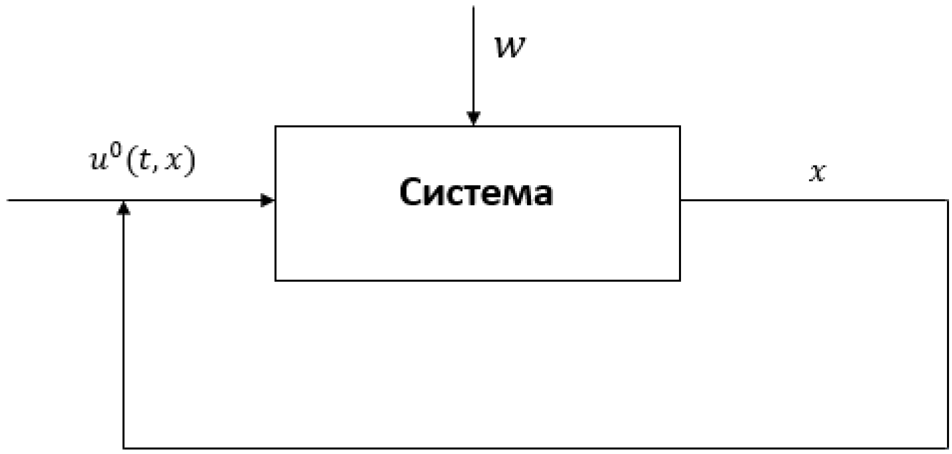

Рис. 1.1:

Подстановка обратной связи из определения 1.4 в систему (1.1) называется замыканием системы управления. Замкнутая система имеет вид:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

и изображена на рисунке 1.1.

1.2 Оптимальное управление в реальном времени

Применение оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления проиллюстрируем на примере задачи оптимального управления линейной системой (1.1) в классе дискретных управляющих воздействий.

Определение 1.5 Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T$, называется дискретным, если

$$u(t) \equiv u(\tau),\ t \in [\tau, \tau + h[,$$

где $\tau \in T_h$, $T_h = \{t_0, t_0 + h, \ldots, t_f - h\}$, $h = (t_f - t_0)/N$, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, h — период квантования.

Рассмотрим решение задачи (1.1) для позиции (t_0, x_0). Подадим на вход объекта управляющее воздействие $u^*(t_0) = u^0(t_0, x_0)$. В момент времени $t = h$ объект перейдет в состояние $x^*(h)$ под действием управляющего воздействия и возмущения. Для позиции $(h, x^*(h))$ подсчитываем управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(h, x^*(h))$, $t \in [h, 2h[$. Продолжая процесс управления, получим управляющие воздействия $u^*(t)$, $t \in T$, и последовательность состояний объекта $x^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, которые соответствуют этому управляющему воздействию.

Определение 1.6 Функция:

$$u^*(\tau),\ \tau \in T_h, \tag{1.4}$$

называется реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Сформулируем ещё одно определение

Определение 1.7 Процесс управления осуществляется в реальном времени, если для каждого $\tau \in T_h$ текущее значение $u^*(\tau)$ вычисляется за время $s(\tau)$, не превышающее h. Устройство, выполняющее эту работу, называется оптимальным регулятором.

При отсутствии в системе (1.1) возмущений, реализация $u^*(t), t \in T$, оптимальной обратной связи (1.4) совпадет с оптимальной программой $u^0(t|t_0, x_0), t \in T$, что является следствием принципа оптимальности.

....

1.3 Оптимальный регулятор

Как было сказано ранее оптимальный регулятор — устройство способное, реализовать оптимальную обратную связь в реальном времени.

Тогда получаем, что с использованием принципа управления в реальном времени задача синтеза оптимального управления типа обратной связи свелась к построению алгоритма работы оптимального регулятора.

Опишем алгоритм работы оптимального регулятора.

Шаг первый: Положим что $\tau = t_0$.

Шаг второй: Получим измерение текущего состояния $x*(\tau)$.

Шаг третий: Решим задачу (1.1) для текущей позиции$(\tau, x*(\tau)$, найдём оптимальную программу $u^0(t \mid \tau, x*(\tau))$.

Шаг четвёртый: Управляющее воздействие $u*(t) \equiv u*(\tau) = u^0(\tau, x*(\tau)) =$

$u^0(\tau \mid \tau, x*(\tau))$ подадим на вход системы управления на промежутке $[\tau, \tau+h[$.

Шаг пятый: Положим $\tau = \tau + h$. При $\tau < t_f$ вернуться к шагу 2.

По итогу мы привели основные сведения о современных подходах в теории управления динамическими системами. Обсудили принцип управления в режиме реального времени, а также обсудили обсудили основанную на принципе управления в режиме реального времени реализацию оптимальной обратной связи в режиме реального времени.Ко всему прочему описали алгоритм работы оптимального регулятора.

ГЛАВА 2

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПО НЕПОЛНЫМ И НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

В данной главе формулируется задача оптимального гарантированного управления для линейной нестационарной системы с неизвестным начальным состоянием. Указаны цели управления и приводятся основные понятия и определения.

2.1 Постановка задачи

На промежутке времени $T = [t_0, t_f]$, рассмотрим линейную нестационарную систему управления с возмущением:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \; x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $t \in T$
$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы (2.1) в момент времени t;
$u = u(t) \in \mathbb{U}^r$ — значение управляющего воздействия в момент t;
$U \subseteq \mathbb{R}^r$ — ограниченное множество его доступных значений
$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ — заданные кусочно-непрерывные матричные и векторная функции.

Начальное состояние $x(t_0) = x_0$ динамической системы (2.1) считается неизвестным. Однако известна некоторая простая оценка начального состояния. Эта оценка задается включением

$$x(t_0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n.$$

Определение 2.1 Множество возможных значений начального состояния $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ называется априорным распределением начального состояния.

Как правило, X_0 — некоторое простое множество, например параллелепипед: $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_* \leq x \leq x*\}$.

Недетерминированной системе (2.1) соответствует детерминированная система вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = 0, \tag{2.2}$$

которая в некоторой литературе также называется номинальной системой.

Управление системой будем осуществлять с помощью дискретных управлений с периодом квантования h (см. главу 1).

Обозначим цели управления. Таких целей будет две:

1) перевод системы (2.1) с гарантией на заданное терминальное множество

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i' x \le g_i,\ i = \overline{1, m}\};$$

2) минимизация гарантированного значения терминального критерия качества

$$h_0' x(t_f).$$

Здесь термин "с гарантией" означает что включение $x(t_f) \in S$ должно выполняться для любых возможных в силу неопределённости терминальных состояний системы (2.1).

Пусть, как и ранее, $x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot))$ — траектория системы (2.1), стартующая в момент t_0 из начального состояния $x_0 \in X_0$ под действием управления $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$.

Перевод системы (2.1) на терминальное множество S с гарантией означает выполнение условия

$$x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot)) \in S,\ \forall\ x_0 \in X_0. \tag{2.3}$$

Под "гарантированным значением" критерия качества понимается минимальное значение терминального функционала $h_0' x(t_f)$ при наихудшей реализации неопределённости (начального состояния):

$$J(u \mid t_0, X_0) = \max_{x_0 \in X_0} h_0' x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot));$$

$$J(t_0, X_0) = \min_u J(u \mid t_0, X_0) = \min_u \max_{x_0 \in X_0} h_0' x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot)).$$

Значение $J(t_0, X_0)$ дает априорную оценку качества управления системой (2.1).

2.2 Оптимальная гарантирующая программа

До начала процесса управления мы обладаем только информацией о априорной оценке начального состояния — множестве X_0. На её основе можно спрогнозировать поведение системы в будущем и предложить оптимальную (априорную) программу $u^0(\cdot) = u^0(\cdot \mid t_0, X_0)$, выполняющую цель управления.

Определение 2.2 Управление $u(t) \in U$, $t \in [t_0, t_f]$, называется (априорной) программой, если на нем выполняется условие (2.3). Программа $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, — оптимальная, если

$$J(u^0 \mid t_0, X_0) = \min J(u \mid t_0, X_0),$$

где минимум ищется среди всех программ.

Априорная неопределённость начального состояния X_0 порождает неопределённость движения рассматриваемого динамического объекта, которую при заданной функции управления $u(\cdot)$ можно описать с помощью формулы Коши:

$$X(t) = F(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta,$$

где $F(t, \vartheta)$ — фундаментальная матрица однородного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$, $t \in T$.

В любой момент времени $t \in T$ текущее состояние системы (2.1) содержится в множестве $X(t) \subset \mathbb{R}^n$ и никакое $x \notin X(t)$ не может быть достигнуто в данной системе.

Переформулируем теперь цели управления:

1) выполнение включения
$$X(t_f) \subset S,$$

2) минимизация по u гарантированного значения критерия качества

$$J(u \mid t_0, X_0) = \max_{x \in X(t_f)} h_0' x.$$

Определение 2.3 Дискретная функция $u(\cdot)$, удовлетворяющая ограничению $u(t) \in U$, $t \in T$, называется гарантирующей программой (программным гарантирующим управляющим воздействием), если выполняется включение $X(t_f) \subset S$.

Определение 2.4 Оптимальная гарантирующая программа $u(\cdot)$ — такая гарантирующая программа, на которой критерий качества достигает минимального значения

$$J(u^0) = \min_u J(u \mid t_0, X_0),$$

где минимум ищется среди всех гарантирующих программ, определенных согласно определению 2.3.

Рассмотрим i-ое терминальное ограничение $h_i' x(t_f) \leq g_i$. При заданном управлении $u(\cdot)$ оно будет выполняться при всех $x_0 \in X_0$ тогда и только тогда,когда

$$\max_{x_0 \in X_0} h_i' x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot)) \leq g_i, \tag{2.4}$$

т.е. при выполнении неравенства

$$\max_{x_0 \in X_0} h_i' F(t_f, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_f} h_i' F(t_f, \vartheta) B(\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \leq g_i. \tag{2.5}$$

Введём обозначения:

$$g_i(t_0) = g_i - \max_{x_0 \in X_0} h_i F(t_f, t_0) x_0, i = \overline{1, m}. \tag{2.6}$$

Тогда (2.5) примет вид:

$$\int_{t_0}^{t_f} h_i' F(t_f, \vartheta) B(\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \leq g_i(t_0). \tag{2.7}$$

Условие (2.7) допустимости управления $u(\cdot)$ можно сформулировать в динамической форме: для того, чтобы управления было программой необходимо и достаточно, чтобы оно переводило в момент детерминированную систему

$$\dot{x_0} = A(t)x + B(t)u, \ x(t_0) = 0, \tag{2.8}$$

на множество $S(t_0) = x \in \mathbb{R}^n : h_i' x \leq g(t_0), i = \overline{1, m}$

Качество априорной программы $u(\cdot)$ оценивается значением

$$J(u \mid t_0, X_0) = \max_{x_0 \in X_0} h_0' x(t_f \mid t_0, x_0, u(\cdot)) \tag{2.9}$$

Тогда

$$J(u \mid t_0, X_0) = \max_{x_0 \in X_0} h_0' F(t_f, t_0) x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_f} h_0' F(t_f, \vartheta) B(\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \tag{2.10}$$

Следовательно, оптимальная программа $u^0(t), t \in [t_0, t_f]$, является решением задачи

$$h_0' x_0(t_f) \to \min, \tag{2.11}$$

$$\dot{x_0} = A(t)x_0 + B(t)u,\ x_0(t_0) = 0,$$

$$x_0(t_f) \in S(t_0), u(t) \in U, t \in [t_0, t_f],$$

при этом

$$J(u_0 \mid t_0, X_0) = \max_{x_0 \in X_0} h_0' F(t_f, t_0) x_0 + h_0' x_0(t_f)$$

где $x_0^0(\cdot)$— оптимальная траектория задачи (2.11)

Далее будем предполагать, что оптимальная априорная программа $u^0(\cdot)$ существует.

Стоит заметить, что оптимальная априорная программа сильно недооценивает потенциал управляемой системы и даёт очень консервативные оценки критерия качества.

По итогу мы сформулировали задачу оптимального гарантированного управления для линейной нестационарной системы с неизвестным начальным состоянием. Указали цели управления, а так же привели основные понятия и определения для работы с этой задачей.

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На примере разберём нахождение априорной программы и соответствующих траекторий.

В качестве пример возьмём задачу оптимального управления половинной моделью автомобиля с неточным измерениям их выходных сигналов.

Уравнение Математической модели имеет вид:

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\varphi - u_1 + u_2 + \omega_1 \tag{3.1}$$

$$J\ddot{\varphi} = (k_1 l_1 - k_2 l_2)x - (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\varphi + l_1 u_1 + l_2 u_2 + \omega_2$$

где:
$x = x(t)$ — смещение центра тяжести относительно положения равновесия.
$\varphi = \varphi(t)$—угловое отклонение от положения равновесия.
m—масса.
J — момент инерции
$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$—значения управляющих воздействий, прилагаемых к балке в точках опоры.
l_1, l_2— расстояния от опор до центра тяжести.
k_1, k_2— коэффициенты упругости пружин.

3.1 Постановка задачи

Систему (3.1) будем рассматривать на промежутке $T = [0, 15]$ при следующих значениях параметров: $m = 1$, $l_1 = 1.1$, $l_2 = 1.9$, $k_1 = 1.1$, $k_2 = 1$, $J = m(l_1 + l_2)^2/12 = 9/12$. Считаем, что заданы ее начальные состояния $(0) = 0.1$, $\varphi(0) = 0$, а скорости $\dot{x}(0)$, $\dot{\varphi}(0)$ могут принимать значения z_1, z_2 : $\dot{x}(0) = z_1$, $\dot{\varphi}(0) = z_2$, где возьмём следующие $z_1 = -0.1$ и $z_2 = 0.33$.

Подставив все эти значения в нашу систему (3.1) получим следующее:

$$\ddot{x} = -2.1x - 0.69\varphi - u_1 + u_2 + \omega_1 \tag{3.2}$$

$$\ddot{\varphi} = -0.92x - 4.308\varphi + 1.46u_1 + 2.533u_2 + 1.33\omega_2$$

Теперь сделаем следующие замены

$$\begin{cases} x = x_1, \\ \dot{x} = x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_1, \\ \dot{\varphi} = \varphi_2, \end{cases}$$

Получим следующую систему 4-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -2.1x - 0.69\varphi - u_1 - u_2 \\ \dot{\varphi_1} = \varphi_2 \\ \dot{\varphi_2} = -0.92x - 4.308\varphi - 1.46u_1 + 2.533u_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Отсюда получаем что матрицы A и B будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.1 & 0 & 0.69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.92 & 0 & -4.308 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1.1 & 1.9 \end{pmatrix}$$

3.2 Построение априорной программы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача оптимального управления половинной моделью автомобиля с неточным измерениям их выходных сигналов,которую требуется за конечное время перевести с гарантией на заданное терминальное множество.

Рассмотрены подходы к решению поставленной задачи. Продемонстрированы результаты.

Реализован метод построения априорной программы в пакете Matlab. Проведены численные эксперименты

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.

2 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.

3 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.

4 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени //Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.

5 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.

6 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.

7 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института матема-тики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.

8 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

9 Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов [и др]. – Минск: Издательство «Четыре четверти», 2011. – 472 с.