

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова, Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2004, том 10, номер 2, 35–57

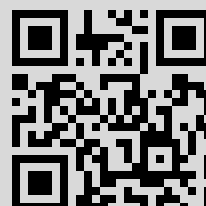
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 134.17.36.144

7 марта 2020 г., 14:30:50



УДК 517.977

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ИХ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ<sup>1</sup>****Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова**

Исследуется терминальная задача оптимального управления линейной системой в условиях множественной неопределенности. Предполагается, что начальное состояние системы известно с ограниченной точностью, на систему действуют неизвестные возмущения и в процессе управления поступает несовершенная информация о поведении системы. Описывается метод оптимального гарантирующего управления в реальном времени, согласно которому по ходу процесса по текущей информации вычисляются оценки неизвестных параметров и по ним вырабатываются текущие управляющие воздействия. В основу метода положены быстрые алгоритмы решения двух полубольших экстремальных линейных задач. Для систем с большой неопределенностью приводится обобщение метода, состоящее из двух стадий, первая из которых нацелена на достижение допустимости управления, вторая — на обеспечение его оптимальности. Результаты иллюстрируются на примере оптимального управления системой четвертого порядка.

**Введение**

Теория оптимального управления возникла в классической теории управления из инженерных задач синтеза оптимальных автоматических систем [1]. На ее развитие большое влияние оказали Л.С. Понтрягин, Н.Н. Красовский, Р. Беллман. На протяжении всей истории развития теории управления ее центральной задачей была стабилизация динамических систем. Инженеры решали эту задачу с помощью разнообразных обратных связей по выходу. Построение подобных связей для задач оптимального управления оказалось чрезвычайно трудным делом, из-за чего первые оптимальные системы второго порядка были синтезированы на базе более простых оптимальных обратных связей по состоянию. С усложнением объектов управления и с ужесточением требований к системам управления неуклонно растет размерность используемых математических моделей. При этом у их физических прототипов часто не доступны измерению некоторые фазовые переменные, а доступные измеряются с ограниченной точностью. В этой ситуации приходится переходить от обратных связей по состоянию к обратным связям по неточным измерениям выходных сигналов.

В теории управления обратные связи используются для синтеза автоматических систем, реализующих классический принцип управления по замкнутому контуру. Теория и алгоритмы синтеза управлений в условиях множественной неопределенности и неполноты информации являются предметом исследований научной школы Н.Н. Красовского. Основным препятствием при реализации алгоритмов синтеза в конкретных системах является большая вычислительная сложность алгоритмов, требующая во многих случаях предварительного расчета оптимальных обратных связей<sup>2</sup>. Новый принцип (управление в реальном времени) возник как один из результатов современной научно-технической революции. Он не требует конструирования обратных связей заранее, а ориентируется на вычисление их текущих значений с помо-

<sup>1</sup>Работа частично финансируется Государственной программой фундаментальных исследований НАН Беларуси (Математические структуры 16) и Государственной программой прикладных исследований (проект ОЭИ-23).

<sup>2</sup>В работе не обсуждаются результаты по линейно-квадратичной задаче Летова — Калмана и другим задачам, которые из-за игнорирования геометрических ограничений на управляющие воздействия не выходят за рамки классического вариационного исчисления и линейных обратных связей.

щью существующих вычислительных устройств в процессе управления. Внедрение принципа управления в реальном времени в системы оптимального управления сдерживалось отсутствием быстрых алгоритмов вычисления оптимальных программ. Один подход к решению этой проблемы в случае оптимальных обратных связей по состоянию был предложен в [2] и развит в [3].

Цель данной работы — обобщить метод [2] на задачи оптимального управления многомерными системами с множественной неопределенностью по неточным измерениям их выходных сигналов. В основе обобщения лежат быстрые алгоритмы решения двух специальных экстремальных задач: задачи оптимального наблюдения и задачи оптимального управления по оценкам, полученным в результате решения первой задачи.

## 1. Оптимальные обратные связи по неточным измерениям выходных сигналов

Рассмотрим линейную динамическую систему и линейное безынерционное измерительное устройство, которые функционируют на промежутке времени  $T = [t_*, t^*]$  с неизвестным начальным состоянием динамической системы из ограниченного множества  $X_0$  под действием ограниченных кусочно-непрерывных возмущений. Их математические модели будем строить в виде соотношений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + M(t)w, \quad (1.1)$$

$$y = C(t)x + \xi. \quad (1.2)$$

Здесь  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $M(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $t \in T$ , — кусочно-непрерывные матричные функции,  $x = x(t)$  —  $n$ -вектор состояния математической модели в момент времени  $t$ ;  $u = u(t) \in U$  — значение  $r$ -мерного дискретного<sup>3</sup> управляющего воздействия с периодом квантования  $h = (t^* - t_*)/N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ),  $U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_* \leq u \leq u^*\}$  — ограниченное множество доступных значений управления;  $w = w(t)$ ,  $t \in T$ , — конечнопараметрическая функция возмущения:

$$w(t) = \sum_{l \in L} \lambda_l(t) v_l = \Lambda(t)v, \quad t \in T,$$

где  $\lambda_l(t)$ ,  $l \in L = \{1, 2, \dots, n_v\}$ , — известные кусочно-непрерывные  $n_w$ -вектор-функции,  $\Lambda(t) = (\lambda_l(t), l \in L)$ ;  $v = (v_l, l \in L)$  —  $n_v$ -вектор неизвестных параметров возмущения с ограниченным множеством возможных значений  $V = \{v \in \mathbb{R}^{n_v} : w_* \leq v \leq w^*\}$ ;  $y = y(t)$  —  $q$ -вектор значений выходного сигнала измерительного устройства;  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , — дискретная (с периодом квантования  $h$ )  $q$ -вектор-функция ошибок измерительного устройства, удовлетворяющая неравенствам

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}; \quad \|\xi^* - \xi_*\| < \infty.$$

Пусть  $\bar{Y}(t|x_0, u(\cdot))$  — множество возможных выходных сигналов измерительного устройства физической системы в момент времени  $t$ , соответствующее фиксированному начальному состоянию  $x_0$ , управлению  $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$  и всевозможным возмущениям, действующим на физические системы в процессе управления и измерения;  $Y(t|x_0, u(\cdot))$  — множество выходных сигналов математической модели (1.2) при тех же условиях.

Будем говорить, что соотношения (1.1), (1.2) являются моделями физических систем управления и измерения, если для всех возможных  $x_0$ ,  $u(\cdot)$  выполняется соотношение

$$\bar{Y}(t|x_0, u(\cdot)) \subset Y(t|x_0, u(\cdot)), \quad t \in T_h. \quad (1.3)$$

<sup>3</sup>Функция  $u(t)$ ,  $t \in T$ , называется дискретной с периодом квантования  $h$ , если  $u(t) \equiv u(\tau)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$ .

Точность математических моделей определяется числом

$$\max_{t \in T_h} \max_{x_0, u(\cdot)} \beta(Y(t|x_0, u(\cdot)), \bar{Y}(t|x_0, u(\cdot))),$$

где  $\beta(Y_1, Y_2) = \sup_{y_1 \in Y_1} \inf_{y_2 \in Y_2} \rho(y_1, y_2)$  — полуотклонение по Хаусдорфу первого множества от второго.

Далее считается, что упомянутое выше множество  $X_0$  начальных состояний физической системы и модели (1.1) представимо в виде

$$X_0 = x_0 + GZ,$$

где  $x_0$  — известный  $n$ -вектор,  $G$  —  $n \times n_z$ -матрица;  $Z = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : d_* \leq z \leq d^*\}$  — множество неизвестных параметров  $z$  начального состояния  $x(t_*)$ . Множество  $Z$  вместе с  $V$  характеризует априорную неопределенность<sup>4</sup> в поведении системы (1.1).

Таким образом, в процессе управления состояния  $\bar{x}(t)$ ,  $t \in T$ , физической системы не доступны точному измерению, а для управления используются сигналы измерительного устройства<sup>5</sup>, каждый сигнал которого, в силу свойства (1.3), может быть получен при измерении устройством (1.2) в рамках математической модели (1.1).

Дискретное управление системой (1.1) по классическому принципу замкнутого контура осуществляется следующим образом. В начальный момент  $t = t_*$  поступает сигнал  $y(t_*)$  измерительного устройства (1.2), порожденный реализовавшимися начальным состоянием  $x(t_*)$  и ошибкой измерения  $\xi(t_*)$ . По сигналу  $y(t_*)$ , следуя заранее (до начала процесса управления) составленным правилам, выберем вектор  $u(t_*) = u(t_*, y(t_*)) \in U$  и подадим в систему (1.1) управляющее воздействие  $u(t) \equiv u(t_*)$ ,  $t \in [t_*, t_* + h[$ . Оно вместе с реализовавшимся возмущением  $w(t)$ ,  $t \in [t_*, t_* + h[$ , переведет систему (1.1) в состояние  $x(t_* + h)$ , которое в совокупности с реализовавшейся ошибкой  $\xi(t_* + h)$  приведет к сигналу  $y(t_* + h)$ . Продолжая этот процесс, в произвольный момент  $\tau \in T_h$ , получив измерение  $y(\tau)$ , выберем вектор  $u(\tau) = u(\tau, y_\tau(\cdot)) \in U$  и подадим в систему (1.1) управляющее воздействие  $u(t) \equiv u(\tau)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h[$ . Здесь  $y_\tau(\cdot) = (y(t), t \in T_h(\tau))$ ,  $T_h(\tau) = \{t_*, t_* + h, \dots, \tau\}$ .

Если через  $Y_\tau$  обозначить набор всех сигналов  $y_\tau(\cdot)$  измерительного устройства (1.2), которые можно получить к моменту  $\tau$ , то в результате операций, аналогичных использованным в описанном процессе управления, будем иметь векторный функционал

$$u = u(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad y_\tau(\cdot) \in Y_\tau, \quad \tau \in T_h. \quad (1.4)$$

Назовем его и порожденные им управляющие воздействия (дискретной) обратной связью по неточным измерениям выходного сигнала (по неточному выходу).

Траектория  $x(t) = x(t|u(t, y_t(\cdot)))$ ,  $t \in T$ , системы (1.1), полученная в результате описанного процесса управления, является одной из траекторий замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t, y_t(\cdot)) + M(t)w. \quad (1.5)$$

Пусть  $X(t|u(t, y_t(\cdot)))$ ,  $t \in T$ , — семейство всех траекторий уравнения (1.5), которые могут быть порождены всеми возможными начальными состояниями  $x(t_*)$  и возмущениями  $w(t)$ ,  $t \in T$ , и которые вместе с возможными ошибками измерения  $\xi(t)$ ,  $t \in T_h$ , приводят к сигналам  $y(t)$ ,  $t \in T_h$ .

<sup>4</sup>В работе рассматривается только множественная модель неопределенности и связанные с ней задачи оптимального наблюдения и управления с гарантией. С результатами по стохастической теории фильтрации и управления, базирующейся на вероятностной модели неопределенности, можно ознакомиться по обзорам [4].

<sup>5</sup>Ситуация, когда уравнение измерительного устройства имеет вид  $y = C(t)x + R(t)\xi$ , а ограничения на  $u$ ,  $z$   $v$ ,  $\xi(t)$ ,  $t \in T_h$ , задаются с помощью полиэдров, не вносит принципиальных изменений в последующие рассуждения и операции.

Обратную связь (1.4) будем называть допустимой, если на ней выполняется включение

$$X(t^*|u(t^*, y_{t^*}(\cdot))) \subset X^*, \quad (1.6)$$

где  $X^*$  — заданное терминальное множество:  $X^* = \{x \in \mathbb{R}^n: g_* \leq Hx \leq g^*\}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $g_*, g^* \in \mathbb{R}^m$ ,  $g_* < g^*$ .

Свойство (1.6) означает, что допустимое управляющее воздействие  $u(\tau, y_\tau(\cdot))$ ,  $y_\tau(\cdot) \in Y_\tau$ ,  $\tau \in T_h$ , с гарантией (при всех возможных  $z, v, \xi(t)$ ,  $t \in T_h$ ) переводит систему (1.1) в момент  $t^*$  на терминальное множество  $X^*$ .

Качество допустимой обратной связи (1.4) оценим по значениям естественного для данной модели неопределенности функционала

$$J(u) = \min c'x, \quad x \in X(t^*|u(t^*, y_{t^*}(\cdot))),$$

где  $c \in \mathbb{R}^n$  — заданный вектор.

Оптимальной обратной связью по неточным измерениям выходного сигнала называется такая допустимая обратная связь  $u^0(\tau, y_\tau(\cdot))$ ,  $y_\tau(\cdot) \in Y_\tau$ ,  $\tau \in T_h$ , что

$$J(u^0) = \max J(u),$$

где максимум вычисляется по всем допустимым обратным связям (1.4).

Согласно приведенному определению, оптимальная обратная связь дает наилучший результат управления при наихудших условиях (оптимальный гарантированный результат). Задача синтеза оптимальной системы в классической постановке заключается в построении оптимальной обратной связи  $u^0(t, y_t(\cdot))$ ,  $y_t(\cdot) \in Y_t$ ,  $t \in T_h$ . Система управления с оптимальной обратной связью по неточным измерениям выходных сигналов изображена на рис. 1.

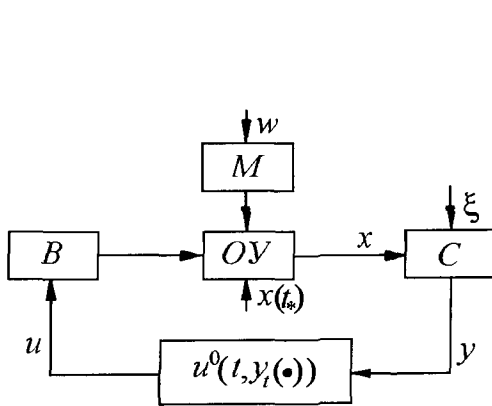


Рис. 1

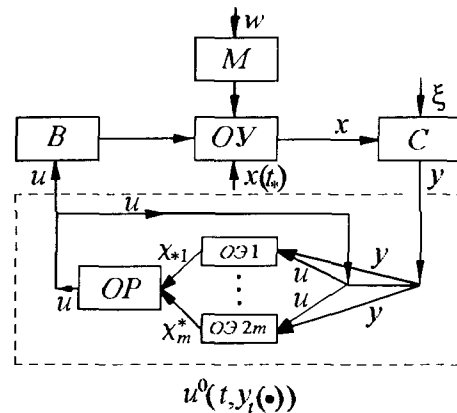


Рис. 2

Оптимальная обратная связь по неточным измерениям выходного сигнала является обобщением классической оптимальной обратной связи по состоянию, которая строится по детерминированной модели ( $z = 0$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$ ) в предположении, что в процессе управления производятся точные измерения текущих состояний системы (1.1) ( $C(t) \equiv E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\xi(t) \equiv 0$ ,  $t \in T_h$ ).

Как видно из приведенного описания, классический принцип оптимального управления по замкнутому контуру требует построения оптимальной обратной связи до начала процесса управления. Решение этой задачи позволяет после замыкания системы (1.1) оптимальной обратной связью получить оптимальную автоматическую систему управления, т.е. решить

задачу, поставленную инженерами в конце 40-х гг. XX в. Поскольку до сих пор проблему оптимального управления по замкнутому контуру не удается решить даже для оптимальных обратных связей по состоянию, то перейдем к другому (современному) принципу управления — оптимальному управлению в реальном времени.

## 2. Оптимальное управление в реальном времени

Оптимальное управление в реальном времени по неточным измерениям выходных сигналов опишем для одного специального типа обратных связей  $u^{00}(\tau, y_\tau(\cdot))$ ,  $y_\tau(\cdot) \in Y_\tau$ ,  $\tau \in T_h$ .

До начала процесса управления в классе дискретных управлений по априорной информации строится оптимальная программа  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ . При этом затраты времени не играют существенной роли.

Процесс управления начинается с момента  $t = t_*$ , когда поступает первое измерение  $y^*(t_*)$ . По этому измерению за время  $s(t_*) < h$  вычисляется управляющий сигнал  $u^*(t_*) = u^{00}(t_*, y_{t_*}^*(\cdot))$ . На физическую систему управления на промежутке  $[t_*, t_* + s(t_*)]$  подается управляющее воздействие  $u^{**}(t) = u^0(t_*)$ ,  $t \in [t_*, t_* + s(t_*)]$ . Начиная с момента  $t_* + s(t_*)$ , управляющее воздействие имеет вид  $u^{**}(t) = u^*(t_*)$ ,  $t \in [t_* + s(t_*), t_* + h + s(t_* + h)]$ .

Предположим, что проведены измерения  $y^*(t_*)$ ,  $y^*(t_* + h)$ ,  $\dots$ ,  $y^*(\tau - h)$  за время  $s(t_*)$ ,  $s(t_* + h)$ ,  $\dots$ ,  $s(\tau - h)$ , подсчитаны сигналы  $u^*(t_*)$ ,  $u^*(t_* + h)$ ,  $\dots$ ,  $u^*(\tau - h)$  и на систему (1.1) подано управляющее воздействие

$$u^{**}(t) = \begin{cases} u^0(t_*), & t \in [t_*, t_* + s(t_*)], \\ u^*(\theta - h), & t \in [\theta - h + s(\theta - h), \theta + s(\theta)], \quad \theta \in T_h(\tau) \setminus \{t_*, \tau\}, \\ u^*(\tau - h), & t \in [\tau - h + s(\tau - h), \tau]. \end{cases}$$

В момент  $t = \tau$  поступает текущее измерение  $y^*(\tau)$ . Требуется за время<sup>6</sup>  $s(\tau) < h$  вычислить управляющий сигнал  $u^*(\tau) = u^{00}(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ , на основе которого в систему (1.1) будет подано управляющее воздействие  $u^{**}(t) = u^*(\tau)$ ,  $t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)]$ .

Начнем реализацию нового принципа управления с “очистки” сигнала  $y^*(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ , от вклада в него управляющего воздействия  $u^{**}(t)$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ , и известного вектора  $x_0$ :

$$y_0^*(t) = y^*(t) - C(t)x_0^*(t), \quad t \in T_h(\tau).$$

Здесь  $x_0^*(t)$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ , — траектория детерминированной системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  с начальным состоянием  $x(t_*) = x_0$  и управлением  $u(t) \equiv u^{**}(t)$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ .

Сигнал  $y_{0\tau}^*(\cdot)$  совпадает с сигналом, который записало бы к моменту  $\tau$  измерительное устройство (1.2) для системы

$$\dot{x} = A(t)x + M(t)w, \quad x(t_*) = Gz. \quad (2.1)$$

Следуя [5] и имея в виду аналогию с вероятностными распределениями, множества  $Z$  и  $V$  назовем априорными распределениями параметров начального состояния и возмущения соответственно, множество  $\Gamma = Z \times V = (\gamma = (z, v): z \in Z, v \in V)$  — априорным распределением неизвестных параметров системы (1.1). Сигнал  $y_{0\tau}^*(\cdot)$  содержит дополнительную информацию о реализовавшемся параметре  $\gamma^*$ , что позволяет ввести понятие апостериорного распределения параметра  $\gamma$ .

**О п р е д е л е н и е.** Множество  $\hat{\Gamma}(\tau) = \hat{\Gamma}(\tau; y_{0\tau}^*(\cdot))$  называется апостериорным распределением параметра  $\gamma$  системы (2.1) (или (1.1)), соответствующим позиции  $(\tau; y_{0\tau}^*(\cdot))$ , если

<sup>6</sup>В связи с рассматриваемым способом управления возникает новое понятие “решить математическую задачу” — нужно не только найти ее решение, но и получить его вовремя, в режиме реального времени (в том же темпе, в котором меняются условия задачи).

оно состоит из тех и только тех векторов  $\gamma = (z, v) \in \Gamma$ , которым соответствуют начальные состояния  $x(t_*) = Gz$  и возмущения  $w(t) = \Lambda(t)v$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ , способные вместе с некоторыми возможными ошибками измерения  $\xi(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ , породить сигнал  $y_{0\tau}^*(\cdot)$ .

Апостериорное распределение  $\hat{\Gamma}(\tau)$  содержит всю информацию о неизвестных параметрах системы (2.1), соответствующую априорной информации  $\Gamma$  и измерениям  $y_{0\tau}^*(\cdot)$ , полученным к моменту  $\tau$ . Покажем, что для задачи управления п. 1 достаточно иметь лишь некоторые оценки множества  $\hat{\Gamma}(\tau)$ .

Управляющее воздействие  $u^\tau(\cdot) = (u(t), t \in [\tau, t^*])$  назовем допустимым программным управлением, если оно вместе с  $u^{**}(t)$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ , переводит систему (1.1) в момент  $t^*$  на терминальное множество  $X^*$  при всех  $\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)$ .

Терминальное ограничение  $h'_{(i)}x(t^*) \leq g_i^*$  ( $h'_{(i)}$  —  $i$ -я строка матрицы  $H$ ,  $g_i^*$  —  $i$ -я компонента вектора  $g^*$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ ) будет выполняться при всех  $\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)$  тогда и только тогда, когда  $\max h'_{(i)}x(t^*) \leq g_i^*$  для всех  $\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)$ , т.е. при выполнении неравенства

$$\max_{\gamma \in \hat{\Gamma}(\tau)} \left( h'_{(i)}F(t^*)z + h'_{(i)}P(t^*)v \right) + \phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g_i^*, \quad (2.2)$$

где  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$  и  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ ,  $t \in T$ , такие, что

$$\begin{aligned} \dot{F} &= A(t)F, & F(t_*) &= G; \\ \dot{P} &= A(t)P + M(t)\Lambda(t), & P(t_*) &= 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\phi_{(i)}(t)$  —  $i$ -я строка матрицы  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $t \in T$ :

$$\dot{\Phi} = -\Phi A(t), \quad \Phi(t^*) = H. \quad (2.4)$$

Введем обозначения:  $p'_{xi} = h'_{(i)}F(t^*)$ ;  $p'_{wi} = h'_{(i)}P(t^*)$ ;  $g_i^*(\tau) = g_i^* - \chi_i^*(\tau)$ ;

$$\chi_i^*(\tau) = \chi_i^*(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \max(p'_{xi}z + p'_{wi}v), \quad (z, v) \in \hat{\Gamma}(\tau). \quad (2.5)$$

Тогда (2.2) примет вид:

$$\phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g_i^*(\tau).$$

Аналогичные рассуждения для ограничения  $g_{i*} \leq h'_{(i)}x(t^*)$  дают

$$g_{i*}(\tau) \leq \phi'_{(i)}(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \phi'_{(i)}(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta,$$

где  $g_{i*}(\tau) = g_{i*} - \chi_{*i}(\tau)$ ,

$$\chi_{*i}(\tau) = \chi_{*i}(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \min(p'_{xi}z + p'_{wi}v), \quad (z, v) \in \hat{\Gamma}(\tau). \quad (2.6)$$

Таким образом, управление  $u^\tau(\cdot)$  допустимо в позиции  $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$g_*(\tau) \leq \Phi(\tau)x_0^*(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \Phi(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \leq g^*(\tau). \quad (2.7)$$

Из приведенных рассуждений следует, что для построения допустимого программного управления  $u^*(\cdot)$  нужно вычислить оценки (2.5), (2.6) для каждого  $i \in I$ . Назовем задачи (2.5), (2.6) задачами оптимального наблюдения, сопровождающими задачу оптимального управления в условиях неопределенности (*сопровождающими задачами оптимального наблюдения*).

Условие (2.7) допустимости управления можно сформулировать в динамической форме: для допустимости управления  $u^*(\cdot)$  в позиции  $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  необходимо и достаточно, чтобы оно переводило в момент  $t^*$  детерминированную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x_0^*(\tau),$$

на множество  $X^*(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: g_*(\tau) \leq Hx \leq g^*(\tau)\}$ .

Качество допустимого программного управления  $u^*(\cdot)$  оценим величиной

$$I(u) = \min c'x(t^*), \quad \gamma \in \hat{\Gamma}(\tau).$$

Обозначим:  $c'_x = c'F(t^*)$ ,  $c'_w = c'P(t^*)$ ;

$$\chi_0(\tau) = \chi_0(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = \min(c'_x z + c'_w v), \quad (z, v) \in \hat{\Gamma}(\tau);$$

$\psi_c(t)$ ,  $t \in T$ , — траектория сопряженного уравнения

$$\dot{\psi}' = -\psi' A(t) \quad (2.8)$$

с начальным условием  $\psi(t^*) = c$ .

Тогда

$$I(u) = \psi'_c(\tau)x_0^*(\tau) + \chi_0(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \psi'_c(\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta.$$

Следовательно, оптимальное программное управление  $u^0(t|\tau, \chi(\tau))$ ,  $t \in [\tau, t^*]$ , для позиции  $(\tau, \chi(\tau))$  ( $\chi(\tau) = (\chi_{*i}(\tau), \chi_i^*(\tau), i \in I)$ ) в расширенном пространстве оценок, соответствующей позиции  $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ , является решением задачи

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x_0^*(\tau), \quad (2.9)$$

$$x(t^*) \in X^*(\tau), \quad u(t) \in U, \quad t \in [\tau, t^*],$$

которую назовем детерминированной задачей оптимального управления, сопровождающей задачу оптимального управления системой (1.1) по неточным измерениям выходного сигнала (*сопровождающей задачей оптимального управления*).

Положим<sup>7</sup>

$$u^*(\tau) = u^{00}(\tau, y_\tau^*(\cdot)) = u^{0*}(\tau, \chi(\tau)) = u^0(\tau|\tau, \chi(\tau)).$$

Закончим описание реализации принципа оптимального управления в реальном времени, положив:  $u^{**}(t) = u^*(\tau - h)$ ,  $t \in [\tau, \tau + s(\tau)]$ ;  $u^{**}(t) = u^*(\tau)$ ,  $t \in [\tau + s(\tau), \tau + h]$ .

Согласно приведенной схеме, для построения управляющего сигнала  $u^*(\tau)$  достаточно решить: (а)  $2m$  сопровождающих задач оптимального наблюдения (2.5), (2.6); (б) одну сопровождающую задачу оптимального управления (2.9).

Орган, решающий сопровождающую задачу оптимального наблюдения, будем называть оптимальными эстиматором; орган, решающий сопровождающую задачу оптимального управления, — оптимальным регулятором. Пусть  $s_{*i}(\tau)$ ,  $s_i^*(\tau)$  — время, за которое  $i$ -й и  $(m+i)$ -й эстиматоры решают  $i$ -ю и  $(m+i)$ -ю сопровождающие задачи оптимального наблюдения,  $s_0(\tau)$

<sup>7</sup>Размерность второго аргумента у обратной связи  $u^{00}(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  равна  $(\tau - t_*)/h$  и стремится к  $\infty$  при  $h \rightarrow 0$ . У обратной связи  $u^{0*}(\tau, \chi(\tau))$  она равна  $2m$ . Вектор  $\chi(\tau)$  — детерминированный аналог достаточных статистик из математической статистики.



— время, которое требуется регулятору для решения сопровождающей задачи оптимального управления. Если выполняется неравенство

$$s(\tau) = \max_{i \in I} \{s_{*i}(\tau), s_i^*(\tau)\} + s_0(\tau) < h, \quad (2.10)$$

то оптимальные эstimаторы и регулятор назовем подходящими. В этом случае можно говорить, что оптимальные эstimаторы и регулятор оптимально управляют в реальном времени физической системой управления по неточным измерениям ее выходных сигналов.

При малых  $h$  и заметных  $n$  для обеспечения неравенства (2.10) требуются очень мощные временные процессоры и большой объем оперативной памяти, если решать задачи (2.5), (2.6), (2.9) известными методами как самостоятельные. Учитывая динамический характер процесса управления, разумно перейти к другой схеме управления.

До начала процесса управления оптимальные эstimаторы решают задачи

$$\begin{aligned} \chi_{*i}(t_* - 0) &= \min(p'_{xi}z + p'_{wi}v), & \chi_i^*(t_* - 0) &= \max(p'_{xi}z + p'_{wi}v), \\ z &\in Z, & v &\in V, & i &\in I; \end{aligned} \quad (2.11)$$

а оптимальный регулятор — задачу

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, & \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, & x(t_*) &= x_0, \\ x(t^*) &\in X^*(t_* - 0), & u(t) &\in U, & t &\in [\tau, t^*]; \end{aligned} \quad (2.12)$$

составленные по априорной информации, и сохраняют результат их решения. Затраты времени и объем оперативной памяти при этом несущественны.

Для решения задач (2.5), (2.6), (2.9) в произвольный момент  $\tau$  используются результаты, полученные в предыдущий момент  $\tau - h$ . Таким образом, согласно этой схеме, проблема оптимального управления в реальном времени сводится к быстрой коррекции решений задач (2.5), (2.6), (2.9) в процессе управления. В пп. 3, 4 предлагается один тип быстрых алгоритмов их решения.

В заключение пункта отметим, что в приведенной схеме оптимальные эstimаторы работают параллельно, а оптимальный регулятор начинает работу после решения всех задач оптимального наблюдения, т.е. по отношению к эstimаторам работает последовательно. Для оптимального управления в реальном времени можно использовать другую схему параллельной работы эstimаторов и регулятора. На промежутке  $[t_*, t_* + h[$  используется оптимальное программное управление задачи (2.12). В момент  $t_*$  начинают работу только оптимальные эstimаторы, которые подсчитывают оценки  $\chi_{*i}(t_*)$ ,  $\chi_i^*(t_*)$ ,  $i \in I$ . По завершении работы всех эstimаторов в момент  $t_* + \max_{i \in I} s_i(t_*)$  в работу включается оптимальный регулятор, который вычисляет управляющий сигнал  $u^*(t_* + h)$ , решив задачу

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, & \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, & x(t_* + h) &= x_0^*(t_* + h), \\ x(t^*) &\in X^*(t_*), & u(t) &\in U, & t &\in [t_* + h, t^*]. \end{aligned}$$

В результате, оптимальный регулятор на один период квантования  $h$  отстает от эstimаторов. В произвольный момент  $\tau \in T_h$  работа эstimаторов и регулятора аналогична. В новой схеме для оптимального управления в реальном времени достаточно, чтобы быстроедействие оптимальных эstimаторов и регулятора удовлетворяло неравенству  $s(\tau) = \max\{\max_{i \in I} s_i(\tau), s_0(\tau)\} < h$ . Схема системы оптимального управления в реальном времени изображена на рис. 2.

### 3. Алгоритм работы оптимального эstimатора

Алгоритм работы оптимальных эstimаторов изложим на примере задачи

$$\chi^* = \max(p'_x z + p'_w v), \quad (z, v) \in \hat{\Gamma}(\tau), \quad (3.1)$$

которая включает в себя сопровождающие задачи оптимального наблюдения (2.5), (2.6).

Запишем задачу (3.1) в эквивалентной функциональной форме

$$\chi^* = p'_x z^0 + p'_w v^0 = \max(p'_x z + p'_w v), \quad (3.2)$$

$$\xi_* \leq y_0^*(t) - C(t)F(t)z - C(t)P(t)v \leq \xi^*, \quad t \in T_h(\tau); \quad d_* \leq z \leq d^*, \quad w_* \leq v \leq w^*.$$

Задача (3.2) представляет интервальную задачу линейного программирования [6]. У нее  $(\tau - t_*)/h + 1$  основных ограничений и  $n_z + n_v$  переменных. При  $h \rightarrow 0$  количество основных ограничений стремится к бесконечности. Поэтому задачу (3.2) можно назвать полубольшой экстремальной задачей. Методы решения подобных задач приведены в [8]. Излагаемый далее двойственный метод решения задачи (3.2) является динамической реализацией двойственного адаптивного метода [6], в котором максимально учитывается динамическая природа задачи (3.2).

Основным инструментом двойственного метода решения задачи (3.1) является опора — такая тройка  $K_b = K_b(\tau) = \{Q_b; J_b, L_b\}$ ,  $Q_b \subset Q = K \times T_h(\tau)$ ,  $K = \{1, 2, \dots, q\}$ ;  $J_b \subset J = \{1, 2, \dots, n_z\}$ ,  $L_b \subset L$ ,  $|Q_b| = |J_b| + |L_b|$ , что в случае непустых множеств  $Q_b$ ,  $J_b$ ,  $L_b$  невырождена матрица  $(D_b, H_b)$ :

$$D_b = \begin{pmatrix} -c'_{(k)}(t)f_j(t), & j \in J_b \\ \{k, t\} \in Q_b \end{pmatrix}, \quad H_b = \begin{pmatrix} -c'_{(k)}(t)p_l(t), & l \in L_b \\ \{k, t\} \in Q_b \end{pmatrix},$$

$c_{(k)}(t)$  —  $k$ -я строка матрицы  $C(t)$ ;  $f_j(t)$  —  $j$ -й столбец матрицы  $F(t)$ ;  $p_l(t)$  —  $l$ -й столбец матрицы  $P(t)$ .

Если множества  $Q_b, J_b, L_b$  пусты, то  $K_b$  — пустая опора по определению.

Наряду с опорой  $K_b$  используются сопровождающие ее элементы:

(1) Функция потенциалов  $\nu(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $t \in T_h(\tau)$ :

$$\nu_k(t) = 0, \quad \{k, t\} \in Q_n = Q \setminus Q_b;$$

$\nu_b = (\nu_k(t), \{k, t\} \in Q_b)$  — решение уравнения

$$\nu'_b D_b = p'_{xb}, \quad \nu'_b H_b = p'_{wb}; \quad p_{xb} = (p_{xj}, j \in J_b), \quad p_{wb} = (p_{wl}, l \in L_b);$$

$(\nu(t) = 0, t \in T_h(\tau), \text{ если } K_b = \emptyset)$ .

(2) Векторы оценок

$$\delta'_x = p'_x + \sum_{t \in T_h(\tau)} \nu'(t)C(t)F(t), \quad \delta'_w = p'_w + \sum_{t \in T_h(\tau)} \nu'(t)C(t)P(t).$$

Опорные компоненты векторов оценок равны нулю:  $\delta_{xj} = 0, j \in J_b$ ;  $\delta_{wl} = 0, l \in L_b$ .

(3) Вектор псевдопараметров начального состояния  $\varkappa$  и вектор псевдопараметров возмущения  $\omega$ . Неопорные компоненты  $\varkappa_j, j \in J_n = J \setminus J_b$ ;  $\omega_l, l \in L_n = L \setminus L_b$ , равны

$$\varkappa_j = d_{*j}, \text{ если } \delta_{xj} < 0; \quad \varkappa_j = d_j^*, \text{ если } \delta_{xj} > 0; \quad \varkappa_j \in [d_{*j}, d_j^*], \text{ если } \delta_{xj} = 0; \quad j \in J_n;$$

$$\omega_l = w_{*l}, \text{ если } \delta_{wl} < 0; \quad \omega_l = w_l^*, \text{ если } \delta_{wl} > 0; \quad \omega_l \in [w_{*l}, w_l^*], \text{ если } \delta_{wl} = 0; \quad l \in L_n.$$

Опорные компоненты  $\varkappa_b = (\varkappa_j, j \in J_b)$ ,  $\omega_b = (\omega_l, l \in L_b)$  — решение уравнения

$$D_b \varkappa_b + H_b \omega_b = (\zeta_k(t) - y_{0k}^*(t) + c'_{(k)}(t)F(t)\varkappa_0 + c'_{(k)}(t)P(t)\omega_0, \{k, t\} \in Q_b),$$

где

$$\varkappa_0 = (\varkappa_{0j} = 0, j \in J_b; \varkappa_{0j} = \varkappa_j, j \in J_n); \quad \omega_0 = (\omega_{0l} = 0, l \in L_b; \omega_{0l} = \omega_l, l \in L_n);$$

$$\zeta_k(t) = \xi_{*k}, \text{ если } \nu_k(t) < 0; \quad \zeta_k(t) = \xi_k^*, \text{ если } \nu_k(t) > 0;$$

$$\zeta_k(t) \in [\xi_{*k}, \xi_k^*], \text{ если } \nu_k(t) = 0; \quad \{k, t\} \in Q_b.$$

(4) Функция псевдоошибок

$$\zeta(t) = y_0^*(t) - C(t)F(t)\varkappa - C(t)P(t)\omega, \quad t \in T_h(\tau).$$

**О п р е д е л е н и е.** Опора  $K_b$  называется оптимальной, если на некоторых сопровождающих ее элементах выполняются неравенства

$$d_{*j} \leq \varkappa_j \leq d_j^*, \quad j \in J_b; \quad w_{*l} \leq \omega_l \leq w_l^*, \quad l \in L_b; \quad \xi_{*k} \leq \zeta_k(t) \leq \xi_k^*, \quad \{k, t\} \in Q_n.$$

Решение задачи (3.1) записывается так:  $z^0 = \varkappa$ ,  $v^0 = \omega$ ;  $\chi^* = p'_x \varkappa + p'_w \omega$ .

Оптимальная опора  $K_b^0 = K_b^0(\tau)$  задачи наблюдения (3.1) строится итеративно. В качестве начальной опоры при решении задач (2.5), (2.6) для момента  $\tau \in T_h$  берется оптимальная опора  $K_b^0(\tau - h)$ , построенная в предыдущий момент  $\tau - h$  (при  $\tau = t_*$  берем пустую опору  $K^0(t_* - 0) = \emptyset$ , которая оптимальна в задачах (2.11)).

Итерация представляет замену “старой” опоры  $K_b$  на “новую”  $\bar{K}_b$ , при которой выполняется неравенство  $p'_x \bar{\varkappa} + p'_w \bar{\omega} \leq p'_x \varkappa + p'_w \omega$ . Будем считать, что в итерациях метода участвуют только регулярные опоры  $K_b$ :  $\nu_k(t) \neq 0$ ,  $\{k, t\} \in Q_b$ ;  $\delta_{xj} \neq 0$ ,  $j \in J_b$ ,  $\delta_{wl} \neq 0$ ,  $l \in L_b$  (общий случай изложен в [8]). Ниже описываются основные операции двойственного метода [8].

Момент  $t \in T_h(\tau) \setminus \{t_*, \tau\}$  будем называть точкой минимума  $k$ -й компоненты функции псевдоошибок  $\zeta_k(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ , если  $\zeta_k(t) < \zeta_k(t-h)$  и  $\zeta_k(t) < \zeta_k(t+h)$ ; точкой максимума, если  $\zeta_k(t) > \zeta_k(t-h)$  и  $\zeta_k(t) > \zeta_k(t+h)$ . Множество всех точек экстремума  $k$ -й компоненты  $\zeta_k(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ , обозначим через  $T_k^0$ .

Пусть к началу каждой итерации в памяти ЭВМ хранится информация: (а) опора  $K_b$ ; (б) матрицы  $D_{(b)} = (-c'_{(k)}(t)F(t), \{k, t\} \in Q_b)$ ,  $H_{(b)} = (-c'_{(k)}(t)P(t), \{k, t\} \in Q_b)$ ; (с) опорные значения функции потенциалов  $\nu_b$ ; (д) векторы оценок  $\delta_x$ ,  $\delta_w$ ; (е) векторы псевдопараметров  $\varkappa$ ,  $\omega$ ; (ф) множества  $T_k^0$ ,  $k \in K$ ; (г) значения  $F(t)$ ,  $P(t)$ ,  $t \in \bigcup_{k \in K} T_k^0 \cup \{t_*, \tau\}$ .

По этой информации подсчитаем<sup>8</sup>

$$\rho^0(K_b) = \max\{\rho_{j^0}^x, \rho_{l^0}^w, \rho(k^0, t^0)\};$$

$$\rho_{j^0}^x = \max \rho(\varkappa_j, [d_{*j}, d_j^*]), \quad j \in J_b; \quad \rho_{l^0}^w = \max \rho(\omega_l, [w_{*l}, w_l^*]), \quad l \in L_b;$$

$$\rho(k^0, t^0) = \max \rho(\zeta_k(t), [\xi_{*k}, \xi_k^*]), \quad t \in T_k^0 \cup \{t_*, \tau\}, \quad k \in K.$$

Если  $\rho^0(K_b) = 0$ , то  $K_b$  — оптимальная опора. В противном случае, различая ситуации

$$(1) \rho^0(K_b) = \rho_{j^0}^x, \quad (2) \rho^0(K_b) = \rho_{l^0}^w, \quad (3) \rho^0(K_b) = \rho(k^0, t^0),$$

построим вариации функции потенциалов  $\Delta\nu(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ :

$$(1) \Delta\nu_k(t) = 0, \quad \{k, t\} \in Q_n; \quad \Delta\nu'_b D_b = -(\Delta\delta_{xj}, j \in J_b)', \quad \Delta\nu'_b H_b = 0,$$

где  $\Delta\delta_{xj^0} = 1$ , если  $\varkappa_{j^0} > d_{*j^0}$ ;  $\Delta\delta_{xj^0} = -1$ , если  $\varkappa_{j^0} < d_{*j^0}$ ;  $\Delta\delta_{xj} = 0$ ,  $j \in J_b \setminus j^0$ ;

$$(2) \Delta\nu_k(t) = 0, \quad \{k, t\} \in Q_n; \quad \Delta\nu'_b D_b = 0, \quad \Delta\nu'_b H_b = -(\Delta\delta_{wl}, l \in L_b)',$$

где  $\Delta\delta_{wl^0} = 1$ , если  $\omega_{l^0} > w_{*l^0}$ ;  $\Delta\delta_{wl^0} = -1$ , если  $\omega_{l^0} < w_{*l^0}$ ;  $\Delta\delta_{wl} = 0$ ,  $l \in L_b \setminus l^0$ ;

<sup>8</sup> $\rho(c, [a, b])$  — расстояние от числа  $c$  до отрезка  $[a, b]$ .

$$(3) \Delta\nu_k(t) = 0, \quad \{k, t\} \in Q_n \setminus \{k^0, t^0\}; \quad \Delta\nu'_b D_b = \Delta\nu_{k^0}(t^0)(c'_{(k^0)}(t^0)f_j(t^0), j \in J_b)',$$

$$\Delta\nu'_b H_b = \Delta\nu_{k^0}(t^0)(c'_{(k^0)}(t^0)p_l(t^0), l \in L_b)',$$

где  $\Delta\nu_{k^0}(t^0) = 1$ , если  $\zeta_{k^0}(t^0) > \xi_{k^0}^*$ ;  $\Delta\nu_{k^0}(t^0) = -1$ , если  $\zeta_{k^0}(t^0) < \xi_{k^0}^*$  ( $\Delta\nu(t) \equiv 0$ ,  $t \in T_h(\tau)$ , если  $K_b = \emptyset$ ).

Найдем вариации векторов оценок

$$\Delta\delta'_x = \sum_{t \in T_h(\tau)} \Delta\nu'(t)C(t)F(t), \quad \Delta\delta'_w = \sum_{t \in T_h(\tau)} \Delta\nu'(t)C(t)P(t).$$

Вычислим

$$\sigma_{xj} = -\delta_{xj}/\Delta\delta_{xj}, \quad \text{если } \delta_{xj}\Delta\delta_{xj} < 0; \quad \sigma_{xj} = \infty, \quad \text{если } \delta_{xj}\Delta\delta_{xj} \geq 0; \quad j \in J_n;$$

$$\sigma_{wl} = -\delta_{wl}/\Delta\delta_{wl}, \quad \text{если } \delta_{wl}\Delta\delta_{wl} < 0; \quad \sigma_{wl} = \infty, \quad \text{если } \delta_{wl}\Delta\delta_{wl} \geq 0; \quad l \in L_n;$$

$$\sigma_k(t) = -\nu_k(t)/\Delta\nu_k(t), \quad \text{если } \nu_k(t)\Delta\nu_k(t) < 0; \quad \sigma_k(t) = \infty, \quad \text{если } \nu_k(t)\Delta\nu_k(t) \geq 0; \quad \{k, t\} \in Q_b.$$

Пусть числа  $\sigma_{xj}$ ,  $j \in J_n$ ;  $\sigma_{wl}$ ,  $l \in L_n$ ;  $\sigma_k(t)$ ,  $\{k, t\} \in Q_b$ , различны (общий случай исследован в [8]). Пронумеруем конечные из них в порядке возрастания:  $0 < \sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{i_0}$ , и найдем такое число  $\sigma^* = \sigma^{i_*}$ , что  $\alpha^{i_*} < 0$ ,  $\alpha^{i_*+1} \geq 0$ :

$$\alpha^1 = -\rho^0(K_b); \quad \alpha^{i+1} = \alpha^i + \Delta\alpha^i,$$

$$\Delta\alpha^i = (d_{ji}^* - d_{*ji})|\Delta\delta_{xji}|, \quad \text{если } \sigma^i = \sigma_{xji}; \quad \Delta\alpha^i = (w_{li}^* - w_{*li})|\Delta\delta_{wli}|, \quad \text{если } \sigma^i = \sigma_{wli}$$

$$\Delta\alpha^i = (\xi_k^* - \xi_{*k})|\Delta\nu_{ki}(t^i)|, \quad \text{если } \sigma^i = \sigma_{ki}(t^i), \quad i = \overline{1, i_0}.$$

В зависимости от (а)  $\sigma^* = \sigma_{xji_*}$ ; (б)  $\sigma^* = \sigma_{wli_*}$ ; (в)  $\sigma^* = \sigma_{ki_*}(t^{i_*})$ , построим новую опору  $\bar{K}_b = \{\bar{Q}_b, \bar{J}_b, \bar{L}_b\}$ , учитывая (а)  $j^* = j^{i_*}$ ; (б)  $l^* = l^{i_*}$ ; (в)  $\{k^*, \tau^*\} = \{k^{i_*}, t^{i_*}\}$ : (1 а)  $\bar{Q}_b = Q_b$ ,  $\bar{J}_b = (J_b \setminus j^0) \cup j^*$ ,  $\bar{L}_b = L_b$ ; (1 б)  $\bar{Q}_b = Q_b$ ,  $\bar{J}_b = J_b \setminus j^0$ ,  $\bar{L}_b = L_b \cup l^*$ ; (1 в)  $\bar{Q}_b = Q_b \setminus \{k^*, \tau^*\}$ ,  $\bar{J}_b = J_b \setminus j^0$ ,  $\bar{L}_b = L_b$ ; (2 а)  $\bar{Q}_b = Q_b$ ,  $\bar{J}_b = J_b \cup j^*$ ,  $\bar{L}_b = L_b \setminus l^0$ ; (2 б)  $\bar{Q}_b = Q_b$ ,  $\bar{J}_b = J_b$ ,  $\bar{L}_b = (L_b \setminus l^0) \cup l^*$ ; (2 в)  $\bar{Q}_b = Q_b \setminus \{k^*, \tau^*\}$ ,  $\bar{J}_b = J_b$ ,  $\bar{L}_b = L_b \setminus l^0$ ; (3 а)  $\bar{Q}_b = Q_b \cup \{k^0, t^0\}$ ,  $\bar{J}_b = J_b \cup j^*$ ,  $\bar{L}_b = L_b$ ; (3 б)  $\bar{Q}_b = Q_b \cup \{k^0, t^0\}$ ,  $\bar{J}_b = J_b$ ,  $\bar{L}_b = L_b \cup l^*$ ; (3 в)  $\bar{Q}_b = (Q_b \setminus \{k^*, \tau^*\}) \cup \{k^0, t^0\}$ ,  $\bar{J}_b = J_b$ ,  $\bar{L}_b = L_b$ .

По завершении итерации преобразуем информацию (б)–(е) для новой опоры  $\bar{K}_b$ .

Коррекцию информации (ф), (г) проведем для каждой точки  $t \in T_k^0 \cup \{t_*, \tau\}$ ,  $k \in K$ , по следующей схеме:

Этап 1. Подсчитаем значение вариации функции псевдоошибок

$$\Delta\zeta(t) = -C(t)F(t)(\bar{\kappa} - \kappa) - C(t)P(t)(\bar{\omega} - \omega).$$

Этап 2. Вычислим

$$\vartheta_k(t) = -(\zeta_k(t + s_k(t)h) - \zeta_k(t))/(\Delta\zeta_k(t + s_k(t)h) - \Delta\zeta_k(t)), \quad t \in T_k^0 \cup \{t_*, \tau\},$$

где  $s_k(t) = 1$ , если  $(\zeta_k(t + h) - \zeta_k(t))/(\Delta\zeta_k(t + h) - \Delta\zeta_k(t)) < 0$ ;  $s_k(t) = -1$  в противном случае,  $t \in T_k^0$ ;  $s_k(t_*) = 1$ ,  $s_k(\tau) = -1$ .

Число  $\vartheta_k(t)$  связано с шагом, при котором точка экстремума  $t$   $k$ -й компоненты функции  $\zeta(t, \vartheta) = \zeta(t) + \vartheta\Delta\zeta(t)$ ,  $t \in T_h$ ,  $\vartheta \geq 0$  ( $\zeta(t, 0) = \zeta(t)$ ,  $\zeta(t, 1) = \bar{\zeta}(t)$ ) переходит в точку  $t + s_k(t)h$ . Если обрабатывается точка  $t_*$  или  $\tau$ , то  $\vartheta_k(t_*)$ ,  $\vartheta_k(\tau)$  — шаги, при которых у  $\zeta_k(t, \vartheta)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ ,  $\vartheta \geq 0$ , появляется новая точка экстремума<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>В данной работе случай появления новых точек экстремума внутри интервала  $T$  не рассматривается. Он может быть исследован с помощью точек экстремума функции  $\zeta^1(t) = (\zeta(t + h) - \zeta(t))/h$ ,  $t \in T_h(\tau) \setminus \tau$ .

Этап 3. Если  $0 < \vartheta_k(t) < 1$ , то точку  $t$  в множестве  $T_k^0$  заменим на новую точку экстремума  $t + s_k(t)h$ ; вычислим  $F(t + s_k(t)h)$ ,  $P(t + s_k(t)h)$ . Если  $\vartheta_k(t) < 0$ , то  $t$  перестает быть точкой экстремума, удалим ее из  $T_k^0$ , из памяти ЭВМ удалим значения  $F(t)$ ,  $P(t)$ .

Этап 4. Повторяем этапы 1–3, пока не будет достигнуто  $\vartheta_k(t) \geq 1$ .

Согласно описанной схеме, каждая итерация метода сопровождается перемещениями точек максимума и минимума функции  $\zeta(t)$ ,  $t \in T_h(\tau)$ . На этих перемещениях производится интегрирование прямых систем + (2.3). Согласно Р.П. Федоренко [9] при оптимизации динамических систем трудоемкость итерации будем определять длиной промежутка времени, на котором производится интегрирование прямой или сопряженной системы. За единицу трудоемкости примем одно полное интегрирование прямой или сопряженной системы на всем промежутке  $T$ .

В описанном методе время, затраченное на построение оптимальной опоры  $K_b^0(t_* - 0)$  задачи (2.11), несущественно, поскольку задача решается до начала процесса управления. При решении задачи (3.1) в момент  $\tau$  выполняются неравенства  $\xi_* \leq \zeta(t) \leq \xi^*$ ,  $t \in T_h(\tau - h)$ , но функция псевдоошибок может нарушить ограничения в момент  $\tau$ . В этом случае  $\rho^0(K_b(\tau)) = \rho(\zeta(\tau), [\xi_*, \xi^*]) \sim h$ , в силу чего (при малых периодах квантования  $h$  и ограниченных ошибках  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ ) для коррекции опоры  $K_b^0(\tau - h)$  до получения  $K_b^0(\tau)$  достаточно небольшого числа итераций, трудоемкость каждой из которых равна отношению максимального перемещения точек экстремума функции псевдоошибок к длине отрезка  $T$ . Небольшие перемещения в совокупности с конечностью метода приводят к быстрому алгоритму решения задачи оптимального наблюдения. Найти явную формулу для вычисления трудоемкости итераций, видимо, невозможно; об эффективности метода можно судить по результатам численных расчетов (см. пример п. 6).

#### 4. Алгоритм работы оптимального регулятора

Задача оптимального регулятора в момент  $\tau \in T_h$  состоит в вычислении оптимальной программы сопровождающей задачи оптимального управления (2.9), которая в эквивалентной функциональной форме имеет вид

$$\sum_{t \in T^h(\tau)} c'(t)u(t) \rightarrow \max, \quad \tilde{g}_*(\tau) \leq \sum_{t \in T^h(\tau)} D(t)u(t) \leq \tilde{g}^*(\tau), \quad (4.1)$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T^h(\tau) = \{\tau, \tau + h, \dots, t^* - h\}.$$

Здесь

$$c(t) = \int_t^{t+h} \psi'_c(\vartheta)B(\vartheta)d\vartheta, \quad D(t) = \int_t^{t+h} \Phi(\vartheta)B(\vartheta)d\vartheta, \quad t \in T^h(\tau);$$

$$\tilde{g}_*(\tau) = g_*(\tau) - \Phi(\tau)x_0^*(\tau), \quad \tilde{g}^*(\tau) = g^*(\tau) - \Phi(\tau)x_0^*(\tau).$$

Задача (4.1), как и функциональная форма задачи оптимального наблюдения (3.2), является интервальной задачей линейного программирования. В ней  $m$  основных ограничений и  $|T^h(\tau)|$  переменных. Она представляет второй тип полубольших задач – у нее при фиксированном числе основных ограничений неограниченно растет количество переменных, если  $h \rightarrow 0$ . Для ее решения используем конструкции адаптивного метода [3, 6].

Для построения опоры задачи (2.9) (задачи (4.1)), выделим такие подмножества  $I_b \subset I$ ,  $S_b \subset S = J \times T^h(\tau)$ ,  $J = \{1, 2, \dots, r\}$ , что  $|I_b| = |S_b|$ . Совокупность<sup>10</sup>  $K_b = K_b(\tau) = \{I_b, S_b\}$  –

<sup>10</sup>Одно обозначение опоры используется для двух разных задач. Но это не должно смущать читателя, поскольку одновременно задачи не рассматриваются.

опора, если невырождена матрица

$$D_b = \begin{pmatrix} d_{ij}(t), & \{j, t\} \in S_b \\ i \in I_b \end{pmatrix}.$$

$K_b = \emptyset$  — пустая опора по определению.

Опору  $K_b$  сопровождают следующие элементы:

(1) Вектор потенциалов  $\nu \in \mathbb{R}^m$ :

$$\nu_i = 0, \quad i \in I_n = I \setminus I_b;$$

$\nu_b = (\nu_i, i \in I_b)$  — решение векторного уравнения

$$\nu'_b D_b = c'_b, \quad c_b = (c_j(t), \{j, t\} \in S_b), \quad (\nu = 0, \text{ если } K_b = \emptyset).$$

(2) Котраектория  $\psi(t), t \in T$ , — решение сопряженного уравнения (2.8) с начальным условием  $\psi'(t^*) = c' - \nu' H$ .

(3) Коуправление

$$\delta'(t) = \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B(\vartheta) d\vartheta, \quad t \in T^h(\tau).$$

На парах  $\{j, t\} \in S_b$  выполняется равенство  $\delta_j(t) = 0$ . Назовем множества  $T_b(j) = \{t \in T^h(\tau) : \{j, t\} \in S_b\}$ ,  $j \in J$ , множествами опорных нулей коуправления;  $T_{n0}(j) = \{t \in T^h(\tau) \setminus \tau : \delta_j(t-h)\delta_j(t) < 0\}$  — множествами неопорных нулей коуправления.

(4) Псевдоуправление  $\omega(t), t \in T^h(\tau)$ , и выходной псевдосигнал  $\zeta \in \mathbb{R}^m$ . Сначала задаются значения неопорных компонент  $\omega_j(t), \{j, t\} \in S_n = S \setminus S_b$ :

$$\omega_j(t) = u_{*j}, \text{ если } \delta_j(t) < 0; \quad \omega_j(t) = u_j^*, \text{ если } \delta_j(t) > 0;$$

$$\omega_j(t) \in [u_{*j}, u_j^*], \text{ если } \delta_j(t) = 0; \quad \{j, t\} \in S_n;$$

и опорных компонент  $\zeta_i, i \in I_b$ :

$$\zeta_i = g_{*i}(\tau), \text{ если } \nu_i < 0; \quad \zeta_i = g_i^*(\tau), \text{ если } \nu_i > 0;$$

$$\zeta_i \in [g_{*i}(\tau), g_i^*(\tau)], \text{ если } \nu_i = 0; \quad i \in I_b.$$

Затем находятся опорные компоненты псевдоуправления  $\omega_b = (\omega_j(t), \{j, t\} \in S_b)$  из уравнения

$$D_b \omega_b \approx (\zeta_i - h'_{(i)} \kappa_0(t^*), i \in I_b), \quad (4.2)$$

где  $\kappa_0(t^*)$  — состояние в момент  $t^*$  системы (2.9) с управлением  $u_j(t) = \omega_j(\tau), t \in [\tau, \tau + h], \{j, \tau\} \in S_n; u_j(t) = 0, t \in [\tau, \tau + h], \{j, \tau\} \in S_b$ .

Псевдосигнал равен

$$\zeta = H \kappa(t^*),$$

где  $\kappa(t^*)$  — терминальное состояние системы (2.9) с управлением  $u(t) = \omega(t), t \in T^h(\tau)$ .

Критерии оптимальности допустимого управления и опоры доказываются аналогично доказательствам, проведенным [6–8] для других задач оптимального управления.

**Теорема 4.1** (принцип максимума). *Для оптимальности допустимых управления  $u(t), t \in T^h(\tau)$ , и траектории  $x(t), t \in [\tau, t^*]$ , необходимо и достаточно существования такой опоры  $S_b$ , на сопровождающих векторе потенциалов  $\nu$  и котраектории  $\psi(t), t \in [\tau, t^*]$ , которой выполняется*

(1) условие максимума для управления:

$$\int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) b_j(\vartheta) d\vartheta u_j(t) = \max_{u_{*j} \leq u \leq u_j^*} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) b_j(\vartheta) d\vartheta u, \quad \{j, t\} \in S_n;$$

(2) условие максимума для выходного сигнала  $z = Hx(t^*)$ :

$$\nu_i z_i = \max_{g_{*i}(\tau) \leq z \leq g_i^*(\tau)} \nu_i z, \quad i \in I_b.$$

Опора  $K_b$ , при которой имеет место принцип максимума, называется оптимальной.

**Теорема 4.2** (критерий оптимальности опоры). *Для оптимальности опоры  $K_b$  необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее элементах выполнялись неравенства*

$$u_{*j} \leq \omega_j(t) \leq u_j^*, \quad \{j, t\} \in S_b; \quad g_{*i}(\tau) \leq \zeta_i \leq g_i^*(\tau), \quad i \in I_n.$$

В этом случае сопровождающее псевдоуправление является оптимальным управлением задачи (2.9):  $u^0(t) = \omega(\tau)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T^h(\tau)$ .

Для решения задачи (2.9) предлагается двойственный метод, который является быстрой динамической реализацией двойственного метода линейного программирования [8] для решения полубольшей задачи (4.1). В этом методе оптимальная опора  $K_b^0(\tau)$  задачи (2.9) строится итеративно, путем замены “старой” опоры  $K_b$  на “новую”  $\bar{K}_b$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $c' \bar{x}(t^*) \leq c' x(t^*)$ . В качестве начальной опоры при решении задачи (2.12) до начала процесса управления, выберем произвольную совокупность  $K_b$  (в частности, можно взять пустую опору). При решении задачи (2.9) для произвольного  $\tau \in T_h$  в качестве начальной возьмем оптимальную опору  $K_b^0(\tau - h)$  задачи, решенной оптимальным регулятором на промежутке  $[\tau - h, \tau - h + s(\tau - h)]$ .

Пусть  $T_0(j) = T_b(j) \cup T_{n0}(j) \cup \{\tau, t^*\} = \{t_k(j), k = \overline{0, k(j) + 1}\}$ ,  $j \in J$ , — множества опорных и неопорных нулей  $j$ -й компоненты коуправления  $\delta(t)$ ,  $t \in T^h(\tau)$ ;  $T_k(j)$ ,  $k = \overline{0, k(j)}$ , — промежутки знакопостоянства  $j$ -й компоненты коуправления:

$$T_k(j) = \{t_k(j), t_k(j) + h, \dots, t_{k+1}(j) - h\}, \quad \text{если } t_k(j) \notin T_b(j);$$

$$T_k(j) = \{t_k(j) + h, t_k(j) + 2h, \dots, t_{k+1}(j) - h\}, \quad \text{если } t_k(j) \in T_b(j).$$

Если  $t^* - h \in T_b(j)$  для некоторого  $j \in J$ , то считается  $T_{k(j)}(j) = \emptyset$ .

Подсчитаем

$$\gamma_j = \begin{cases} \text{sign } \delta_j(t_*), & \text{если } \tau \notin T_b(j); \\ \text{sign } \delta_j(t_* + h), & \text{если } \tau \in T_b(j), \end{cases} \quad j \in J;$$

$$\omega_j^k = \begin{cases} u_j^*, & \text{если } (-1)^k \gamma_j > 0; \\ u_{*j}, & \text{если } (-1)^k \gamma_j < 0, \end{cases} \quad k = \overline{0, k(j)}, \quad j \in J.$$

Числа  $p_i = h'_{(i)} x_0(t^*)$ , фигурирующие в правой части уравнения (4.2), представим в виде

$$p_i = \phi'_{(i)}(\tau) x_0^*(\tau) + \sum_{j \in J} \sum_{k=0}^{k(j)} \int_{t \in T_k(j)} \phi'_{(i)}(\vartheta) b_j(\vartheta) d\vartheta \omega_j^k, \quad i \in I.$$

Считаем, что к началу каждой итерации известна следующая информация: (а) опора  $K_b$ ; (b) матрица  $D_{|b|} = (d_j(t), \{j, t\} \in S_b)$  ( $d_j(t)$  —  $j$ -й столбец матрицы  $D(t)$ ); (с) вектор потенциалов  $\nu$ ; (d) опорные значения псевдоуправления  $\omega_b$ ; (е) числа  $\gamma_j, j \in J$ ; (f) вектор выходного псевдосигнала  $\zeta$ ; (g) множества неопорных нулей  $T_{n0}(j), j \in J$ ; (h) значения  $\Phi(t), \psi_c(t), t \in T_0(j), j \in J$ ; (i) вектор  $p = (p_i, i \in I)$ .

По информации (а)–(i) подсчитаем  $\rho^0(K_b)$  — максимальное из двух чисел

$$\rho_{j^0}(t^0) = \rho(\omega_{j^0}(t^0), [u_{*j^0}, u_{j^0}^*]) = \max \rho(\omega_j(t), [u_{*j}, u_j^*]), \quad \{j, t\} \in S_b;$$

$$\rho_{i^0} = \rho(\zeta_{i^0}, [\tilde{g}_{*i^0}(\tau), \tilde{g}_{i^0}^*(\tau)]) = \max \rho(\zeta_i(t), [\tilde{g}_{*i}(\tau), \tilde{g}_i^*(\tau)]), \quad i \in I_n.$$

Если  $\rho^0(K_b) = 0$ , то опора  $K_b$  оптимальна. В противном случае будем различать две ситуации:

$$(1) \quad \rho^0(K_b) = \rho_{j^0}(t^0); \quad (2) \quad \rho^0(K_b) = \rho_{i^0},$$

в зависимости от которых построим вариацию  $\Delta\nu \in \mathbb{R}^m$  вектора потенциалов  $\Delta\nu_i$ :

$$(1) \quad \Delta\nu_i = 0, \quad i \in I_n; \quad \Delta\nu_b' D_b = -(\Delta\delta_j(t), \{j, t\} \in S_b)',$$

где  $\Delta\delta_{j^0}(t^0) = 1$ , если  $\omega_{j^0}(t^0) > u_{j^0}^*$ ;  $\Delta\delta_{j^0}(t^0) = -1$ , если  $\omega_{j^0}(t^0) < u_{*j^0}$ ;  $\Delta\delta_j(t) = 0$ ,  $\{j, t\} \in S_b \setminus \{j^0, t^0\}$ ;

$$(2) \quad \Delta\nu_i = 0, \quad i \in I_n \setminus i^0; \quad \Delta\nu_{i^0} = 1, \quad \text{если } \zeta_{i^0} > \tilde{g}_{i^0}^*(\tau); \quad \Delta\nu_{i^0} = -1, \quad \text{если } \zeta_{i^0} < \tilde{g}_{*i^0}(\tau);$$

$$\Delta\nu_b' D_b = -\Delta\nu_{i^0}(d_{i^0 j}(t), \{j, t\} \in S_b)' \quad (\Delta\nu = 0, \quad \text{если } K_b = \emptyset).$$

Вариация вектора потенциалов порождает вариацию коуправления  $\Delta\delta(t), t \in T^h(\tau)$ :

$$\Delta\delta'(t) = -\Delta\nu' \int_t^{t+h} \Phi(\vartheta) B(\vartheta) d\vartheta, \quad t \in T^h(\tau);$$

которая, в свою очередь, приводит к перемещению подвижных нулей варьированного коуправления  $\delta(t, \sigma) = \delta(t) + \sigma \Delta\delta(t), t \in T^h(\tau), \sigma \geq 0$ , вдоль оси времени.

Обозначим через  $T^{(1)}(j)$  множество подвижных нулей  $j$ -й компоненты  $\delta(t, \sigma), t \in T^h(\tau)$ , в малой правосторонней окрестности  $\sigma = \sigma^0 = 0$ . Эти множества составим из всех  $t \in T_{n0}(j)$  и концов  $\tau, t^*$  отрезка  $T^h(\tau)$ . В случае (1) в множество  $T^{(1)}(j^0)$  включим точку  $t^0 + \theta^0 h$ , где  $\theta^0 = \text{sign } \delta(t^0 - h) \Delta\delta(t^0)$ .

Для точек  $t \in T^{(1)}(j)$  вычислим числа  $\theta_j(t)$ , которые характеризуют направление движения  $t$  по оси времени:

$$\theta_j(t) = -\text{sign } \delta(t) \Delta\delta(t), \quad t \in T_{n0}(j) \cup t^0 + \theta^0 h; \quad \theta_j(\tau) = 1, \quad \theta_j(t^*) = -1, \quad j \in J;$$

и числа  $\sigma_j(t)$ , равные шагу, при котором нуль  $t$   $j$ -й компоненты варьированного коуправления  $\delta(t, \sigma), t \in T_h, \sigma \geq 0$ , появится в узле  $t + \theta_j(t)$ :

$$\sigma_j(t) = -\delta_j(t) / \Delta\delta_j(t), \quad \text{если } \theta_j(t) = 1; \quad \sigma_j(t) = -\delta_j(t - h) / \Delta\delta_j(t - h), \quad \text{если } \theta_j(t) = -1.$$

Для нахождения  $\sigma_j(t), t \in T^{(1)}(j), j \in J$ , достаточно проинтегрировать на отрезках  $[t, t+h]$  или  $[t-h, t]$  уравнения (2.4), (2.8) с известными начальными условиями  $\Phi(t), \psi_c(t), t \in T^{(1)}(j), j \in J$ , подсчитывая значения  $\delta_j(t), \Delta\delta_j(t); \delta_j(t-h), \Delta\delta_j(t-h)$ .

Найдем длинный двойственный шаг [8], выполнив следующие этапы:

Этап 1. Найдем короткий шаг

$$\sigma^l = \min\{\sigma_j(t), t \in T^{(l)}(j), j \in J; \sigma_i, i \in I_b\},$$



где  $T^{(l)}(j)$  — множество подвижных нулей  $j$ -й компоненты  $\delta(t, \sigma)$ ,  $t \in T^h(\tau)$ , в малой правой-сторонней окрестности  $\sigma^{l-1}$ ,

$$\sigma_i = -\nu_i(t)/\Delta\nu_i, \quad \text{если } \nu_i\Delta\nu_i < 0; \quad \sigma_i = \infty \quad \text{в противном случае.}$$

Этап 2. Вычислим скорость изменения на отрезке  $[\sigma^l, \sigma^{l+1}]$  критерия качества задачи, двойственной к (2.9):

$$\alpha^{l+1} = \alpha^l + \Delta\alpha^l \quad (\alpha^1 = -\rho^0(K_b));$$

$$\Delta\alpha^l = (u_{ji}^* - u_{*ji})|\Delta\delta_{ji}(t^l)|, \quad \text{если (а) } \sigma^l = \sigma_{ji}(t^l); \quad \Delta\alpha^l = (g_{il}^*(\tau) - g_{*il}(\tau))|\Delta\nu_{il}|, \quad \text{если (б) } \sigma^l = \sigma_{il}.$$

Этап 3. Если  $\alpha^{l+1} < 0$ , то в случае (а) преобразуем множество  $T^{(l)}(j^l)$  подвижных нулей  $j^l$ -й компоненты коуправления<sup>11</sup>; в случае (б) положим  $\sigma_{il} = \infty$ . Повторим этапы 1–3.

Этап 4. Если  $\alpha^{l+1} \geq 0$ , то  $\sigma^l = \sigma^*$  — длинный двойственный шаг. Положим (а)  $\{j^*, \tau^*\} = \{j^l, t^l\}$ ; (б)  $i^* = i^l$ .

Новая опора  $\bar{K}_b = \{\bar{I}_b, \bar{S}_b\}$  строится по правилам: (1а)  $\bar{I}_b = I_b$ ,  $\bar{S}_b = (S_b \setminus \{j^0, t^0\}) \cup \{j^*, \tau^*\}$ ; (1б)  $\bar{I}_b = I_b \setminus i^*$ ,  $\bar{S}_b = S_b \setminus \{j^0, t^0\}$ ; (2а)  $\bar{I}_b = I_b \cup i^0$ ,  $\bar{S}_b = S_b \cup \{j^*, \tau^*\}$ ; (2б)  $\bar{I}_b = (I_b \cup i^0) \setminus i^*$ ,  $\bar{S}_b = S_b$ .

Таким образом, на итерациях метода решения сопровождающей задачи оптимального управления происходят перемещения нулей коуправления  $\delta(t), t \in T^h(\tau)$ . На отрезках этих перемещений интегрируются сопряженные системы (2.4), (2.8), составляя основную часть затрат времени при решении рассматриваемой задачи. Трудоемкость итерации равна отношению суммарного перемещения нулей коуправления к длине отрезка  $T$ .

При построении оптимальной опоры  $K_b^0(t_* - 0)$  задачи (2.12), решаемой до начала процесса управления, временные затраты не существенны. Это позволяет выбирать начальную опору произвольной.

В произвольный момент времени  $\tau \in T_h$  оптимальный регулятор должен быстро решить задачу (2.9). На предыдущем шаге он уже решил задачу вида (2.9), составленную для позиции  $(\tau - h, \chi(\tau - h))$ . При малых периодах квантования  $h$  можно говорить о малом различии задач (2.9), решаемых в моменты  $\tau - h$  и  $\tau$ , в силу близости оценок  $\chi(\tau - h)$ ,  $\chi(\tau)$  и состояний  $x^*(\tau)$ ,  $x^0(\tau)$ , где  $x^0(\tau)$  — состояние, в которое попала бы система (1.1) при действии управляющего воздействия  $u^{**}(t)$ ,  $t \in [\tau - h, \tau]$ , в отсутствие возмущения ( $w(t) \equiv 0$ ,  $t \in [\tau - h, \tau]$ ). Следовательно, близки оптимальные опоры  $K_b^0(\tau - h)$ ,  $K_b^0(\tau)$  задач управления (2.9) в том смысле, что близки нули сопровождающих их коуправлений. Поэтому коррекция выбранной в момент  $\tau$  в качестве начальной опоры  $K_b^0(\tau - h)$  до оптимальной  $K_b^0(\tau)$  требует небольшого числа итераций, на которых происходят малые перемещения нулей коуправления. Это позволяет добиться высокой эффективности метода и выполнения неравенства  $s(\tau) < h$  на современных микропроцессорах для систем (1.1) достаточно высокого порядка.

## 5. Двухстадийный метод оптимального управления

При большой неопределенности в начальном состоянии и больших возмущениях в системе управления осуществить описанную процедуру оптимального управления в реальном времени невозможно, поскольку задача (2.9) не будет иметь допустимых управлений<sup>12</sup>. Однако в процессе управления априорная неопределенность постоянно уменьшается в результате обработки

<sup>11</sup> Подробные правила построения  $T^{(l)}(j^l)$  приведены в [3].

<sup>12</sup> При решении задачи (2.9) методом, описанным в п. 4, отсутствие допустимых управлений идентифицируется при построении длинного двойственного шага. Если не существует такого конечного  $\sigma^l$ , что  $\alpha^l < 0$ ,  $\alpha^{l+1} \geq 0$ , то критерий качества задачи, двойственной к (2.9), бесконечно убывает, что является сигналом о несовместности ограничений (2.9).

поступающих измерений. В этой ситуации разумно при  $\tau < \tau_*$  ( $\tau_*$  — момент времени, при котором ограничения задачи (2.9) становятся совместными, правила его вычисления указаны ниже) управляющие воздействия вырабатывать с помощью вспомогательных задач, имеющих допустимые управления.

Реализуем эту идею следующим образом. Работу оптимального регулятора организуем в две стадии. Цель первой стадии — построение допустимых управлений; второй — оптимальное управление в реальном времени в исходной задаче.

На первой стадии в произвольный текущий момент времени  $\tau \in T_h$ ,  $\tau < \tau_*$ , оптимальный регулятор решает две задачи оптимального управления. Первая задача состоит в отыскании минимального числа  $\rho$ , задающего терминальное множество  $X_\rho^*(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: g_*(\tau) - \rho e \leq Hx \leq g^*(\tau) + \rho e\}$ , где  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ , на которое можно перевести систему (2.9) с помощью ограниченного управления  $u(t) \in U$ ,  $t \in [\tau, t^*]$ . Это эквивалентно решению следующей задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \min \rho, & \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(\tau) &= x_0^*(\tau), & x(t^*) &\in X_\rho^*, & u(t) &\in U, & t &\in [\tau, t^*]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если в процессе решения задачи (5.1) получено неравенство  $\rho(\tau) \leq 0$ , то  $\tau = \tau_*$  и в этот момент осуществляется переход на вторую стадию.

Вторую задачу (при  $\rho(\tau) > 0$ ) оптимального управления, которую оптимальный регулятор решает на первой стадии, запишем в виде

$$\begin{aligned} c'x(t^*) &\rightarrow \max, & \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(\tau) &= x_0^*(\tau), & x(t^*) &\in X_{\rho+\varepsilon}^*, & u(t) &\in U, & t &\in [\tau, t^*], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малое число, правила выбора которого уточняются ниже.

Пусть  $u_{\rho+\varepsilon}^0(t)$ ,  $t \in [\tau, t^*]$ , — оптимальное программное управление в задаче (5.2). На систему (1.1) оптимальный регулятор подает управляющее воздействие  $u^{**}(t) = u_{\rho+\varepsilon}^0(\tau)$ ,  $t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)]$ .

В задаче (5.1) всегда существуют допустимые программные управления, что обеспечивает совместность ограничений второй задачи (5.2). Оптимальное программное управление в (5.1) строится двойственным методом, аналогичным описанному в п. 4. Не останавливаясь на деталях, отметим, что функциональная форма (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \min, & \sum_{t \in T^h(\tau)} D(t)u(t) - \rho e &\leq \tilde{g}^*(\tau), \\ \tilde{g}^*(\tau) &\leq \sum_{t \in T^h(\tau)} D(t)u(t) + \rho e, & u_* &\leq u(t) \leq u^*, & t &\in T^h(\tau). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Опора задачи (5.3) — тройка  $K_b(\tau) = \{I_b^-, I_b^+, S_b\}$ , состоящая из таких множеств  $I_b^- \subset I$ ,  $I_b^+ \subset I$ ,  $S_b \subset S$ , что  $I_b^- \cap I_b^+ = \emptyset$ ,  $|I_b^-| + |I_b^+| = |S_b| + 1$  и невырождена матрица  $(D_b; f_b)$ :

$$D_b = \begin{pmatrix} d_{ij}(t), & \{j, t\} \in S_b \\ i \in I_b^- \cup I_b^+ \end{pmatrix}; \quad f_b = (f_i = 1, i \in I_b^+; f_i = -1, i \in I_b^-).$$

Вектор потенциалов  $\nu \in \mathbb{R}^m$ , сопровождающий опору  $K_b(\tau)$  задачи (5.3), имеет нулевые неопорные компоненты  $\nu_i = 0$ ,  $i \in I_n = I \setminus (I_b^- \cup I_b^+)$ . Его опорные компоненты  $\nu_b = (\nu_i, i \in I_b^- \cup I_b^+)$  находятся как решение системы

$$\nu_b' D_b = 0, \quad \sum_{i \in I_b^-} \nu_i - \sum_{i \in I_b^+} \nu_i = 1.$$

Коуправление вычисляется по правилу

$$\delta(t) = - \int_t^{t+h} \nu' \Phi(\vartheta) B(\vartheta) d\vartheta, \quad t \in T^h(\tau).$$

Неопорные компоненты псевдоуправления  $\omega(t)$ ,  $t \in T^h(\tau)$ , и опорные компоненты выходного псевдосигнала  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  строятся по правилам п. 4. Из системы

$$D_b \omega_b + \varrho f_b = (\zeta_i - h'_{(i)} \kappa_0(t^*), \quad i \in I_b)$$

находятся значения псевдоуправления на опорных парах  $\omega_b = (\omega_j(t), \{j, t\} \in S_b)$  и число  $\varrho$ . Выходной псевдосигнал вычисляется по формуле  $\zeta_i^+ = h'_{(i)} \kappa(t^*) + \varrho$ ,  $\zeta_i^- = h'_{(i)} \kappa(t^*) - \varrho$ ,  $i \in I$ .

Для оптимальности опоры  $K_b(\tau)$  задачи (5.3) необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее элементах выполнялись неравенства

$$u_{*j} \leq \omega_j(t) \leq u_j^*, \quad \{j, t\} \in S_b;$$

$$g_{*i}(\tau) \leq \zeta_i^+, \quad i \in I_n \cup I_b^-; \quad \zeta_i^- \leq g_i^*(\tau), \quad i \in I_n \cup I_b^+; \quad \zeta^+ = g_{*i}(\tau), \quad i \in I_b^+ \quad \zeta^- = g_i^*(\tau), \quad i \in I_b^-.$$

В этом случае сопровождающее псевдоуправление является оптимальным управлением задачи (5.3):  $u^0(t) = \omega(\tau)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T^h(\tau)$ ;  $\varrho$  — решение (5.3).

В качестве начальной опоры при решении в момент  $\tau < \tau_*$  задачи (5.1) двойственным методом берется оптимальная опора, полученная в предыдущий момент  $\tau - h$  (при решении задачи до начала процесса управления выбирается начальная пустая опора). По этим же правилам выбирается начальная опора второй задачи (5.2).

После достижения в момент  $\tau = \tau_*$  неравенства  $\rho(\tau_*) \leq 0$  производится переход на вторую стадию, на которой оптимальное управление осуществляется по описанным в пп. 3, 4 правилам. При этом оптимальная опора  $K_b^{0\varepsilon}(\tau_* - h)$  задачи (5.2) выбирается в качестве начальной для решения задачи (2.9). Число  $\varepsilon$  подбирается таким образом, чтобы коррекция оптимальной опоры  $K_b^{0\varepsilon}(\tau_* - h)$  задачи (5.2) до получения оптимальной опоры  $K_b^0(\tau_*)$  задачи (2.9) занимала время, меньшее  $h$ .

## 6. Пример

Для иллюстрации предложенного метода оптимального управления динамическими системами по неточным измерениям их выходных сигналов рассмотрим задачу оптимального управления половинной моделью автомобиля, изображенной на рис. 3. Уравнения математической модели имеют вид:

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\varphi - u_1 + u_2 + w_1, \quad (6.1)$$

$$J\ddot{\varphi} = (k_1 l_1 - k_2 l_2)x - (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\varphi + l_1 u_1 + l_2 u_2 + w_2,$$

где  $x = x(t)$  — смещение центра тяжести относительно положения равновесия,  $\varphi = \varphi(t)$  — угловое отклонение от положения равновесия,  $m$  — масса;  $J$  — момент инерции;  $u_1 = u_1(t)$ ,  $u_2 = u_2(t)$  — значения управляющих воздействий, прилагаемых к балке в точках опоры;  $l_1, l_2$  — расстояния от опор до центра тяжести;  $k_1, k_2$  — коэффициенты упругости пружин.

Систему (6.1) будем рассматривать на промежутке  $T = [0, 15]$  при следующих значениях параметров:  $m = 1$ ,  $l_1 = 1.1$ ,  $l_2 = 1.9$ ,  $k_1 = 1.1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $J = m(l_1 + l_2)^2/12 = 9/12$ . Считаем, что заданы ее начальные состояния  $x(0) = 0.1$ ,  $\varphi(0) = 0$ , а скорости  $\dot{x}(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$  могут принимать значения  $z_1, z_2$ :  $\dot{x}(0) = z_1$ ,  $\dot{\varphi}(0) = z_2$ :

$$(z_1, z_2) \in Z = \{z \in Z: |z_1| \leq 0.1, |z_2| \leq 0.33\}.$$

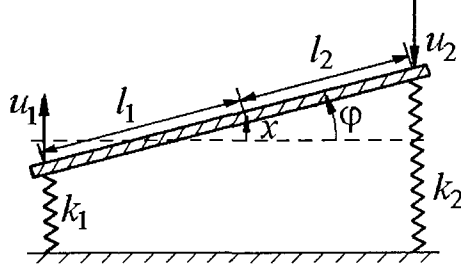


Рис. 3

Относительно возмущений предположим, что они имеют вид

$$w_1(t) = v_1 \sin(4t), \quad w_2(t) = v_2 \sin(3t), \quad t \in T,$$

с параметрами

$$(v_1, v_2) \in V = \{v \in \mathbb{R}^2: |v_i| \leq 0.01, i = 1, 2\}.$$

Измерительное устройство способно в каждый момент  $t \in T_h = \{0, h, \dots, 15 - h\}$ ,  $h = 0.02$ , измерять положения балки в точках опоры относительно положения равновесия

$$y_1 = -x + l_1 \varphi + \xi_1, \quad y_2 = x + l_2 \varphi + \xi_2,$$

где  $\xi_i = \xi_i(t)$ ,  $|\xi_i(t)| \leq 0.01$ ,  $t \in T_h$ , — ограниченные ошибки измерения.

Интерпретируя  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , как секундные расходы топлива на создание управляющих воздействий в момент  $t$  и считая, что значения их ограничены:

$$0 \leq u_i(t) \leq 0.02, \quad t \in T, \quad i = 1, 2,$$

будем минимизировать общий расход

$$J(u) = \int_0^{15} (u_1(t) + u_2(t)) dt \rightarrow \min,$$

для перевода с гарантией траекторий системы (6.1) на терминальные множества

$$(x(15), \dot{x}(15)) \in X^* = \{x \in \mathbb{R}^2: |x_1| \leq 0.05, |x_2| \leq 0.1\};$$

$$(\varphi(15), \dot{\varphi}(15)) \in \Phi^* = \{\varphi \in \mathbb{R}^2: |\varphi_1| \leq 0.05, |\varphi_2| \leq 0.2\}.$$

Пусть в конкретном процессе управления физической системой реализовалась следующие значения неизвестных параметров:

$$z_1^* = -0.1; \quad z_2^* = 0.33; \quad v_1^* = -0.005; \quad v_2^* = 0.01;$$

и следующие функции ошибок в измерительном устройстве

$$\xi_1^*(t) = 0.01 \cos(2t), \quad \xi_2^*(t) = -0.01 \cos(4t), \quad t \in T_h.$$

На рис. 4 изображены проекции на фазовые плоскости  $x\dot{x}$  и  $\varphi\dot{\varphi}$  траекторий системы (6.1) с указанными параметрами при отключенных управлениях (здесь и далее точками • помечены

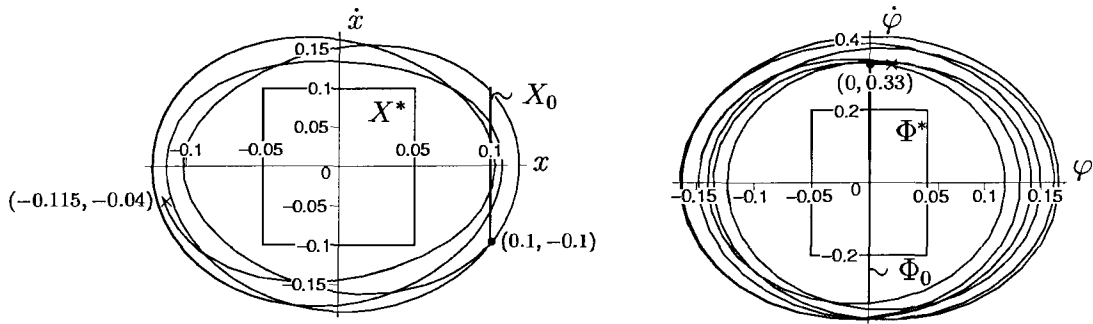


Рис. 4

начальные положения, знаками  $\times$  — конечные положения траекторий). Видно, что они не достигают терминальных множеств  $X^*$ ,  $\Phi^*$ .

Оптимальные управляющие воздействия, полученные при реализации принципа оптимального управления в реальном времени по неточным измерениям выходных сигналов, представлены на рис. 5. При этом значение критерия качества оказалось равным 0.1046290478; трудоемкость решения задач оптимального наблюдения и управления не превышала 0.042667.

На рис. 6 изображены проекции оптимальных траекторий на фазовые плоскости  $x\dot{x}$  и  $\varphi\dot{\varphi}$ . На рис. 7 помещены графики изменения оценок  $\chi_{*i}(\tau)$ ,  $\chi_i^*(\tau)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $t \in [0, 2]$ . При  $t > 1.52$  значения  $\chi_{*i}(\tau)$ ,  $\chi_i^*(\tau)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , на графиках становятся неотличимы друг от друга.

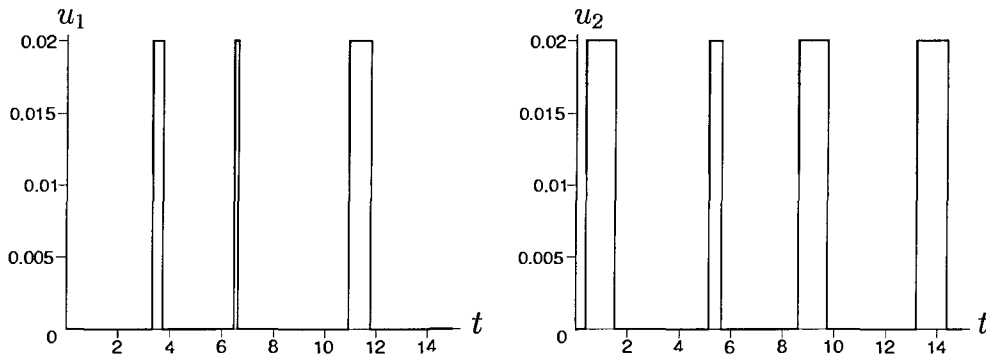


Рис. 5

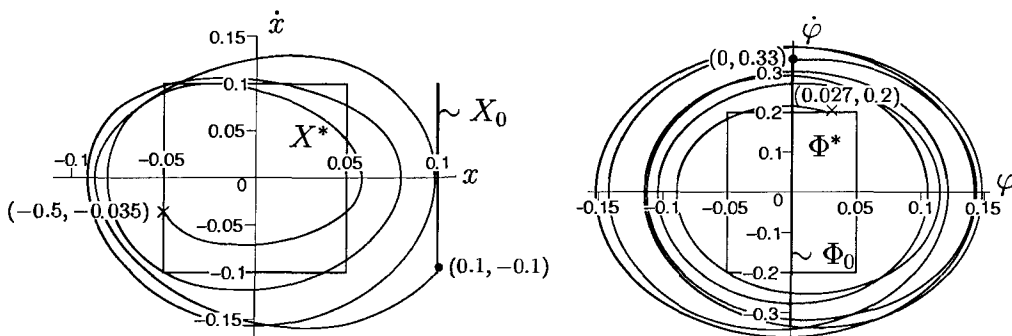


Рис. 6

Для демонстрации двухстадийного метода оптимального управления были выбраны следующие терминальные множества  $X^* = \{x \in \mathbb{R}^2: |x_i| \leq 0.001\}$ ,  $\Phi^* = \{\varphi \in \mathbb{R}^2: |\varphi_i| \leq 0.001\}$

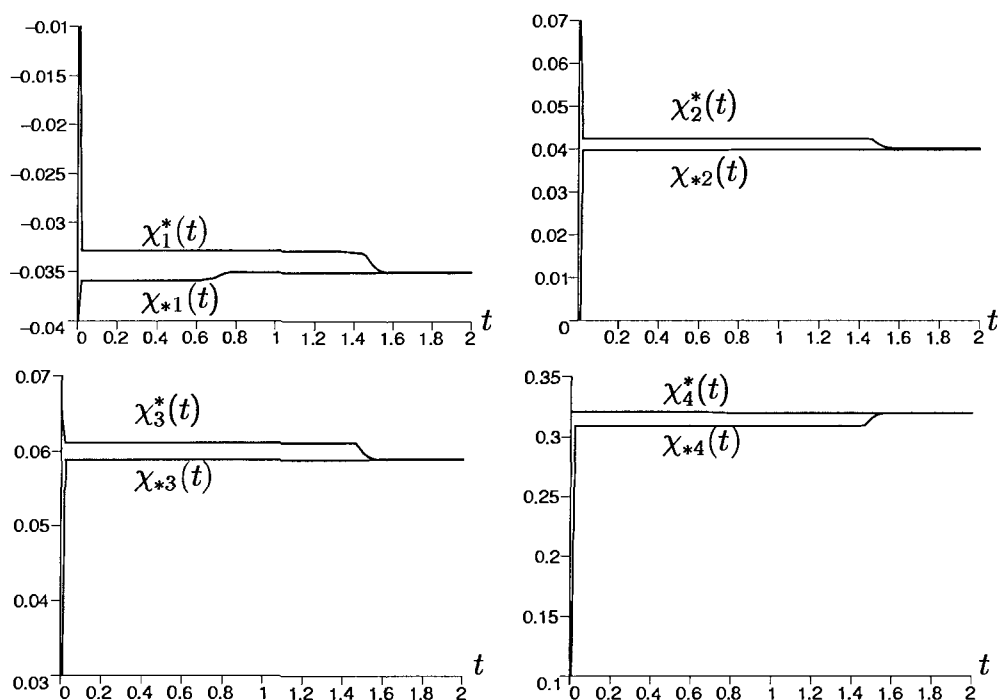


Рис. 7

и ограничения на управления  $0 \leq u_i(t) \leq 0.05$ ,  $t \in T$ ,  $i = 1, 2$ . При таких условиях сопровождающая задача оптимального управления (2.9) на отрезке  $t \in [0, 1.52]$  не имеет допустимых управлений, поэтому на нем управление вычисляется по правилам первой стадии с параметром  $\varepsilon = 0.01$ . При  $t = 0$  было получено значение  $\rho(0) = 0.16212$ ; значения  $\rho(t)$ ,  $t \in [0, 1.52]$  представлены на рис. 8. Реализации оптимальных обратных связей в новом примере изображены на рис. 9, проекции траекторий на фазовые плоскости — на рис. 10.

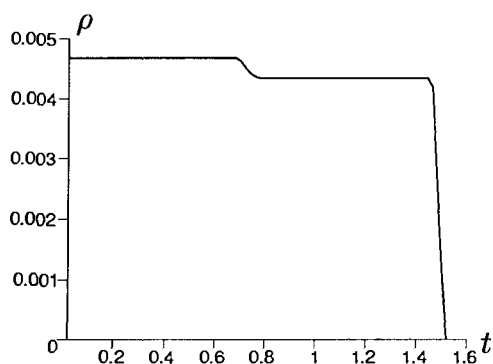


Рис. 8

## Заключение

1. В работе изложен метод решения актуальной задачи оптимального управления. Его возможности не ограничиваются линейными задачами. На базе аналогичного метода в [11, 12] разработаны методы оптимального управления квазилинейными, кусочно-линейными и нелинейными системами. Как показано в [13], эффективные методы оптимального управления

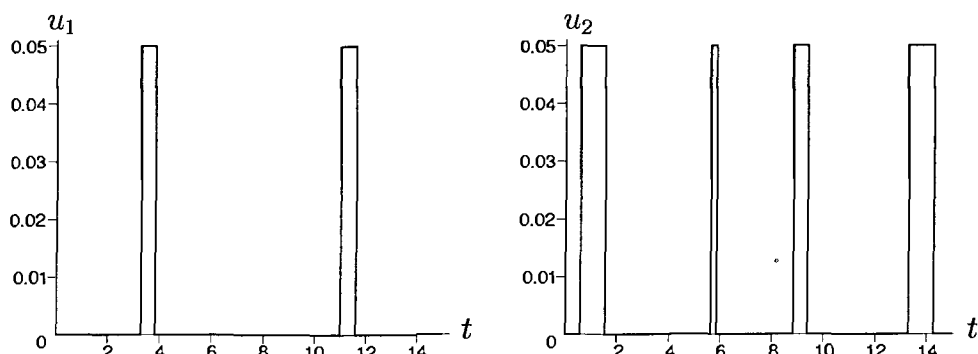


Рис. 9

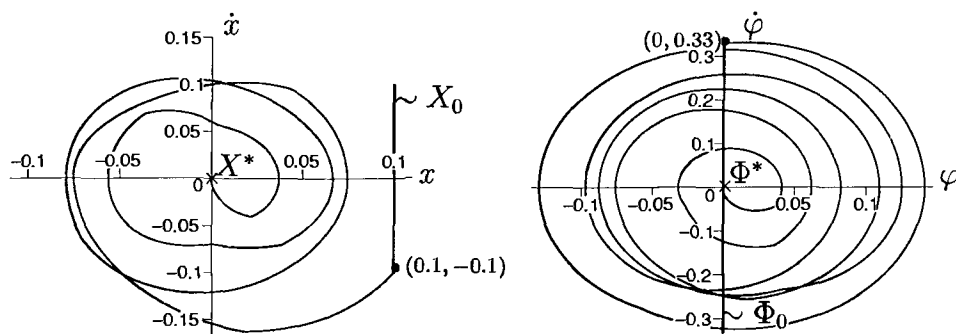


Рис. 10

можно использовать для решения задач управления, которые по своей формулировке не являются экстремальными.

2. Принцип управления в реальном времени используется и в популярной методологии MPC (Model Predictive Control) для решения неэкстремальных задач управления (в основном, стабилизации) на бесконечном промежутке времени [14]. В качестве вспомогательной задачи для выработки текущих управляющих воздействий там привлекаются линейно-квадратичные задачи. Сначала это была задача Летова — Калмана с конечным горизонтом. В такой форме MPC не привлек внимания практиков. Поэтому в линейно-квадратичную задачу были добавлены важные для приложений геометрические ограничения. Новые задачи оптимального управления за неимением специальных алгоритмов решения стали полностью дискретизировать и решать стандартными методами математического программирования. Это безусловно ограничивает сферу применения MPC медленными процессами. В данной работе принцип управления в реальном времени используется для задач оптимального управления на конечном промежутке времени. При этом для выработки текущих значений управляющих воздействий вводятся две вспомогательные экстремальные задачи, одна из которых — линейная детерминированная задача оптимального управления с геометрическими ограничениями. Для каждой вспомогательной задачи разработаны специальные быстрые алгоритмы решения, что позволяет использовать принцип управления в реальном времени для систем высокого порядка с быстрыми переходными процессами.

3. Полученные результаты по решению задач оптимального управления с множественной неопределенностью показывают, что рассмотренная задача обладает известным в теории оптимального стохастического управления [4] свойством разделимости, согласно которому процедуры наблюдения и управления разделимы.

Поступила 19.04.04

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Фельдбаум А.А.** Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1969. 552 с.
- [2] **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.** Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. РАН. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294–1299.
- [3] **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 838–859.
- [4] **Леондес К.** Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980.
- [5] **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 9. С. 777–780.
- [6] **Gabasov R., Kirillova F.M. and Prischepova S.V.** Optimal Feedback Control. London: Springer, 1995. P. 202. (Lect. Notes Control and Inform. Sci.; 207).
- [7] **Gabasov R., Kirillova F.M.** Fast algorithms for positional optimization of dynamic systems // Proc. Workshop "Fast solutions of discretized optimization problems". Berlin: Birkhäuser Publishers, 2000. Vol. 138. P. 107–119.
- [8] **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 5. Минск: Университетское, 1998. С. 390.
- [9] **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978, 488 с.
- [10] **Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.** Оптимальное наблюдение за нестационарными динамическими системами // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2002. № 2. С. 35–46.
- [11] **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Численные методы программной и позиционной оптимизации кусочно-линейных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 11. С. 1658–1674.
- [12] **Оптимальное управление нелинейными системами / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, А.И. Калинин, Ф.М. Кириллова** // Журн. вычисл. математики и мат. физики. Т. 42. № 7. 2002. С. 969–995.
- [13] **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы оптимального управления и классические проблемы теории автоматического управления // Сб. "Нелинейн. теория упр. и ее прил." М.: Физматлит, 2000. С. 173–193.
- [14] **Qin S.J., Badgwell T.A.** An overview of industrial model predictive control technology // 5th Intern. Conf. Chemical Process Control. Amer. Inst. of Chemical Eng. 1996. P. 232–256.