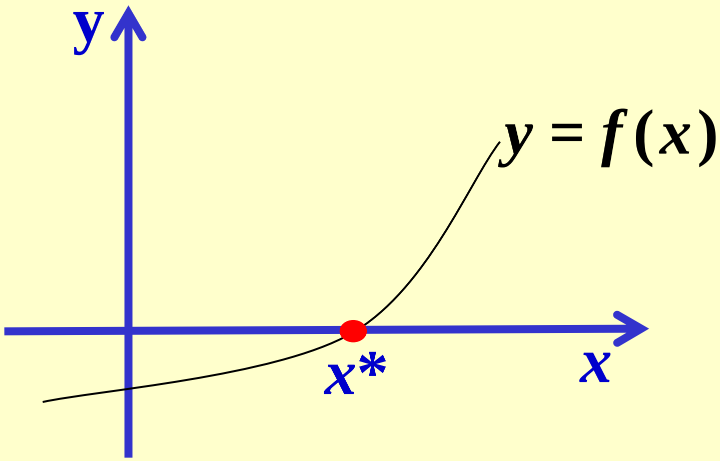
第七章 非线性方程求根

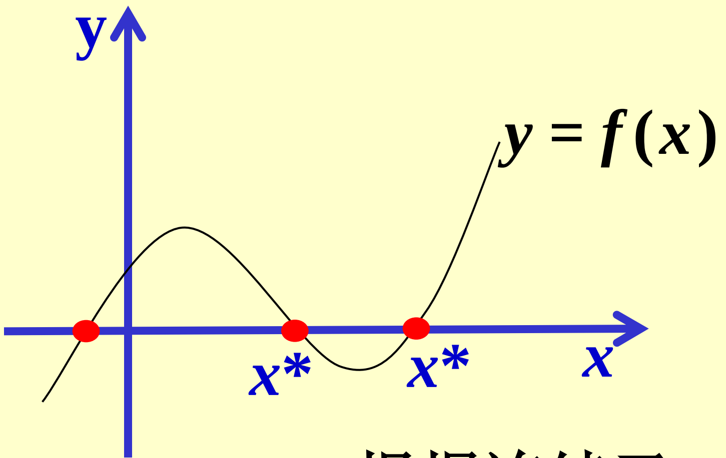
/* Solutions of Nonlinear Equations */

求 $f(x)=0$ 的根

- 数学物理中的许多问题常常归结为解函数方程 $f(x)=0$，
- 方程 $f(x)=0$ 的解 x^* 称作它的根，或称为 $f(x)$ 的零点。

即：

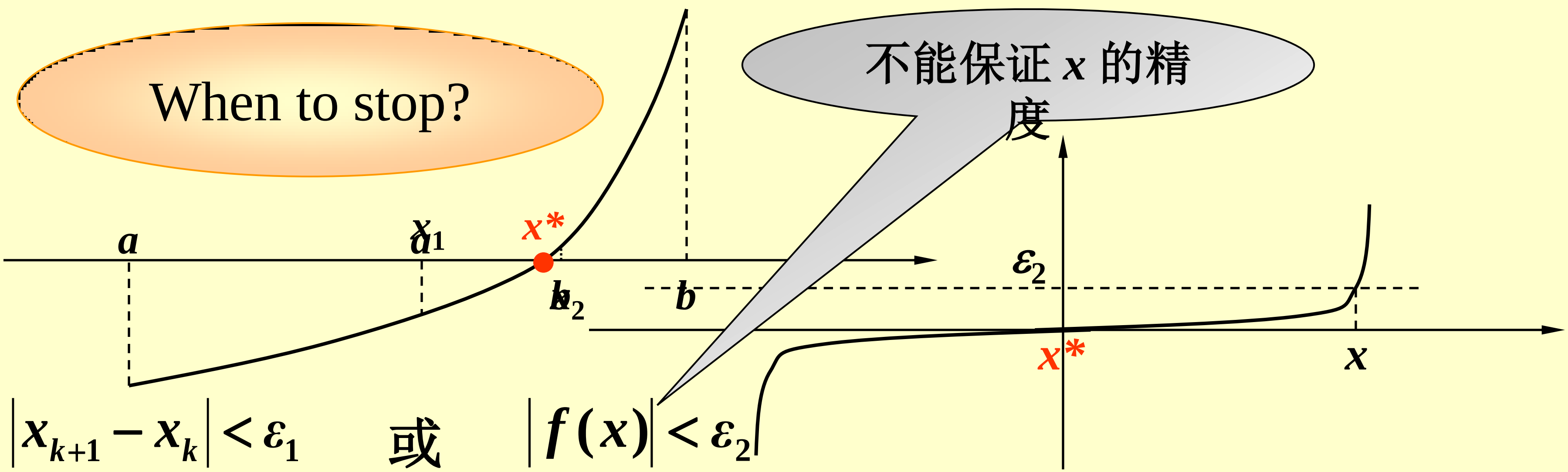




设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，根据连续函数的性质可知方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内一定有实根，这时称 (a,b) 为方程 $f(x)=0$ 的有根区间。

§1 二分法 /* Bisection Method */

二分法的思想是将有根区间折半进行搜索，即对有根区间 $[a,b]$，取中点 $x_1=(a+b)/2$ 将它分为两半，检查 $f(x_1)$ 与 $f(a)$ 是否同号，如果确系同号，说明所求的根 x^* 在 x_1 的右侧，这时令 $a_1=x_1, b_1=b$；否则 x^* 必在 x_1 的左侧，这时令 $a_1=a, b_1=x_1$，不管出现哪一种情况，新的有根区间仅为原来的一半，二分法的示意图如下：



$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1$ 或 $|f(x)|<\varepsilon_2$

误差分析：

第1步产生的 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ 有误差 $|x_1-x^*|\le\dfrac{b-a}{2}$

第 k 步产生的 x_k 有误差 $|x_k-x^*|\le\dfrac{b-a}{2^k}$

对于给定的精度 ε,可估计二分法所需的步数 k：

$$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad k>\frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}$$

①简单;
② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可) .

①无法求复根及偶重根
② 收敛慢

注：用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将 $[a, b]$ 分为若干小区间，对每一个满足 $f(a_k)\,f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序，可找出区间 $[a, b]$ 内的多个根，且不必要求 $f(a)\,f(b)<0$ 。

例 求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在[1.0,1.5]区间内的一个实根，要求准确到小数点后的第2位。

HW: p.229 #1

解： 二分过程解题过程见下表：

（这里 $a=1.0$, $f(a)<0$, $b=1.5$, $f(b)>0$）

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	1.5	1.25	−
1	1.25		1.375	+
2		1.375	1.3125	−
3	1.3125		1.3438	+
4		1.3438	1.3281	+
5		1.3281	1.3203	−
6	1.3203		1.3242	−

§ 2 简单迭代法 (Jacobi迭代) /* Fixed-Point Iteration */

已知 $f(x^*) = 0$, 求 $x^* = ?$

例 实验：在计算器上 输入一个数，　　再连续不断地按 sin 键，最后结果皆是 0, 为什么？用数学语言描述之。

解:

$$x_0 = 999$$

$$x_1 = \sin x_0 = \sin 999 = 0.9876$$

$$x_2 = \sin x_1 = \sin 0.9876 = 0.017$$

$$x_3 = \sin x_2 = \sin 0.017 = 0.0004$$

$$\vdots$$

$$x^* = 0$$

$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_k \rightarrow x_{k+1} \rightarrow \cdots \Rightarrow x^* = 0$

最后是 $x^* = \sin x^*$

$x^* - \sin x^* = 0$

$x^* = 0$ 是方程 $y = x - \sin x = 0$ 的根!

反过来看: 求 $y = x - \sin x = 0$ 的根

$$x - \sin x = 0 \Rightarrow x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \text{初始值} \\ x_{k+1} = \sin x_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

(三步曲)

如果 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots$ 有极限 x^*,

则 x^* 为方程 $x - \sin x = 0$ 的根。

那么, 对其它方程呢?

例　求 $f(x)=x^3-x-1=0$, 在 $x=1.5$ 附近的根.

解:

$$x^3-x-1=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \text{初始值} \\ x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}, \quad k=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

计算: $x_0=1.5$

$$x_1=\sqrt[3]{x_0+1}=\sqrt[3]{1.5+1}=1.35721$$

$$x_2=\sqrt[3]{x_1+1}=1.33086$$

$$\vdots$$

$$x_6 = 1.32473$$

$$x_7 = 1.32472$$

$$x_8 = 1.32472$$

$$\vdots$$

$$x^* \approx 1.32472$$

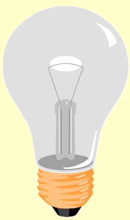
$$x^*=\sqrt[3]{x^*+1}$$

x^* 当然是方程的根。

已知 $f(x^*)=0$, 求 $x^*=?$

一般地: $f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$

$f(x)=0$ 的根 $\longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点



思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k)$ 可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即x^* 是φ 的不动点，也就是$f=0$的根。

迭代法是一种逐次逼近法，其基本思想是将隐式方程归结为一组显式的计算公式，就是说，迭代过程实质上是一个逐步显示化的过程。

例 设 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$（此方程在[1，2]中有唯一根），用不同的方法将它变换成等价的方程。

解：（1） $x=\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$

（2） $x=\varphi_2(x)=(\frac{10}{x}-4x)^{\frac{1}{2}}$

（3） $x=\varphi_3(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$

（4） $x=\varphi_4(x)=(\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$

（5） $x=\varphi_5(x)=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

对所选取的 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 取初始近似值 $x_0=1.5$，迭代法计算结果列入下表：

k	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.28695377	1.34839973	1.37333333
2	6.732	2.9969	1.40254080	1.36737631	1.36526201
3	−469.4	$(-8.65)^{1/2}$	1.34545838	1.36495701	1.36523001
4	1.03×10^8		1.37517025	1.36526475	
5			1.36009419	1.36522559	
6			1.36784697	1.36523058	
7			1.36388700	1.36522994	
8			1.36591673	1.36523002	
9			1.36487822	1.36523001	
10			1.36541006		
11			1.36522368		
12			1.36523024		
13			1.36522998		
14			1.36523001		

迭代过程发散

迭代过程中出现负数开方，发散

迭代过程收敛

➢ 简单迭代的收敛性：大小二个定理。

从简单出发：(思想和定理的来源)　简单的不用记,复杂的也能推了。

$$\begin{cases} x_0 = \text{初值} \\ x \ldots \end{cases}$$

方程 $x = Lx + b$ 求根。不妨设 $L > 0$

需要讨论如下问题：

1）如何选取合适的迭代函数 $\varphi(x)$ ？

2）迭代函数 $\varphi(x)$ 应满足什么条件，序列 $\{x_k\}$ 收敛?

3）怎样加速序列 $\{x_k\}$ 的收敛?

猜: 什

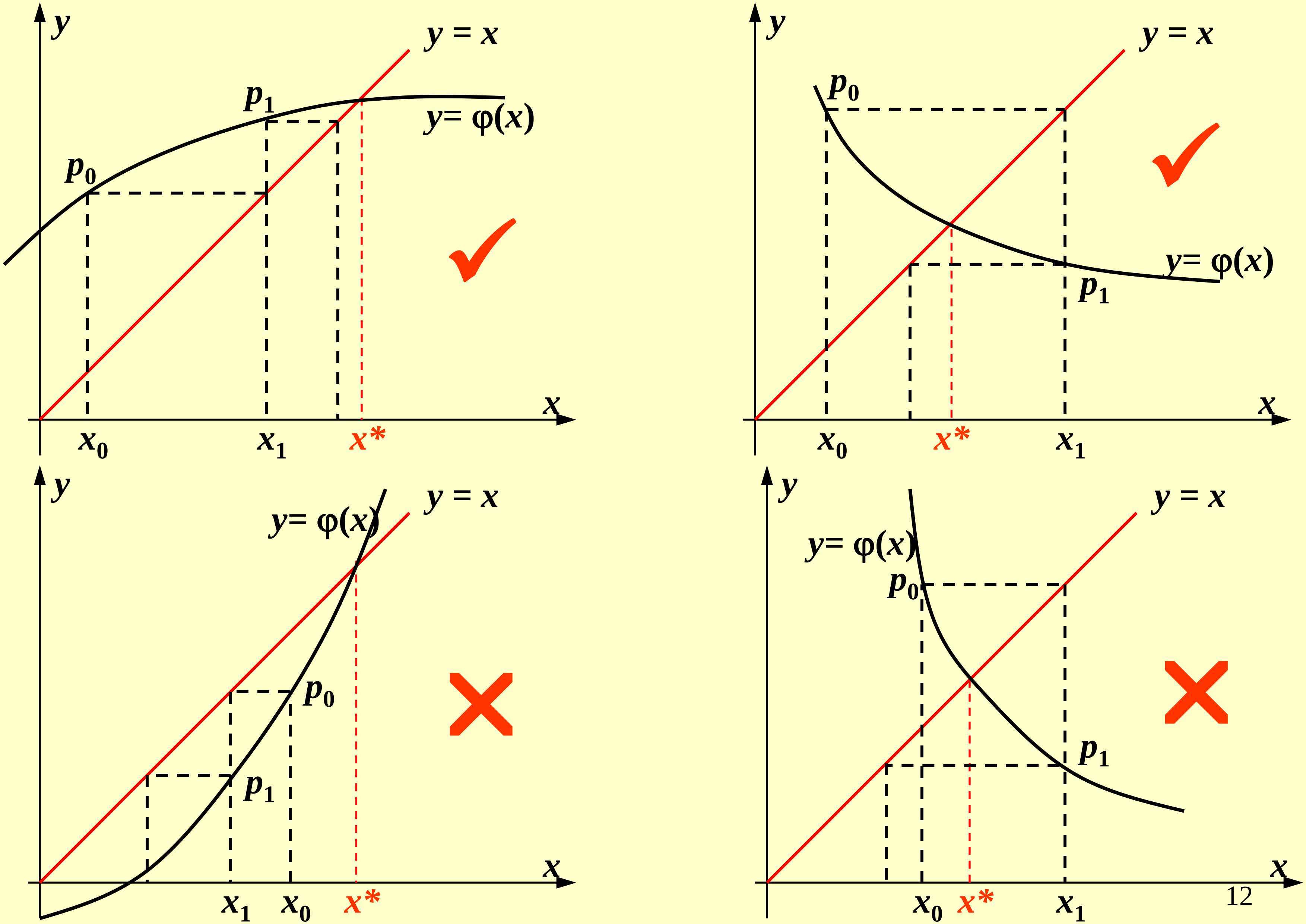
$|x_k - \ldots - x^*|$

$$= \cdots = L^k |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{k=\infty} |x_k - x^*| = \lim_{k\to\infty} L^k |x^0 - x^*| = a \lim_{k\to\infty} L^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L < 1$$

再猜: $L = (Lx + b)' \quad = |\varphi'(x)|$

➢ 迭代过程的收敛性



y
y = x
p1
y= φ(x)
p0
✓
x
x0
x1
x*
y
y = x
p0
✓
y= φ(x)
p1
x
x0
x*
x1
y
y = x
y= φ(x)
p0
✗
p1
x
x1
x0
x*
y
y = x
y= φ(x)
p0
✗
p1
x
x0
x*
x1

定理 考虑方程 $x = \varphi(x)$, $\varphi(x)\in C[a, b]$, 若

(I) 当 $x\in[a, b]$ 时， $\varphi(x)\in[a, b]$;

(II) $\exists\ 0 \le L < 1$ 使得 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ 对 $\forall\ x\in[a, b]$ 成立。

则任取 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于$\varphi(x)$ 在$[a, b]$上的唯一不动点。并且有误差估计式：

① $|x^*-x_k| \le \dfrac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$

② $|x^*-x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$ $\quad(k = 1, 2, \ldots)$

且存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k} = \varphi'(x^*)$

证明：① $\varphi(x)$ 在$[a, b]$上存在不动点？

令 $f(x)=\varphi(x)-x$ $\quad\because\ a\le\varphi(x)\le b$

$\therefore\ f(a)=\varphi(a)-a\ge 0,\quad f(b)=\varphi(b)-b\le 0$

$\Rightarrow f(x)$ 有根 ✓

② 不动点唯一？

反证：若不然，设还有 $\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$，则

$x^*-\tilde{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\tilde{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\tilde{x})$，$\xi$ 在 x^* 和 $\tilde{x}$ 之间。

$\Rightarrow\ (x^*-\tilde{x})(1-\varphi'(\xi))=0$ 而 $|\varphi'(\xi)|<1$ $\quad\therefore\ x^*=\tilde{x}$ ✓

③ 当$k\to\infty$时，x_k收敛到 x^*？

$$|x^*-x_k|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi_{k-1})|\cdot|x^*-x_{k-1}|$$

$$\le L|x^*-x_{k-1}|\le\ldots\ldots\le L^k|x^*-x_0|\to 0$$ ✓

④ $|x^* - x_k| \le \dfrac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$?

$$|x_{k+1} - x_k| \ge |x^* - x_k| - |x^* - x_{k+1}| \ge |x^* - x_k| - L|x^* - x_k|$$ ✓

可用$|x_{k+1} - x_k|$来控制收敛精度

⑤ $|x^* - x_k| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$?

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})|$$

$$\le L|x_k - x_{k-1}|$$ ✓

L 越 小 收敛越快

⑥ $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*)$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi'(\xi_k)(x^* - x_k)}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*)$$ ✓

例子: 1. 构造迭代公式并计算 2. 验证收敛性 3. 收敛速度分析

例 已知方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2.5$ 附近有一根, 试构造一个简单迭代公式, 说明收敛性, 并求根。

解: $x = \sqrt{2x+1}$

$$x_{k+1} = \sqrt{2x_k + 1},\quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$$

当 $1 < x < 3$ 时, $|\varphi'(x)| < 1$, 故收敛。

计算: $x_0 = 2.5$

$$x_1 = \sqrt{2\cdot 2.5+1} = 2.44949$$

$$x_2 = 2.428782$$

$\vdots$

$$x_{13} = 2.414214$$

$$x_{14} = 2.414214$$

$\vdots$

例 求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的根，若将方程改写为 $x = x^3 - 1$，建立迭代公式 $x_{k+1} = x_k^3 - 1$ 是发散的，

这是因为 $\varphi'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$

当 $x > 0.7$ 时，均有 $|\varphi'(x)| > 1$

例 考察迭代过程（a）$x_{k+1}=\varphi_3(x_k)=\frac{1}{2}(10-x_k^3)^{1/2}$和（b）$x_{k+1}=\varphi_4(x_k)=(\frac{10}{4+x_k})^{\frac{1}{2}}$的收敛性，当 $|x_k-x^*|<10^{-5}$ 时，确定（b）中迭代次数k。

解 对于迭代过程（b），迭代函数 $\varphi_4(x)=(\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$于是

$$|\varphi'_4(x)|=\left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}}\right|\le\frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}}<0.15$$

因此，迭代函数$\varphi_4(x)$在[1，2]上满足定理条件，故迭代过程（b）收敛。

由 $|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$ （ ε为给定精度要求）

迭代次数k应取 $k>\dfrac{\lg\varepsilon-\lg\dfrac{|x_1-x_0|}{1-L}}{\lg L}$

由要求$|x_k - x^*| < 10^{-5}$，应用上述公式，其中 $x_1 = 1.3439973$

$L_4 = 0.15$， $x_0 = 1.5$，则有

$$k > \frac{\lg 10^{-5} - \lg \dfrac{1.5 - 1.3439973}{0.85}}{\lg 0.15} = 6.97$$

于是，推得所要求迭代次数 $k = 7$。

对于迭代过程（a），迭代函数$\varphi_3(x) = \dfrac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

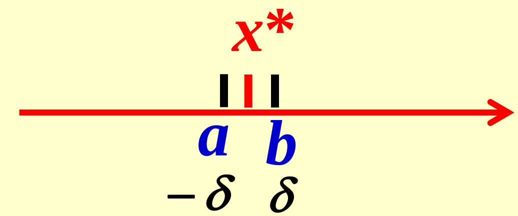
于是 $\varphi'_3(x) = -\dfrac{3}{4}\dfrac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}} < 0$

注意到$|\varphi'_3(2)| \approx 2.12$，所以在[1，2]上，定理中条件2) 不满足。但当$x \in [1, 1.5]$有$|\varphi'_3(x)| \le |\varphi'_3(1.5)| < 0.66 = L_3$迭代函数$\varphi_3(x)$在[1, 1.5]上满足定理的条件2，故迭代过程当初值限制在[1, 1.5]上时，迭代过程收敛。

注 此题中$L_4 < L_3$，可知迭代过程（b）比迭代过程（a）收敛快。

定理条件非必要条件，可将[a, b]缩小，定义局部收敛性（小范围收敛性）

考察根 x^* 附近的收敛性(局部、小范围)



定义 若存在 x^* 的某个邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$，使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根 x^* 邻近具有局部收敛性。即调整初值可得到收敛的结果。

定理 设 x^* 为方程 $x=\varphi(x)$ 的根，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$ 则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。

证明：因 $|\varphi'(x^*)|<1$，则存在邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$，$|\varphi'(x)|<1$，

（连续函数性质）

➢ 迭代法的收敛速度

定义 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到$\varphi(x)$ 的不动点 x^*。

设 $e_k = x_k - x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C > 0$，则称该迭代为$p$ 阶收敛，其中 C 称为渐近误差常数。当 $p = 1$ 时称作线性收敛，

当$p = 2$ 时称作平方收敛。

定理 设 x^* 为$x = \varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi \in C^p(R(x^*))$，$p \geq 2$；$\varphi'(x^*) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$，且 $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$，则 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在 $R(x^*)$ 内 p 阶收敛。

证明：
$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underset{\substack{\| \\ x^*}}{\varphi(x^*)} + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

$$\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} \xrightarrow{k\to\infty} C$$

线性收敛: $\varphi'(x^*) \neq 0$,

平方收敛: 只要 $\varphi'(x^*) = 0$, 但 $\varphi''(x^*) \neq 0$ 。

例 用不同的方法求方程 $x^2-3=0$ 的根 $x^*=\sqrt{3}$ 。

解：这里 $f(x)=x^2-3$，可改写为不同的等价形式$x=\varphi(x)$，其不动点为$x^*=\sqrt{3}$。

（1）$x=\varphi_1(x)=x^2+x-3,\ \varphi_1'(x)=2x+1,\quad \varphi_1'(x^*)=2\sqrt{3}+1>1$

（2）$x=\varphi_2(x)=\dfrac{3}{x},\ \varphi_2'(x)=-\dfrac{3}{x^2},\quad \varphi_2'(x^*)=-\dfrac{3}{3}=-1$

（3）$x=\varphi_3(x)=x-\dfrac{x^2-3}{4},\ \varphi_3'(x)=1-\dfrac{x}{2},\quad \varphi_3'(x^*)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1$

（4）$x=\varphi_4(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}\ \varphi_4'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{x^2},\ \varphi_4'(x^*)=0,\ \varphi_4''(x)=\dfrac{6}{x^3}$

取初值x_0=2,从计算结果看到迭代法(1) 及(2) 均不收敛, 且它们均不满足局部收敛条件, 迭代法(3) 和(4)均满足局部收敛条件, 且迭代法(4) 比(3) 收敛快, 因迭代法(3) 只是线性收敛,而迭代法(4) 中的 $\varphi_4'(x^*)=0,\ \varphi_4''(x^*)=\dfrac{6}{3\sqrt{3}}\neq 0$即该迭代过程为2 阶收敛。

HW: p.229 #4, #5, #6, #7

§ 3迭代过程的加速/* accelerating convergence */

1. 加速方法的构造 $\begin{cases} x_0 = \text{初值} \\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \ k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$

思想:

假设 $\varphi'(x) \approx L$, 此时

记 $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$

则 $x^* - \bar{x}_{k+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_k) = \varphi'(\xi)(x^* - x_k)$

$$\approx L(x^* - x_k) = Lx^* - Lx_k$$

$$x^* \approx \bar{x}_{k+1} + \frac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k)$$

取 $x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \dfrac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k)$

这一方法必须估计 $\varphi'(x) \approx L$,当然不现实, 怎么去掉 L 呢?

2. 埃特金（Aitken）算法

上面式子中, L 难求, 去掉之!

$$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)\ ,\ \ (x^* - \bar{x}_{k+1}) \approx L(x^* - x_k)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \varphi(\bar{x}_{k+1})\ ,\ \ (x^* - \tilde{x}_{k+1}) \approx L(x^* - \bar{x}_{k+1})$$

$$\frac{(x^* - \bar{x}_{k+1})}{(x^* - \tilde{x}_{k+1})} \approx \frac{\cancel{L}(x^* - x_k)}{\cancel{L}(x^* - \bar{x}_{k+1})}$$

则

$$x^* - \tilde{x}_{k+1} \approx -\frac{(\tilde{x}_{k+1} - x_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k}$$

取

$$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - \frac{(\tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k}$$

埃特金（Aitken）算法

设$\{x_k\}$是一个线性收敛序列，其极限为 x^*, 假设$\varphi'(x)$变化不大，

且 $\varphi'(x) \approx L$ ，则

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_{k+2}} \approx \frac{x^* - x_k}{x^* - x_{k+1}}$$

由此得

$$x^* \approx x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}$$

以上式右端得出的结果作为新的改进值，记

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}}$$

得到新序列$\{\bar{x}_k\}$较原序列$\{x_k\}$更快地收敛到 x^*。

可以证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\bar{x}_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=0$

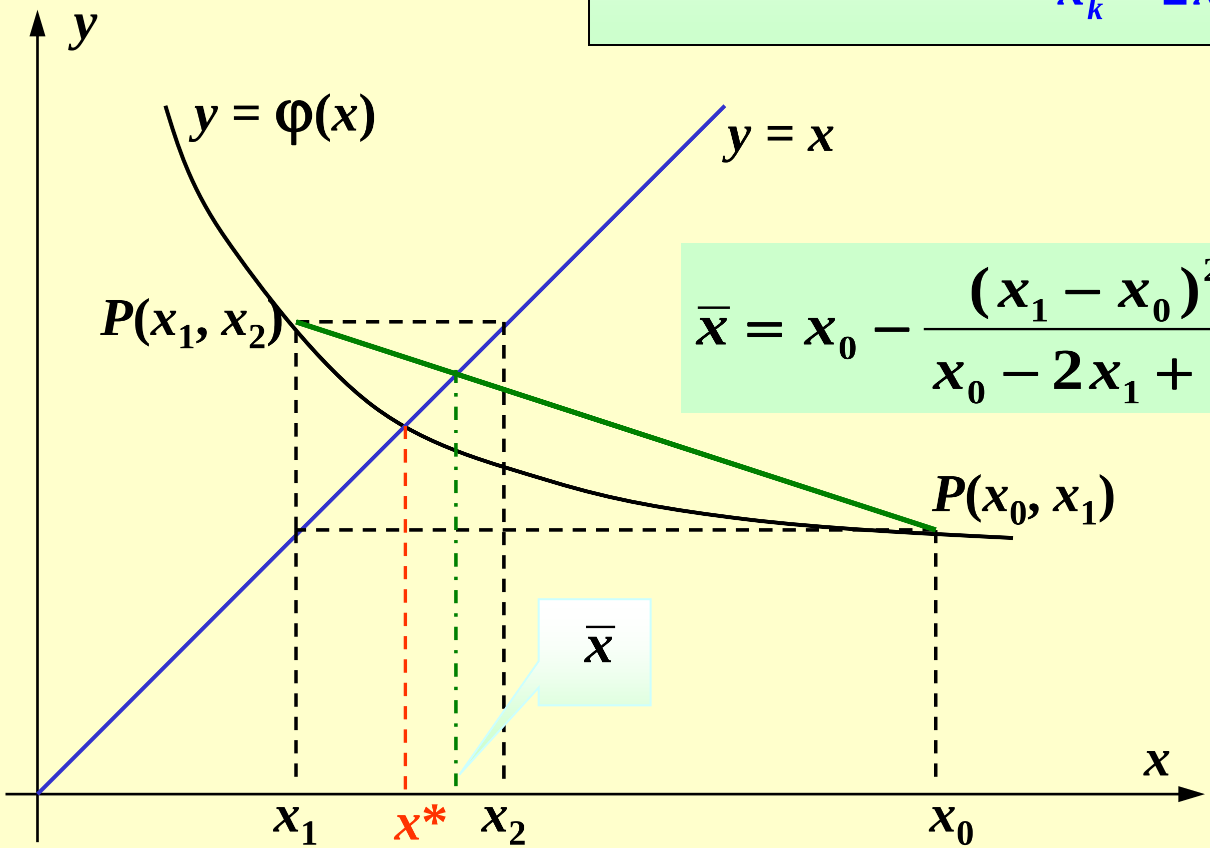
它表明序列$\{\bar{x}_{k+1}\}$的收敛速度比$\{x_k\}$的收敛速度快。

埃特金（Aitken）算法

迭代 $\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$

再迭代 $\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$

改进 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{(\bar{x}_{k+1}-x_k)^2}{x_k-2\bar{x}_{k+1}+\tilde{x}_{k+1}}$



$$\bar{x}=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-2x_1+x_2}$$

斯蒂芬森（steffensen）迭代法

埃特金方法不管原序列$\{x_k\}$是怎样产生的，对$\{x_k\}$进行加速计算，得到序列$\{\bar{x}_k\}$，如果把埃特金加速技巧与不动点迭代结合，则可得到如下的迭代法：

$$y_k=\varphi(x_k),\quad z_k=\varphi(y_k)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}\quad (k=0,1,\cdots)\qquad (*)$$

称为斯蒂芬森（steffensen）迭代法。它可以这样理解，我们要求$x=\varphi(x)$的根x^*，令$\varepsilon(x)=\varphi(x)-x,\ \varepsilon(x^*)=\varphi(x^*)-x^*=0$，已知$x^*$的近似值$x_k$及$y_k$，其误差分别为

$$\varepsilon(y_k)=\varphi(y_k)-y_k=z_k-y_k$$

$$\varepsilon(x_k)=\varphi(x_k)-x_k=y_k-x_k$$

把误差$\varepsilon(x)$"外推到零"，即过$(x_k,\varepsilon(x_k))$及$(y_k,\varepsilon(y_k))$两点做线性插值函数，它与x轴交点就是(*)中的 x_{k+1}，即方程

$$\varepsilon(x_k)+\frac{\varepsilon(y_k)-\varepsilon(x_k)}{y_k-x_k}(x-x_k)=0$$

的解

$$x=x_k-\frac{\varepsilon(x_k)}{\varepsilon(y_k)-\varepsilon(x_k)}(y_k-x_k)=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}=x_{k+1}$$

实际上（*）是将不动点迭代法计算两步合并成一步得到的，可将它写成另一种不动点迭代

$$x_{k+1}=\psi(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)$$

其中

$$\psi(x)=x-\frac{[\varphi(x)-x]^2}{\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x}$$

对不动点迭代 $x_{k+1}=\psi(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)$有以下局部收敛性定理。

定理 若x^*为迭代函数$\psi(x)$的不动点，则x^*为$\varphi(x)$的不动点。反之，若x^*为$\varphi(x)$的不动点，设$\varphi''(x)$存在，$\varphi'(x^*)\neq 1$则x^*是$\psi(x)$的不动点，且斯蒂芬森(steffensen)迭代法是2阶收敛的。

例：用斯蒂芬森迭代法求解方程$f(x)=x^3-x-1=0$。

解：　前例中已指出下列迭代$x_{k+1}=x_k^3-1$是发散的，现用斯蒂芬森加速法计算，取$\varphi(x)=x^3-1$，计算结果列入下表中。

k	x_k	y_k	z_k
0	1.5	2.37500	12.3965
1	1.41629	1.84092	5.23888
2	1.35565	1.49140	2.31728
3	1.32895	1.34710	1.4435
4	1.32480	1.32518	1.32714
5	1.32472		

计算表明它是收敛的，这说明即使迭代法不收敛，用斯蒂芬森加速法仍可能收敛。至于原来已收敛的迭代法，由定理可知它可达到2阶收敛。更进一步还可知若为p阶收敛，则斯蒂芬森加速法为$p+1$阶收敛。

例：求方程$3x^2-e^x=0$在$[3, 4]$中的解。

HW: p.229 #8

解：由方程得$e^x=3x^2$，取对数得

$$x=\ln 3x^2=2\ln x+\ln 3=\varphi(x)$$

若构造迭代法

$$x_{k+1}=2\ln x_k+\ln 3$$

由于$\varphi'(x)=\frac{2}{x}, |\max\limits_{3\le x\le 4}\varphi'(x)|\le\frac{2}{3}<1$，且当$x\in[3, 4]$时，$\varphi(x)\in[3, 4]$,

故知此迭代法收敛，若取$x_0=3.5$迭代16次得$x_{16}=3.73307$，有

六位

这里计算2步（相当于简单迭代法的4步）结果与x_{16}相同，说明用斯蒂芬森加速法的收敛速度比简单迭代法快得多。

入表中：

	x_k	y_k	z_k
0	3.5	3.60414	3.66202
1	3.73444	3.73381	3.73347
2	3.73307		