最小二乘法

多项式误差和 $\delta^2 = \sum (y - f(x))$

V_{λ_0} 是 T 的不变子空间，且 λ_0 的几何重数就是关于 λ_0 的线性无关特征向量

华中科技大学研究生课程考试试卷

Jordan 矩阵的数目等于 A 的不同的特征值的个数。

任何特征值的几何重数不大于其代数重数

$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$n_1+n_2+\cdots n_s=n$

n_i 为特征值的代数重数

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生　　考试日期 2014-12-16　　学生所在院系________

学号________　　姓名________　　任课教师________

Jordan 块的个数等于该 n 阶的代数无关特征向量的个数

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

n 阶方阵 A 可对角化（即相似于对角矩阵）的充分必要条件是，A 的最小多项式没有重根

矩阵特征值的模最大称为谱半径

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式：$A^2+A=2I$，问 A 是否可对角化 可对角化.　$\lambda^2+\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1\ \lambda=-2$.

幂零矩阵的特征值为 0

3. 矩阵的谱半径是指 矩阵特征值的~~模~~最大称为谱半径 $\rho(A)_{max}=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$.　$\rho(A)\le\|A\|_v$.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于 相应特征值的代数重数.

特征子空间~~的维数~~ 相应特征值的几何重数

5. 对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond\ (A)_p \ge 1$，当 A 为正交矩阵时 $cond\ (A)_2=$ 1.

6. 已知 $\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$，则其近似值 2.23607 有 ~~5~~ 6 位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为 2.236.

$\frac{1}{2}\times10^{-5}$　0.22×10^{-6}

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$ 2，$f[0,1,2,3,4]=$ 0.

n 次插值 $(n-1)$

n 为偶数 $(n-1)$ 多项

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_if(x_i)$ 至少有 ~~n-1~~ n 次代数精度.

$(n-1)+1=n$

$\varphi'(x)=|1+2\lambda x|<1$

$\Rightarrow 2\lambda\sqrt{3}<0 \Rightarrow \lambda<0$

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{3}$，则 λ 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$.

$\varphi'(x)=1+2\lambda x$　$|1+2\lambda\sqrt{3}|<1$　$-1<1+2\lambda\sqrt{3}<1$　$\Rightarrow -2<2\sqrt{3}\lambda$　$\Rightarrow \lambda>-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}$

11. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为次序统计量，则

$X_{(1)}{}^2+X_{(2)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$________.

$\varphi'(x)=|1+2\lambda x|<1$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<0$

相应特征值的线性无关的特征向量的个数，即特征子空间的维数，亦即相应特征值的几何重数

$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A|$ $=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-3&0\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$

12. 给出点估计评价的三个标准__________.

13. 给出假设检验中显著性水平 α 与统计假设 H_0 的关系________.

$=(\lambda-2)^2(\lambda-3)-(\lambda-3)$

14. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ 未知，σ^2 已知，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧区间估计为___________.

$\lambda_1=1$ 时 $AX=\lambda X$, $(A-I)x=0$

$=(\lambda^2-4\lambda+4-1)(\lambda-3)$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-3)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

15. 使用方差分析时对数据的要求是______ $\Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}x=0$

$\lambda_1=1$、$\lambda_{2,3}=3$（二重根）

$(\lambda-3I)^2x=0$

当 $\lambda_{2,3}$ 时 $(A-3I)x=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}x=0$

$\Rightarrow \xi_1=c_1[1\ \ 0\ \ -1]^T$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}x=0$ 秩为2

二、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 分，多答不加分。）

$\Rightarrow \xi_3=c_3[1\ \ 1\ \ 1]^T$ 或 $[0\ 1\ 0]^T$

$\Rightarrow \xi_2=c_2[1\ \ 0\ \ 1]^T$

16. 已知 R^3 中的两个基底 $B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从 B_1 到 B_2 的基变换矩阵。

$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac12&0&-\frac12\\\frac12&0&\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}$

$B_2=B_1P$

解 $B_2=B_1 d$ $\Rightarrow d=B_1^{-1}B_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

$P^{-1}=\frac12\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&2&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&0&-\frac12\\\frac12&-1&\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=$

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$

17. 设 R^4 中的向量 $x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$x_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$，分别张成 $w_1=span\{x_1,x_2\}$，$w_2=span\{x_3,x_4\}$，求 w_1+w_2 及 $w_1\cap w_2$ 的基底及维数。

$=\begin{bmatrix}\frac12&0&-\frac12\\\frac12&-1&\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \xi=-\frac32x_1+\frac92x_2=[-6\ \ \frac32\ \ 3\ \ \frac92]^T$

$[-4\ 1\ 2\ 3]$ 是 $w_1\cap w_2$ 的基底

解：设 $x_4=ax_1+bx_2+cx_3$ $\quad a\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 解得 $a=-\frac32$, $b=\frac92$, $c=\frac52$ $\Rightarrow x_4=-\frac32x_1+\frac92x_2+\frac52x_3$

18. 设 T 是线性空间 V^3 的线性变换，已知 T 在基 $B=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ 下的矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$

求 T 的特征值和对应的特征向量。

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&1\\1&\lambda+1&-1\\1&-2&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)+2-2-(\lambda+1)-2(\lambda-2)+2(\lambda-2)$

$=(\lambda-2)^2(\lambda+1)-(\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$

② $\lambda=1$ $(A-I)x=0$, $\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&2&1\end{bmatrix}x=0$, $\xi_2=c_2[1\ \ 0\ \ 1]^T$

$\Rightarrow v_2=c_2(\alpha_1+\alpha_3)$

③ 当 $\lambda=3$ $\xi_3=c_3[1\ \ -1\ \ -3]^T$

$\Rightarrow v_3=c_3(\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3)$

$w_1+w_2=span\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=span\{x_1,x_2,x_3\}$

其基底 $\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是基

$dim(w_1+w_2)=dim(w_1)+dim(w_2)-dim(w_1\cap w_2)$

$\Rightarrow dim(w_1+w_2)=3$

$\Rightarrow dim(w_1\cap w_2)=2+2-3=1$

19. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $AP=PJ$。

当 $\lambda=-1$ 时

$Ax=\lambda x$

$(A-\lambda I)x=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&0&1\\-1&2&3\end{bmatrix}x=0$

基础解系 $\xi_1=c_1[1\ -1\ \ 1]^T$

则所求是 B 的 A 特征向量

$V_1=c_1[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=c_1(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$.

设 $\xi\in W_1\cap W_2$

$\xi\in W_1$ $\xi=k_1x_1+k_2x_2$

$\xi\in W_2$, $\xi=k_3x_3+k_4x_4$

$\Rightarrow k_1x_1+k_2x_2=k_3x_3+k_4x_4$

$k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4=0$

$k_1=-\frac32k_4$

$k=c[-\frac32\ \ \frac92\ \ \frac52\ \ 1]$ $\Rightarrow[x_1,\ x_2,\ -x_3,\ -x_4]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$

20. 设 $A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，问 $\lim\limits_{k\to\infty} A^K=0$ 成立吗？若成立证明之。

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$，求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=2x_1(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t)\end{cases}$

$x(0)=[-1,1,0]^T$，求满足初始条件的特解。

细-差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
0	-1			
0	-1	-2		
1	0	1	3	
1	0	10	9	6

$\Rightarrow H_3(x)=-1+x(-2)+3x^2+6x^2(x-1)$

$=-1-2x+3x^2+6x^3-6x^2$

$=6x^3-3x^2-2x-1$

$\Rightarrow R_n(f)=\dfrac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^2(x-1)^2 \quad \eta\in(0,1)$

23. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 份，多答不加分。）

24. 对函数 $f(0)=-1$，$f'(0)=-2$, $f(1)=0$，$f'(1)=10$，试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出插值余项的表达式。

解：$H_3(x)=6x^3-3x^2-2x-1$

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$R_n(x)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}\rho(x)\cdot W_{n+1}^2(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

由题 $x_k=\cos\dfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi$ $\quad k=0,\dots$

并由此计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}dx$。

当 $n=1$ $\Rightarrow x_0=\cos\dfrac{\pi}{4}$ $\quad x_1=\cos\dfrac{3}{4}\pi$

解：由题意得 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{3+2x^2}\,dx$ 3 $\qquad I=\sum_{0}^{n=1}A_kf(x_k)$ $\qquad A_k=\dfrac{\pi}{n+1}=\dfrac{\pi}{1+1}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{3+2x^2}$ $\qquad \Rightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}=I=\dfrac{\pi}{2}\left[f(\cos\frac{\pi}{4})+f(\cos\frac{3}{4}\pi)\right]$

$=\dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}+\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}\right)=4\times\dfrac{\pi}{2}=2\pi$

26. 设有常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x)=f(x,y) \\ y(0)=a \end{cases}$的隐式中点公式

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_{n+\frac{h}{2}},\frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$$，证明该方法是无条件稳定的。

$\Rightarrow y_{n+1}=y_n+h\cdot\lambda\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$

解：对于基本模型 $y'(x)=f(x,y)=\lambda y$ ($\lambda<0$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$

$\Rightarrow (1-\frac{h\lambda}{2})y_{n+1}=(1+\frac{h\lambda}{2})y_n$ $\Rightarrow |E(\lambda)|=\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right|\le 1$

$\Rightarrow -1\le\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\le 1$

$\Rightarrow -1+\frac{h\lambda}{2}\le 1+\frac{h\lambda}{2}$ ·h3

$1+\frac{h\lambda}{2}\le 1-\frac{h\lambda}{2}$

$\Rightarrow h\lambda\le 0$.

所以该方法无条件收敛.

27. 方程$Ax=b$的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$，问$a$取何值时，Jacobi 迭代收敛？

$B_J=-D^{-1}(L+U)$

解：要使满足Jacobi迭代收敛

① $a\neq 0$

$D=\begin{bmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{bmatrix}$ $L+U=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow B_J=-\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$=-\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{2}{a} \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{5}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \lambda & \frac{2}{a} \\ 0 & \frac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix}$

$=\lambda^3-\frac{4}{a^2}\lambda-\frac{5}{a^2}\lambda$

$=\lambda(\lambda^2-\frac{9}{a^2})$

$\Rightarrow \lambda_1=0\quad \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{9}{a^2}}$

$\Rightarrow$ 要满足Jacobi迭代收敛

$\left|\pm\sqrt{\frac{9}{a^2}}\right|<1$

$\Rightarrow \frac{9}{a^2}<1$ $\Rightarrow a>3$或$a<-3$

$\Rightarrow a^2>9$ a的取值为 $\{a\,|\,a>3或a<-3\}$

28. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为总体X的一个样本，$EX=\mu$，μ未知。

（1）$\bar{X}$是否为μ的无偏估计？

（2）由$(X_1,\cdots,X_n)$构造μ的n个无偏估计.

（3）设$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,a_i>0,i=1,\cdots,n.$

问$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$是否为$\mu$的无偏估计，若是$\mu$的无偏估计，确定$a_i$，$i=1,\cdots,n$，使$\hat{\mu}$的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度，设服从正态分布，标准差$\sigma=0.048$，现抽取 5 根测得纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44，问在显著性水平$\alpha=0.10$下，能否认为σ^2无显著变化。（$\chi^2_{0.05}(4)=0.711$，$\chi^2_{0.95}(4)=9.488$）

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第i个厂的强度服从$N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,3$。检验三个厂的平均强度有无显著差异？$\alpha=0.05$（$F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$）

31. 已知y与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求y对x_1,x_2,x_3的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设$y=\beta_0\beta_1^x\varepsilon$（$\varepsilon$满足回归分析条件），求$\beta_0,\beta_1$的点估计，并求$\hat{y}=\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^x$.

$x=BA$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$B_1\xi = B_2\xi$

$(B_1-B_2)\xi=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow -x_3=0 \quad x_3=0$

$-x_1-2x_2=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2-x_3-x_4=2\\x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$ $\Rightarrow 2x_1-x_2=2$ $\quad x_1-x_2=1$

矩阵论习题

1.在 R^4 中，求向量 x 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下的坐标。设

$\Rightarrow 2x_3-2x_4=0 \Rightarrow x_3=x_4 \Rightarrow 2(x_3+x_4)=-1 \Rightarrow 4x_3=-1 \Rightarrow x_3=x_4=-\frac{1}{4}$

$x_1+x_2=1+\frac{2}{4}=\frac{3}{2}$ $\quad\alpha_1=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$，$\alpha_2=[1\ \ 1\ \ -1\ \ -1]^T$，$\alpha_3=[1\ \ -1\ \ 1\ \ -1]^T$，

$x_1-x_2=1$

$\Rightarrow 2x_2=\frac{1}{2}$ $\quad\alpha_4=[1\ \ -1\ \ -1\ \ 1]^T$；$x=[1\ \ 2\ \ 1\ \ 1]^T$.

基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\alpha$

$x_2=\frac{1}{4}$ 解：~~$x=\alpha A$~~

$x_1=\frac{5}{4}$ $\quad\alpha A=x$ $\quad\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]^T=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=[\frac{5}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}]$ 2.已知 R^3 中的两个基：

$B_1P=B_2 \Rightarrow P=B_1^{-1}B_2$

$\Rightarrow A=[\frac{5}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{4}]^T$

$P=B_1^{-1}B_2$

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(1).求 B_1 到 B_2 的基变换矩阵。

解：$B_2=B_1P \Rightarrow P=B_1^{-1}B_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

(2).求在 B_1，B_2 下有相同坐标的所有向量。

设在 B_1，B_2 有相同坐标的向量为 X

$B_1X=B_2X \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}X$

$\Rightarrow (B_2-B_1)X=0$

3.设 R^4 中的向量 $x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$ 分别张成子

$\Rightarrow$ 其仁 $C[-\frac{3}{2}\ \ \frac{9}{2}\ \ -\frac{5}{2}\ \ 1]^T$.

空间 $w_1=span\{x_1,x_2\}$ 和 $w_2=span\{x_3,x_4\}$。求 w_1+w_2 及 $w_1\cap w_2$ 的基和维数。

故 $X=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$

$\Rightarrow$ 其包括 $X=k_1[2\ \ -1\ \ 0]^T$

解：由题意得：$w_1+w_2=span\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ $\Rightarrow w_1+w_2=\{x_1,x_2,x_3\}$

$x_4=ax_1+bx_2+cx_3$ $\Rightarrow \dim(w_1+w_2)=3$

$x_3=0$ $\quad x_4=-\frac{3}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3$

4.设 V_1 和 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 和 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解 $\Rightarrow \dim(w_1+w_2)$

证明：$V_1\cap V_2=\{0\}$ $\because V_1+V_2=V_1\oplus V_2\subset R^n$

$=\dim(w_1)+\dim(w_2)-\dim(w_1\cap w_2)$

空间，证明：$R^n=V_1\oplus V_2$。$\dim(V_1)=n-1 \quad \dim(V_2)=1$

$\dim(V_1)+\dim(V_2)=n$

$\dim(V_1+V_2)=n \cdot V_1\oplus V_2=R^n$

$\xi=k_1x_1+k_2x_2 \Rightarrow \xi=-x_1+3x_2=-\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\\2\\3\end{bmatrix}=[-4\ \ 1\ \ 2\ \ 3]^T$ $\Rightarrow \dim(w_1\cap w_2)=2+2-3=1$

$=-\frac{3}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2$ 5.设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 R^4 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\}$，求 $w_1\cap w_2$ 的基

$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$R^4=V_1\oplus V_2$.

$a(2\alpha_1+\alpha_2)+b\alpha_1+c(\alpha_3-\alpha_4)+d(\alpha_1+\alpha_4)$

$V_1+V_2=V_1\oplus V_2$ 证明 $R^4=V_1\oplus V_2 \Rightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

要证 $V_1+V_2=\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$

$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=d\\a=0\\c=0\\-c=d\end{cases}$ $\Rightarrow a=b=c=d=0$ $\quad V_1\cap V_2=\{0\}$

$\xi=k_1x_1+k_2x_2$ 存在 k_3,k_4 $\quad\xi=k_3x_3+k_4x_4$

$\dim(V_1)=2$

6. 设 T_1 是 V^n 到 V^m 的线性变换，T_2 是 V^m 到 V^r 的线性变换，定义 V^n 到 V^r

$\dim(V_1+V_2)=4$ $\quad\Rightarrow R^4=V_1\oplus V_2$.

$R^4=V_1+V_2$

$k_1x_1+k_2x_2=k_3x_3+k_4x_4$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-2&1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$ $\quad[x_1\ \ x_2\ \ -x_3\ \ -x_4]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$ $\quad\Rightarrow k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4=0$

$[k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4]^T=C[-\frac{3}{2}\ \ \frac{9}{2}\ \ -\frac{5}{2}\ \ 1]^T$

C为任意非零实数.

1. 证明：$T_2\cdot T_1(\alpha+\beta) = T_2\cdot[T_1(\alpha+\beta)] = T_2\cdot T_1\alpha + T_2 T_1\beta$ 分配律

$T_2\cdot T_1(k\alpha) = T_2\cdot k\,T_1(\alpha) = k\,T_2 T_1(\alpha)$ 结合律

已知 T_1，T_2 都是 V 的线性变换

的变换 $T_2 \bullet T_1$ 为

$$(T_2 \bullet T_1)\alpha = T_2(T_1\alpha), \forall \alpha \in V^n。$$

证明，$T_2 \bullet T_1$ 是线性变换。

$T_2\cdot T_1(k\alpha) = T_2\cdot[kT_1\alpha] = k\,T_2\cdot T_1(\alpha)$

$TB_1 = B_1A \Rightarrow$

$TB_2 = B_2X$

7.已知 R^3 的线性变换 T 在基

$TB_2 = B_2A'$　解：$TB_1 = B_1A$

$TB_1 = B_1A$

$TB_2 = B_2X$

$\Rightarrow B_1A = B_2X$

$\Rightarrow X = B_2^{-1}B_1A$

$TB_1 = B_1A$

$T = B_1AB_1^{-1}$

$TB_2 = B_2X$

$\Rightarrow B_1AB_1^{-1}B_2 = B_2X$

$\Rightarrow X = B_2^{-1}B_1AB_1^{-1}B_2$

$\underline{B_1A = B_2X}$

$\Rightarrow X = B_2^{-1}B_1A$

$$B_1 = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow \underline{X = B_2^{-1}B_1AB_1^{-1}}$

下的矩阵是

$$B_2 = \begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix},$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&-2&0\\-4&5&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&3&-5\\-1&0&3\end{bmatrix}$$

求 T 在基

$\Rightarrow B_2^{-1}\cdot B_1A$

$$= \begin{bmatrix}-1&-1&1\\3&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$B_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}1&-2&0\\-4&5&-1\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

下的矩阵。

$$= \begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&3&-5\\-1&0&3\end{bmatrix}$$

$kT(T^{-1}\alpha) = TkT^{-1}\alpha$

$kT(T^{-1}\alpha) = T(kT^{-1}\alpha)$

$T^{-1}(k\alpha) = T^{-1}kTT^{-1}\alpha = (T^{-1}T)kT^{-1}\alpha = kT^{-1}\alpha$ 得证

8.V 的变换 T 称为可逆的，如果存在 V 的变换 S，使 $T \bullet S = S \bullet T = I$。这时 S 称为 T 的逆变换，记为 T^{-1}，证明

$T^{-1}(\alpha+\beta) = T^{-1}[T(T^{-1}\alpha) + T(T^{-1}\beta)]$

$= T^{-1}T(T^{-1}\alpha + T^{-1}\beta)$

$= T^{-1}\alpha + T^{-1}\beta$

T^{-1} 也是线性变换

（1）若线性变换 T 是可逆的，则 T^{-1} 也是线性变换；

反证法：若 $\lambda = 0$ 是 T 的特征值 $\alpha \neq 0$ 是相应特征向量

$T\alpha = \lambda\alpha$

$T\alpha = \lambda\alpha$（2）T 的特征值一定不为零；

$\alpha = T^{-1}T\alpha = T^{-1}(\lambda\alpha) = T^{-1}(0) = 0$ 矛盾

（3）若 λ 是 T 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 T^{-1} 的特征值。

$T^{-1}(k\alpha) = T^{-1}[k\cdot T(T^{-1}\alpha)] = T^{-1}TkT^{-1}\alpha$

$= kT^{-1}\alpha$

(3) $T\alpha = \lambda\alpha$

$\alpha = T^{-1}(\lambda\alpha)$

$= \lambda T^{-1}(\alpha)$

$\Rightarrow T^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\alpha$ 所以是 T^{-1} 的特征值

$T(\alpha+\beta) = T\alpha + T\beta$

$T(k\alpha) = kT\alpha$

$T^{-1}(\alpha+\beta) = T^{-1}(TT^{-1}\alpha + TT^{-1}\beta)$

$= T^{-1}T(T^{-1}\alpha + T^{-1}\beta) = T^{-1}\alpha + T^{-1}\beta$

$T^{-1}(k\alpha) = T^{-1}(kTT^{-1}\alpha) = T^{-1}TkT^{-1}\alpha = kT^{-1}\alpha$

$TB=BA \qquad B=T^{-1}(BA) \qquad T^{-1}B=BA^{-1}$

$\Rightarrow T^{-1}B=BA^{-1}$

$V_1=k_1\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$

$V_2=k_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-\frac{5}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$

又若T在基B下的矩阵是A，那么T^{-1}在B下的矩阵是什么？ BA^{-1}

BA^{-1}

$T: V_1=k_1\left[-4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$

9.设T是复数域上线性空间V的线性变换，已知V的基B和T在B下的矩阵A如下，求T的特征值和特征向量：

$TB=BA$

当$\lambda=7$ $(A-\lambda I)X=0$ $\begin{pmatrix}-4&4\\5&-5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0 \Rightarrow$ 特征向量

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$

$X=k_1[1\ 1]^T$

（1） $B=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]$， $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$；

k_1为非零常数

$\Rightarrow |\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2&-2&1\\1&\lambda+1&-1\\1&-2&\lambda-2\end{bmatrix}$

$\lambda=-2$，$(A+2I)X=0$ $\begin{bmatrix}5&4\\5&4\end{bmatrix}X=0$

$X=k_2[1\ -\frac{5}{4}]^T$

（2） $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$， $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$.

k_2为非零常数

$\Rightarrow |\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)-2+2-(\lambda+1)+2(\lambda-2)-2(\lambda-2)-$

$|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda-2)-20$

$=\lambda^2-5\lambda-14=0$ $\Rightarrow\lambda=7$ 或$\lambda=-2$

$=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$

故T的特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$.

当$\lambda_1=-1$时，$AX=\lambda X \Rightarrow (A-\lambda I)X=0$

10.求下列方阵的最小多项式：

$$\begin{pmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&1&&\\-4&-1&&\\&&2&1\\&&-1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&1&1&1\\-4&-1&-1&1\\&&2&1\\&&-1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&2&&\\1&3&&\\&&4&1\\&&0&4\end{pmatrix}$$

$\lambda=-1$ $\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&0&1\\-1&2&3\end{bmatrix}X_1=0$

$X_1=k_1[1\ -1\ 1]^T$

$\lambda=1$时

$(\lambda-3)^3$ $(\lambda-3)$ $(\lambda-3)^2$ $(\lambda-3)^2$ $(\lambda-1)^2$ $(\lambda-1)(\lambda-4)$ $(\lambda-4)^2$

$(\lambda-3)^3$ $(\lambda-3)(\lambda+1)+10$ $(\lambda-2)\lambda+1$ $(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+1$ $\Rightarrow(\lambda-1)^2$

$\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ $(\lambda-4)^2$

$\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&2&1\end{bmatrix}X_2=0$

$(\lambda-2)(\lambda-3)-2$

$=\lambda^2-5\lambda+4$

$=(\lambda-1)(\lambda-4)$

$X_2=k_2[1\ 0\ 1]^T$

$(\lambda-1)(\lambda-4)^2$

11.满足下述条件的方阵A是否可对角化？

$A\neq0$ $\lambda=0$ 不可对角化

（1） A是幂零矩阵； 不可对角化 $A^k=0$ $|A|=0$

$\lambda_3=3$ $\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-1&-4&1\\-1&2&-1\end{bmatrix}X_3=0$

$X_3=k_3[1\ -1\ -3]^T$

可对角化

（2） $A^k=I(k\geq2)$； 可对角化 ~~不可对角化~~ 实数域不可。

$A^k=I$ $(A-I)($ $\lambda=0$

T对应的特征向量 $V_1=k_1(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$

$V_2=k_2(\alpha_1+\alpha_3)$

$V_3=k_3(\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3)$

（3） $A^2+A=2I$. A的特征值λ $\lambda^2+\lambda=2$ $\lambda=1,\lambda=-2$. 可以对角化.

$\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda^{k-1}\cdots)=0$ 可对角化

无重根.

构造的多项式 $\begin{cases}a+b+c=-5\\2a+b=-43\\9a+3b+c=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=32\\b=-107\\c=70\end{cases}$

12.已知$A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，求$g(A)=A^8-9A^6+A^4-3A^3+4A^2+I$.

$\Rightarrow g(A)=32\begin{bmatrix}5&-4&-8\\-4&5&8\\0&0&1\end{bmatrix}-107\begin{bmatrix}2&-1&-2\\-1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}+70\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow g(A)=32A^2+(-107)A+70I$

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&2\\1&\lambda-2&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

13. 下述的$f(\lambda)$，$m(\lambda)$分别表示矩阵A的特征多项式和最小多项式，

$=\begin{bmatrix}16&-21&-42\\-21&16&42\\0&0&-5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

$\Rightarrow g(1)=1-9+1-3+4+1=-5$

$a+b+c=-5$

$\Rightarrow g(\lambda)=h(\lambda)f(\lambda)+r(\lambda)$

$g'(1)=8\lambda^7-54\lambda^5+4\lambda^3-9\lambda^2+8\lambda|_1=8-54+4-9+8=-43$

$\Rightarrow r(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$

$\Rightarrow g'(\lambda)=h'(\lambda)f(\lambda)+h(\lambda)f'(\lambda)+r'(\lambda)$

$g(\lambda)=\lambda^8-9\lambda^6+\lambda^4-3\lambda^3+4\lambda^2+1$

$g'(1)=2a+b=-43$

$g(3)=3^8-3^8+3^4-3^4+4\times3^2+1=4\times9+1=37$

确定A的可能的$Jordan$标准形：

(1). $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$，$m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

(2). $f(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+2)^3$，$m(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+2)$

14. 求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为$Jordan$矩阵，其中：

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{pmatrix}。$$

$P^{-1}AP=J$

$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&2&-1\end{pmatrix}$

15. 设V^4是由函数e^x，xe^x，x^2e^x，e^{2x}张成的线性空间，求V^4的线性变换$D=\frac{d}{dx}$的$Jordan$标准形。

$\lambda=2$，$z_1=(0\ 0\ 0\ 1)^T$　$\lambda=1$，$z_2=(1\ 0\ 0\ 0)^T$，$z_3=(0\ 1\ 0\ 0)^T$

$z_4=(0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0)^T$

$(A-I)z_3=z_2$

$(A-I)z_4=z_3$

14. 解：由题意得，

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&1\\-2&\lambda-2&1\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)(\lambda-2)\lambda+2+4+2(\lambda-2)-2\lambda+2(\lambda-3)$

$=(\lambda-3)(\lambda-2)\lambda+\cancel{6}+\cancel{2\lambda}-\cancel{4}-\cancel{2\lambda}+2\lambda-\cancel{6}$

$=(\lambda-3)(\lambda-2)\lambda+2(\lambda-2)$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)$

$=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-2)$

$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ＝重根

$(A-2I)x_3=x_2$

$P^{-1}: \frac{1}{c}\cdot 2\cdot c=2$

$\Rightarrow c=1$

$(A-\lambda I)x_3=x_2$

$D=\frac{d}{dx}=\{e^x,\ e^x+xe^x$

$[e^x\ \ xe^x\ \ x^2e^x\ \ e^{2x}]A$

$=[e^x\ \ e^x+xe^x\ \ x^2e^x+2xe^x\ \ 2e^{2x}]$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$A=\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$

求其初等

$(A-2I)x=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&-1\\2&2&-2\end{bmatrix}x=0$

系数矩阵$A-2I$的秩为2.

基础解系只有$x_2=k[1\ 1\ 2]^T$

$(A-I)x=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\2&2&-1\end{bmatrix}x=0$

$\Rightarrow x_1=k[1\ 0\ 2]^T$

$(A-2I)^2x=0$

$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (\lambda-1)^3(\lambda-2)=|\lambda I-A|$

$\Rightarrow (A-\lambda I)x=0$

有两个约当块

$\Rightarrow$ 所以，$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

华中科技大学研究生课程考试答题纸

课程名称：矩阵论、数值分析　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别________ 考试日期 2009.11.26 学生所在院系________

学号________ 姓名________ 任课教师________

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）

ch6 1. $A=\begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，当 a 满足条件 $a\neq-1$ 或 $a\neq 3$ 时，A 可作 LU 分解，当 a 满足条件 $a>3$ 时，必有分解式 $A=LL^T$，其中 L 是对角线元素为正的下三角阵。

顺序主子式 $D_k\neq 0$

$a\neq-1$ 或 $a\neq 3$

$a>3$

2. 设 $A\in R^{n\times n}$ 且 $\|\cdot\|$ 为 $R^{n\times n}$ 上矩阵为算子范数，则 $cond(A)\geq$ 1 。 $Cond(A)\geq 1$

ch2 3. 设 T 是线性空间 V 的线性变换，已知 V 的基 $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 和 T 在 B 下的矩阵

$\lambda I-A=$

$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 2\end{pmatrix}$，则 T 的特征值为 λ 7 或 -2；特征向量 ξ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\-\frac{5}{4}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{9}{5}\end{bmatrix}$

$\xi=B\alpha$

$\lambda-3$

ch2 4. 设 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 V^3 的一个基，V^3 上的线性变换 T 将 a_1,a_2,a_3 分别映为 $-a_1+2a_2+a_3$，$a_1+a_2-a_3$，$2a_1-a_2+a_3$，则 T 在这个基下的矩阵是 $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\2 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$。 $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\2 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

ch2 5. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times 3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵

$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$。 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

ch1 6. 计算 $y=1000+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{2000}$，给出了两种运算顺序，（A）从左到右相加，（B）从右到左相加，应选择运算顺序 B B 可使计算结果接近于真值。 x^7+x^5+1

ch2 7. 若 $f(x)=x^7+x^5+1$，则 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=$ 1 . $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)l_i(x)=$ x^7+x^5+1 其中 $l_i(x)$ 是 Lagrange 基函数。

2

ch4 8. 设 $f(x)\in C\ [a,b]$，则计算 $\int_a^b f(x)dx$ 的复化梯形公式是 ~~x~~ 2 阶收敛的。 复化Simpson公式 4阶收敛

ch4 9. 具有 n 个节点的插值型的求积公式，其代数精度至少可达 $n-1$ 次。 复化柯特斯公式 6阶收敛

$n-1$

复化

令 $P(x)=x^2(ax^2+bx+c)$

将 $P(1)=P'(1)=1, P(2)=1$ 代入得

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+3b+2c=1 \\ 16a+8b+4c=1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=\frac{9}{4} \end{cases}$ ∴ $P(x)=x^2(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}) = \frac{1}{4}x^2(x^2-6x+9) = \frac{1}{4}x^2(x-3)^2$

ch2 二、（8 分）求一个次数不超过 4 的多项式 $P(x)$，使它满足

P50.11

$P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=1, P(2)=1$，并写出其余项表达式.

ch3 三、（8 分）已知试验数据 $A^TAa=A^Ty$

P85.7

x	0	1	2	3	5
y	1.1	1.9	3.1	3.9	4.9

试用最小二乘法求经验直线 $y=a_0+a_1x$。

$\sum_{i=1}^{5}1=5, \sum_{i=1}^{5}1\cdot x_i=11, \sum_{i=1}^{5}x_i^2=39, \sum_{i=1}^{5}(\varphi_0,y_i)=14.9$

$\sum_{i=1}^{5}(\varphi_1,y_i)=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=44.3$

法方程组 $\begin{cases} 5a_0+11a_1=14.9 \\ 11a_0+39a_1=44.3 \end{cases}$ $a_0=$ $a_1=$

ch4 四、（10 分）利用正交多项式构造两点 Gauss 型求积公式

$\Rightarrow (p_2, p_0)=0$

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx \approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

两点 $n=1$ $\quad p_0(x)=1 \quad p_1(x)=x$

$\Rightarrow$ 代数精度 $2n+1=3$ 阶

并问，（1）所得求积公式的代数精度是多少？3阶

令 $p_2(x)=x^2+bx+c$

$\int_{-1}^{1}(x^2+bx+c)(1+x^2)dx = \int_{-1}^{1}[x^2+bx+c+x^4+bx^3+cx^2]dx$ Gauss

（2）用所得求积公式计算 $\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x^4+3x^2+2x-1)dx$ 时的截断误差是多少？

$R_n(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}(1+x^2)\cdot(x-\sqrt{\frac{3}{5}})^2(x+\sqrt{\frac{3}{5}})^2dx$

ch7 五、（10 分）对方程 $f(x)=4-2^x-x=0$ 用迭代法求根，若化成 $x=4-2^x$，问迭代是否收敛？

$b=0$ $\quad \frac{2}{3}+2c+\frac{2}{5}+\frac{2c}{3}=0$ $\quad \varphi(x)=-\ln 2\cdot 2^x$ [illegible]

若不收敛，试构造求方程根收敛的迭代格式.

$\Rightarrow x^2-\frac{3}{5}=0$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad \Rightarrow \frac{8c}{3}=-(\frac{2}{3}+\frac{2}{5})=-\frac{16}{15}$ $\quad \Rightarrow c=-\frac{16}{15}\times\frac{3}{8}=-\frac{2}{5}$

ch5 六、（8 分）设有 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$，试构造形如 $y_{n+1}=\alpha(y_n+y_{n-1})+h(\beta_0f_n+\beta_1f_{n-1})$ 的二阶方法，

P154.9

并推导其局部截断误差首项.

$\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x^2-\frac{3}{5})^2dx$

$g(\lambda)=\lambda^8-9\lambda^6+\lambda^4-3\lambda^3+4\lambda^2+1$

$\begin{cases} g(1)=0 \\ g'(1)=1 \\ g(3)=0 \end{cases}$

ch2 七、（8 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $g(A)=A^8-9A^6+A^4-3A^3+4A^2+I$.

$|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)$

$=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-3)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

$\frac{1}{4!}[(1+x^2)(x^4-\frac{6}{5}x^2+\frac{9}{25})]$

$[x^4-\frac{6}{5}x^2+\frac{9}{25}+x^6-\frac{6}{5}x^4+\frac{9}{25}x^2]$

ch2 八、（8 分）设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $AP=PJ$.

$2[\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{9}{25}+\frac{1}{7}-\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{9}{25}\times\frac{1}{3}]$

ch6 九、（10 分）给定方程组 $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$；

P205.22

$B_J=-D^{-1}(L+U)$

（1）确定 a 的取值范围使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛.

（2）当 $a=2$ 时，用三角分解法求解方程。

$A=LU \Rightarrow Ax=b \quad LUx=b \quad LY=b$

$Y=UX$

ch12 十、（6 分）设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 是 R^4 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\}$，

$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_4, \alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$R^4=V_1\oplus V_2$

证明：

$\xi\in(V_1\cap V_2)$

$C_1(2\alpha_1+\alpha_2)+C_2\alpha_1=C_3(\alpha_3-\alpha_4)+C_4(\alpha_1+\alpha_4)$ $\quad V_1\cap V_2=\{0\}$

$\Rightarrow a(2\alpha_1+\alpha_2)+b\alpha_1=c(\alpha_3-\alpha_4)+d(\alpha_1+\alpha_4)$

$(2C_1+C_2-C_4)\alpha_1+C_1\alpha_2-C_3\alpha_3+(C_3-C_4)\alpha_4=0$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 R^4 上一个基.

$2C_1+C_2-C_4=0$ $\quad$ 故 $\xi=\{0\}$，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$

$C_1=0$ $\quad$ 即 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases}$ $\quad$ 所以 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2\subset R^4$

$C_3=0$

$\begin{cases} 2a+b=d \\ a=d \\ c=0 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow a=b=c=d$

$V_1\cap V_2=\{0\}$ $\quad V_1+V_2=V_1\oplus V_2$

$\Rightarrow b=0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow dim(V_1+V_2)=dimV_1+dimV_2=4=dim(R^4)$

$\Rightarrow R^4=V_1+V_2$