

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 ☒公共课 ☐专业课 考核形式 ☐开卷 ☒闭卷

学生类别 研究生 考试日期 2014-12-16 学生所在院系 _____

学号 _____ 姓名 _____ 任课教师 _____

一、填空题 (任选 10 小题, 每小题 2 分, 共计 20 分, 多答不加分。)

1. 设 $A = \{A_{ij}\}_{3 \times 3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ 则与 A 相似的对角阵

$$B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

2. 设矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 满足等式: $A^2 + A = 2I$, 问 A 是否可对角化_____.

3. 矩阵的谱半径是指_____.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于_____.

5. 对任何非奇异矩阵 A , 都有 $\text{cond}(A)_p$ _____ 1, 当 A 为正交矩阵时 $\text{cond}(A)_2$ = _____.

6. 已知 $\sqrt{5} = 2.236067977499\ldots$, 则其近似值 2.23607 有_____位有效数字, 通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为_____.

7. 已知 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f[0,1,2,3] =$ _____, $f[0,1,2,3,4] =$ _____.

8. 当 n 为奇数时, 等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n = (b-a) \sum_{i=1}^n C_i f(x_i)$ 至少有_____次代数精度.

9. $\varphi(x) = x + \lambda(x^2 - 3)$, 要使迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^* = \sqrt{3}$, 则 λ 的取值范围是_____.

10. 试写出方程 $f(x) = x^3 - a = 0$ 的牛顿迭代格式_____.

11. 设 (X_1, \dots, X_n) 为 $X \sim N(0,1)$ 的样本, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 为次序统计量, 则

$$X_{(1)}^2 + X_{(2)}^2 + \dots + X_{(n)}^2 \sim \text{_____}.$$

12. 给出点估计评价的三个标准_____.
13. 给出假设检验中显著性水平 α 与统计假设 H_0 的关系_____.
14. 设 (X_1, \dots, X_n) 为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ 未知, σ^2 已知, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧区间估计为_____.
15. 使用方差分析时对数据的要求是_____.

二、计算证明题 (任选 4 题, 每小题 10 分, 满分 40 分, 多答不加分。)

16. 已知 R^3 中的两个基底 $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, 求从 B_1 到 B_2 的基变换矩阵。

17. 设 R^4 中的向量 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, 分别张成

$w_1 = \text{span}\{x_1, x_2\}$, $w_2 = \text{span}\{x_3, x_4\}$, 求 $w_1 + w_2$ 及 $w_1 \cap w_2$ 的基底及维数。

18. 设 T 是线性空间 V^3 的线性变换, 已知 T 在基 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求 T 的特征值和对应的特征向量。

19. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J , 使 $AP = PJ$ 。

20. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$, 问 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ 成立吗? 若成立证明之。

21. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, 求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + e^{2t} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + e^{2t} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$$

$x(0) = [-1, 1, 0]^T$, 求满足初始条件的特解。

23. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题 (任选 4 题, 每小题 10 分, 满分 40 份, 多答不加分。)

24. 对函数 $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, 试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$, 并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

并由此计算积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3+2x^2}{1-x^2}} dx$ 。

26. 设有常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = a \end{cases}$ 的隐式中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{h}{2}}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right), \text{ 证明该方法是无条件稳定的。}$$

27. 方程 $Ax = b$ 的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$, 问 a 取何值时, Jacobi 迭代收敛?

28. 设 (X_1, \dots, X_n) 为总体 X 的一个样本, $EX = \mu$, μ 未知。

(1) \bar{X} 是否为 μ 的无偏估计?

(2) 由 (X_1, \dots, X_n) 构造 μ 的 n 个无偏估计.

(3) 设 $\sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i > 0, i = 1, \dots, n$.

问 $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ 是否为 μ 的无偏估计, 若是 μ 的无偏估计, 确定 $a_i, i = 1, \dots, n$, 使

$\hat{\mu}$ 的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度, 设服从正态分布, 标准差 $\sigma = 0.048$, 现抽取 5 根测得纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44, 问在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下, 能否认为 σ^2 无显著变化。($\chi_{0.05}^2(4) = 0.711$, $\chi_{0.95}^2(4) = 9.488$)

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$ ， $i=1,2,3$ 。检验三个厂的平均强度有无显著差异？ $\alpha=0.05$ （ $F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$ ）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1, x_2, x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y = \beta_0 \beta_1^x \varepsilon$ （ ε 满足回归分析条件），求 β_0, β_1 的点估计，并求 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1^x$ 。