华南理工大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　课程类别 ☑公共课 □专业课　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别＿＿＿＿＿＿ 考试日期 2013.12.17 学生所在院系＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 任课教师＿＿＿＿＿＿

一、填空题：（1×10=10 分）

1. 给出三个线性变换的例子＿＿＿＿＿＿.

2. 矩阵的特征值的几何重数与代表重数的关系是＿＿＿＿＿.

3. 对 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 给出 A 的某一范数＿＿＿＿＿.

4. 矩阵对角化可认为是矩阵 Jordan 标准型的＿＿＿＿＿＿.

5. 三个节点的 Newton-Cotes 求积公式的代数精度为＿＿＿＿＿＿.

6. Newton-Cotes 求积公式的精确程度能否一定随着代数精度的提高而提高？＿＿＿

7. 用非线性方程求根的 Newton 迭代法，写出求 $\sqrt{3}$ 的近似值的一种计算格式＿＿＿＿.

8. 若 $f(x)=2x^7+x^5+1$，则 $f[0,1,\cdots,7]=$＿＿＿＿＿.

9. 设 $(X_1,\cdots X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le\cdots\le X_{(n)}$，则 $X_{(1)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$＿＿＿＿.

10. 设 $(X_1,\cdots X_n)$ 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 均未知，μ 的置信概率为 $1-\alpha$ 的双侧区间估计为＿＿＿＿＿＿.

二、计算证明题（9×10=90 分）

11. 设 V_1,V_2 分别为齐次方程组 $x_1+\cdots+x_n=0$ 和 $x_1=\cdots=x_n$ 的解空间，问：$R^n=v_1\oplus v_2$ 是否成立？若成立给出证明，若不成立给出反例。

12. 设 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为线性空间 V 的一个基底，T 为 V 上的一个线性变换。设 T 在

$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求 T 的特征值与特征向量。

13. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准型.

14. 用 Gauss 列主元解法求下列方程组的解.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 8\\ 13\end{bmatrix}$$

15. 给出方程组 $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，确定 a 的范围，使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛.

16. 求一个次数不超过 4 的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(1)=1$，$P(1)=P'(0)=0$，$P(2)=1$，并写出其余项表达式.

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2\\ P(x) & 1 & 0 & 1\\ P'(x) & 0 & 1 & \end{array}$$

17. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$，$(Y_1,\cdots,Y_n)$ 为分别来自 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的两个独立样本，X 与 Y 独立，求 μ_1,μ_2,σ^2 的极大似然估计.

18. （1）叙述某一非参数假设检验方法.

（2）设有甲、乙两赌徒，他们将一正四面体的四面分别涂为红、黄、蓝、白四种不同颜色，作抛掷试验，任意抛掷四面体，直到白色一面与地面接触为止。记录下抛掷次数，作如此试验 200 次，结果如下：

抛掷次数	1	2	3	4	≥ 5
频数	56	48	32	28	56

甲赌此四面体均匀，乙赌不均匀，找到一位统计学家，（统计学家取 $\alpha=0.05$）判决，问统计学家判断谁输？（$\chi^2_{0.95}(4)=9.488$）

19. （1）叙述方差分析的条件.

16. 利用重节点差商公式可以解出差商表.

（2）五种粮食贮藏法，以含水量为标准，设粮食贮藏前含水量几乎无差别，贮藏后含水量如下：

贮藏法 \ 含水量% \ 试验号	1	2	3	4	5
A_1	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3
A_2	5.4	7.4	7.1		
A_3	8.1	6.4	7.0		
A_4	7.9	9.5	9.2	8.6	
A_5	7.1	7.5	7.3		

设粮食含水量都服从正态分布，方差相同，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，问贮藏方法对粮食含水量的影响是否有显著性差异？（$F_{0.95}(4.13) = 3.18$，$t_{0.975}(12) = 2.1788$）

20. 叙述高斯—马尔可夫条件，给出一元线性回归模型中，模型参数最小二乘估计的算法.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生　考试日期 2014-12-16　学生所在院系__________

学号____________姓名____________任课教师____________

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵 $B=\left[\quad\right]$.

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式： $A^2+A=2I$ ，问 A 是否可对角化________.

3. 矩阵的谱半径是指____________________.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于________________________.

5. 对任何非奇异矩阵 A ，都有 $cond$（A）$_p$ ___1，当 A 为正交矩阵时 $cond$（A）$_2$ =___.

6. 已知 $\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$，则其近似值 2.23607 有_______位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为_________.

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$__________，$f[0,1,2,3,4]=$__________.

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_i f(x_i)$ 至少有____次代数精度.

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{3}$，则 λ 的取值范围是__________.

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式________________.

11. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本， $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为次序统计量，则 ${X_{(1)}}^2+{X_{(2)}}^2+\cdots+{X_{(n)}}^2\sim$__________.

12. 给出点估计评价的三个标准__________.

13. 给出假设检验中显著性水平α与统计假设H_0的关系_________.

14. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，μ未知，σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧区间估计为____________.

15. 使用方差分析时对数据的要求是________.

二、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 分，多答不加分。）

16. 已知R^3中的两个基底$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从$B_1$到$B_2$的基变换矩阵。

17. 设 R^4 中的向量 $x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$， $x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$， $x_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$， $x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$， 分别张成 $w_1=span\{x_1,x_2\}$， $w_2=span\{x_3,x_4\}$，求w_1+w_2及$w_1\cap w_2$的基底及维数。

18. 设T是线性空间V^3的线性变换，已知T在基$B=\{\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3\}$下的矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$

求T的特征值和对应的特征向量。

19. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和 Jordan 矩阵$J$，使$AP=PJ$。

20. 设 $A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，问 $\lim\limits_{k\to\infty} A^K=0$ 成立吗？若成立证明之。

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$，求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=2x_1(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t)\end{cases}$

$x(0)=[-1,1,0]^T$，求满足初始条件的特解。

23. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 份，多答不加分。）

24. 对函数 $f(0)=-1$， $f'(0)=-2$, $f(1)=0$， $f'(1)=10$，试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

并由此计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}dx$。

26. 设有常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases}$的隐式中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{h}{2}}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$，证明该方法是无条件稳定的。

27. 方程$Ax=b$的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$，问$a$取何值时，Jacobi 迭代收敛？

28. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为总体X的一个样本，$\mathrm{E}X=\mu$，μ未知。

（1）$\overline{X}$是否为μ的无偏估计？

（2）由$(X_1,\cdots,X_n)$构造μ的n个无偏估计.

（3）设$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i > 0, i = 1,\cdots,n.$

问$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$是否为$\mu$的无偏估计，若是$\mu$的无偏估计，确定$a_i$，$i=1,\cdots,n$，使$\hat{\mu}$的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度，设服从正态分布，标准差$\sigma = 0.048$，现抽取 5 根测得纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44，问在显著性水平$\alpha = 0.10$下，能否认为σ^2无显著变化。（$\chi^2_{0.05}(4) = 0.711$，$\chi^2_{0.95}(4) = 9.488$）

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,3$。检验三个厂的平均强度有无显著差异？$\alpha=0.05$（$F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1,x_2,x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y=\beta_0\beta_1^x\varepsilon$（$\varepsilon$ 满足回归分析条件），求 β_0,β_1 的点估计，并求 $\hat{y}=\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^x$.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学 B（矩阵论、数理统计）　课程类别 √公共课 □专业课　考核形式 □开卷 √闭卷

学生类别 专硕　考试日期 [illegible]　学生所在院系 [illegible]

学号 [redacted]　姓名 [redacted]　任课教师 ____

一、填空题(每题 3 分共 30 分)

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ 5，$\rho(A)=$ 3。

2. 设方阵 A 满足 $A^2+aI=(a+1)A$，则当 a ≠1 时可以对角化。

3. 设 $A_1=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则方阵 $\begin{bmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{bmatrix}$ 的最小多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

4. 设方阵的一个特征值 λ 的代数重数为 6，几何重数为 3，则 λ 的指标可以为 2，3，4

5. 对于 n 阶方阵 A 和 B，基于算子范数 $\|\cdot\|$ 的条件数，其大小关系为 Cond(AB) ≤ Cond(A) Cond(B)。

6. 设 $(X_1, X_2, \cdots X_5)$ 是取自总体 $N(0, 4)$ 的样本，已知 $a(X_1+X_2)^2+b(X_3+X_4+X_5)^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布，则常数 a, b 和自由度 n 分别为 $\frac{1}{8}$，$\frac{1}{12}$，2。

7. 在总体期望 μ 的估计类 $M=\{\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\}$ 中，最小方差无偏估计为 $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$。

8. 一般未知参数 θ 的置信区间长度 L 会随着置信度 $1-\alpha$ 的增大而 减小。

9. 在假设检验中，当显著水平 α 较大时，原假设 H_0 更容易被 拒绝。

10. 对线性统计模型：$Y_i \sim N(\beta_0+\beta_1 x_i, \sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，相互独立，回归系数 β_1 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_1 \sim$ ______。

二、(9 分) 求将向量 $x=[1,1,1,1]^T$ 变换为向量 $y=[-2,0,0,0]^T$ 的 Householder 矩阵 H，并证明对任何可逆方阵 A 有 $\text{Cond}_2(HA)\le \text{Cond}(A)$。

三、(8 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 $g(A)=A^5-4A^4+4A^3+6A^2+I$。

四、(9 分) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 矩阵，其中：$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$。

五、(9 分) 求上题中矩阵 A 的 Doolittle 分解。

通

18

六、(8 分) 设总体 X 的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，$(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是取自该总体的样本。对样本作变换：$Y_i = aX_i+b$，$i=1,2,..,n$，$\bar{Y}$ 和 S_Y^2 分别为变换后的样本均值和样本方差，试求 $E\bar{Y}$ 、$D\bar{Y}$ 和 $E S_Y^2$。

七、(10 分) 设$(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是取自总体 $N(0, \sigma^2)$的样本。(1) 求未知参数σ^2的极大似然估计$\hat{\sigma}^2$；(2) 判断$\hat{\sigma}^2$是否为无偏估计，如果是无偏估计，其方差能否达到方差下界？

八、(8 分) 设某网店的日营业额服从正态分布，已知同类网店的日均营业额为 3180 元。由该网店随机抽取的 9 天营业额记录算得样本均值 $\bar{x}=3510$ 元，样本标准差 $s=150$ 元。问在显著水平α=0.05 下，能否认为该网店的日均营业额高于同类网店的平均水平？

九、(9 分) 下表列出的是武汉市今年 11 月份五个环境监测点测到的空气污染指数值

监测点	污染指数 x_{ij}			
青山钢花	76	123	124	138
沌口新区	78	95	90	103
汉口江滩	77	122	139	128
东湖高新	74	102	97	122
沉湖七壕	84	89	102	74

假定第 i 个观察点的空气污染指数服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma^2)$，试检验各监测点的空气质量差异的显著性。

附：上侧分位点数值

$F_{0.01}(4,15)=4.893$，$F_{0.025}(4,15)=3.804$，$F_{0.05}(4,15)=3.056$，$F_{0.10}(5,15)=2.273$，$F_{0.05}(5,15)=2.901$，
$t_{0.025}(8)=2.306$，$t_{0.025}(9)=2.262$，$t_{0.05}(8)=1.86$，$t_{0.05}(9)=1.833$，$t_{0.025}(14)=2.145$