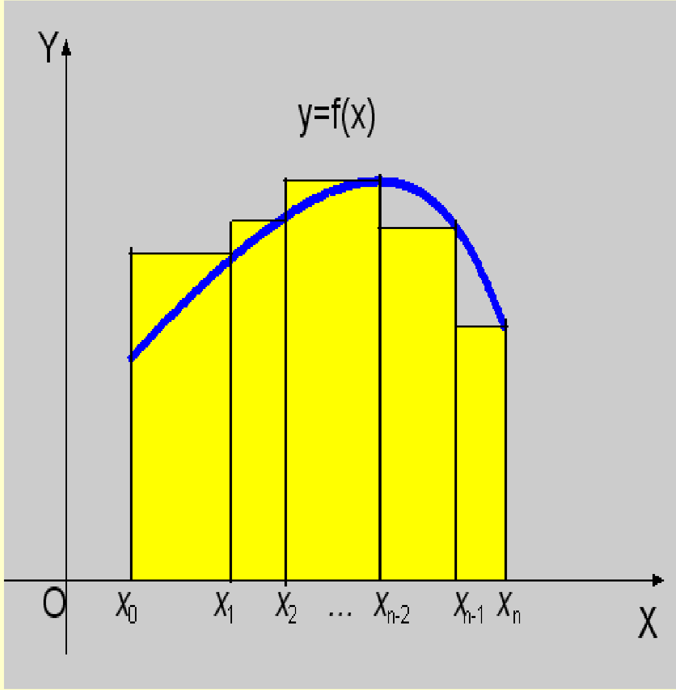
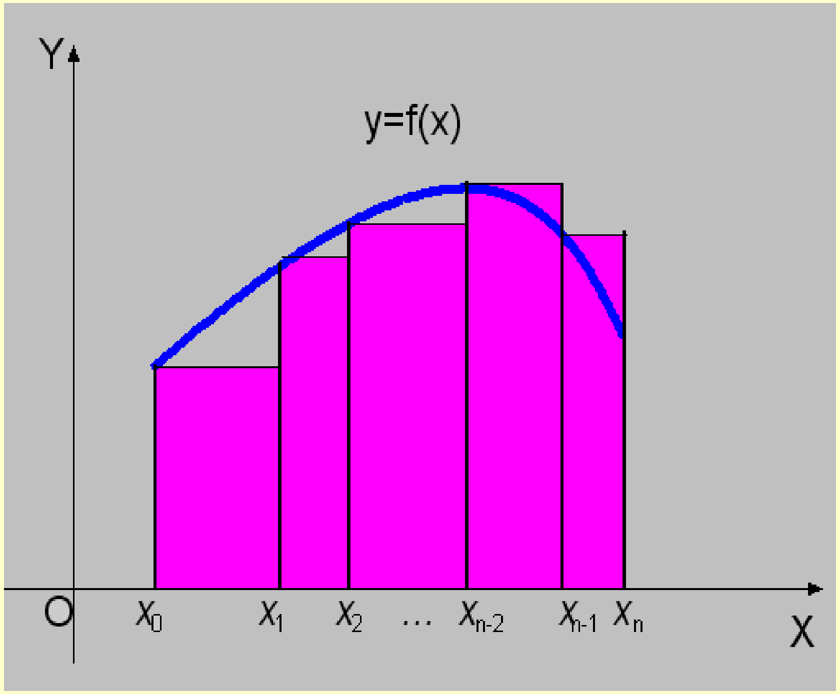
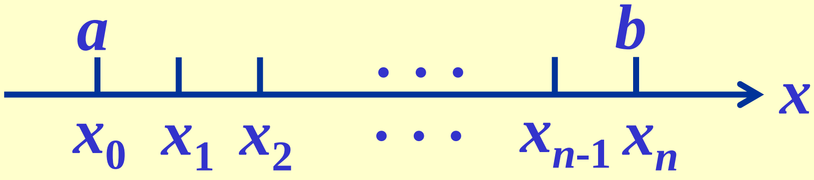
§3 复化求积 /* Composite Quadrature */

高次插值有Runge 现象，故采用分段低次插值

⇒ 分段低次合成的 *Newton-Cotes* 复化求积公式。



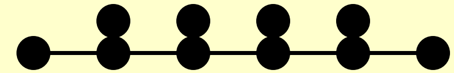




$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

➢ 复化梯形公式: $h=\dfrac{b-a}{n},\ x_k=a+kh\quad(k=0,\dots,n)$

在每个 $[x_{k-1},x_k]$ 上用梯形公式:

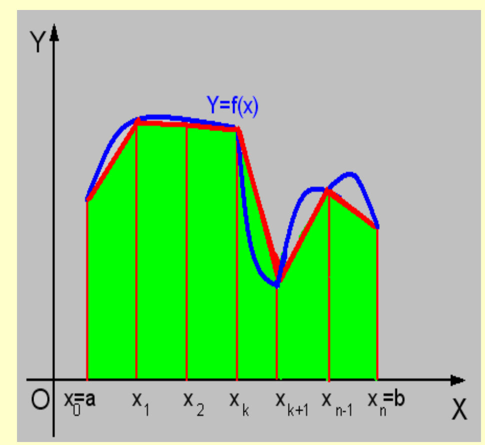


$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{x_k-x_{k-1}}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)],\quad k=1,\dots,n$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=T_n$$

余项:

$$R[f]=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\right]=-\frac{h^2}{12}(b-a)\frac{\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)}{n}$$



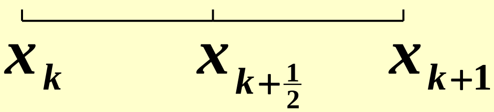
而 $\min\limits_{a\le x\le b} f''(x)\le \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f''(\xi_k)}{n}\le \max\limits_{a\le x\le b} f''(x)$

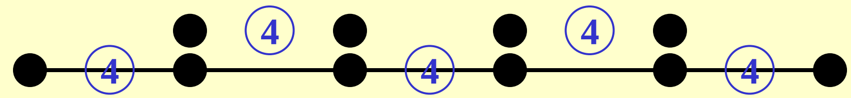
由介值定理知: $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f''(\xi_k)}{n}$

即有: $R[f]=-\dfrac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$

➢ 复化 Simpson 公式： $h = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + kh \quad (k = 0, \ldots, n)$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$





$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + f(b)] = S_n$$

$$R[f] = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$$

注：为方便编程，可采用另一记法：令 $n' = 2n$ 为偶数，

这时 $h' = \dfrac{b-a}{n'} = \dfrac{h}{2}$，$x_k = a + kh'$，有

$$S_n = \frac{h'}{3}[f(a) + 4\sum_{\text{odd } k} f(x_k) + 2\sum_{\text{even } k} f(x_k) + f(b)]$$

例 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，利用下表计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

x	$f(x)$
0	1
1/8	0.9973978
1/4	0.9896158
3/8	0.9767267
1/2	0.9588510
5/8	0.9361556
3/4	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

解 将积分区间[0，1]划分为8等份，设

$x_i=ih \quad i=0,1,\cdots,8$ 步长 $h=1/8$。

$$T_8=\frac{h}{2}\left[f(0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_7)+f(1)\right]$$

$$=0.94569086$$

将区间[0，1]划分为4等份，应用复化辛普森法求得 $S_4=0.94608331$

两种算法计算量基本相同，但精度却差别很大，同准确值 $I=0.9460831$ 比较复化梯形法的结果只有两位有效数字，而复化辛普森法的结果有六位有效数字。

例 分别用复化梯形公式与复化辛普森公式计算积分

$I=\int_0^1 e^x dx$ 的近似值，要求其截断误差小于等于 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，问各需取多少个节点?

解： $f(x)=e^x,\ f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$。

在区间[0，1]上，$\max|f''(x)|=\max|f^{(4)}(x)|=e$

用复化梯形公式求积时，有

$$|R_N[f]|\le \frac{e}{12}h^2\le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

由此得：$h\le 0.0149$，取 $h=0.0148$，则 $N>67.6$ 需取 $N+1=69$ 个节点。

用复化辛普森公式，有 $|R_N[f]|\le \frac{e}{2880}h^4\le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

则 $h\le 0.4798$ 由此可知 $N\ge \frac{1}{h}=2.085$，取 $N=3$，则只需取 $2N+1=7$ 个节点。

➢复化求积法的收敛速度与误差估计：

复化梯形（ *Trapezoid* ）公式的余项：

$$I - T_n = \sum_{k=1}^{n}[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)] = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

复化辛甫生（*Simpson*）公式的余项：

$$I - S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi_k)\right] = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

复化柯特斯（*Cotes*）公式的余项：

$$I - C_n = \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{2h}{945}(\frac{h}{4})^6 f^{(6)}(\xi_k)\right]$$

$$= -\frac{2(b-a)}{945}(\frac{h}{4})^6 f^{(6)}(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

先看复化梯形公式余项：

$$I-T_n=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\right]=-\frac{h^2}{12}\sum_{k=1}^{n}[f''(\xi_k)\cdot h]$$

$$\Rightarrow\ \frac{I-T_n}{h^2}=-\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}[f''(\xi_k)\cdot h]$$

当n充分大, $h\to 0$ 时,

$$-\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}[f''(\xi_k)\cdot h]\to -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx=-\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

即对复化的梯形公式有： $\dfrac{I-T_n}{h^2}\to -\dfrac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$

类似地，对于复化的辛甫生公式和柯特斯公式分别有：

$$\frac{I-S_n}{h^4}\to -\frac{1}{180\times 2^4}\left[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right]$$

$$\frac{I-C_n}{h^6}\to -\frac{2}{945\times 4^6}\left[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)\right]$$

定义 若一个积分公式的误差满足 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{I-I_n}{h^p}=C<\infty$ 且 $C\neq 0$，则称该公式是 p 阶收敛的。

$$T_n \sim O(h^2),\ S_n \sim O(h^4),\ C_n \sim O(h^6)$$

而且，当 h 很小时，复化的梯形法、辛甫生法和柯特斯法分别有下列的误差估计式：

$$I-T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

$$I-S_n \approx -\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right]$$

$$I-C_n \approx -\frac{2}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6\left[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)\right]$$

当步长 h 折半时，$R(T)$, $R(S)$, $R(C)$ 分别减至原有误差的1/4,1/16,1/64

例： 计算 $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$

解： $T_8 = \frac{1}{16}\left[f(0)+2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)+f(1)\right]$ 其中 $x_k = \frac{k}{8}$

$= 3.138988494$

$S_4 = \frac{1}{24}\left[f(0)+4\sum_{odd} f(x_k)+2\sum_{even} f(x_k)+f(1)\right]$ 其中 $x_k = \frac{k}{8}$

$= 3.141592502$

上例中若要求 $|I-T_n|<10^{-6}$，则 $|R_n[f]| \approx \frac{h^2}{12}|f'(1)-f'(0)| = \frac{h^2}{6} < 10^{-6}$

$\Rightarrow h < 0.00244949$ 即：取 $n = 409$

$S_4 = 3.141592502$

通常采取将区间不断对分的方法，即取 $n = 2^k$

上例中 $2^k \geq 409 \Rightarrow k = 9$ 时，$T_{512} = 3.141592018$

注意到区间再次对分时 $\dfrac{I-T_{2n}}{I-T_n}\approx\dfrac{1}{4}$ $\Longrightarrow$ $I-T_{2n}\approx\dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$

将区间逐次分半进行计算（每分一次就进行一次计算），可以用 T_n 与 T_{2n} 来估计误差，利用前后两次计算结果来判断误差的大小的方法，我们通常称作误差的事后估计法。

具体方法如下：用 T_{2n} 作为 I 的近似值，则截断误差为 $\dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$ 。那么由 T_{2n} 与 T_n 来估计误差，

若：$|T_{2n}-T_n|<\varepsilon'=3\varepsilon$

（ε 为计算结果的允许误差），则停止计算，并取 T_{2n} 作为积分的近似值；否则将区间再次分半后算出 T_{4n}，并检验不等式 $|T_{4n}-T_{2n}|<\varepsilon'$ 是否满足……

类似推导，还可得下列结论：

对于辛普森公式，若$f^{(4)}(x)$在[a，b]上连续且变化不大，有

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = S_{2n} + \frac{1}{4^2 - 1}(S_{2n} - S_n)$$

对于柯特斯公式，若 $f^{(6)}(x)$在[a，b]上连续且变化不大，有

$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = C_{2n} + \frac{1}{4^3 - 1}(C_{2n} - C_n)$$

◆例　若要求用辛普森方法计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$的近似值，使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$。（$I$=0. 9460831）

解　可先算出 $S_1 = 0.9461459$ ，然后将区间分半（即二等分），并计算$S_2 = 0.9460869$，显然 S_2不合要求，故再次将区间分半（即四等分），并计算 $S_4 = 0.9460833$ ，因为

$$\left| S_4 - S_2 \right| < \frac{15}{2} \times 10^{-6}$$

故$S_4 = 0.9460833$是满足精度要求的近似解。

HW:
p.121-122
#5,#7

高 斯

Johann Carl Friedrich Gauss

(1777～1855)

德国数学家、物理学家、天文学家

- 许多数学学科的开创者和奠基人。
- 几乎对数学的所有领域都做出了重大贡献。
- 享有数学王子的美誉。

§5 高斯型积分 /* Gaussian Quadrature */

例 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

解 （法一）利用 $n=1$ 时的Newton Cotes公式，有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(1)$$

代数精度为1。

（法二）令公式对 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 准确成立，有

$$A_0 + A_1 = 2$$
$$A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0$$
$$A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$
$$A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$A_0 = A_1 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

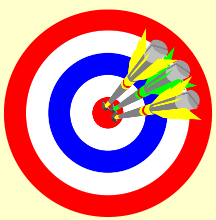
它至少有3次代数精确度，而以两个端点为节点的梯形公式却只有1次代数精度。

例：构造形如$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 的 2 点 公式。

解：设公式对$f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ，准确成立，则有：

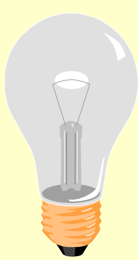
$$\begin{cases} \frac{2}{3} = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{5} = A_0 x_0 + A_1 x_1 \\ \frac{2}{7} = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 \\ \frac{2}{9} = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &\approx 0.8212 \\ x_1 &\approx 0.2899 \\ A_0 &\approx 0.3891 \\ A_1 &\approx 0.277 \end{aligned}$$

不是线性方程组，
不易求解。



构造具有2n+1次代数精度的求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$



将节点 $x_0 \ldots x_n$ 以及系数 $A_0 \ldots A_n$ 都作为待定系数。令 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入可求解，得到的公式具有2n+1 次代数精度。这样的节点称为Gauss 点，公式称为Gauss 型求积公式。

定义 选互异节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，使插值型求积公式的代数精度为2n+1，则称该求积公式为Gauss型的。称这些节点为Gauss点

如果像上面两个例子那样，直接利用代数精度的概念，去联立求解2n+2 个非线性方程组。方程组是可解的，但当n稍大时，求解就变得相当复杂。

Gauss型求积公式是插值型的，确定Gauss点是关键！

在Gauss型求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 中，若取 $f(x)=\omega^2(x)=[\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)]^2$ 则公式的左边 $\int_a^b \rho(x)\omega^2(x)dx>0$ 而右边 $\sum_{k}^{n} A_k\omega^2(x_k)=0$ 故n+1个节点的Gauss型求积公式的代数精度至多为2n+1次。

n+1个求积节点的插值型求积公式代数精度的最高值为2n+1，因而高斯型求积公式常称为最高代数精度求积公式。

n+1个节点的插值型求积公式至少可达到n次代数精度，至多只能达到2n+1次代数精度。

定理 $x_0 \ldots x_n$ 为 Gauss 点 $\Leftrightarrow$ $\omega(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$ 与任意次数不大于 n 的多项式 $P(x)$（带权）正交。

证明： "$\Rightarrow$" $x_0 \ldots x_n$ 为 … ss 点, 则公式 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少有 …

…)， $P_m(x)\ \omega(x)$的次数

不 … 成立：

$$\int_a^b \rho(x)P_m(x)\omega(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_kP_m(x_k)\overset{0}{\cancel{\omega(x_k)}}=0 \quad ✓$$

"$\Leftarrow$" 要证明 $x_0 \ldots x_n$ 为 Gauss 点，即要证公式对任意次数不大于 $2n+1$ 的多项式 $P_m(x)$ 精确成立，即证明：

$$\int_a^b \rho(x)P_m(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_kP_m(x_k) \qquad \text{设 } P_m(x)=\omega(x)q(x)+r(x)$$

$$\int_a^b \rho(x)P_m(x)dx=\overset{0}{\cancel{\int_a^b \rho(x)\omega(x)q(x)dx}}+\int_a^b \rho(x)r(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_kr(x_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}A_kP_m(x_k) \quad ✓$$

定义 选互异节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，使插值型求积公式的代数精度为2n+1，则称该求积公式为Gauss型的。称这些节点为Gauss点。

➤ **Gauss点与正交多项式零点的关系**

一般利用正交多项式来确定Gauss点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$,然后,利用插值原理确定Gauss求积系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx$$

其中$l_k(x)$是关于Gauss点的Lagrange插值基函数，从而得到插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

正交多项式族{ $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ }有性质：任意次数不大于n 的多项式 $P(x)$ 必与φ_{n+1} 正交。

若取 $\omega(x)$ 为其中的φ_{n+1}，则φ_{n+1}的零点就是 Gauss 点。

例 求形如$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 的两点Gauss型求积公式。

(法一) *Step 1*：构造正交多项式φ_2 ,设$\varphi_2(x) = x^2 + bx + c$

为区间[0, 1]上带权$\sqrt{x}$ 正交的多项式, 则

$$(\varphi_2, 1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}(x^2 + bx + c)dx = 0$$

$$(\varphi_2, x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, x(x^2 + bx + c)dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{10}{9}, \quad c = \frac{5}{21}$$

即：$\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{10}{9}x + \dfrac{5}{21}$

Step 2：求 $\varphi_2 = 0$ 的 2 个根，即为 Gauss 点 x_0， x_1

$$x_{0;1} = \frac{10/9 \pm \sqrt{(10/9)^2 - 20/21}}{2}$$

$x_0 \approx 0.821162$, $x_1 \approx 0.289949$,

Step 3：代入 $f(x) = 1, x$ 以求解 A_0， A_1

解线性方程组，简单。

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{5} = \int_0^1 \sqrt{x}\,x dx = A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{cases} \Rightarrow A_0 \approx 0.389111,\ A_1 \approx 0.277556$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx 0.389111 f(0.821162) + 0.277556 f(0.289949)$$

*Step3*也可换为 $A_0 = \int_0^1 \rho(x) l_0(x) dx \approx 0.389111$, $A_1 = \int_0^1 \rho(x) l_1(x) dx \approx 0.277556$

（法二）设$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)$为区间[0，1]上带权$\sqrt{x}$正交的多项式

则有 $\int_0^1 \sqrt{x}\omega(x)dx=0 \Longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x}(x-x_0)(x-x_1)dx$

$$=\int_0^1 \sqrt{x}(x^2-x_0x-x_1x+x_0x_1)dx$$

$$=\frac{2}{7}-\frac{2}{5}(x_0+x_1)+\frac{2}{3}x_0x_1=0$$

$\int_0^1 \sqrt{x}\cdot x\cdot\omega(x)dx=0 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}(x^2-x_0x-x_1x+x_0x_1)dx$

$$=\frac{2}{9}-\frac{2}{7}(x_0+x_1)+\frac{2}{5}x_0x_1=0$$

令， $x_0+x_1=v$，$x_0x_1=u$ 则有 $\begin{cases}\frac{2}{5}v-\frac{2}{3}u=\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7}v-\frac{2}{5}u=\frac{2}{9}\end{cases} \Longrightarrow u=\frac{5}{21},\ v=\frac{10}{9}$

由韦达定理，知 x_0, x_1是方程 $x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}=0$ 的两个根，解之得

$$\begin{cases}x_0=0.821162\\ x_1=0.289949\end{cases}$$

A_0, A_1 的求得同于（法一）。

例 利用此公式计算 $\int_0^1 \sqrt{x}e^x\,dx$ 的值。

解 $\int_0^1 \sqrt{x}e^x\,dx \approx A_0 e^{x_0} + A_1 e^{x_1} = 0.3891\times e^{0.8212} + 0.2776\times e^{0.2899}$

≈ 1.2555

例 求形如 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

的三点Gauss型求积公式。

Step 1：构造正交多项式 φ_3

设 $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x+a,\ \varphi_2(x)=x^2+bx+c,\ \varphi_3(x)=x^3+dx^2+ex+f$

$(\varphi_0,\varphi_1)=0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x+a)dx=0 \Rightarrow a=0$ 即： $\varphi_1(x)=x$

$(\varphi_0,\varphi_2)=0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x^2+bx+c)dx=0$

$(\varphi_1,\varphi_2)=0 \Rightarrow \int_{-1}^1 x(x^2+bx+c)dx=0$

$\Rightarrow$ $b=0$, $c=-\frac{1}{3}$

即：$\varphi_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$ 进一步求得：$\varphi_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$

Step 2：求 $\varphi_3 = 0$ 的 3 个根，即为 Gauss 点 x_0，x_1，x_2

Step 3：代入 $f(x) = 1, x, x^2$ 以求解 A_0，A_1，A_2

注：构造正交多项式也可以利用 *L-S* 拟合中介绍过的递推式进行。

➢ 特殊正交多项式族：

① **Legendre** 多项式族：定义在[–1, 1]上，$\rho(x) \equiv 1$

$$\boxed{P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k}$$

满足：$(P_k, P_l) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{2}{2k+1} & k = l \end{cases}$

由 $P_0 = 1,\ P_1 = x$ 有递推 $(k+1)P_{k+1} = (2k+1)xP_k - kP_{k-1}$

以 P_{n+1} 的根为节点的求积公式称为*Gauss-Legendre* 公式。

② **Chebyshev** 多项式族：定义在[–1, 1]上，$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{T_k(x) = \cos(k \times \arccos x)}$$

T_{n+1} 的根为 $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$

$k = 0, \ldots, n$

以此为节点构造公式 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

称为 *Gauss-Chebyshev* 公式。

➢ 高斯—勒让德(*Gauss-Legendre*) 求积公式

构造形如

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的求积公式，使其为Gauss型的。

积分区间为[−1, 1]时, 求积公式的代数精度为$2n+1$的充要条件是$\omega(x)$在[−1, 1]上与一切次数不超过n 的多项式正交。

由正交多项式的性质可知，n+1 次勒让德多项式$P_{n+1}(x)$就具有这个性质，所以用n+1次勒让德多项式的零点作为节点，可得高斯型求积公式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

该公式通常称为高斯—勒让德（*Gauss-Legendre*）求积公式。

一般地: $n+1$个Gauss点为$n+1$次Legendre正交多项式的根。

此时至少具有$2n+1$次代数精度。

勒让德多项式的前几项如下:

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x^2-1)^2\right]=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\qquad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(65x^5-70x^3+15x)$$

$$P_{i+1}(x)=\frac{1}{i+1}[(2i+1)P_i(x)-iP_{i-1}(x)]$$

勒让德多项式的首项系数为

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

当$n=0$时,$P_1(x)=x$, 其零点为$x_0=0$,易得$A_0=2$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$$

例　构造两点的高斯—勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解　取二次勒让德多项式 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ 的两个零点 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 作为Gauss点，则有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

若求积公式的代数精度为3，则当 $f(x) = 1, x$ 时，上式能准确成立，即由方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ A_0(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + A_1(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \end{cases} \Longrightarrow A_0 = A_1 = 1$$

便可得两点高斯—勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

不难验证，该公式的代数精度的确是3。

P110表4—6给出了部分*Gauss-Legendre*的节点和系数，以备查用。

例 利用四点高斯—勒让德公式计算积分$\int_0^\pi e^x\cos x dx$（积分准确值为$-\frac{1}{2}(1+e^\pi)=-12.0703463\cdots$。）

解 作变换 $x=\frac{\pi}{2}(1+t)$则得

$$\int_0^\pi e^x\cos x dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}(1+t)}\cos[\frac{\pi}{2}(1+t)]dt=-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}t}\sin\frac{\pi}{2}tdt$$

$$\approx-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}[0.3478548(e^{-\frac{\pi}{2}\times0.8611363}\sin\frac{\pi}{2}\times0.8611363$$

$$+e^{\frac{\pi}{2}\times0.8611363}\sin\frac{\pi}{2}\times0.8611363)+0.6521452(e^{-\frac{\pi}{2}\times0.3398810}\sin\frac{\pi}{2}\times0.3398810$$

$$+e^{\frac{\pi}{2}\times0.3398810}\sin\frac{\pi}{2}\times0.3398810)]\approx-12.0701895$$

当$n=2$时,$P_3(x)=1/2(5x^3-3x)$, 其零点为$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ 和0。

设高斯—勒让德求积公式是:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

依次代$f(x)=1, x, x^2$入上式，得如下关于系数A_0 A_1 A_2的方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \dfrac{10}{9} \end{cases} \Rightarrow A_0 = A_2 = 5/9,\ A_1 = 8/9$$

解线性方程组，简单。

故:
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

代数精度为5

例：用n=2的高斯—勒让德公式计算 $\int_0^1 4arctgx dx$

精确值： $=\left[4xarctgx - 2\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^{1} = 1.7552983$

解：此处，$a=0$，$b=1$，作变换 $x=\frac{1}{2}(t+1)$ 则：

$$\int_0^1 4arctgx\,dx = \int_{-1}^1 2arctg(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})\,dt$$

这里 $f(t) = 2arctg(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})$

故 $f(0)=0.9272652$， $f(-\sqrt{\frac{3}{5}})=0.2244562$ $f(\sqrt{\frac{3}{5}})=1.4515062$

所以原式 $\approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 1.7553526$

例：证明求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(-\sqrt{0.6})]$对于次数不高于5的多项式准确成立，并计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$

证 方法一：代入$f(x)=x^i(i=0,1,2,\cdots 5)$直接验证，知求积公式有5次代数精度。

方法二：验证所给公式是3点Gauss求积公式,故具有5次代数精度。

解：计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$ 令 $x=\frac{1}{2}(1+t)$

则
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t}dt = \int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{3+t}dt$$

$$\approx \frac{1}{9}\left[5\times\frac{\sin\left(-\frac{\sqrt{0.6}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{3-\sqrt{0.6}}+8\times\frac{\sin\frac{1}{2}}{3}+5\times\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{0.6}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{3+\sqrt{0.6}}\right] = 0.2842485$$

切比雪夫*Chebyshev*\多项式

当区间为$[-1,1]$，权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 时，由序列$\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$正交化得到的正交多项式就是Chebyshev多项式，它可表为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\qquad |x|\le 1$$

若令 $x=\cos\theta$，则 $T_n(x)=\cos n\theta,\quad 0\le\theta\le\pi$

Chebyshev多项式有以下重要性质：

性质1 Chebyshev多项式$\{T_n(x)\}$在区间$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & n\ne m\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\ne 0\\ \pi, & n=m=0\end{cases}$$

性质2 递推关系

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,\cdots), \\ T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x. \end{cases}$$

性质3

$T_{2k}(x)$只含 x 的偶次方，$T_{2k+1}(x)$只含 x 的奇次方，这性质由递推关系可直接得到。

由递推关系可得

$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$

$T_2(x)=2x^2-1,\quad T_3(x)=4x^3-3x,$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\quad T_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$

性质4

$T_n(x)$在区间 $[-1,1]$上有 n 个零点

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi,\quad k=0,1,\cdots,n-1$$

➢ 高斯--切比雪夫 （*Gauss-Chebyshev* ）求积公式

形如 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 的求积公式，若其代数精度为 **2n+1**，则称其为高斯--切比雪夫求积公式

例 求形如 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$ 的两点Gauss型求积公式。

解：由于节点必是区间[－1，1]上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的二次正交多项式的零点，这个正交多项式就是二次切比雪夫多项式 $T_2(x)=\cos(2\arccos x)$ 故零点为 $x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 由该公式对 $f(x)=1,x$ 都准确成立，可得 A_0,A_1 应满足的方程组

$$\begin{cases}\pi=A_0+A_1\\ 0=A_0(-\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1(\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}\Rightarrow A_0=A_1=\frac{\pi}{2}$$

即所求公式为 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{2}f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\pi}{2}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$

一般地，利用n+1次切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)$的零点

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

HW:
p.122-123，#9（2），10,11,13,18

可以得到n+1点的Gauss型求积公式:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f\left(\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

例 计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}dx$

解 选用$n=2$的Gauss-Chebyshev求积公式计算，即

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

这时 $x_0=\cos\frac{5}{6}\pi=-0.866025403 \quad x_1=\cos\frac{3}{6}\pi=0$

$$x_2=\cos\frac{1}{6}\pi=0.866025403 \quad A_k=\frac{\pi}{3},\quad k=0,1,2$$

于是有 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{3}(\sqrt{2+x_0}+\sqrt{2+x_1}+\sqrt{2+x_2})=4.368939556$

Gauss型求积公式稳定性与收敛性

稳定性

高斯求积公式的系数具有下列特点：

（1）由求积公式对函数 $f(x)=1$准确成立知

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)dx$$

（2）由求积公式对$2n$次多项式 $f(x)=l_k^2(x)$也准确成立知

$$A_k = \sum_{j=0}^{n} A_j l_k^2(x_j) = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)dx > 0 \qquad k=0,1,\cdots,n$$

故知Gauss型求积公式是稳定的。

收敛性

关于收敛性，只指出结论：若 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，那么当$n\to\infty$时，Gauss型求积公式$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$收敛到积分值 $\int_a^b \rho(x) f(x)dx$。

➢ **Gauss 公式的余项：**

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$ /* 设P为f 的过$x_0 \dots x_n$的插值多项式 */

$$=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k P(x_k)$$ /*只要P 的阶数不大于$2n+1$，则下一步等式成立*/

$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P(x)dx=\int_a^b[f(x)-P(x)]dx$$

插值多项式的余项

Q： 什么样的插值多项式在 $x_0 \dots x_n$ 上有 $2n+1$ 阶？

A： **Hermite** 多项式！ 满足 $H(x_k)=f(x_k),\ H'(x_k)=f'(x_k)$

➡ $$R[f]=\int_a^b[f(x)-H(x)]dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}w^2(x)dx$$

$$=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b w^2(x)dx,\qquad \xi\in(a,b)$$

习题：1）插值型求积公式$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x)dx$ 的求积系数之和

$$\sum_{k=0}^{n} A_k =$$

2）设$f(x)=x^5+2x^4+3x^2+4$,求积公式 $\sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x)dx$

是Gauss型的，则 $\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k) =$

3）设x_j为互异节点$(j=0,1,\cdots,n)$, 求证:

1) $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \; (k=0,1,\cdots,n)$

4) $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 是Gauss型求积公式, $l_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$

是以$\{x_k\}$ 为节点的Lagrange插值基函数，证明:

$$\int_a^b l_k(x) l_j(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ A_k & k = j \end{cases}$$