第三章　函数逼近

/* Approximation Theory */

太复杂☹

逼近误差的度量常用标准有：

- $$\| f(x) - y(x) \|_\infty = \max_{a \le x \le b} | f(x) - y(x) |$$

一致逼近

/* minimax Approximation */

- $$\| f(x) - y(x) \|_2^2 = \int_a^b \rho(x) [f(x) - y(x)]^2 dx$$

平方逼近

/* Least_Squares Approximation */

§1 内积空间 /* Inner product space */

定义 设在区间(a, b)上非负函数$\rho(x)$，满足条件：

1）$\int_a^b |x|^n \rho(x)dx$ 存在(n=0, 1, …)，

2）对非负的连续函数 $g(x)$，若 $\int_a^b g(x)\rho(x)dx = 0$。

则在(a, b)上 $g(x)\equiv 0$，$\rho(x)$就称为区间(a, b)上的权函数。

定义 设$f(x), g(x)\in C[a, b]$, $\rho(x)$ 是$[a, b]$上的权函数，积分

$(x)dx$

称为函

比，连续

间。

称为$f($

设$\vec{f},\vec{g}$是R^n中的向量

则 $\vec{f}=(f_1, f_2,\cdots, f_n)^T,\vec{g}=(g_1, g_2,\cdots, g_n)^T$其内积定义是

$$(\vec{f},\vec{g})=\sum_{k=1}^{n} f_k g_k$$

向量$\vec{f}\in R^n$的模（范数）定义为$\|\vec{f}\|_2=(\sum_{k=1}^{n} f_k^2)^{\frac{1}{2}}$ 将它推广到任何内积空间中就有下面定义。

定理 对任何 $f, g \in C[a,b]$，下列结论成立

（1）$|(f,g)| \le \|f\|_2 \|g\|_2$

此式称为柯西—许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式

（2）$\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$（三角不等式）

（3）$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$（平行四边形定律）

证明 若 $g=0$，则柯西—许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式显然成立，现考虑 $g \ne 0$，对任何实数 λ，有

$$0 \le (f+\lambda g, f+\lambda g) = (f,f) + 2\lambda(f,g) + \lambda^2(g,g)$$

现取 $\lambda = -\dfrac{(f,g)}{\|g\|_2^2}$，代入上式得

$$\|f\|_2^2 - 2\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|_2^2} + \frac{|(f,g)|^2}{\|g\|_2^2} \ge 0$$

即 $|(f,g)|^2 \le \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$ 两边开平方即得(1).

定义 若 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，满足

$\ldots dx=0$

$\vec{f}$与$\vec{g}$正交$\Leftrightarrow(\vec{f},\vec{g})=0$

在n维空间中两个向量正交的定义也可推广到内积空间。

则称f与……函数族

满足关系

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\ldots dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$$

就称$\{\varphi_k\}$是$[a,b]$……，就称之为标准正交……

例如 三……

在R^n空间中任一向量都可用它的一组线性无关的基表示，对内积空间的任一元素$f(x)\in C[a,b]$ 也同样可用线性无关的基表示，此时相应地有....

就是在……$dx=2\pi$

$(\sin kx,$……$\cos^2 kxdx=\pi$

而对$j\neq k$时 $(k=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jxdx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jxds=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jxdx=0$$

定义 线性无关 /* linearly independent */ 函数族{ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ }满足条件：其中任意函数的线性组合

$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)=0$ 对任意 $x\in[a,b]$ 成立当且仅当 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$ 时成立，则称在 $[a,b]$ 上是线性无关的，若函数族 $\{\varphi_k\}(k=0,1,\cdots)$ 中的任何有限个 φ_k 线性无关，则称{ φ_k }为线性无关函数族。

例如：$1, x,\cdots, x^n,\cdots$ 就是 $[a,b]$ 上线性无关函数族，

若 $\varphi_0(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$ 是 $C[a,b]$ 中的线性无关函数，且 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是任意实数，则

$$s(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

的全体是 $C[a,b]$ 中的一个子集，记作

$$\Phi=span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}\}$$

φ_k 判断函数族 $\{\varphi_k\}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$ 线性无关的充要条件

定理 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上线性无关的充要条件是它的克莱姆（Gramer）行列式 $G_{n-1}\neq 0$，其中

$$G_{n-1}=G(\varphi_0\ \varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_{n-1})\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_{n-1})\\ \cdots\cdots & & \cdots & \\ (\varphi_{n-1},\varphi_0) & (\varphi_{n-1},\varphi_1) & \cdots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\end{vmatrix}$$

证（反证法）

$\Rightarrow$ 假设 $G_{n-1}=0.$ 则齐次线性方程组

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\varphi_k,\varphi_j)=0,\quad j=0,1,\cdots n-1.$$

有非零解 $(\beta_0,\beta_1,\cdots\beta_{n-1})^T$ 其中 $\beta_0,\beta_1,\cdots\beta_{n-1}$ 不全为零

$$令\ \psi(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\varphi_k(x)$$

$$则有\ (\psi,\varphi_j)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\varphi_k,\varphi_j)=0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

β_j不全为0

$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\varphi_k(x)$

因而 有

$$(\psi,\psi)=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(\psi,\varphi_j)=0. \Longrightarrow \psi(x)\equiv 0,\quad a\le x\le b.$$

这与 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots\varphi_{n-1}(x)$ 在$[a,b]$上线性无关矛盾。

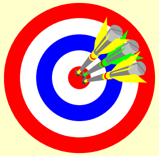
$\Longleftarrow$ 若函数系$\{\varphi_i\}\ (i=0,1,\cdots,n-1)$. 线性相关，则由定义可知有不全为0的数值 $a_0,a_1,\cdots a_{n-1}$. 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\varphi_i=0.$$

于是将此式两边乘以$\rho\varphi_0,\rho\varphi_1,\cdots,\rho\varphi_{n-1}$. 之后再积分，便得到方程组

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i(\varphi_i,\varphi_j)=0.(j=0,1,\cdots n-1).$$

既然上面的齐次方程 组有非0解$(a_0,a_1,\cdots a_{n-1})$. 故其系数行列式的值一定为0； 亦即 $G_{n-1}=0$ 这与 $G_{n-1}\neq 0$ 矛盾。



§2 函数的最佳平方逼近 /* Least_Squares Approximation */

设函数 $f(x) \in C[a,b]$，用 n 次多项式 $s(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 作最佳平方逼近，就是要求得以 $a_0^*, a_1^*, \cdots, a_n^*$ 为系数的多项式

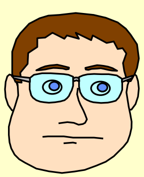
$$s^*(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$$

使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\int_a^b [f(x)-s^*(x)]^2 dx=\min_{s(x)\in H_n}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$

推广到一般的情况，就是对于给定的权函数 $\rho(x)$，要求得 $a_k^*\quad(k=0,1,\cdots,n)$ 使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\int_a^b \rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2 dx=\min_{s(x)\in H_n}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$



n 次多项式 $s(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 以 $1, x, \cdots, x^n$ 为基函数所作的线性组合构成的一类函数。进一步推广可将 x^k 改为一般的线性无关的连续函数 $\varphi_k(x)$，以 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为线性组合 $s(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ 的全体构成 $C[a,b]$ 的子空间 Φ，即 $\Phi=span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$。

最佳平方逼近的提法可叙述为：求 $a_k^* \quad (k=0,1,\cdots,n)$ 使

$$\|f(x)-s^*(x)\|_2^2=\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k^*\varphi_k(x)\right\|_2^2=\min_{s(s)\in\Phi}\|f(x)-s(x)\|_2^2$$

称 $s^*(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^*\varphi_k(x)$ 为 $f(x)\in C[a,b]$ 在子集 $\Phi\subset C[a,b]$ 中的最佳平方逼近函数，为了求得 $s^*(x)$，这个问题等价于关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的多元函数

$$I(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\int_a^b\rho(x)[f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)]^2dx$$

的最小值问题。

为了确定参数 $a_k \quad (k=0,1,\cdots,n)$ 由多元函数极值存在的必要条件，有

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0 \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\int_a^b \rho(x)\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right]\varphi_k(x)dx = 0$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n)$$

即有 $$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j, \varphi_k)a_j = (f, \varphi_k), \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

这是关于未知数 $a_0, a_1, \cdots$ 的线性代数方程组，称为法方程，由于$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$线性无关，行列式$G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) \neq 0$，于是方程组有唯一解 $a_k =$

$s^*(x)$

下证$s^*(x)$是所求解，即对

$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \\ \vdots \\ (\varphi_n, f) \end{bmatrix}$$

为此只要考虑

$$D=\int_a^b \rho(x)[f(x)-s(x)]^2dx-\int_a^b \rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2dx \geq 0$$

$$=\int_a^b \rho(x)[f(x)-s^*(x)]^2dx+2\int_a^b \rho(x)[s^*(x)-s(x)][f(x)-s^*(x)]dx \geq 0$$

大于0　　等于0

$s^*(x)$ 的系数 a_k^* 是法方程的解

这就证明了 $s^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的最佳平方逼近函数。

如果令 $\delta=f(x)-s^*(x)$，由法方程易知 $(f-s^*,s^*)=0$ 则平方误差为：

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k)\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

$$\|\delta\|_2^2=(f-s^*,f-s^*)=(f,f)-(s^*,f)$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}a_k^*(\varphi_k,f)$$

若取 $\varphi(x)=x^k,\ \rho(x)\equiv 1,\ f(x)\in C[0,1]$，要在 H_n 中求 n 次最佳平方逼近多项式 $s^*(x)=a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n$

这时

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1}$$

$$(f,\varphi_k)=\int_0^1 x^k f(x)dx=d_k$$

于是法方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

Hilbert阵！

记 $\mathbf{d}=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^T$， $\mathbf{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T$， 则

$$H\mathbf{a}=\mathbf{d}$$

的解 $a_k=a_k^*\ \ (k=0,1,\cdots,n)$ 即为所求.

例 定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$， 试在 $H_1=span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $P(x)$。

这里实际上要求的是(0，1)上的一次最佳平方逼近多项式

解 $d_0=(f,1)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$, $d_1=(f,x)=\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{2}{5}$

得法方程组为
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

解得$a_0^*=\dfrac{4}{15}, a_1^*=\dfrac{12}{15}$，所求的最佳平方逼近元素为

$$P(x)=\frac{4}{15}+\frac{12}{15}x \qquad 0\le x\le 1$$

平方误差

$\|\delta\|_2^2$

若要法方程非对角线上元素为零,

$\varphi_k(k=0,1,\cdots,n)$ 应怎么取？

对于一般的基底 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ ，当 n 稍大时，计算法方程组中的 (φ_k,φ_j) 以及求解法方程组的计算量都是很大的，若采用 $1,x,\cdots,x^n$ 作基底，当 $\rho(x)\equiv 1$ 时，虽然 $(\varphi_k,\varphi_j)=(x^k,x^j)$ 容易计算，但由此形成的法方程组系数矩阵当 $n\ge 4$ 时是病态矩阵，用单字长在计算机上求解法方程组，其结果往往不太可靠，如何解决？。

可采用正交基底.

为此，我们先介绍正交多项式

HW: p.85
#2，#3

§3 最小二乘拟合 /*Discrete L-S approximating */

仍然是已知 $x_1 \ldots x_N$; $y_1 \ldots y_N$，求一个简单易算的近似函数 $P(x) \approx f(x)$。

但是 ① N 很大；

② y_i 本身是测量值，不准确，即 $y_i \neq f(x_i)$

这时没必要取 $P(x_i) = y_i$，而要使 $P(x_i) - y_i$ 总体上尽可能小。

常见做法：

不可导，求解困难☹

太复杂☹

- 使 $\max\limits_{1\le i\le N} |P(x_i) - y_i|$ 最小 /* minimax problem */
- 使 $\sum\limits_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|$ 最小
- 使 $\sum\limits_{i=1}^{N} |P(x_i) - y_i|^2$ 最小 /* Least-Squares method */

问题一般的提法是：对于给定的数据$(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$，选取线性无关的函数族$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$及权函数$\omega(x)$，要求在函数类$\Phi = Span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$中寻找一个函数

$$\varphi^*(x) = a_0^*\varphi_0 + a_1^*\varphi_1 + \cdots + a_m^*\varphi_m \quad (m < N)$$，使

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} \omega(x_i)[y_i - \varphi(x_i)]^2}$$

达到极小 …… 的二次函数

$$(f, g) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \omega(x_i) f(x_i) g(x_i) & \text{离散型} \\ \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx & \text{连续型} \end{cases}$$

由多元函 ……

$$\cdots \sum_{i=1} \cdots (x_i)\varphi_j(x_i)[y_i - \sum_{k=0} a_k \varphi_k(x_i)] = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, m)$$

引入内积

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{N} \omega(x_i) f(x_i) g(x_i)$$ /*discrete type */

方程组 $\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)[y_i-\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x_i)]=0\ \ (j=0,1,\cdots,m)$ 可以表示为

$$a_0(\varphi_j,\varphi_0)+a_1(\varphi_j,\varphi_1)+\cdots+a_m(\varphi_j,\varphi_m)=(\varphi_j,y)\quad (j=0,1,\cdots,m)$$

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$$

$$(\varphi_j,y)=\sum_{i=1}^{N}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)y_i$$

即有

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,y)\\ (\varphi_1,y)\\ \vdots\\ (\varphi_m,y)\end{bmatrix}$$

这个方程组称为法方程或正规方程组，若用$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$

构成 $N\times(m+1)$ 的矩阵 即

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \vdots & \varphi_m(x_1)\\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \varphi_0(x_N) & \varphi_1(x_N) & \cdots & \varphi_m(x_N)\end{bmatrix}$$

法方程组(或 系数

/* normal eq coefficients */

又引入向量 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots,a_m)^T$，$\mathbf{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_N)^T$ ，权w=I
则法方程组可写成以下矩阵形式：

$$\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{A}\alpha=\mathbf{A}^T\mathbf{Y}}$$

由于$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 线性无关，可知法方程存在唯一解

$$a_0=a_0^*,a_1=a_1^*,\cdots,a_m=a_m^*$$

从而得到函数

$$\varphi^*(x)=a_0^*\varphi_0+a_1^*\varphi_1+\cdots+a_m^*\varphi_m$$

类似连续型的证明，可知$\varphi^*(x)$使I 取最小值。

最小平方误差为

$$\boxed{\delta^2=\|y-\varphi^*\|_2^2=(y-\varphi^*,y-\varphi^*)=\|y\|_2^2-\sum_{j=0}^{m}a_j^*(\varphi_j,y)}$$

最小二乘拟合多项式 /* L-S approximating polynomials */

若取$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \cdots, \varphi_m = x^m$，即取$\{1, x, \cdots, x^m\}$为基函数

的代数多项式拟合时，相应的法方程组就是

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \omega_i & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^m \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^m & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} \omega_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

求出法方程组的解$a_0, a_1, \cdots, a_m$，就可得到拟合多项式

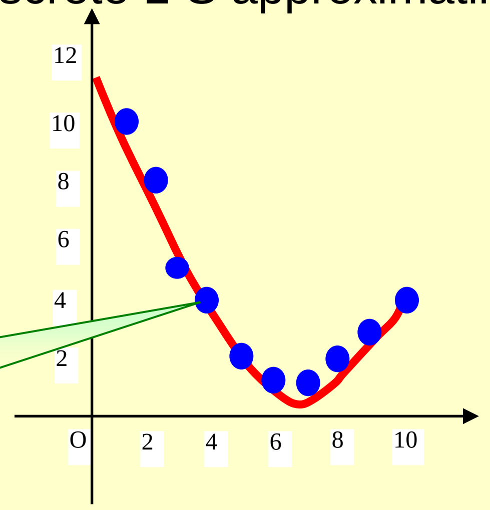
$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

例：设有一组数据为表中第（2），（3）两列所示，求一代数多项式拟合这组数据

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$x_i^2 y_i$	x_i^3	x_i^4
1	1	10	10	1	10	1	1
2	3	5	15	9	45	1	81
3	4	4	16	16	64	27	256
4	5	2	10	25	50	81	625
5	6	1	6	36	36	64	1296
6	7	1	7	49	49	256	2401
7	8	2	16	64	128	125	4096
8	9	3	27	81	243	625	6561
9	10	4	40	100	400	216	10000
$\sum_{i=1}^{9}$	53	32	147	381	1025	1296	25317

解 通常可按下列步骤求解：

（1）绘草图



由已知数据描出粗略的图形从图看出近似为一条抛物线

(x_i , y_i) , $i = 1, 2, \ldots, m$

（2）造型

从草图可设拟合曲线为

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

（3）建立包含未知数的正规方程组，为此列表算出以下各数值

$$\sum_{i=1}^{9} x_i, \sum_{i=1}^{9} x_i^2, \sum_{i=1}^{9} x_i^3, \sum_{i=1}^{9} x_i^4, \sum_{i=1}^{9} y_i, \sum_{i=1}^{9} x_i y_i, \sum_{i=1}^{9} x_i^2 y_i$$

由表的最后一行的数值可得正规方程组

$$\begin{cases} 9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 32 \\ 53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 147 \\ 381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 1025 \end{cases}$$

（4）求解正规方程组得

$$a_0 = 13.45966,$$
$$a_1 = -3.60531,$$
$$a_2 = 0.26757$$

故所求的二次拟合多项式为 $y = \varphi(x) = 13.45966 - 3.60531x + 0.26757x^2$

例： 用 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

，$\omega=1$

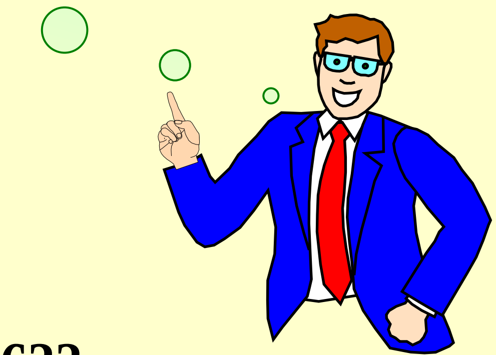
解： $\varphi_0(x)=1,$ …

$(\varphi_0,\varphi_0$ …

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i=10\qquad(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=30$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i^2=30\qquad(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^4=354$$

$$(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot y_i=58\qquad(\varphi_1,y)=182\qquad(\varphi_2,y)=622$$



$$\begin{pmatrix}4&10&30\\10&30&100\\30&100&354\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\182\\622\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$a_0=-\frac{3}{2},\ a_1=\frac{49}{10},\ a_2=\frac{1}{2}$$

$$y=P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

$$\|B\|_\infty=484,\qquad \|B^{-1}\|_\infty=\frac{63}{4}\ \Rightarrow\ cond\,(B)_\infty=7623$$

例 试分别用二次和三次多项式以最小二乘拟合表中的数据，并比较优劣。

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

解：设二次拟合函数为

$$y(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$$

利用法方程 $A^TAa=A^TY$

其中 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2,\quad a=(a_1,a_2,a_3)^T$

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\qquad Y=(-0.1,0.1,0.4,0.9,1.6)^T$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}5&0&10\\0&10&0\\10&0&34\end{bmatrix}\qquad A^TY=\begin{bmatrix}2.9\\4.2\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5&0&10\\0&10&0\\10&0&34\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9\\4.2\\7\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{aligned}a_1&=0.4086,\\a_2&=0.42,\\a_3&=0.0857\end{aligned}$$

故所求得二次多项式为

$$\sigma = (Y - Aa)^T (Y - Aa) = Y^T (Y - Aa)$$

因$a^T A^T A a - a^T A^T Y = a^T (A^T A a - A^T Y) = 0$

$$y(x) = 0.4086$$

误差平方和

$$\sigma_2 = Y^T (Y - Aa) = 0.00116$$

同样可以求得三次多项式为

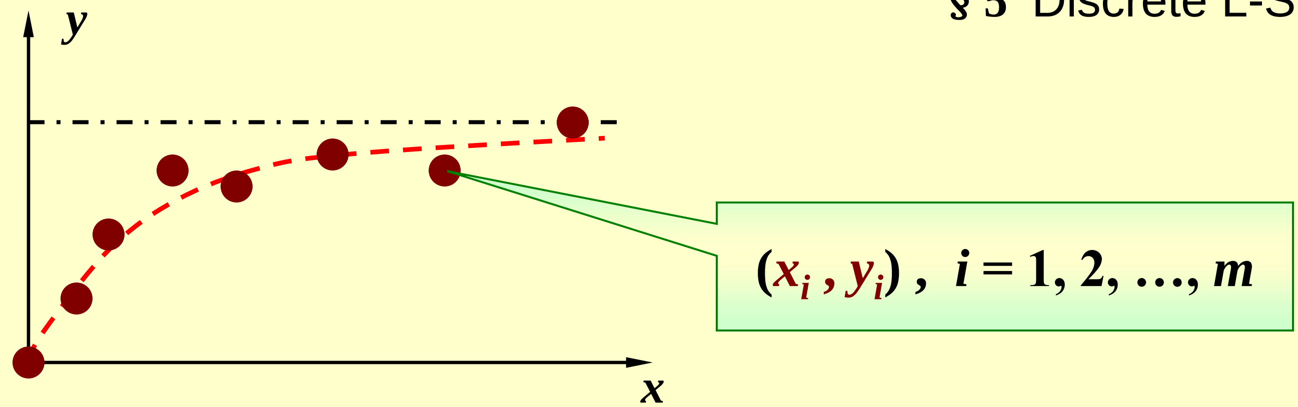
$$y(x) = 0.4086 + 0.39167x + 0.0857x^2 + 0.00833x^3$$

误差平方和为

$$\sigma_3 = Y^T (Y - Aa) = 0.000194$$

显然三次多项式的精度要好些。

例：



方案一：设 $y \approx P(x) = \dfrac{x}{ax+b}$

求 a 和 b 使得 $\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{x_i}{ax_i+b} - y_i\right)^2$ 最小。

线性化 /* linearization */：令 $Y = \dfrac{1}{y}$, $X = \dfrac{1}{x}$ ，则

$Y \approx a + bX$ 就是个线性问题

Take it easy! We just have to *linearize* it …

将(x_i , y_i)化为(X_i , Y_i) 后易解 a 和b。

方案二：设 $y \approx P(x) = a e^{-b/x}$　　$(a > 0, \ b > 0)$

线性化：由 $\ln y \approx \ln a - \dfrac{b}{x}$ 可做变换

$$Y = \ln y, \quad X = \frac{1}{x}, \quad A = \ln a, \quad B = -b$$

$Y \approx A + BX$ 就是个线性问题

将(x_i, y_i)化为(X_i, Y_i)后易解 A 和B

$$\Rightarrow \quad a = e^A, \ b = -B, \ P(x) = a e^{-b/x}$$

HW: p.85,86
#7，#8