华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生　考试日期 2014-12-16　学生所在院系________________

学号____________________姓名____________________任课教师____________________

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵

$B=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式：$A^2+A=2I$，问 A 是否可对角化__________.

3. 矩阵的谱半径是指__________________________.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于________________________________.

5. 对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond$（A）$_p$ __1，当 A 为正交矩阵时 $cond$（A）$_2$=___.

6. 已知 $\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$，则其近似值 2.23607 有_________位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为____________.

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$____________，$f[0,1,2,3,4]=$____________.

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_i f(x_i)$ 至少有_____次代数精度.

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{3}$，则 λ 的取值范围是______________.

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式____________________.

11. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为次序统计量，则 $X_{(1)}{}^2+X_{(2)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$______________.

12. 给出点估计评价的三个标准________.

13. 给出假设检验中显著性水平α与统计假设H_0的关系________.

14. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，μ未知，σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧区间估计为___________.

15. 使用方差分析时对数据的要求是_______.

二、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 分，多答不加分。）

16. 已知R^3中的两个基底$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从$B_1$到$B_2$的基变换矩阵。

17. 设 R^4 中的向量 $x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$， $x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$， $x_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$， $x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$， 分别张成$w_1=span\{x_1,x_2\}$， $w_2=span\{x_3,x_4\}$，求w_1+w_2及$w_1\cap w_2$的基底及维数。

18. 设T是线性空间V^3的线性变换，已知T在基$B=\{\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3\}$下的矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$

求T的特征值和对应的特征向量。

19. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $AP=PJ$。

20. 设$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，问$\lim\limits_{k\to\infty} A^K=0$成立吗？若成立证明之。

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$，求$A$的满秩分解。

22. 设有微分方程组$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=2x_1(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t)\end{cases}$

$x(0)=\left[-1,1,0\right]^T$，求满足初始条件的特解。

23. 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求$A$的奇异值分解。

三、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 份，多答不加分。）

24. 对函数$f(0)=-1$，$f'(0)=-2$, $f(1)=0$，$f'(1)=10$，试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式$H_3(x)$，并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

并由此计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}dx$。

26. 设有常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases}$的隐式中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{h}{2}}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$，证明该方法是无条件稳定的。

27. 方程$Ax = b$的系数矩阵为$A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$，问$a$取何值时，Jacobi 迭代收敛？

28. 设$(X_1, \cdots, X_n)$为总体X的一个样本，$\mathrm{E}X = \mu$，μ未知。

（1）$\overline{X}$是否为μ的无偏估计？

（2）由$(X_1, \cdots, X_n)$构造μ的n个无偏估计.

（3）设$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i > 0, i = 1, \cdots, n$.

问$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$是否为$\mu$的无偏估计，若是$\mu$的无偏估计，确定$a_i$，$i = 1, \cdots, n$，使$\hat{\mu}$的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度，设服从正态分布，标准差$\sigma = 0.048$，现抽取 5 根测得纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44，问在显著性水平$\alpha = 0.10$下，能否认为σ^2无显著变化。（$\chi^2_{0.05}(4) = 0.711$，$\chi^2_{0.95}(4) = 9.488$）

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i,\sigma^2)$， $i=1,2,3$ 。检验三个厂的平均强度有无显著差异？ $\alpha=0.05$ （ $F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$ ）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1,x_2,x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y=\beta_0\beta_1^x\varepsilon$ （ ε 满足回归分析条件），求 β_0,β_1 的点估计，并求 $\hat{y}=\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^x$.