§6 解线性方程组的迭代法

/* Iterative Techniques for Solving Linear Systems */

求解 $A\vec{x}=\vec{b}$

思路　将 $A\vec{x}=\vec{b}$ 等价改写为 $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{f}$ 形式，建立迭代 $\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{f}$ 。从初值 $\vec{x}^{(0)}$ 出发，得到序列 $\{\vec{x}^{(k)}\}$ 。

称B为迭代矩阵

计算精度可控，特别适用于求解系数为大型稀疏矩阵 /* sparse matrices */ 的方程组。

研究内容：

- 如何建立迭代格式？
- 收敛速度？
- 向量序列的收敛条件？
- 误差估计？

Jacobi 法和 Gauss - Seidel 法

/* Jacobi & Gauss-Seidel Iterative Methods */

➢ Jacobi Iterative Method

先看一个例子

例：求解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

解：我们分别从上面的三个方程中分离出 x_1, x_2, x_3

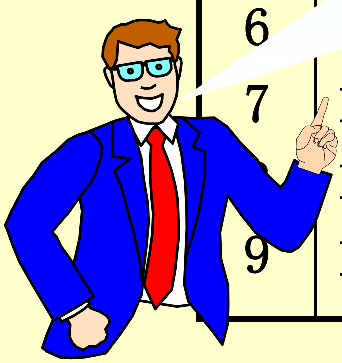
$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72 \\ x_2 &= 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.83 \\ x_3 &= 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84 \end{aligned}$$

据此可建立迭代公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.84 \end{cases}$$

设取迭代初值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ 下表记录了迭代结果，当迭代次数 k 增大时，迭代值 $x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$，$x_3^{(k)}$ 会越来越逼近方程组的精确解 $x_1^* = 1.1, x_2^* = 1.2, x_3^* = 1.3$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.00000	0.00000	0.00000
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	1.19510	1.29414
6	1.09834	1.19834	1.29504
7	1.09944	1.19981	1.29934
8	1.09981	1.19941	1.29978
9	1.09994	1.19994	1.29992



Jacobi迭代分量形式：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$a_{ii} \neq 0$

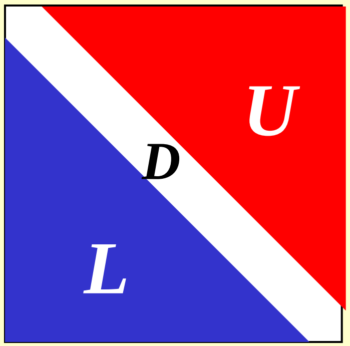
$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1\right) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n + b_2\right) \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n\right)
\end{cases}
$$

Jacobi迭代的矩阵形式

写成矩阵形式：

$A =$ 

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (D+L+U)\vec{x} = \vec{b}$$
$$\Leftrightarrow D\vec{x} = -(L+U)\vec{x} + \vec{b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B}\vec{x} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

Jacobi 迭代阵

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss - Seidel Iterative Method

Jacobi迭代的计算一般按 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_n^{(k+1)}$的次序进行，注意到计算$x_i^{(k+1)}$时，$x_1^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$已经算好，而Jacobi迭代法并不利用这些最新的近似值计算，而仍用 $x_1^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$，这启发我们对Jacobi迭代进行修改。

例 对前面所举例子，作修正得

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + .72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+!)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases}$$

仍取初值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$，按上式的计算结果见下表，与前面的表的计算结果比较，本公式的效果明显比前面的要好。

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.72000	0.90200	1.16400
2	1.04308	1.16719	1.28205
3	1.09313	1.19947	1.29972
4	1.09913	1.19947	1.29972
5	1.09989	1.19993	1.29996
6	1.09999	1.19999	1.30000

Gauss - Seidel Iterative Method

Gauss-Seidel迭代分量形式

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)$$

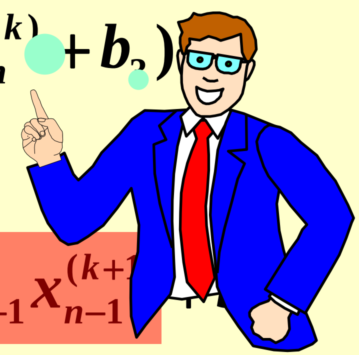
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3)$$

… … … …

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n)$$

充分利用新值建立起来的公式称作高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）公式



$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

Guass-Seidel迭代的矩阵形式

写成矩阵形式：

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L\vec{x}^{(k+1)} + U\vec{x}^{(k)}) + D^{-1}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad (D+L)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

Gauss-Seidel
迭代阵

A mathematician ab ague:

" He made a

in a good directi ound

out that it is very diff o make good mistakes. "

p.204 #19 给出了例子。
收敛性分析将在后面讨论。

注：二种方法都存在收敛性问题。

有例子表明：Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；而Jacobi法收敛时， Gauss-Seidel法也可能不收敛。

§ 7 迭代法的收敛性 /* Convergence of Iterative methods */

$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$ 的收敛条件

$$\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^* = (B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}) - (B\vec{x}^* + \vec{f}) = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*) = B\vec{e}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}^{(k)} = B^k \vec{e}^{(0)}}$$

定理 设 $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{f}$ 存在唯一解，则从任意 $\vec{x}^{(0)}$出发，迭代 $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$ 收敛 $\Leftrightarrow \quad B^k \to 0$

定理 $B^k \to 0 \quad \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

定理 （迭代法基本定理）设有方程组$\vec{x} = B\vec{x} + f$ 对于任意初始向量 $x^{(0)}$及任意 f ，解此方程组的迭代（即 $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$ 法）收敛的充要条件是$\rho(B) < 1$。

定理 $B^k \to 0 \iff \rho(B) < 1$

证明：“⇒” 若 λ 是 B 的eigenvalue, 则λ^k 是 B^k 的eigenvalue 。

则 $[\rho(B)]^k = [\max|\lambda|]^k = |\lambda_m{}^k| \le \rho(B^k) \le \|B^k\| \to 0$

$\Rightarrow \rho(B) < 1$ ✓

“⇐” 首先需要一个引理 /* Lemma */

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在算子范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$ 。

由 $\rho(B) < 1$ 可知存在算子范数$\|\cdot\|$ 使得 $\|B\| < 1$。

$\|B^k\| \le \|B\|^k \to 0$ as $k \to \infty \iff B^k \to 0$ ∎

定理（迭代法基本定理）设有方程组 $\vec{x} = B\vec{x} + f$ 对于任意初始向量 $\vec{x}^{(0)}$ 及任意 f，解此方程组的迭代（即 $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$ 法）收敛的充要条件是$\rho(B) < 1$。

注意到

$$\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^* = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*) = B\vec{e}^{(k)} = B^{k+1}\vec{e}^{(0)}$$

则 $\|\vec{e}^{k}\| = \|B^{k}\vec{e}^{(0)}\| \le \|B^{k}\|\|\vec{e}^{(0)}\| \le \|B\|^{k}\|\vec{e}^{(0)}\|$, $\|\vec{e}^{k}\| \approx (\rho(B))^{k}\|\vec{e}^{(0)}\|$

定义 称 $R(B) = -\ln\rho(B)$ 为迭代法……速度。

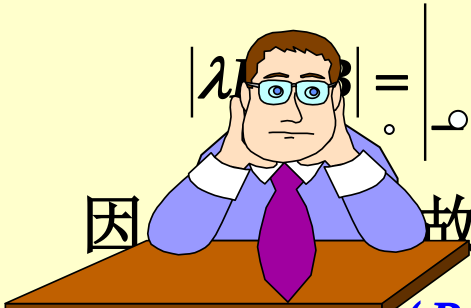
表示*k*次迭代后误差的乘数,若要求*k*次迭代后误差不超过初始误差的10^{-t}倍，即 $(\rho(B))^{k} \le 10^{-t}$ 则迭代次数需满足 $k \ge t\ln 10 \big/ (-\ln\rho(B))$

例：……

的*Jacobi*迭……。

解：方程组的*Jacobi*迭代阵 $B = \ldots 0.32 \quad 0$

$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & \ldots \\ -0.32 & \lambda \end{vmatrix} \ldots \lambda_2$



用什么度量收敛的快慢程度呢?

因……故方程组的*Jacobi*迭代收敛。……度

$R(B) = -\ln\rho(B) = -\ln 0.8 = 0.223$

定理（充分条件）若存在一个矩阵范数使得 $\|B\| = q < 1$，则迭代收敛，且有下列误差估计：

① $\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}\| \le \dfrac{q}{1-q}\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|$

② $\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}\| \le \dfrac{q^k}{1-q}\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|$

因 $\rho(B) \le \|B\| < 1$
故收敛性得证。

证明：① $\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} = B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k-1)})$

$$= B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} + \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)})$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}\| \le q(\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}\| + \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|) \checkmark$$

② $\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} = B(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k-2)}) = \ldots = B^{k-1}(\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)})$

$$\Rightarrow \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\| \le q^{k-1}\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|$$

∎

定义 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，满足 $|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n$

且至少有一个*i*值，使得 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ 成立，

则称*A*为对角占优矩阵；若 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n$

则称*A*为严格对角占优矩阵。

严格对角占优:

***n* = 3:**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\qquad \begin{array}{l} |a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}| \\ |a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}| \\ |a_{33}|>|a_{31}|+|a_{32}| \end{array}$$

一般:

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n$$

定理 （充分条件）若A为严格对角占优阵 /* strictly diagonally dominant matrix */ 则解$A\vec{x}=\vec{b}$的Jacobi 和 Gauss - Seidel 迭代均收敛。

证明:我们需要对 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel迭代分别证明：任何一个$|\lambda|\geq 1$都不可能是对应迭代阵的特征根，即$|\lambda I-B|\neq 0$。

首先需要一个引理 /* Lemma */

若A为SDD阵，则 det(A) ≠ 0，且所有的 $a_{ii}\neq 0$。

显然

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jacobi: $B_J=-D^{-1}(L+U)$

$+L+U|$

$|$

是SDD阵

关于Gauss-Seidel迭代的证明与此类似。

Jacobi收敛的另一种证法见教材p199.

回顾

$$AX=b \xrightarrow{\text{等价变形}} X=BX+f,$$

$$\begin{cases} X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f, \ k=0,1,2,\cdots \\ X^{(0)}=\ \text{初始向量} \end{cases} \qquad (1)$$

$$X^{(k)}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, k=0,1,2,\cdots \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$(L+D+U)X=b$$

Jacobi:

$$\begin{cases} B=-D^{-1}(L+U) \\ f=D^{-1}b \end{cases}$$

G-S:

$$\begin{cases} B=-(L+D)^{-1}U \\ f=(L+D)^{-1}b \end{cases}$$

$\rho(B)$: 矩阵B的绝对值最大特征值。

B的特征值: $\lambda_i, \ i=1,2,\cdots,n$ 则 $\rho(B)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

定理1(基本定理) 对任何 $X^{(0)}$ 和 f，迭代(1)收敛的充要条件是 $\rho(B)<1$

定义 称 $R(B)=-\ln\rho(B)$ 为迭代法的收敛速度。

定理2(充分) 如果 $\|B\|_r<1$ 则迭代(1)收敛，r 为任一种范数。

定理3(充分) 对 $AX=b$，如果 A 严格对角占优，则相应 Jacobi、G−S迭代均收敛。

严格对角占优:

$n=3$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}|+|a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}|+|a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}|+|a_{32}| \end{aligned}$$

一般:

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n$$

实际使用：

易

定理3: 验证系数矩阵是否对角占优? 充分条件

定理2: 求迭代矩阵B， 验证 $\|B\|_r < 1$? 充分条件

定理1: 求迭代矩阵B, 求B的特征值, 验证 $\rho(B) < 1$? 充要条件

难

下面讲例子

例 给定线性方程组 $\begin{cases} 10x_1 + 3x_3 - 5x_4 = -5 \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 15 \end{cases}$

1. 分别写出Jacobi及G−S迭格式；
2. 考察收敛性。

解：1. Jacobi迭代 , G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.3x_3^{(k)} + 0.5x_4^{(k)} - 0.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.125x_1^{(k)+1} + 0.5x_3^{(k)} + 1.25 \\ x_3^{(k+1)} = 0.25x_1^{(k)+1} + 0.25x_2^{(k)+1} + 0.8333x_4^{(k)} - 1.66667 \\ x_4^{(k+1)} = -0.14286x_1^{(k)+1} + 0.28571x_2^{(k)+1} - 0.42857x_3^{(k)+1} + 2.14286 \end{cases}$$

$X^{(0)} =$ 初始向量。 $k = 0,1,2,\cdots$

2. 因 |10|>|3|+|-5|

|8|>|1|+|-4|

|-12|>|3|+|3|+|1|

|7|>|1|+|-2|+|3|

系数矩阵对角占优,

故上述Jacobi、G-S迭代均收敛。

例 设有方程组 $X = BX + f$

$$\text{其中} B = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

讨论用迭代法求解 $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$ 的收敛性。

解

$$\|B\|_1 = 1.2, \; \|B\|_2 = 1.021, \; \|B\|_\infty = 1.1$$

但迭代阵的谱半径 $\rho(B) = 0.9$，故其迭代法收敛。

例 考察用Jacobi方法解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

的收敛性。

解 Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} \\ \frac{6}{12} & \frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

因 $\|B_J\|_\infty = \max\{\frac{5}{8}, \frac{5}{11}, \frac{9}{12}\} < 1$ 故其Jacobi 迭代收敛。

例 方程组 $AX=b$ 的系数矩阵为 $\begin{bmatrix} \alpha & 5 & 0 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$，

问 α 取什么值时, Jacobi迭代收敛。

解:

$$B=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{2}{\alpha} \\ 0 & -\frac{2}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{5}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \lambda & \frac{2}{\alpha} \\ 0 & \frac{2}{\alpha} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & \frac{2}{\alpha} \\ \frac{2}{\alpha} & \lambda \end{vmatrix}-\frac{5}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

HW: p.204-205
#18, #19, #22,#24

$$=\lambda(\lambda^2-\frac{4}{\alpha^2})-\frac{5\lambda}{\alpha^2}=\lambda^3-\frac{4\lambda}{\alpha^2}-\frac{5\lambda}{\alpha^2}=\lambda^3-\frac{9\lambda}{\alpha^2}=\lambda(\lambda^2-\frac{9}{\alpha^2})$$

得 $\lambda_1=0, \lambda_{1,2}=\pm\frac{3}{\alpha}$，由 $\left|\frac{3}{\alpha}\right|<1$，得 $-1<\frac{3}{\alpha}<1$

故当 $\alpha>3$ 或 $\alpha<-3$ 时, Jacobi迭代收敛。