§ 2.2 Jordan标准形

定义 形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r}$$

的$r\geq 1$阶方阵称为一个Jordan块，其中λ是实数或复数.

由若干个(包括单个)Jordan块所构成的对角块矩阵称为Jordan矩阵。

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i & 1 & \\ & 1-i & 1 \\ & & 1-i \end{bmatrix}$$

等都是Jordan块（如果把它们看作是单个Jordan块的方阵，则它们是Jordan矩阵）. 而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

等都是Jordan矩阵. 并且上列的最后一个Jordan矩阵可以看成是由两个子Jordan矩阵

$$J_1=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix},\quad J_2=\left[\begin{array}{c|cc}-2&&\\\hline&-2&1\\&&-2\end{array}\right]$$

组成的, 其中 J_1 是Jordan块, J_2 是关于-2的Jordan矩阵. 记为J=diag $\{J_1,J_2\}$.

对角矩阵就是1阶Jordan块所组成的对角块矩阵, 所以Jordan矩阵包含对角矩阵。

本节的目的是论证复数域上任一 n 阶方阵都相似于一个Jordan矩阵，并且Jordan块的个数等于该方阵的线性无关特征向量的个数.

例1 方阵

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

是不可对角化的. 事实上, A 的特征多项式是

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

故 A 有两个互异的特征值: $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ （二重）.

关于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量为 $x_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ ，由于齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix}-5 & 3 & -2\\ -7 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-2I$ 的秩是2，所以它的基础解系只有一个向量. $x_2=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$. 因而 $\dim E_{\lambda_2}=1<2$，故 A 不可对角化.

我们看出, A 不可对角化的原因就是特征值 $\lambda_2=2$ 的几何重数小于代数重数, 而这又是因为 $A-2I$ 的秩是2引起的.

由于矩阵乘积的秩的不等式(2. 1-10), 所以有

$$rank(A-2I)^2 \le rank(A-2I),$$

故考虑求解下述齐次线性方程组

$$(A-2I)^2 x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = 0.$$

因 $rank(A-2I)^2 = 1$, 故 $\dim N\left[(A-2I)^2\right] = 2$, 恰好等于 $\lambda_2 = 2$ 的代数重数, 因此方程组有两个线性无关的解, 由于 $N[(A-2I)] \subset N\left[(A-2I)^2\right]$, 所以上述的 $x_2 = [-1 \quad -1 \quad 1]^T$ 是一个解，它是 A 关于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量. 另一个与 x_2 线性无关的解可取为 $x_3 = [-1 \quad -2 \quad 0]^T$,

它满足关系式

$$(A-2I)x_3 = x_2,$$

即

$$Ax_3 = x_2 + 2x_3.$$

因此，

$$A[x_1 \quad x_2 \quad x_3] = [Ax_1 \quad Ax_2 \quad Ax_3] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right].$$

令

$$P = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

它是可逆阵，则有

$$P^{-1}AP=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right],$$

即 A 相似于Jordan矩阵.

上面例子说明, 方阵 A 虽然不可对角化, 但相似于Jordan矩阵. 这个结论具有一般性, 即复数域上任一方阵 A , 都能找到可逆矩阵P, 使 $P^{-1}AP$是Jordan矩阵. 用线性变换的语言来说就是, 若 T 是复数域上线性空间 V 的一个线性变换, 那么在 V 中必能找到一个基, 使 T 在该基下的矩阵是Jordan矩阵.

定义　设λ_0是方阵A的特征值. 如果对于向量x, 存在一个正整数k，使

$$(A-\lambda_0 I)^{k-1}x \neq 0, \text{但}(A-\lambda_0 I)^{K}x = 0, \qquad (2.2\text{-}1)$$

则称x为A关于λ_0的k级根向量(或**广义特征向量**). 简称x为λ_0的k级根向量.

按根向量的定义可知, 1级根向量为特征向量, 反之, 特征向量必为1级根向量. 而例1中的x_3，例2中的x_4都是2级根向量.

定理 设λ_0是方阵A的特征值，则A关于λ_0的不同级的根向量是线性无关的.

证 设$x_i\,(i=1,2,\cdots,p)$是A关于λ_0的i级根向量，要证明向量组$x_1x_2,\cdots x_p$线性无关.

设有等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_px_p=0.$$

用$(A-\lambda_0 I)^{p-1}$左乘上式两边，得

$$a_1(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_1+a_2(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_2+\cdots$$
$$+a_p(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_p=0.$$

由根向量的定义知，

$$(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_1=0,\cdots,(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_{p-1}=0,$$

但 $(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_p \neq 0$ ，因此 $a_p = 0$. 类似地可证

$$a_{p-1} = \cdots = a_1 = 0.$$

因此,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$$

即向量组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ 线性无关.

定理 A 关于不同特征值的根向量是线性无关的.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是A的不同特征值, $x_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 λ_i 的 n_i 级根向量，要证明向量组$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s$是线性无关的.

设有等式

$$b_1\mathbf{x}_1+b_2\mathbf{x}_2+\cdots+b_s\mathbf{x}_s=0. \qquad (2.2\text{-}2)$$

用 $(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}$ 左乘（2.2-2）式两边，得

$$\begin{aligned}&b_1(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_1\\&+b_2(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_2+\cdots\\&+b_s(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_s=0.\end{aligned} \qquad (2.2\text{-}3)$$

根据根向量的定义，有

$$(A-\lambda_2 I)^{n_2}\mathbf{x}_2=0,\cdots,(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_s=0,$$

从而由（2.2-3）式得

$$
\begin{aligned}
& b_1(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_1 \\
&= b_1(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}\mathbf{x}_1 \\
&= 0.
\end{aligned}
\qquad (2.2\text{-}4)
$$

令 $y \overset{\Delta}{=} (A-\lambda_1 I)^{n_1-1}x_1 \neq 0$, 则 $(A-\lambda_1 I)\mathbf{y} = (A-\lambda_1 I)^{n_1}\mathbf{x}_1 = 0$, 故 $\mathbf{y}$ 是A关于λ_1 的特征向量，因而（2.2-4）式成为

$$
b_1(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_s)^{n_s}\mathbf{y}=0.
$$

由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是互异的，有$\mathbf{y}\neq 0$, 所以 $b_1 = 0$. 同理可得 $b_2 = \cdots = b_s = 0$. 因此向量组 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s$ 线性无关.

定义 设λ_0是A的k重特征值，$(A-\lambda_0 I)^K$的零空间

$$N\left[(A-\lambda_0 I)^k\right]=\left\{x \middle| (A-\lambda_0 I)^k x=0\right\} \tag{2.2-5}$$

称为A关于λ_0的根空间，简称λ_0的根空间，记为N_{λ_0}.

容易看出，N_{λ_0}是λ_0的级数至多到k的所有根向量所张成的线性空间，并且N_{λ_0}是A的不变子空间.

值得指出的是，N_{λ_0}中根向量的最高级数可能小于k.例如，若对于特征值$\lambda_2=1$的代数重数是3，但由于$(A-1\cdot I)^2=(A-1\cdot I)^3$所以$N_{\lambda_0}$中根向量的最高级数是2，小于3.

N_{λ_0}中根向量的最高级数r 称为λ_0的指标,从而

$$N_{\lambda_0} = N\left[(A-\lambda_0 I)^r\right]$$

我们将会知道，λ_0 的指标 r即是关于λ_0 的子Jordan矩阵中Jordan块的最大阶数.

定理 设n阶方阵A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

其中λ_1 $\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 是$A$的所有不同的特征值, $n_1,n_2,\cdots,n_s$

是相应的代数重数, 则有

$$N_{\lambda_1}\oplus N_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_s} = C^n \qquad (2.2\text{-}6)$$

证 由前述有关根向量线性无关性的两个定理可知

$$N_{\lambda_1}+N_{\lambda_2}+\cdots+N_{\lambda_s}=N_{\lambda_1}\oplus N_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_s}\subset C^n.$$

又因 $f(A)=(A-\lambda_1 I)^{n_1}(A-\lambda_1 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda s_1 I)^{n_s}=O.$ 故（2.1-11）式给出

$$\dim N_{\lambda_1}+\dim N_{\lambda_2}+\cdots+\dim N_{\lambda_s}\geq n.$$

因而有

$$\dim N_{\lambda_1}+\dim N_{\lambda_2}+\cdots+\dim N_{\lambda_s}=n,$$

即（2.2-6）式成立.

把 A 相似简化为Jordan矩阵的关键是, 寻找 A 关于其特征值的各级根向量. 1级根向量可以解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)x=0, i=1,2,\cdots,s$$

求得. 如果rank $(A-\lambda_i I)=r_i$, 那么有 $n-r_i$ 个线性无关的属于 λ_i 的1级根向量.若 $n-r_i<n_i$,则必有 λ_i 的2级根向量.按定义, 可以通过解方程 $(A-\lambda_i I)x\neq 0;\quad (A-\lambda_i I)^2x=0$ 求得.

但这样求解是比较困难的,又不能得到与1级根向量有规律的关系,因此我们用下述方法.由于

$$(A-\lambda_i I)^2 x=(A-\lambda_i I)(A-\lambda_i I)x=0$$

所以若令 $$(A-\lambda_i I)x=y, \qquad (2.2\text{-}7)$$

则 $(A-\lambda_i I)y=0$,且 $y\neq 0$. 这就是说, y 是属于 λ_i 的1级根向量。

由于（2.2-7）式是非齐次线性方程组,所以要求它有解,增广矩阵 $[A-\lambda_i I \vdots y]$ 的秩必须也是 r_i .这就对 y 的选取作了限制.

如果还有更高级的根向量,我们仍是利用(2.2-7)式从这级的根向量 y 求高一级的根向量 x ,但要注意 y 的选取应使方程组(2.2-7)的解存在.

例3 求方阵 A 的根向量,其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 由于$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$,故 A有三重特征值2.又因齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}x=0$$

的系数矩 $A-2I$ 阵秩是1，所以特征值2的几何重数是3-1=2，小于代数重数3，因而存在2级根向量.

为了从1级根向量求得2级根向量，首先求出1级根向量的一般表达式，即给出上述方程组的通解.由于它的基础解系有两个向量:

$$x_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, x_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$$

所以它的通解为

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \begin{bmatrix}c_2 & c_1 & -c_2\end{bmatrix}^T.$$

代入(2.2-7)式得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}c_2\\ c_1\\ -c_2\end{bmatrix}$$

容易看出,当且仅当 $c_1=0$ 时,这个非齐次线性方程才有解,

且它的通解是

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}c_2 & 0 & -c_2\end{bmatrix}^T+b_1x_1+b_2x_2, c_2\neq 0.$$

这就是2级根向量的一般表达式.

于是

$$N_{\lambda=2}=span\{x_1,x_2,x_3\},\quad \dim N_{\lambda=2}=3,$$

其中$x_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$.特征值 2 的根空间的维数恰好等于它的代数重数.

那么是否还会有更高级的根向量呢?回答是不可能再有了.因为上一定理表明,特征值的根空间的维数只能等于它的代数重数,而不能大于代数重数.

例4 设

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 4\\ -12 & 4 & 8\\ -6 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

求可逆矩阵P使$P^{-1}AP$为Jordan矩阵。

解 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3,\ \lambda=2$ 是A的三重特征值。齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 4\\ -12 & 2 & 8\\ -6 & 1 & 4\end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-2I$ 的秩是1，因而基础解系有两个解向量，

例如，$x_1=\begin{bmatrix}4 & 4 & 5\end{bmatrix}^T,\ z_1=\begin{bmatrix}5 & 2 & 7\end{bmatrix}^T$

且通解的表达式为

$$y=c_1x_1+c_2z_1=\begin{bmatrix}4c_1+5c_2 & 4c_1+2c_2 & 5c_1+7c_2\end{bmatrix}^T$$

代入（2.2-7）式得

$$\begin{bmatrix}-6 & 1 & 4\\ -12 & 2 & 8\\ -6 & 1 & 4\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4c_1+5c_2\\ 4c_1+2c_2\\ 5c_1+7c_2\end{bmatrix}$$

对它的增广矩阵施行行初等变换：

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2\\ -12 & 2 & 8 & 4c_1+2c_2\\ -6 & 1 & 4 & 5c_1+7c_2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2\\ 0 & 0 & 0 & -4(c_1+2c_2)\\ 0 & 0 & 0 & c_1+2c_2\end{array}\right]$$

由此可见,当且仅当$c_1+2c_2=0$时这个非齐次方程组才有解。

若取$c_1=2/3, c_2=-1/3$, 这时 $y=x_2=[1 \quad 2 \quad 1]^T$, 上述非齐次线性方程组的一个解是$x_3=[0 \quad 1 \quad 0]^T$，且有$(A-2I)x_3=x_2$，即

$$Ax_3=x_2+2x_3$$

因此，取

$$P=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

因为若在（2.2-7）式中令$y=0$，也就是齐次线性方程组，$(A-\lambda_i I)x=0$ 它的非零解是A关于λ_i 的特征向量，亦即 λ_i 的1级根向量，所以我们可以直接从（2.2-7）式出发求λ_i 的各级根向量。如果是求A的Jordan标准形，所需要求的只是线性无关的根向量。

例5 求方阵的Jordan标准形。

$$A=\begin{bmatrix}4&3&0&1\\0&2&0&0\\1&3&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

解 A的特征多项式 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)$ ，故它有两个不同的特征值：代数重数是3的特征值 $\lambda_1=2$ 和单重特征值 $\lambda_1=4$ 。

关于$\lambda_1 = 2$，考察线性方程组（2.2-7），即

$$(A-2I)x = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

由于$rank(A-2I) = 2$, 所以 $\dim V_{\lambda_1} = 4-2 = 2 < 3$, 因而还有2级根向量。

对此方程组的增广矩阵施行行初等变换

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right] \qquad （2.2\text{-}8）$$

容易看出，当且仅当 $y_2 = y_4 = 0$，增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩时，它才有解。

令 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$，便得到 λ_1 的两个线性无关的特征向量

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T, x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

且 x_2 的第二、第四个分量是0，从而由 x_2 可求得 λ_1 的2级根向量 $x_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$，且有 $Ax_3 = x_2 + 2x_3$。

关于 $\lambda_2 = 4$ 的一个特征向量是 $x_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$。

于是，若取

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

若取

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

它是可逆的，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 4\end{bmatrix}$$

通过上面几个例子，可以对方阵A的Jordan标准的结构得到下列几点结论：

（1）A的Jordan标准形中子Jordan矩阵的数目等于A的不同的特征值的个数；

（2）每个子Jordan矩阵的阶数等于相应的根空间的维数，亦即相应特征值的代数重数；

（3）每个子Jordan矩阵中Jordan块的数目恰好等于相应特征值的线性无关的特征向量的个数，即特征子空间的维数，亦即相应特征值的几何重数；

（4）每个子Jordan矩阵中Jordan块的最大阶数恰好等于相应特征值的指标，也即相应的根空间中根向量的最高级数。

例7 设

$$J=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -2\end{bmatrix}$$

求J^5。

解 $J=-2I+U$，其中

$$U=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}$$

是幂零矩阵，U具有一些特殊的性质，如

$$U^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, U^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, U^4 = O$$

由于单位矩阵与任一方阵的乘积是可交换的，所以

$$J^5 = (-2I + U)^5 = (-2I)^5 + C_5^1(-2I)^4 U + C_5^2(-2I)^3 U^2 + C_5^3(-2I)^2 U^3 + C_5^4(-2I)U^4 + U^5$$

$$= (-2)^5 I + 5\cdot(-2)^4 U + 10\cdot(-2)^3 U^2 + 10\cdot(-2)^2 U^3$$

$$= (-2)^5 I + 5\cdot(-2)^4 U + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2)^3 U^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^2 U^3$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 & 10\cdot(-2)^3 & 10\cdot(-2)^2 \\ & (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 & 10\cdot(-2)^3 \\ & & (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 \\ & & & (-2)^5 \end{bmatrix}$$