高等工程数学武林秘籍

第一章 绪论

① 相对误差限 $\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$ n - 有效数字个数，a_1 - 第一位有效数字

② 若 $y=f(x)$ 则 y 的相对误差 $e_r(y) = f'(x)\frac{x}{f(x)} e_r(x)$

③ 数值运算原则:

第二章 插值法

① 拉格朗日插值 $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) y_i$

截断误差 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$ $\xi \in (a,b)$

$\boxed{n+1 \text{ 为零点个数}}$ $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$

② 牛顿插值 $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots f[x_0,x_1\cdots x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

③ Hermite 插值（带导数的插值）

☆ 利用重节点的差商表构造 Hermite 多项式（P_{36} 例 2.6）

余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}$ $\xi \in (a,b)$

$x_0, x_1, x_2, \cdots x_n \leftarrow \boxed{(n+1) \text{ 为零点个数}}$

第三章 函数逼近和曲线拟合

① 函数的一次最佳平方逼近

例：求 $f(x)$ 的最佳平方逼近元素 $f(x) \in C[a,b]$

1° $d_0 = (f,1) = \int_a^b f(x)dx$ $d_1 = (f,x) = \int_a^b xf(x)dx$

2° 法方程组 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_0^* = \quad a_1^* =$

3° $P(x) = a_0^* + a_1^* x$

4° $\|\delta\|_2^2 = (f,f) - \sum_{k=0}^{1} a_k^* d_k$ （平方误差），

③ 拟合多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^m$

正规方程组(法方程组)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i & \sum_{i=1}^N w_ix_i & \cdots & \sum_{i=1}^N w_ix_i^m \\ \sum_{i=1}^N w_ix_i & \sum_{i=1}^N w_ix_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N w_ix_i^{m+1} \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^N w_ix_i^m & \sum_{i=1}^N w_ix_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^N w_ix_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_iy_i \\ \sum_{i=1}^N w_ix_iy_i \\ \\ \sum_{i=1}^N w_ix_i^m y_i \end{bmatrix}$$

第四章 数值积分

① 一般形式 $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ …… (1.1)

② 精度概念：欲使式(1.1)具有m次代数精度，只需令 $f(x)=1,x,\cdots x^m$ 都能准确成立

③ 插值型求积公式系数：$A_k=\int_a^b l_k(x)\,dx$，$l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

若求积式中 $A_k>0$，则求积公式稳定 (具有n+1个求积节点的插值型求积公式，至少具有n次代数精度)

④ Newton-Cotes 公式 (n阶的Newton-Cotes公式至少有n次代数精度，当n为偶数时至少有(n+1)次代数精度)

$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k)$ $\quad C_k^{(n)}=\frac{1}{b-a}A_k$

截断误差

精度:1 一阶：$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 梯形 $R(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\ (a\le\eta\le b)$

:3 二阶：$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]$，$c=\frac{a+b}{2}$ Simpson $R(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\ (a\le\eta\le b)$

⑤ 复化求积公式

梯形：$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$ 二阶收敛

Simpson：$R_n(f)=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\xi)$ 四阶收敛

↑

节点是等距划分的

⑥ Gauss 型求积公式（节点是非等距划分）

1° Gauss-Legendre 求积公式

2个节点，$n=1$，精度 $=2n+1=3$ ： $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

3个节点，$n=2$，精度 $=2n+1=5$ $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})$

2° Gauss-Chebyshev 求积公式

$x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$ ， 零点个数为 $\underline{n+1}$

$A_k = \frac{\pi}{n+1}$ ， $k=0,1,2,3\cdots n$.

区间转换公式： $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$， $-1\le t\le 1$， $x\in[a,b]$

第五章 常微分方程的数值解法

① Euler 公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 显式 ①

$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$ 隐式 ②

$\frac{①+②}{2}$ 得 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 梯形公式

② 改进的 Euler 公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})]$

$\Downarrow$

$\bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

or $\begin{cases} k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_{n+1},y_n+hk_1) \\ y_{n+1}=y_n+h(\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2) \end{cases}$

③ 局部截断误差

显示和隐式 Euler 是一阶~~收敛~~方法

梯形法是二阶方法

④ R-K法（看看吧）

⑤ 稳定性分析　　Euler法　$-2\le\lambda h\le 0$

　　　　　　　　4阶R-K法　$-2.78\le\lambda h\le 0$

例：$\begin{cases} y'=-5y+x \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$　$x_0\le x\le 8$

$\lambda=f_y=-5$　　$-2\le -5h<0$

$0<h<0.4$

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$
$$=y_n+h(-5y_n+x_n)$$
$$=(1-5h)y_n+x_n$$

第6章 线性代数方程组的解法

① 向量范数

$$\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$
$$\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$
$$\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

② 矩阵范数

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$　~~行范数~~
$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$
$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$$
$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})^2}$$

谱半径　$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$，$\lambda$为A的特征值.

③ Gauss消元法 $\begin{cases}\text{顺序法}\\ \text{列主元消去}\end{cases}$　（能消元过程选取增广矩阵）

④ 直接三角形分解法　$A=LU \Rightarrow LUX=b \Rightarrow \begin{cases} LY=b \\ UX=Y \end{cases}$

会算 L 和 U

⑤ 平方根分解法 $A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=LL^T$

(1) $l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}}$

(2) $l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj}$ $\quad i=j+1,\dots n;\quad j=1,2,\dots n.$

例: $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 则 $l_{11}=\sqrt{a_{11}}=2$

$l_{21}=(a_{21}-l_{20}l_{10})/l_{11}=\frac{2-0}{2}=1$

$l_{31}=(a_{31}-l_{30}l_{10})/l_{11}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$

$l_{22}=(a_{22}-l_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21})/l_{22}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$l_{33}=(a_{33}-l_{32}^2-l_{31}^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{33}}{3}$

$L=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{33}}{3} \end{bmatrix}$

注: 顺序主子式 $D_i\neq 0$，可做 LU 分解

顺序主子式 $D_i>0$，为正定阵，分解唯一，$A=LL^T$

⑥ 追赶法

$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$ 则 $L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & l_n \; 1 \end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & d_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}$

其中 $d_i=c_i$

$u_1=b_1$

$l_i=\frac{a_i}{u_{i-1}}$

$u_i=b_i-l_ic_{i-1}$

例. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & l_4 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & u_3 & d_3 \\ & & & u_4 \end{bmatrix}$

$d_1=1\quad d_2=1\quad d_3=1$

$u_1=2$

$l_2=\frac{a_2}{u_1}=\frac{1}{2}\qquad u_2=b_2-l_2c_1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$l_3=\frac{a_3}{u_2}=\frac{2}{5}\qquad u_3=b_3-l_3c_2=1-\frac{2}{5}\times 1=\frac{3}{5}$

$l_4=\frac{a_4}{u_3}=\frac{10}{3}\qquad u_4=1-\frac{10}{3}=-\frac{7}{3}$

⑦ 误差分析

条件数 $cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

特别的 $cond_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$ $\begin{cases} \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right| & \text{对称阵} \\ 1 & \text{正交阵} \end{cases}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

⑧ 迭代公式 $Ax=b$

$A=D+L+U$

$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$ $L=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & & 0\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & & 0\end{bmatrix}$

Jacobi 迭代 $B_J=-D^{-1}(L+U)$

Gauss-Seidel 迭代 $B_G=-(D+L)^{-1}U$

解此方程组的迭代法收敛的充要条件是 $\rho(B)<1$

收敛半径 $R(B)=-\ln\rho(B)$

⑨ SOR松弛法：若A为对称正定阵，则收敛条件 $0<w<2$

若A为严格对角占优阵，则收敛条件 $0<w<1$

☆ 注：系数矩阵是严格对角占优的，则此时方程组建立的 Jacobi 迭代法或 Gauss-Seidel 迭代法是收敛的

第七章 非线性方程和方程组的解法.

① 简单迭代 $x_{k+1}=\phi(x_k)$

收敛条件 $\phi'(x_k)<1$

② 牛顿迭代 $f(x)=0$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=0,1,2\cdots$$

例: 设 x^* 是 $f(x)=0$ 的三重根, $f(x)$在 x^* 的某邻域内有三阶连续导:

(1) 证: 对 $f(x)=0$ 产生的 Newton 迭代法在 x^* 附近是线性收敛的;

(2) 试将 Newton ~~迭代法在 x^* 附近是~~公式变形, 使之在 x^* 附近具有二阶收敛性并加以证明

(1) 对 $f(x)$泰勒展开: $f(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x^*)^3$

则 $f'(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x-x^*)^2$, $f''(x)=f^{(3)}(\xi)(x-x^*)$

$\because x_{n+1}=x_n-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 令 $\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

则 $\phi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{\frac{1}{3!}\times 1}{\left(\frac{1}{2!}\right)^2}=\frac{2}{3}<1$

$\therefore$ 线性收敛

(2) 令 $x_{n+1}=\phi(x)=x_n-3\frac{f(x)}{f'(x)}$

同理 $\phi'(x)=0$

$\therefore$ 得证其具有二阶收敛性.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{当 } \phi'(x)<1 \text{ 时, 线性收敛}\\ \phi'(x)=0 \text{ 时, 二阶收敛}\end{array}}$$