华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：数值分析　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生　考试日期 2016-6-1　学生所在院系________

学号________　姓名 沈　任课教师________

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．设 $a=0.0013$，$b=3.1400$，$c=1.001$ 都是经过四舍五入得到的近似值，则它们分别有____，____，____位有效数字。

2．设 $x_i\ (i=0,1,2,3,4)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的 4 次 Lagrange 插值基函数，则

$$\sum_{i=0}^{4}(2x_i^4+x_i+1)l_i(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_,\quad \sum_{i=0}^{4}(2x_i^4+x_i+1)l_i(1)=\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

3. 已知 $f(x)=4x^3+2x+1$，则 $f[0,1,2,3]=$______，$f[0,1,2,3,5]=$______。

4. 当常数 $a=$____，$\int_{-1}^{1}\left(x^3+ax\right)^2dx$ 达到极小。

5. 三次 Chebyshev 多项式 $T_3(x)$ 在[-1, 1]上 3 个不同实零点为 $x_1=$______，

$x_2=$______，$x_3=$______；$\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\right|=$______。

6．已知一组数据 $y(0)=1$，$y(1)=2$，$y(2)=5$，利用最小二乘法得到其拟合直线

$y=ax+b$，则 $a=$____，$b=$____。

7. 当 $A_0=$___，$A_1=$___时，求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{3}f(-1)+A_0f(0)+A_1f(1)$ 的代数精度能达到最高，此时求积公式的代数精度为______。

8. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$______，$\|A\|_2$______，$cond(A)_2=$______。

二、(10 分) 设函数 $y=f(x)$，已知 $f(0)=f'(0)=1, f(1)=4$，

(1) 试求过这两点的二次 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$；

(2) 若还已知 $f(2)=15$，求次数不超过三次的插值多项式 $H_3(x)$。

三、(10 分) 求 $f(x)=\cos(\pi x)$ 在[0, 1]上的一次最佳平方逼近多项式 $P_1(x)$，并计算平方误差。

四、(12 分) 利用 2 次 Legendre 正交多项式 $P_2(x)=(3x^2-1)/2$ 构造两点 Gauss 型求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_{-1}f(x_{-1})+A_1 f(x_1)$，

(1) 试确定求积公式中的 Gauss 点 $x_k\ (k=-1,1)$ 及求积系数 $A_k\ (k=-1,1)$，并说明求积公式的代数精度是多少？

(2) 用所得求积公式计算 $\int_0^1 (x^3-2x+1)dx$，并给出相应的截断误差。

五、(14 分) 设 $y'(x)=f(x,y)$，步长为 h，隐式公式

$y_{n+1}=y_n+h\left[\alpha f(x_n,y_n)+\beta f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$ 具有二阶收敛，

(1) 试确定参数 α 和 β 的值；

(2) 若 $f(x,y)=\lambda y(x)$，$y(0)=1$，求 $y(x)$ 在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n；

(3) 若 $f(x,y)=\lambda y(x)$ 且 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的。

六、(12 分)已知方程组 $\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$a\in R$ 且 $a\neq\pm\sqrt{2}$，

(1) 利用 Gauss 消元法求方程组的解；

(2) 给出求解方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式，并说明两种迭代格式均收敛的 a 的取值范围。

七、(12 分)已知 $x^*=1$ 为方程 $f(x)=x^3-5x^2+7x-3=0$ 的根，

(1) 试证牛顿迭代法在 $x^*=1$ 附近是线性收敛的；

(2) 写出处理重根 $x^*=1$ 的牛顿迭代公式，并讨论其收敛阶。

八、(6 分) 设求解方程组 $AX=b$ 的迭代格式 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 收敛，

证明：当 $0<\omega<1$ 时，迭代格式 $X^{(k+1)}=\left[(1-\omega)I+\omega B\right]X^{(k)}+\omega f$ 也收敛。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>数值分析</u>　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 □闭卷

学生类别<u>研究生</u>　考试日期<u>2015-6-2</u>　学生所在院系________

学号________　姓名________　任课教师________

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．设 $x_1 = 1.0036$，$x_2 = 36.150$，$x_3 = 0.042$ 都是经过四舍五入得到的近似值，则它们分别有________位有效数字。

2．已知 $f(x) = 8x^5 + x^3 + 1$，则 $f[0,1,2,3,4,5] =$________，$f[0,1,2,3,4,5,6] =$________。

3．设 x_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数，则

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i^4 + 3x_i^2 + x_i + 1)l_i(0) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4．在区间[4, 12]上，三次 Chebyshev 多项式 T_3(x)的三个不同零点为 $x_0 =$________

$x_1 =$________　$x_2 =$________。

5．已知数据 $f(1) = 4,\ f(2) = 7,\ f(3) = 8$，用最小二乘法得到其拟合直线 $y = ax + b$，则 a=______，b=______。

6．已知求积公式 $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}[f(0) + 4f(a) + f(1)]$ 至少具有 1 次代数精度，则 a=________，此公式的代数精度为______次。

7．对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond(A)_p$ ___1，当 A 为正交矩阵时 $cond(A)_2$ =___。

8．已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.32 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，则解此方程组的 Jacobi 迭代法________收敛（填“是”或“不”），它的渐进收敛速度 R(B)=________。

二、(10 分)

对函数 $y = f(x)$，已知 $f(1) = -2,\ f'(1) = 4,\ f(2) = f'(2) = 0,\ f(3) = 2$

试求过这 3 点的四次 Hermite 插值多项式 $H_4(x)$，并写出余项表达式；

三、(8 分)求 $f(x)=4x^3+2x^2+x+1$ 在[-1, 1]上的二次最佳一致逼近多项式 $P_2(x)$。

四、(12 分) 利用 3 次 Legendre 正交多项式 $P_3(x)=(5x^3-3x)/2$ 构造三点 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2),$$

并问：

（1）所得求积公式的代数精度是多少？

（2）用所得求积公式计算 $\int_0^1 (x^4-2x^2+1)dx$ 。

五、(14 分)设方程组 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$，

（1）用 Gauss 消元法求方程组的解；

（2）给出求解方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式，并说明此二种迭代格式的收敛性。

六、(12 分) 设步长为 h, $f(x,y)=\lambda y(x)$, 隐式公式 $y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{3}[f(x_n,y_n)+2f(x_{n+1},y_{n+1})]$，

（1）已知 $y(0)=1$，求 $y(x)$在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n；

（2）若 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的。

七、(12 分)方程 $(x-2)^2(x+3)=0$

（1）试证用牛顿法求方程在[1,3]内的根 $x^*=2$ 是线性收敛的，

（2）对根 $x^*=2$，写出处理重根的牛顿迭代公式，并讨论其收敛性。

八、(8 分) 设求解方程组的 Jacobi 迭代格式为 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+g \quad (k=0,1,2,\cdots)$

求证：若 $\|B\|_\infty<1$，则相应的 Gauss-Seidel 迭代收敛。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>数值分析</u>　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别<u>研究生</u>　考试日期<u>2014-5-22</u>　学生所在院系＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　任课教师＿＿＿＿＿＿

一、填空（每题 3 分，共 24 分）

1．设 $x_1 = 1.2034$， $x_2 = 43.250$， $x_3 = 0.042$ 都是经过四舍五入得到的近似值，则它们分别有＿＿＿＿＿＿位有效数字。

2．已知 $f(x) = 2x^5 - x^3 + 1$，则 $f[0,1,2,3,4,5] =$＿＿＿＿，$f[0,1,2,3,4,5,6] =$＿＿＿＿。

3．设 $x_i\ (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数，则

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i^3 + 2x_i^2 + x_i + 1)l_i(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$。

4．三次 Chebyshev 多项式 $T_3(x)$在[-1 ,1]上 3 个不同实零点为 $x_1 =$＿＿＿＿＿，$x_2 =$＿＿＿＿，$x_3 =$＿＿＿＿；$\max\limits_{0 \le x \le 1}\left|(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\right| =$＿＿＿＿。

5．用 $y = ax + b$ 对一组数据

x	1	2	3	4
y	4	7	8	10

进行最小二乘拟合的法方程组为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

6．当 $A_{-1} =$＿＿，$A_0 =$＿＿时，求积公式 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + \frac{8h}{3}f(h)$的代数精度能达到最高，所具有的代数精度为＿＿＿＿。

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\|A^{-1}\|_\infty =$＿＿＿＿，$cond(A)_1 =$＿＿＿＿，$cond(A)_2 =$＿＿＿＿。

8．对方程组 $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$ 建立收敛的迭代格式为＿＿＿＿＿＿＿＿。

二、(12 分) 对函数 $y=f(x)$, 已知 $f(1)=0, f'(1)=-2, f(2)=1, f'(2)=0$.

（1） 试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$, 并写出余项表达式;

（2）如果还已知 $f(0)=1$, 求次数不超过 4 的插值多项式 $H_4(x)$。

三、(8 分)求 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 在[-1, 1]上的三次最佳平方逼近多项式 $S_3(x)$。

四、(10 分) 利用 2 次 Chebyshev 正交多项式 $T_2(x)=2x^2-1$ 构造两点 Gauss-Chebyshev 型求积公式 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$，并计算奇异积分 $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

五、(12 分) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（1）确定 a 的取值范围，使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛;

（2）当 a=5 时，用列选主元法求方程组的解。

六、(12 分) 设步长为 h, $f(x,y)=\lambda y(x)$, 隐式中点公式 $y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},\frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$,

（1）已知 $y(0)=1$，求 $y(x)$在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n;

（2）若 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的。

七、(14 分) 应用牛顿法于方程 $f(x)=(x^3-a)^2=0$,

（1）导出求立方根 $x^*=\sqrt[3]{a}$ 的 Newton 迭代格式;

（2）证明此迭代格式是线性收敛的;

（3）试构造至少具有二阶收敛速度的迭代公式。

八、(8 分) 对于 Gauss 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，证明:

（1）求积系数 $A_k>0, k=0,1,2,\cdots n$ 且 $\sum_{k=0}^{n} A_k=b-a$;

（2）设 $l_k(x)$是 x_k 处对应的 Lagrange 基函数，则 $\int_a^b l_k^2(x)dx=\int_a^b l_k(x)dx$, $k=0,1,\cdots n$。