《应用高等工程数学》2018年考试安排

考试时间：2018年12月24日晚上7点

答疑时间：

12月23日 上午9:00-11:30，下午2:30-5:00

答疑地点：科技南楼813

矩阵论复习

一、线性空间（子空间）的基与维数的求法、直和的概念

二、两个基之间过渡矩阵的求法

三、线性变换的概念及其矩阵表示

线性变换的特征值、特征向量的计算

四、特征多项式与最小多项式、Cayley-Hamilton定理的简单应用

五、会求可逆矩阵将方阵化为Jordan标准型

六、向量与矩阵的范数、条件数的概念与计算

七、矩阵的三角分解

定义 若 W_1+W_2 中任一向量只能唯一地分解为 W_1 中的一个向量与 W_2 中的一个向量之和，则 W_1+W_2 称为 W_1,W_2 的直和，记为 $W_1\oplus W_2$.

定理 $W_1+W_2=W_1\oplus W_2$ 的充分必要条件是下列条件的之一满足：

（1） $W_1\cap W_2=\{0\};$

（2） 若$\xi_1+\xi_2=0,\xi_i\in W_i(i=1,2),$则$\xi_1=\xi_2=0;$

（3） $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2.$

例 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是 $\mathbf{R}^4$的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\}$，$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{V}_1\oplus\boldsymbol{V}_2$

定义 V^n到V^m的变换T 称为线性的，如果对任意的数 k及V^n中的任意向量 α,β, 恒有

$$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta, T(k\alpha)=kT\alpha.$$

记 $\xi=T\alpha\in V^m$,则称 ξ为α在T下的像， α称为ξ的原像。

特别，当T是 V^n 到自身的一个线性变换，则称T是 V^n 的线性变换。

设T是 V^n到V^m 的线性变换，在 V^n和V^m 中分别取基 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$和$B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m\}$, 则 a_j 的像 $Ta_j(1\le j\le n)$ 可由基 B_β 唯一地线性表出：

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i=[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$$

如果把 $T\alpha_j, 1\le j\le n$ 按顺序排列，并使用矩阵记号，则有

$$[T\alpha_1 T\alpha_2 \cdots T\alpha_n]=[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

为了简化记法和便于运算，令 $TB_a \underline{\underline{\Delta}} [T\alpha_1 T\alpha_2 \cdots T\alpha_n]$,

那么上式可简写为

$$TB_\alpha = B_\beta A, \qquad \textbf{（1.2-1）}$$

其中 $m\times n$矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

（1.2-1）式叫做***T***的矩阵表示，称***A***为***T***在**基偶** $\{B_\alpha, B_\beta\}$ 下的矩阵。

特别，若T是 V^n到自身的线性变换，这时 $V^m=V^n$，并规定 B_β 取为 B_α ， 则（**1.2-1**）式为

$$TB_\alpha = B_\alpha A,$$

称 **n** 阶方阵A为T在基 B_α 下的矩阵。

定义 设T是$V^n(F)$的一个线性变换，如果存在 $\lambda_0 \in F, \xi \in V^n(F)$且$\xi \neq 0$, 使

$$T\xi = \lambda_0 \xi, \qquad \textbf{(1.2-2)}$$

则称 λ_0是T的一个**特征值**，ξ 称为T关于 λ_0 的 **特征向量**。

为了求出T的特征值和特征向量，在 V^n 中取一个基 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，且设$T$在$B$下的矩阵是$A$。

如果 ξ 是 T 的一个特征向量，λ_0是相应的特征值，即

$$T\xi = \lambda_0 \xi, \xi \neq 0,$$

那么 ξ 可由B的线性表出：

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = Bx, x = [x_1, x_2 \cdots x_n]^T,$$

可推得 $Ax = \lambda_0 x.$

T的特征值问题与 A 的特征值问题是一一对应的。我们可以把A的特征多项式

$$f(\lambda) \triangleq \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

称为T的**特征多项式**，于是T的特征值就是T的特征多项式的根。

例 $P_2(t)$ 的线性变换T的定义为

$$Tp(t) = p(t) + (t+1)\frac{d}{dt}p(t),$$

求T的特征值和特征向量。

解 取 $P_2(t)$的一个基 $B = \{1, t, t^2\}$, 则T在B下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A的特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3,$ 相应的特征向量分别为 $k_1[1\,0\,0]^T, k_2[1\,1\,0]^T, k_3[1\,2\,1]^T$. 因此，$T$的特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3,$ T关于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量分别是多项式 $k_1, k_2(1+t), k_3(1+2t+t^2),$

上述的 k_1, k_2和k_3 可为任意非零实数。

特征多项式和最小多项式

对于复数域上**n** 阶方阵**A=[a$_{ij}$]**，它的特征多项式

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

是λ的 **n** 次多项式

$$f(\lambda) \triangleq \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n.$$

这个多项式在复数域有**n** 个根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

定义 设A是一个n阶方阵,$g(t)$是一多项式,如果$g(A)=O$,则称$g(t)$是A的零化多项式.

定理(Cayley-Hamilton) 设n阶方阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

则$f(A)=O$,即A的特征多项式是A的一个零化多项式.

定义 A的零化多项式中，次数最低的首一多项式称为A的**最小多项式**，记为$m_A(\lambda)$。

定理 A的最小多项式$m_A(\lambda)$可整除A的任何零化多项式$g(\lambda)$，且$m_A(\lambda)$是唯一的。

定理 λ_0是***A*** 的特征值的充分必要条件是 λ_0是***A*** 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 的根。

例 求
$$A=\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ \hdashline & & 1 & 1 \\ & & -2 & 4 \end{array}\right]$$
的最小多项式。

解 由于 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$ 所以A的最小多项式只能有下列三种可能： $(\lambda-3)(\lambda-2)$; $(\lambda-3)(\lambda-2)^2$; $(\lambda-3)(\lambda-2)^3$

但
$$(A-3I)(A-2I)=\left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hdashline & & -2 & 1 \\ & & -2 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hdashline & & -1 & 1 \\ & & -2 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hdashline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]\neq O,$$

而 $(A-3I)(A-2I)^2=O$, 故 $m_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$.

例 设 $A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 4\\ -12 & 4 & 8\\ -6 & 1 & 6\end{bmatrix}$ 求可逆矩阵P使$P^{-1}AP$为Jordan矩阵。

注: 把A相似简化为Jordan矩阵的关键是,寻找A关于其特征值的各级根向量. 1级根向量可以解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)x=0, i=1,2,\cdots,s$$

解: $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3,\ \lambda=2$ 是A的三重特征值。齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 4\\ -12 & 2 & 8\\ -6 & 1 & 4\end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-2I$ 的秩是1，因而基础解系有两个解向量，

例如，$x_1=[4\quad 4\quad 5]^T,\ z_1=[5\quad 2\quad 7]^T$

且通解的表达式为

$$y=c_1x_1+c_2z_1=\begin{bmatrix}4c_1+5c_2 & 4c_1+2c_2 & 5c_1+7c_2\end{bmatrix}^T$$

代入 式 $(A-\lambda_i I)x=y$，得

$$\begin{bmatrix}-6 & 1 & 4\\ -12 & 2 & 8\\ -6 & 1 & 4\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4c_1+5c_2\\ 4c_1+2c_2\\ 5c_1+7c_2\end{bmatrix}$$

对它的增广矩阵施行行初等变换：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2\\ -12 & 2 & 8 & 4c_1+2c_2\\ -6 & 1 & 4 & 5c_1+7c_2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}-6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2\\ 0 & 0 & 0 & -4(c_1+2c_2)\\ 0 & 0 & 0 & c_1+2c_2\end{array}\right]$$

由此可见,当且仅当$c_1+2c_2=0$时这个非齐次方程组才有解。

若取$c_1=2/3, c_2=-1/3$, 这时 $y=x_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$, 上述非齐次线

性方程组的一个解是$x_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$，且有$(A-2I)x_3=x_2$，即

$$Ax_3=x_2+2x_3$$

因此，取

$$P=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\4 & 2 & 1\\5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}$$

数值分析复习

一 误差分析

1 舍入误差、截断误差、有效数字；

2 数值计算的一些原则；

如：P10-例1.3、例1.6。

3 数值计算的稳定性。

二.插值法

1.插值的概念：

（1）问题的引出；

（2）唯一性：待定系数法；　　反证法。

2.构造插值多项式的方法：

（1）待定系数法；

（2）基函数法；

（3）承袭性思想。

3 插值的分类：

（1）不含导数插值条件（Lagrange型插值）；

Lagrange插值公式、Newton插值公式。

（2）含导数插值条件（Hermite插值）；

构造法、

（3）余项表达式、截断误差估计、总的误差界。

（4） 各阶差商的定义、基本性质。

三、函数逼近

1．概念　最佳平方逼近 $\begin{cases}\text{离散}\\\text{连续}\end{cases}$

2．正交多项式：

①定义；②性质；③特点 p60. 性质4

3. 最佳平方逼近多项式的寻求：

教 p58.
例3.1

①基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$;

4．最小二乘拟合问题：

教P69,70,71
例3.4，3.5，3.7

① 给出数据能求出拟合曲线；

四、数值积分

1、基本概念：

- (1) 代数精度；
- (2)插值型求积公式；
- (3)复化求积公式；
- (4)Gauss型求积公式；
- (5)收敛阶(复化)；
- (6)计算的稳定性。

2、构造求积公式的方法：

- (1)待定系数(利用代精)；

$$\begin{cases}\text{求积节点给定；}\\ \text{求积节点、系数均未给定．}\end{cases}$$

- (2)插值型求积公式；

教P91,例4.2

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx \qquad l_k(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

例：P96例4.4

P101

- (3)Newton-Cotes公式；

(节点等距)，几种低阶，$\begin{cases}\text{梯形}\\ simpson\end{cases}$ 及余项。

3、提高求积公式精度的方法：

- (1)增加求积节点及采用Gauss型求积公式；
- (2)构造复化求积公式；

误差的{先验误差
事后误差估计

P99,100
例4.5,例4.6

P101
例4.7

4、Gauss型求积公式：

- (1)Gauss点的概念及其有关定理；

系数特点
稳定、收敛

- (2)利用正交多项式构造Gauss求积公式；

例：P109 例4.11
例：P111例4.12

- (3)利用Gauss型求积公式构造奇异积分的数值方法。

例：P113 例4.14

5 、例。

五、常微分方程数值解

1.将方程离散化的三种方法。

2.掌握Euler法和改进的Euler法、隐式Euler法和梯形法的基本公式和构造。

3.领会R-K方法的基本思想，会进行二阶R-K方法的推导。

p137

4.会求差分格式的局部截断误差及方法的阶。

5.能利用单步法收敛定理判断方法的收敛性。

6.能给出一般单步法的绝对稳定性区域（区间）。

六、线性代数方程组的解法

A.　直接法、

1. 方法：

① Gauss顺序消去法；

② 列主元Gauss消去法；

③ 直接三角分解法（不选主元，LU分解法与平方根法）；

2. 以上各方法的算法步骤。

3. 误差分析。

4. 向量、矩阵的范数、条件数、谱半径。

5. 矩阵的三角分解定理。

B. 迭代法、

1. 方法：

① Jacobi迭代法；$B_J=-D^{-1}(L+U)$

② Gauss-Seidel迭代，$B_G=-(D+L)^{-1}U$

2. 上述三种方法的算法步骤。

3. 收敛性定理：

① 充要条件: $\rho(B) < 1$

② 充分条件: $\|B\| < 1$

③ 系数矩阵A严格对角占优，则Jacobi迭代、G-S迭代必收敛。

七、方程求根

P212 $Th7.1$

1 简单迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ ：

P215Th7.2

（1）迭代函数 $\varphi(x)$的构造和选择；

（2）整体与局部收敛定理；

P215 定义7.2

2 收敛阶的判断方法：

P215 Th7.3

（1）根据定义判断；

（2）用$\varphi(x)$的高阶导数判断（局部收敛）。

3 Newton迭代及其各种改进。

4 例。