矩阵论习题

1.在R^4中，求向量x在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的坐标。设

$\alpha_1=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T$，$\alpha_2=[1\quad 1\quad -1\quad -1]^T$，$\alpha_3=[1\quad -1\quad 1\quad -1]^T$，

$\alpha_4=[1\quad -1\quad -1\quad 1]^T$；$x=[1\quad 2\quad 1\quad 1]^T$.

2.已知R^3中的两个基：

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}，B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(1).求B_1到B_2的基变换矩阵；

(2).求在B_1，B_2下有相同坐标的所有向量。

3.设R^4中的向量$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$分别张成子空间$w_1=span\{x_1,x_2\}$和$w_2=span\{x_3,x_4\}$。求$w_1+w_2$及$w_1\cap w_2$的基和维数。

4.设V_1和V_2分别是齐次方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$和$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明：$R^n=V_1\oplus V_2$。

5. 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 R^4 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\}$，$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$R^4=V_1\oplus V_2$.

6. 设T_1是V^n到V^m的线性变换，T_2是V^m到V^r的线性变换，定义V^n到V^r

的变换$T_2 \bullet T_1$为

$$(T_2 \bullet T_1)\alpha = T_2(T_1\alpha), \forall \alpha \in V^n 。$$

证明，$T_2 \bullet T_1$是线性变换。

7.已知R^3的线性变换T在基

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

求T在基

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

下的矩阵。

8.V的变换T称为可逆的，如果存在V的变换S，使$T \bullet S = S \bullet T = I$。这时$S$称为$T$的逆变换，记为$T^{-1}$，证明

（1）若线性变换T是可逆的，则T^{-1}也是线性变换；

（2）T的特征值一定不为零；

（3）若λ是T的特征值，则$\dfrac{1}{\lambda}$是T^{-1}的特征值。

又若T在基B下的矩阵是A，那么T^{-1}在B下的矩阵是什么？

9.设T是复数域上线性空间V的线性变换，已知V的基B和T在B下的矩阵A如下，求T的特征值和特征向量：

（1）$B=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]$，$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$；

（2）$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$，$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

10.求下列方阵的最小多项式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & & \\ 1 & 3 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

11.满足下述条件的方阵A是否可对角化？

（1）A是幂零矩阵；

（2）$A^k=I(k\ge 2)$；

（3）$A^2+A=2I$.

12.已知$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$g(A)=A^8-9A^6+A^4-3A^3+4A^2+I$.

13. 下述的$f(\lambda)$，$m(\lambda)$分别表示矩阵A的特征多项式和最小多项式，

确定 A 的可能的 $Jordan$ 标准形：

(1). $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$， $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

(2). $f(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+2)^3$， $m(\lambda)=(\lambda-3)^2(\lambda+2)$

14. 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为 $Jordan$ 矩阵，其中：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}。$$

15. 设 V^4 是由函数 e^x， xe^x， x^2e^x， e^{2x} 张成的线性空间，求 V^4 的线性变换 $D=\dfrac{d}{dx}$ 的 $Jordan$ 标准形。