1. 令 $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x$ 在 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标为 $[\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]^T$.

2. (1) $B_2 = B_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(2) 若 x 在 B_1, B_2 下有相同坐标 $[x_1, x_2, x_3]^T$, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix}$$

$X = [-2c, 3c, -c]^T \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

3. 假设 $x \in W_1 \cap W_2$, 则 $\exists k_1, k_2, k_3, k_4$ 使得

$k_1 x_1 + k_2 x_2 = k_3 x_3 + k_4 x_4 \Rightarrow 5k_3 + 2k_4 = 0$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ 的基为 $[4, -1, -2, -3]^T$

x_1, x_2, x_3, x_4 中任意三个构成 $W_1 \cup W_2$ 的基底.

4. 只需证明 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. 若 $x = [x_1, x_2, x_3, \cdots x_n]^T \in V_1 \cap V_2$

则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

5. 若 $\xi \in V_1 \cap V_2$，则 $\exists\ k_1, k_2, k_3, k_4$ 使得

$$\xi = k_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2\alpha_1 = k_3(\alpha_3 - \alpha_4) + k_4(\alpha_1 + \alpha_4)$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0 \quad \Rightarrow \xi = 0$$

6. $$T_2 \circ T_1(\alpha + \beta) = T_2(T_1(\alpha+\beta)) = T_2(T_1(\alpha) + T_1(\beta))$$

$$= T_2(T_1(\alpha)) + T_2(T_1(\beta)) = T_2 \circ T_1(\alpha) + T_2 \circ T_1(\beta)$$

$$T_2 \circ T_1(k\alpha) = T_2(T_1(k\alpha)) = T_2(kT_1(\alpha)) = kT_2(T_1(\alpha))$$

$$= kT_2 \circ T_1(\alpha)$$

7. $$B_2 = B_1 P \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ T 在基 B_2 下的矩阵为

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ -22 & -17 & -22 \\ 9 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

8 (1) $T(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)) = T(T^{-1}(\alpha))+T(T^{-1}(\beta))$

$= \alpha+\beta \Rightarrow T^{-1}(\alpha+\beta) = T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)$

$T(kT^{-1}(\alpha)) = kT(T^{-1}(\alpha)) = k\alpha \Rightarrow T^{-1}(k\alpha)=kT^{-1}(\alpha)$

(2) 若 $\lambda=0$ 是特征值. $\alpha\neq 0$ 是相应的特征向量

则 $T(\alpha)=\lambda\alpha=0=T(0) \Rightarrow T$ 不可逆

(3) 设 α 是特征向量 则

$T(\alpha)=\lambda\alpha \Rightarrow \alpha=\lambda T^{-1}(\alpha) \Rightarrow T^{-1}(\alpha)=\frac{1}{\lambda}\alpha$

$TB=BA \Rightarrow B=T^{-1}(BA)=T^{-1}(B)A$

$\Rightarrow T^{-1}(B)=BA^{-1}$ 即 T^{-1} 在 B 下的矩阵是 A^{-1}

9. (1) $\lambda_1=-1$ $\quad x_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

$\lambda_2=1$ $\quad x_2=\alpha_1+\alpha_3$

$\lambda_3=3$ $\quad x_3=-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$

(2) $\lambda_1=-2$ $\quad x_1=4\alpha_1-5\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$

$\lambda_2=7$ $\quad x_2=\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

10 (1). $(\lambda-3)^3$ (2). $(\lambda-1)^2$ (3). $(\lambda-1)^2$

(4). $(\lambda-1)(\lambda-4)^2$

11 (1) 不能对角化.

若 A 可对角化 $\Rightarrow m_A(\lambda)=\lambda \Rightarrow A=0$

(2) 可对角化. 因 λ^k-1 是 A 的零化多项式且无重根 $\Rightarrow$
A 的最小多项式无重根

(3) 可对角化. $g(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$ 是零化多项式 $\Rightarrow m_A(\lambda)$ 无重根

12 $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

存在多项式 $h(\lambda)$ 及 $r(\lambda)=ar^2+br+c$ 使得

$g(\lambda)=f(\lambda)h(r)+r(\lambda)$ 且

由 $r(0)=g(0)=1$, $g(1)=r(1)=-5$, $r(3)=g(3)=3$ 知

$a=9 \quad b=-15 \quad c=1$

$$\Rightarrow g(A)=9A^2-15A+I=\begin{bmatrix}16 & -21 & -42\\ -21 & 16 & 42\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

13 (1)

$$\begin{bmatrix}2 &&&&&\\ &2&&&&\\ &&2&1&&\\ &&&2&&\\ &&&&3&1\\ &&&&&3\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}2 &1&&&&\\ &2&&&&\\ &&2&1&&\\ &&&2&&\\ &&&&3&1\\ &&&&&3\end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix}3 &&&&&\\ &3&1&&&\\ &&3&&&\\ &&&2&&\\ &&&&2&\\ &&&&&2\end{bmatrix}$$

14 $$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \qquad \left(f(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1) \right)$$

15. $\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}(xe^x) = xe^x + e^x$

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = x^2 e^x + 2xe^x$$

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x}$$

$\Rightarrow$ D在基$\{e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}\}$下的变换矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = (1-\lambda)^3(2-\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ A的Jordan标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$