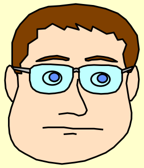
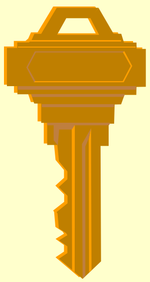
§ 3 牛顿插值 /* Newton's Interpolation */



Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新算过。



将 $L_n(x)$ 改写成 $c_0^{?} + c_1^{?}(x-x_0) + c_2^{?}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n^{?}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$ 的形式，希望每加一个节点时，只附加一项上去即可。

➢ 差商(亦称均差) /* divided difference */

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j,\ x_i \neq x_j)$$

1阶差商 /* the 1st divided difference of f w.r.t. x_i and x_j */

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad (i \neq k)$$

2阶差商

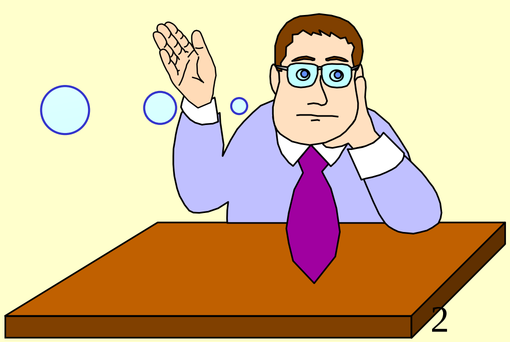
$(k+1)$阶差商：

$$f[x_0,\dots,x_{k+1}]=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_k]-f[x_1,\dots,x_k,x_{k+1}]}{x_0-x_{k+1}}$$
$$=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1},x_{k+1}]}{x_k-x_{k+1}}$$

注： ☞ k阶差商必须由 $k+1$ 个节点构成，k个节点是构造不出k阶差商的。

☞为统一 起见,补充定义函数$f(x_0)$为零阶差商。

差商的值与 x_i 的顺序无关！



📖差商性质:

1). k 阶差商可表为函数值$f(x_0), f(x_1),\cdots, f(x_k)$的线性组合，即

$$f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

2).差商具有对称性，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_1,x_0,x_2\cdots,x_k]=\cdots=f[x_1,\cdots,x_k,x_0]$$

3).若$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数,且节点 $x_i\in[a,b](i=0,1,\cdots n)$,
则 n 阶差商与n阶导数有如下关系式:

$$f[x_0,x_1\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\qquad \xi\in[a,b]$$

4).若$f(x)$是 n次多项式，则其k阶差商 $f[x_0,x_1\cdots,x_{k-1},x]$
当 $k\le n$ 时是一个$n-k$ 次多项式，而当$k>n$ 时恒为零.

差商计算可列差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商		三阶差商
x_0				
x_1		$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$\cdots$	$\cdots$			$\cdots$

$$f(x_1) - f(x_0)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$$

$$\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0}$$

➢ 牛顿插值 /* Newton's Interpolation */

Newton插值是通过选取特殊的基 …… 现的，这时，取

$\varphi_0(x)=1$

$$f(x_0)=N_n(x_0)=c_0$$

$$f(x_1)=N_n(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)$$
$$=f(x_0)+c_1(x_1-x_0)$$

得 $c_1=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$

数

不超过 …… 式 $N_n(x)$ 可表

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (2.1)$$

其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 是待定系数，由插值条件 决定。

通过插值条件运用数学归纳法可以求得

$$c_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

因此就得到下列的满足插值条件(2.1)的n次插值多项式

$$\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ & f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f[x, x_0] & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x-x_1)\, f[x, x_0, x_1] & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ f[x, x_0, \ldots, x_{n-1}] = f[x_0, \ldots, x_n] + (x-x_n)\, f[x, x_0, \ldots, x_n] & \cdots\ (n-1) \end{cases}$$

① $+ (x-x_0) \times$ ② $+ \ldots \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \times$ $(n-1)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$+ f[x, x_0, \ldots, x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

$N_n(x)$

$$c_i = f[x_0, \ldots, x_i]$$

$R_n(x)$

注： ☞ 由唯一性可知 $N_n(x) \equiv L_n(x)$， 只是算法不同，故其余项也相同，即

$$f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi \in (x_{\min}, x_{\max})$$

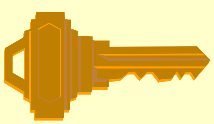
例 已知函数 $f(x)$ 在各节点处的函数值如下,用Newton插值法求 $f(0.596)$ 的值.

x_k	0.40	0.55	0.65	0.80
$f(x_k)$	0.41075	0.57815	0.69675	0.88811

解:

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
0.40	0.41075			
0.55	0.57815	1.11600		
0.65	0.69675	1.18600	0.28000	
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733

$$N_3(x) = 0.41075 + 1.11600(x-0.4) + 0.28000(x-0.4)(x-0.55) +$$
$$0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$



$f(0.596) \approx 0.62836$

§ 4 埃尔米特插值 /* Hermite Interpolation */

不仅要求函数值重合，而且要求若干阶**导数**也重合。
即：要求插值函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $\varphi'(x_i) = f'(x_i)$, …, $\varphi^{(m_i)}(x_i) = f^{(m_i)}(x_i)$.

注：☞ N 个条件可以确定 $N-1$ 阶多项式。

☞ 要求在1个节点 x_0 处直到 m_0 阶导数都重合的插值多项式即为Taylor多项式

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x - x_0)^{m_0}$$

其余项为 $R(x) = f(x) - \varphi(x) = \dfrac{f^{(m_0+1)}(\xi)}{(m_0+1)!}(x - x_0)^{(m_0+1)}$

☞ 一般只考虑 f 与 f' 的值。

低次埃尔米特插值多项式

1.二点三次埃尔米特插值多项式

设给定区间 $[x_0, x_1]$ 两端点处的函数值与导数值如下：

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	m_0	m_1

求插值多项式 $H_3(x)$ 使满足

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0, H_3(x_1) = y_1 \\ H_3'(x_0) = m_0, H_3'(x_1) = m_1 \end{cases}$$

由于给出了四个条件，故可唯一确定出一个三次多项式，不妨设

$$H_3(x) = \alpha_0(x)y_0 + \alpha_1(x)y_1 + \beta_0(x)m_0 + \beta_1(x)m_1$$

因此问题归结为构造

$$\alpha_0(x)\text{与}\beta_0(x),\alpha_1(x)\text{与}\beta_1(x)$$

首先，$\alpha_0(x)$与$\beta_0(x)$, $\alpha_1(x)$与$\beta_1(x)$应该为三次式。

再者，由插值条件易知 $\alpha_i(x_j),\beta_i(x_j)$ 应该满足条件 $i,j=1,2$

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad \alpha'_i(x_j)=0 \quad (i,j=0,1) \\[2ex] \beta_i(x_j)=0 \qquad \beta'_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \end{cases}$$

取

$$l^2_i(x)=\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2,(i,j=0,1;i\neq j)$$

令

$$\alpha_i(x) = (a_i x + b_i) l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x) = c_i (x - x_i) l_i^2(x), \quad i = 0,1;$$

其中 a_i, b_i, c_i 为待定系数，由 $\alpha_0(x_0)=1$，$\alpha'_0(x_0)=0$ 知 a_0, b_0 满足

$$\begin{cases} a_0 x_0 + b_0 = 1 \\ a_0 + 2(a_0 x_0 + b_0) l_0'(x_0) = 0 \end{cases}$$

解之得

$$a_0 = -2 l_0'(x_0) = -2 \frac{1}{x_0 - x_1}$$

$$b_0 = 1 + 2 x_0 l_0'(x_0) = 1 + 2 x_0 \frac{1}{x_0 - x_1}$$

故

$$\alpha_0(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

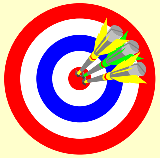
类似可以求得

$$\alpha_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2,$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2, \ \beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

于是

$$H_3(x) = y_0\left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right) l_0^2(x) + y_1\left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right) l_1^2(x)$$



$$+ m_0(x - x_0) l_0^2(x) + m_1(x - x_1) l_1^2(x)$$

2.三点三次带一个导数值的插值多项式

假设给定的函数表如下：

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2
$f'(x)$		m_1	

要求三次多项式 $H_3(x)$ **使**

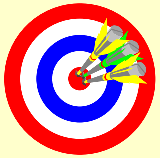
$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i \\ H_3'(x_1) = m_1 \end{cases} \qquad (i = 0,1,2)$$

利用满足三个条件的Newton插值多项式，我们设

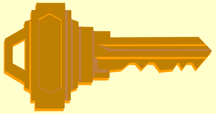
$$H_3(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

其中 k 为待定系数，显然 $H_3(x)$ 满足前三个插值条件，利用第四个条件确定常数 k，于是

$$H_3'(x_1) = f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)$$
$$+k(x_1-x_0)(x_2-x_1) = m_1$$



$$k = \frac{m_1 - f[x_0,x_1] - f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}$$



将其代入，即可得到 $H_3(x)$ 的表达式:

$$H_3(x) = y_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\frac{m_1 - f[x_0,x_1] - f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

例： 插值条件中有导数值，此时插值余项?

设有函数表

x	0	1	2
y	0	2	14
y'		5	

，求插值多项式，并写出余项表达式。

解：

设 $P_3(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ 则 $P_3'(x)=b+2cx+3dx^2$

由插值条件得：
$$\begin{cases} P_3(0)=a=0 \\ P_3(1)=a+b+c+d \\ P_3'(1)=b+2c+3d=5 \\ P_3(2)=a+2b+4c+8d=14 \end{cases}$$
得
$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases}$$

则 $P_3(x)=x-x^2+2x^3$

余项：类似Lagrange插值余项(只是把导数点也用上)

$R_3(x) = f(x) - P_3(x)$

则 $R_3(0) = R_3(1) = R_3(2) = 0$， $R_3'(1) = f'(1) - P'(1) = 0$

故可设 $R_3(x) = k(x)x(x-1)^2(x-2)$

设 $\varphi(t) = f(t) - P_3(t) - k(x)t(t-1)^2(t-2) = R_3(t) - k(x)t(t-1)^2(t-2)$

则当 $t = 0,\ 1,\ 2,\ x$ 时 $\varphi(t) = 0$

当 $t =\ \xi_0\ \ \xi_1\ \ \xi_2\ \ 1$ 时 $\varphi'(t) = 0$

当 $t = \xi$ 时 $\varphi^{(4)}(t) = 0,\ \xi \in [0,2]$

HW: p.50

#9，#11， #16

即 $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$

得 $f^{(4)}(\xi) - k(x)4! = 0$

有 $k(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$ 代入有: $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-2)$

一般地，已知 $x_0, \ldots, x_n$ 处有 $y_0, \ldots, y_n$ 和 $y_0', \ldots, y_n'$，求 $H_{2n+1}(x)$ 满足 $H_{2n+1}(x_i) = y_i$， $H'_{2n+1}(x_i) = y_i'$。

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

解：设 $H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \alpha_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' \beta_i(x)$

其中 $\alpha_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\alpha_i'(x_j) = 0$, $\beta_i(x_j) = 0$, $\beta_i'(x_j) = \delta_{ij}$

$\alpha_i(x)$ 有零点 $x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$ 且都是2重零点 $\Rightarrow \alpha_i(x) = (A_i x + B_i) l_i^2(x)$

由余下条件 $\alpha_i(x_i) = 1$ 和 α [illegible] $= 0$ 可解 A_i 和 B_i $\Rightarrow$

$$\alpha_i(x) = [1 - \text{[illegible]} (x - x_i)] l_i^2(x)$$

$\beta_i(x)$ 有零点 [illegible] 且都是2重零点 $\Rightarrow \beta_i(x) = C_i (x - x_i) l_i^2(x)$

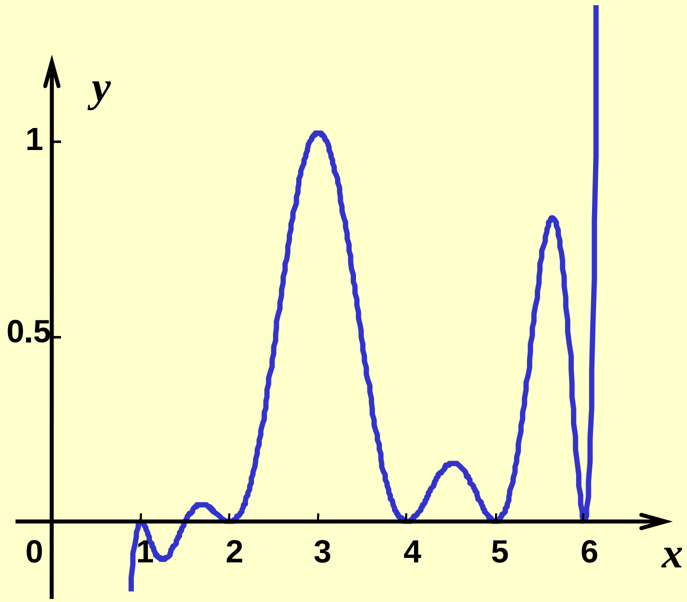
这样的Hermite 插值唯一

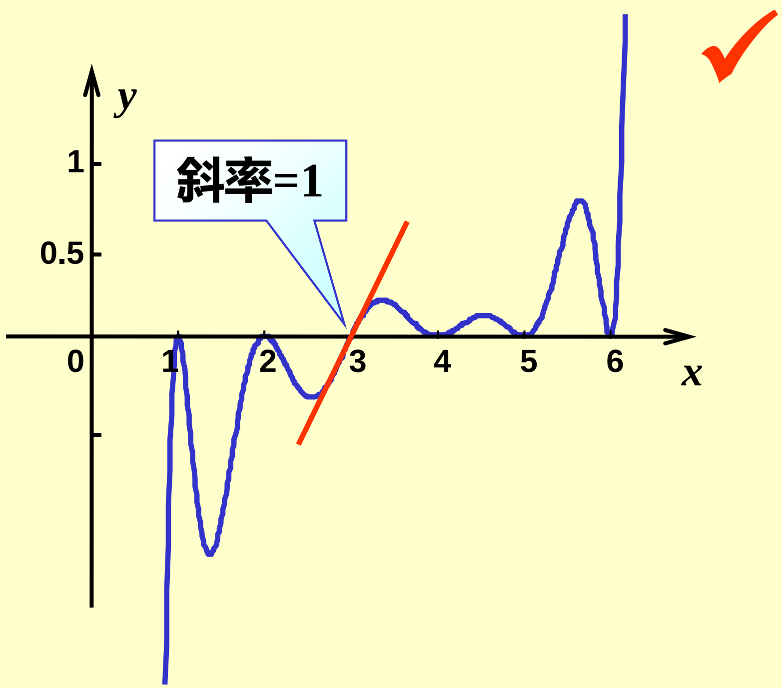
又 [illegible]

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

设 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $f \in C^{2n}[a, b]$ 则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right]^2$

Quiz: 给定 $x_i = i + 1,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$ 下面哪个是 $\beta_2(x)$ 的图像?

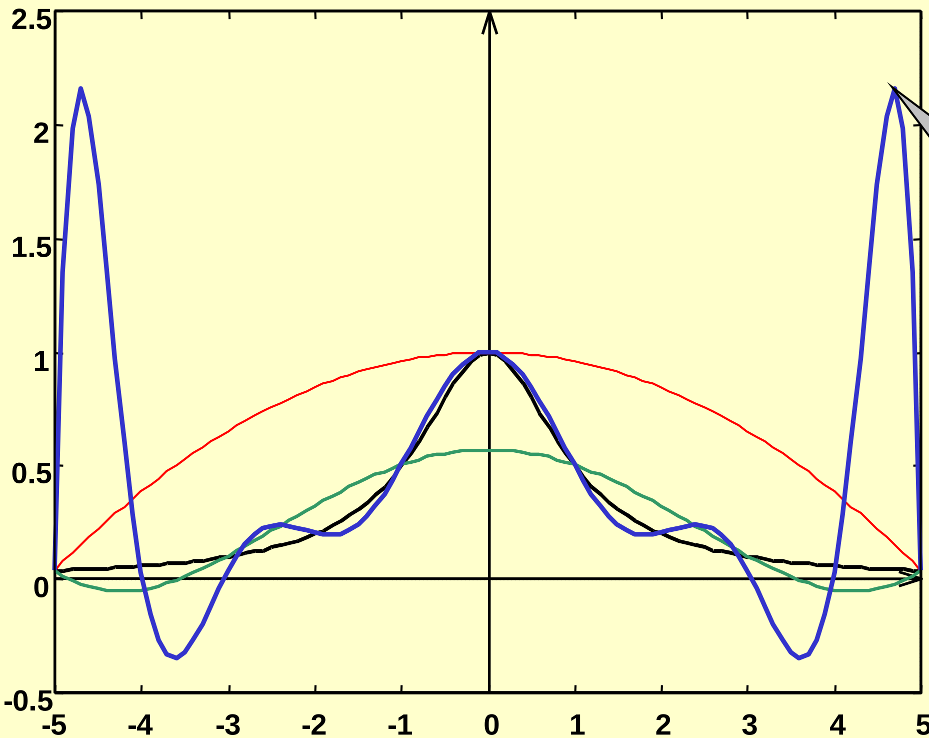




§ 5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

在区间 $[a,b]$ 上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似函数 $f(x)$，是否 $P_n(x)$ 的次数越高，逼近效果越好呢，回答是否定的。由于次数越高计算工作量也越大，积累误差也越大；在整个区间上作个高次多项式，当局部插值节点的值有微小误差时，就可能引起整个区间上函数值的较大变化，使计算不稳定。

例： 在 $[-5, 5]$ 上考察 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 $L_n(x)$。取 $x_i=-5+\dfrac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



$L_n(x) \not\to f(x)$

n 越大，端点附近抖动越大，称为 **Runge 现象**

分段低次插值

➢ 分段线性插值 /* piecewise linear interpolation */

所谓的分段线性插值就是通过插值点用折线段连接起来逼近 $f(x)$。设已知节点 $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上函数值 $f_0, f_1, \cdots, f_n$，记

$$h_k = x_{k+1} - x_k, h = \max_k h_k$$

求一折线函数 $I_h(x)$ 满足

$$(1) I_h(x) \in C[a,b],$$

$$(2) I_h(x_k) = f_k (k = 0,1,\cdots,n)$$

$(3) I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上都是线性函数。

则称 $I_h(x)$ 为分段线性插值函数。

设

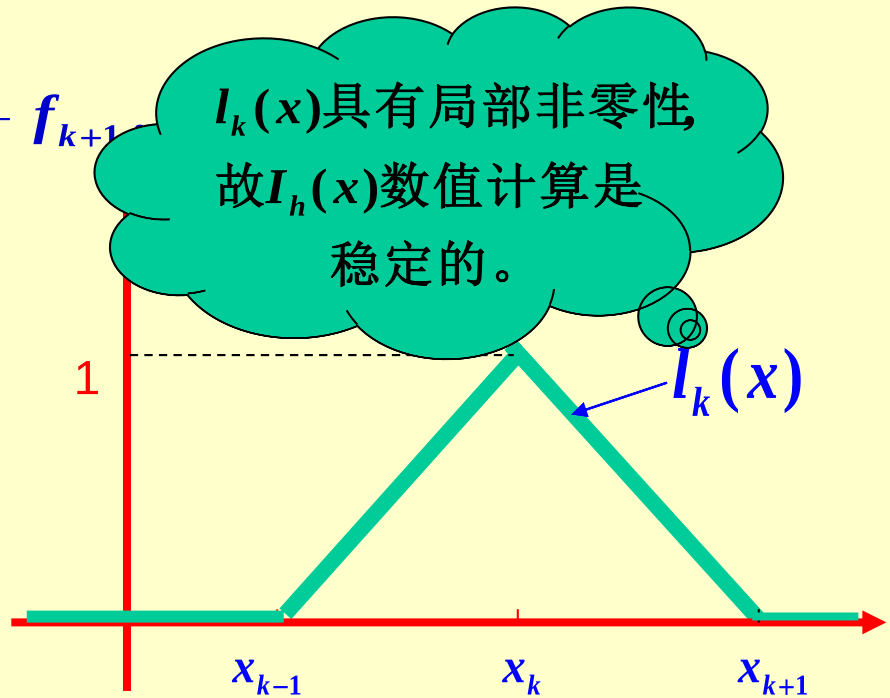
$$I_h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k l_k(x)$$

由定义可知 $I_h(x)$ 在每个小区间上可表示为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} f_{k-1}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1}$$

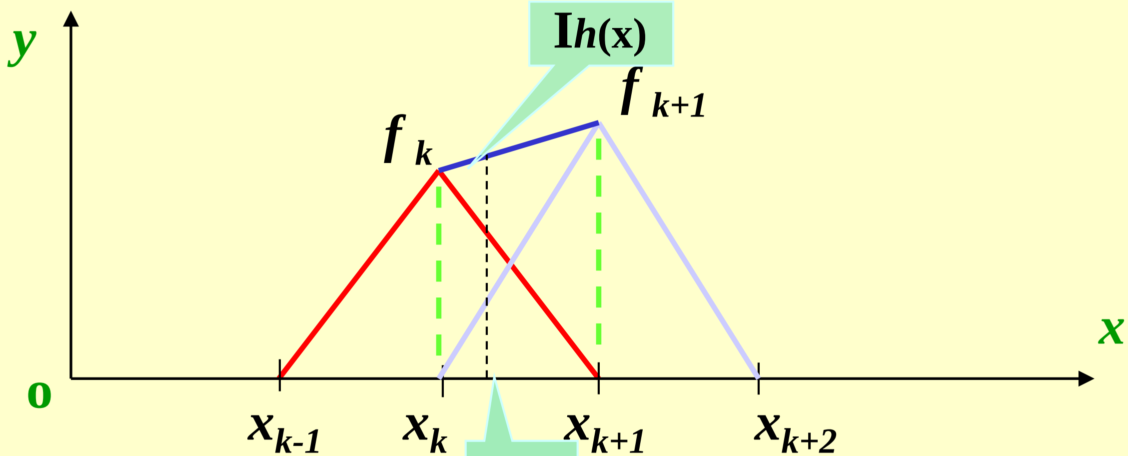
$$l_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} \le x \le x_k \ (k \ne 0) \\[2ex] \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x_k \le x \le x_{k+1} \ (k \ne n) \\[2ex] 0, & x \in [a,b], \text{但} x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]. \end{cases}$$



注意 表达式 $I_h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k l_k(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，只有 $l_k(x), l_{k+1}(x)$ 是非零的，其它基函数均为零。即

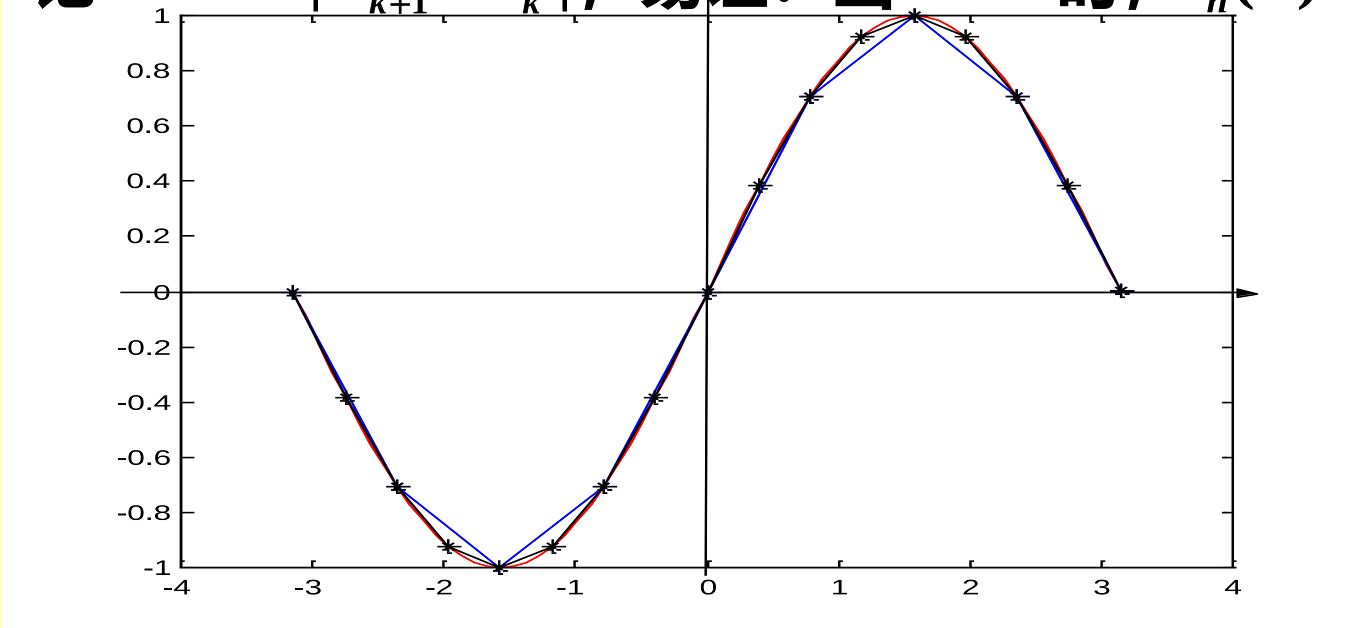
$$I_h(x) = f_k l_k(x) + f_{k+1} l_{k+1}(x) \qquad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

如图：



$y=I_h(x)$的图象实际上是连接点(x_k, f_k)，$k=1,2,\ldots n$ 的一条折线，也称**折线插值**，如下图。如果增加节点数量，会改善插值效果，即：

记$h=\max|x_{k+1}-x_k|$，易证：当$h\to 0$时，$I_h(x)\xrightarrow{\text{一致}} f(x)$



在节点处有尖点，失去了原函数的光滑性。

➢ 分段三次Hermite插值 /* Hermite piecewise polynomials */

分段线性插值函数 $I_h(x)$ 的导数是间断的，若在节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 上除已知函数值 f_k 外还给出导数值 $f'_k = m_k$ 这样就可以构造一个导数连续的分段插值多项式函数 $I_h(x)$，它满足

(1) $I_h \in C^1[a,b]$,

(2) $I_h(x_k) = f_k, I'_h(x_k) = f'_k \ (k = 0,1,\cdots,n)$

(3) $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 是三次多项式

设

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [f(x_k)\alpha_k(x) + f'(x_k)\beta_k(x)]$$

根据两点三次插值多项式。可知，在区间$[x_k, x_{k+1}]$上的 $I_h(x)$ 表达式为

$$
\begin{aligned}
I_h(x) = &\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) f_k \\
&+ \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right) f_{k+1} \\
&+ \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 (x - x_k) f'_k \\
&+ \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 (x - x_{k+1}) f'_{k+1}
\end{aligned}
$$

于是:

$$\alpha_k(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}\right) & x\in[x_{k-1},x_k]\\[2ex] \left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\left(1+2\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right) & x\in[x_k,x_{k+1}]\\[2ex] 0 & else\end{cases}$$

$$\beta_k(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)^2(x-x_k) & \\[2ex] \left(\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2(x-x_k) & \\[2ex] 0 & else\end{cases}$$

How can we make a smooth interpolation without asking too much from *f* ? Headache …

导数一般不易得到。