WSI für Informatik **an der Karls-Eberhardt Universität Tübingen**

Machine Learning

Übungsblatt 6

Lea Bey - Benjamin Çoban - Thomas Stüber

29. Juni 2017

6

Aufgabe 6.1.

Aufgabe 6.2.

Betrachte das Bayessche Netz mit den verteilten Wahrscheinlichkeiten auf dem Übungsblatt. Zu berechnen sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $p(x_1)$

$$p(x_1) = \sum_{i,j,k,l} p(x_1, a_i, b_j, c_k, d_l) \tag{6.1}$$

$$\underbrace{=}_{Graph} \sum_{i,j,k,l} p(x_1 \mid a_i, b_j) \cdot p(a_i) \cdot p(b_j) \cdot p(c_k \mid x_1) \cdot p(d_l \mid x_1) \tag{6.2}$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} p(x_1 \mid a_i, b_j) \cdot p(a_i) \cdot p(b_j) \cdot p(c_k \mid x_1) \cdot p(d_l \mid x_1) \tag{6.3}$$

In Zeile 6.3 betrachten wir nun $p(c_k \mid x_1)$ und $p(d_l \mid x_1)$. Dies heißt, dass wir über eine normierte Zeile iterieren, sowohl $p(c_k \mid x_1)$ als auch $p(d_l \mid x_1)$ summieren sich zu 1 auf, wenn wir sie ausklammern. Somit fällt die innere Summe mit den einzelnen Wahrscheinlichkeiten raus. Übrig bleibt also:

$$= \sum_{i,j} p(x_1 \mid a_i, b_j) \cdot p(a_i) \cdot p(b_j) \tag{6.4}$$

Macht auch Sinn, denn es interessiert an Hand vom Graphen für die Wahrscheinlichkeit von Lachs nicht, ob er o.B.d.A. hell oder breit ist.

$$= p(a_i) \cdot \sum_{i,j} p(x_1 \mid a_i, b_j) \cdot p(b_j) \tag{6.5}$$

$$= 0,25 \cdot (0,5 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 \tag{6.6}$$

$$+ 0,4 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4) = \underline{0,445} \tag{6.7}$$

b) $p(a_1, b_1, x_1, c_1, d_2)$

$$= p(a_1) \cdot p(b_1) \cdot p(x_1 \mid a_1, b_1) \cdot p(c_1 \mid x_1) \cdot p(d_2 \mid x_1)$$
$$= 0,25 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,0315$$

c) $p(x_1 \mid c_2)$

Berechne zuerst $p(c_2)$:

$$p(c_2) = \sum_{i,j,k,l} p(a_i, b_j, x_k, c_2, d_e)$$

Da wir in Teilaufgabe 1 bereits die Wahrscheinlichkeit für Lachs - und somit auch für Barsch - berechnet haben, kann ein erheblicher Teil der Rechnung übersprungen werden. Das liegt am Bayesschen Netz: Die Wahrscheinlichkeit eines Knotens ist bedingt durch seine Elternknoten - in unserem Fall X und bereits ausgerechnet.

$$\begin{aligned} &= \sum_i p(c_2 \mid x_i) \cdot p(x_i) \\ &= 0,2 \cdot 0,445 + 0,3 \cdot 0,555 = 0,2555 \end{aligned}$$

$$p(x_1 \mid c_2) = \frac{p(c_2, x_1)}{p(c_2)} \underbrace{=}_{\texttt{Satz von Beyes}} \frac{p(x_1) \cdot p(c_2 \mid x_1)}{p(c_2)} = 0,3483$$

d) $p(a_3 \mid x_2, d_1)$ Laut Tutorium gilt folgende Gleichung:

$$p(a_3 \mid x_2, d_1) = \frac{p(a_3, x_2, d_1)}{p(x_2) \cdot p(d_1 \mid x_2)} \tag{6.8}$$

Berechne nun den Zähler aus 6.8

$$\begin{aligned} p(a_3, x_2, d_1) &= \sum_{i,j} p(a_3) \cdot p_(b_i) \cdot p(x_2 \mid a_3, b_i) \cdot \underbrace{p(c_j \mid x_2)}_{=1} \\ &= p(a_3) \cdot p(d_1 \mid x_2) \cdot \sum_i p(b_i) \cdot p(x_2 \mid a_3, b_i) \\ &= 0,25 \cdot 0,6 \cdot (0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,9) = 0,108 \end{aligned}$$

Setzen wir das ganze nun in 6.8 ein, erhalten wir:

$$p(a_3 \mid x_2, d_1) = \frac{0,108}{0,555 \cdot 0,6} = 0,3243$$

e) $p(c_1 \mid d_2, x_1)$
Das Vorgehen ist gleich wie bei Teilaufgabe d)

$$\begin{aligned} p(x_1, c_1, d_2) &= \sum_{i,j} p(a_i) \cdot p(b_j) \cdot p(x_1 \mid a_i, b_j) \cdot p(c_1 \mid x_1) \cdot p(d_2 \mid x_1) \\ &= p(c_1 \mid x_1) \cdot p(d_2 \mid x_1) \cdot \underbrace{\sum_{i,j} p(a_i) \cdot p(b_j) \cdot p(x_1 \mid a_i, b_j)}_{=p(x_1)} \end{aligned}$$

Einsetzen in 6.8

$$\begin{aligned} p(c_1 \mid d_2, x_1) &= \frac{p(c_1 \mid x_1) \cdot p(d_2 \mid x_1) \cdot p(x_1)}{p(d_2 \mid x_1) \cdot p(x_1)} \\ &= p(c_1 \mid x_1) = 0,6 \end{aligned}$$