

HW3: 频率域滤波

1 习题

1.1 离散傅里叶变换对

答：对同一张图像分别做 DFT 跟 IDFT，并取结果的实部，然后比较出两者的亮暗，这样得到相对暗的则是系数放在的函数。

1.2 傅里叶频谱

答：结果一样。

根据二位离散傅里叶变换的平移特性可得知。假设图 b 的某点像素值为 $f(x,y)$ ，而在图 c 中由于补 0 位置不同，该点可以看做是由 $f(x,y)$ 平移得到的 $f(x-x_0, y-y_0)$ ，其傅里叶频谱为：

$$\left| F(u, v) e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \right| = |F(u, v)| \left| e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \right|$$

且由欧拉公式可得知 $\left| e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \right| = 1$,

所以 $\left| F(u, v) e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \right| = F(x, y)$

故补 0 位置不同傅里叶频谱一样相同。

1.3 频率域滤波器

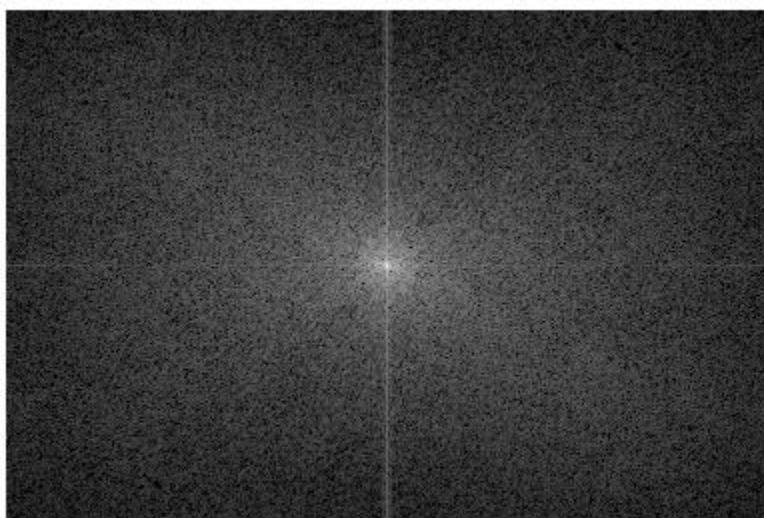
1. 滤波后的函数为： $H(u, v) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi u}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right) \right]$

2. 上述滤波器以 N 为周期，且在 (0,0) 处去的最大值，在一个周期内随着频率域值的增加其幅值减小，这说明该滤波器功能为一个低通滤波器。

2 编程题

2.2 傅里叶变换

1. 中心化后的傅里叶频谱



2. 原图:



对上一题做反傅里叶变换:



3.

对于傅里叶变换，由于题目要求，首先对 **flags** 值进行判断，如果是要输出的频谱时，先对原图像进行傅里叶变换，对每个像素值如果符合：

```
if (rem(u+v, 2))
    img(v, u) = -img(v, u);
end
```

然后根据公式：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (1)$$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y) e^{-j(\frac{2\pi ux}{M})} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j(\frac{2\pi vy}{N})} \quad (2)$$

从（1）（2）式子可以得出，2 维傅里叶变换可以表示为先对 2 个 1 维的傅里叶变换。而这里运用这个公式的原因是由于使用式子（1）会产生一个 4 重循环，代码运行时间较长，因此采用式子，将一个 4 重循环分为两个三重循环。

第一个三重循环，先求出 $\text{temp} = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j(\frac{2\pi vy}{N})}$ ：

```
for x = 1:src_col
    for v = 1:src_row
        sum = 0;
        for y = 1:src_row
            sum = sum + img(y, x) * exp(-1i * 2 * pi * v * y / src_row);
        end
        temp(v, x) = sum;
    end
end
```

然后第二个三重循环根据式子（2）则是 $F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y) e^{-j(\frac{2\pi ux}{M})} \cdot \text{temp}(x, v)$

```
for u = 1:src_col
    for v = 1:src_row
        sum = 0;
        for x = 1:src_col
            sum = sum + temp(v, x) * exp(-1i * 2 * pi * u * x / src_col);
        end
        output_img(v, u) = log(abs(sum));
        tempfourier(v, u) = sum;
        if (output_img(v, u) > max)
            max = uint8(output_img(v, u));
        end
    end
end
```

这样便得出了傅里叶变换的结果。然后对于反傅里叶变换，同样有公式：

$$f(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(x, y) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (3)$$

$$f(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, y) e^{-j(\frac{2\pi ux}{M})} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} F(x, y) e^{-j(\frac{2\pi vy}{N})} \quad (4)$$

因此由傅里叶变换的结果 tempfour_i，计算公式(3)有：

```
for x = 1:src_col
    for v = 1:src_row
        sum = 0;
        for y = 1:src_row
            sum = sum + tempfour_i(y,x)*exp(1i*2*pi*v*y/src_row);
        end
        temp(v,x) = sum;
    end
end
```

然后计算 $f(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} F(x,y) e^{-j\left(\frac{2\pi ux}{M}\right)} \cdot temp(x,v)$ ：

```
for u = 1:src_col
    for v = 1:src_row
        sum = 0;
        for x = 1:src_col
            sum = sum + temp(v,x)*exp(1i*2*pi*u*x/src_col)/src_col/src_row;
        end
        output_img(v,u) = real(sum);
        if (output_img(v,u) > max)
            max = output_img(v,u);
        end
    end
end
```

到这里已经完成了对于傅里叶的正变换和反变换，但是要显示频谱以及显示傅里叶反变换的图任需要对矩阵进行标定。这里我想上述的计算过程中，统计了输出图像中的最大像素值 max。然后用 $range = 255/\max$ 得出标定后像素值间隔，最后用 $output_img = range*f(x,y)$ 使得原有像素值的间隔变大，完成标定。

```
range = 255.0/max;
for u = 1:src_col
    for v = 1:src_row
        output_img(v,u) = output_img(v,u)*range;
    end
end
```

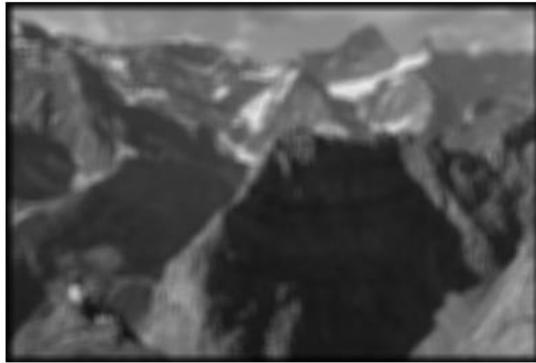
2.4 频率域滤波

1.

3*3 均值滤波器：



7*7 均值滤波器:



11*11 均值滤波器:



2.

选用的滤波器:

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

结果:



(ps:这里我输入的矩阵为 $[-1,-1,-1;-1,9,-1;-1,-1,-1]$), 中间值加 1 是因为滤波器得出的结果需要加上原图像才得出锐化结果)

3.

通过卷积定理: $F[f(t) * h(t)] = F(w) \cdot H(w)$ 可以得知原图像跟滤波器的卷积后的傅里叶可以表示为两个矩阵先进行傅里叶变换再点乘。

所以第一步我们先对两个矩阵的进行 0 延拓, 统一 $width = img_width + filter_width$ 、 $height = img_height + filter_height$ 。

```
%进行0延拓
for x = 1:new_col
    for y = 1:new_row
        if ( x <= fil_col && y <= fil_row)
            h(y,x) = filter(y,x);
        else
            h(y,x) = 0;
        end
        if ( x <= src_col && y <= src_row)
            f(y,x) = img(y,x);
        else
            f(y,x) = 0;
        end
    end
end
```

接着分别对图像跟滤波器延拓后的结果进行傅里叶变换, 具体傅里叶变换过程上题已提及。

然后对上述两者的傅里叶结果进行点乘。

```
F1(v,u) = sum1;  
H1(v,u) = sum2;  
%两矩阵点乘  
G(v,u) = F1(v,u)*H1(v,u);
```

最后对 $G(u, v)$ 进行反傅里叶变换得出最终结果。