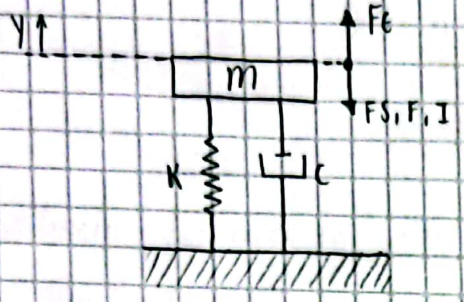
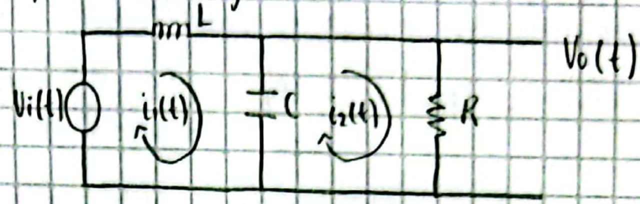
Parcial #3

1. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa resorte amortiguados presentado en la siguiente figura (asuma condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa resorte amortiguador a partir del siguiente circuito eléctrico:



Finalmente, proponga unos valores de m, K y c y sus equivalentes R, L y C, para simular un sistema subamortiguado, sobreamortiguado y de amortiguamiento crítico, la frecuencia natural no amortiguada, el tiempo pico, tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento en cada caso, también, grafique el diagrama de polos y ceros, el diagrama de BODE, la respuesta impulso, respuesta escalón y respuesta rampa. Repita el proceso para lazo cerrado.

Solución:

El sistema masa, resorte y amortiguador se puede modelar a partir de la conservación de fuerzas.

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

donde $F_S(t) = KY(t)$, $F_F(t) = \frac{C\,dY(t)}{dt}$, $F_I = m\frac{d^2Y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente:

$$m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + C\frac{dY(t)}{dt} + KY(t) = F_E(t) = X(t)$$

Aplicando la transformada de laplace

$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n X(t)}{dt}\right\} = S^n X(S)$, tenemos que

$$ms^2Y(s) + CSY(s) + KY(s) = X(s) \quad y:$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + CS + K}}$$ → Función de transferencia sistema masa, resorte amortiguador.

Ahora para el circuito eléctrico presentado, hallamos la respectiva función de transferencia:

LVK malla $i_1(t)$:

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$\boxed{V_i(s) = LS\,I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{CS}} \quad ①$$

Ahora hallamos LVK malla $i_2(t)$:

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0$$

donde $V_o(t) = i_2(t)R$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$I_2(s)R + (I_2(s) - I_1(s))\frac{1}{CS} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene:

$$\frac{I_1(s)}{CS} = +\frac{I_2(s)}{CS} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)\,CS + I_2(s)RCS}{CS} \longrightarrow \boxed{I_1(s) = I_2(s)\,(1 + (RS))} \quad ②$$

Reemplazando ② en ①:

$$V_i(s) = LS\,I_2(s)(1 + CRS) + (I_2(s)(1 + CRS) - I_2(s))\frac{1}{CS}$$

$$V_i(s) = LS\,I_2(s) + CRLS^2\,I_2(s) + (I_2(s) + CRS\,I_2(s) - I_2(s))\frac{1}{CS}$$

$$V_i(s) = LS\,I_2(s) + CRLS^2\,I_2(s) + R\,I_2(s)$$

$$V_i(s) = I_2(s)\left[RLS^2 + LS + R\right]$$

$$\frac{I_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CRLS^2 + LS + R}$$

Powered by CamScanner

Reemplazando $I_2(s) = \frac{V_0(s)}{R}$ se obtiene:

$$\frac{V_0(s)}{R\,V_i(s)} = \frac{1}{CRLS^2 + LS + R} \longrightarrow \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{CRLS^2 + LS + R} \cdot \left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\boxed{\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLS^2 + \frac{L}{R}S + 1}} \longrightarrow$$ Función de transferencia circuito eléctrico.

- Equivalencia del circuito eléctrico en péndulo elástico.

Circuito Eléctrico	Péndulo Elástico
CL	m
L/R	c
1	K

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}$$

Su equivalente en péndulo elástico sería:

$$H(s) = \frac{1}{m^2 + CS + K} = \frac{1/m}{\left(S^2 + \frac{CS}{m} + \frac{K}{m}\right)}$$

- Hallando la forma canónica de segundo orden.

- Comparando: $S^2 + 2\xi W_n S + W_n^2 = S^2 + \frac{CS}{m} + \frac{K}{m}$

- Igualando coeficientes:

$1 = 1 \longrightarrow$ COEF S^2

$2\xi W_n = \frac{C}{m} \longrightarrow$ COEF S

$W_n^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow$ COEF independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguada.

Powered by CamScanner

$$\boxed{W_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

- Hallando factor de amortiguamiento.

$$2\xi\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{C}{m} \longrightarrow \boxed{\xi = \frac{C}{2m\sqrt{K/m}}}$$

- Hallando la ganancia K.

$$K\,W_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow K = \frac{1}{m W_n^2} \longrightarrow K = \frac{1}{m.K/m} \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{K}}$$

- Finalmente, la forma canónica de segundo orden es

$$H(s) = K\frac{W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{\cancel{K}}\,\frac{\cancel{K}/m}{s^2 + \cancel{2}\left(\frac{C}{\cancel{2}m\,\cancel{\sqrt{K/m}}}\right)\cancel{\sqrt{K/m}}\,s + \frac{K}{m}} \longrightarrow H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{K}{m}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{C}{m}.s + \frac{K}{m}\right)}}$$

- Hallando la frecuencia natural amortiguada

$$W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow W_d = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{C}{2m\sqrt{K/m}}\right)^2}\right)$$

$$\boxed{W_d = \frac{\sqrt{K/m}\,\sqrt{4Km - C^2}}{2\sqrt{Km}}}$$

- El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por medio de simulación.

- Hallando el tiempo de establecimiento.

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} \longrightarrow t_s = \frac{3}{\left(\frac{C}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{K/m}}$$

$$\boxed{t_s = \frac{6m}{C}}$$

Powered by CamScanner

Función de transferencia masa, resorte amortiguada lazo cerrado.

- Se puede representar la función de transferencia de un sistema de lazo cerrado de la siguiente manera.

$$H_{LC}(S) = \frac{\quad}{1 \pm A(S)H(S)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \longrightarrow \text{Función de transferencia lazo abierto.}$$

$$A(s) = 1$$

Calculamos $H_{LC}(s)$:

$$H_{LC}(s) = \frac{\dfrac{1}{ms^2 + cs + K}}{1 + \left(\dfrac{1}{ms^2 + cs + K}\right)\cdot 1} = \frac{\dfrac{1}{ms^2 + cs + K}}{\dfrac{ms^2 + cs + K + 1}{ms^2 + cs + K}}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K + 1} \quad \text{ó} \quad \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}\cdot s + \left(\frac{K+1}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden

- Comparando:

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 = s^2 + \frac{c}{m}\cdot s + \left(\frac{K+1}{m}\right)$$

- Igualando coeficientes:

$$1 = 1 \longrightarrow \text{Coef } s^2$$

$$2\xi W_n = \frac{c}{m} \longrightarrow \text{Coef } s$$

$$W_n^2 = \frac{K+1}{m} \longrightarrow \text{Coef independiente.}$$

Hallando frecuencia natural no amortiguada.

$$\boxed{W_n = \sqrt{\frac{K+1}{m}}}$$

Powered by CamScanner

Hallando factor de amortiguamiento:

$$\xi = \frac{C}{2mW_n} = \boxed{\frac{C}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}}}$$

- Hallando la ganancia:

$$KW_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow K = \frac{1}{mW_n^2} \longrightarrow K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{K+1}{m}}\right)^2} \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{K+1}}$$

- Entonces la forma canónica de segundo orden es:

$$H_{lc}(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2} = \frac{K+1/m}{s^2 + 2\left(\frac{C}{2m\left(\sqrt{K+1/m}\right)}\sqrt{K+1/m}\,.\,s + K+1/m\right)}$$

$$\boxed{H_{lc}(s) = \frac{1}{mcs^2 + \frac{C}{m}.s + \frac{K+1}{m}}}$$

- Hallando frecuencia natural amortiguada

$$wd = W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$wd = \sqrt{\frac{K+1}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{C}{2m\sqrt{K+1/m}}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{K+1/m}\,\sqrt{4Km+4m-C^2}}{2\sqrt{m(K+1)}}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento.

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\frac{C}{2m\sqrt{K+1/m}}\sqrt{\frac{K+1}{m}}} = \boxed{\frac{6m}{C}}$$

Espectros de cada etapa.

1) $A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

$$A_1 m(t) \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) = A\left(\frac{m(t) e^{j2\pi f_0 t}}{2} \right) + \left(\frac{m(t) e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right)$$

con $F\{x(t) e^{\pm j w_0 t}\} = X(w \mp w_0)$

$$\frac{A}{2} M((w - 2\pi f_0) + (w + 2\pi f_0))$$

2) $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ con $\theta_0 = 0$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right\} = F\left\{ \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2} \right\} + F\left\{ \frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right\}$$

con $F\{e^{\pm j w_0 t}\} = 2\pi \delta(w \mp w_0)$

$F(w) = \pi \delta(w - 2\pi f_0) + \pi \delta(w + 2\pi f_0) \longrightarrow$ Mixer. (1x2)

$$A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \frac{A_1 m(t)}{2} + \frac{A m(t)}{2} \cos(4\pi f_0 t + \overset{0}{\cancel{2\theta_0}})$$

$$F(w) = \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{2} m(t) \times \left(\frac{e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j4\pi f_0 t}}{2} \right)$$

$$F(w) = \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{2} \left(\frac{m(t) e^{j4\pi f_0 t}}{2} \right) + \left(m(t) e^{-j4\pi f_0 t} \right.$$

con $F\{x(t) e^{\pm j w_0 t}\} = X(w \mp w_0)$

$F(w) = \frac{A M(w)}{2} + \frac{A}{4} M((w - 4\pi f_0) + (w + 4\pi f_0)) \longrightarrow$ lowpass

$$\frac{A_1}{2} m(t)$$

$F(w) = \frac{A M(w)}{2} \longrightarrow$ Scale amplitude by $\frac{2}{A_1}$

$$\frac{A_1}{2} m(t) \cdot \frac{2}{A_1} = m(t)$$

$$F(m(t)) = M(w)$$

Powered by CamScanner