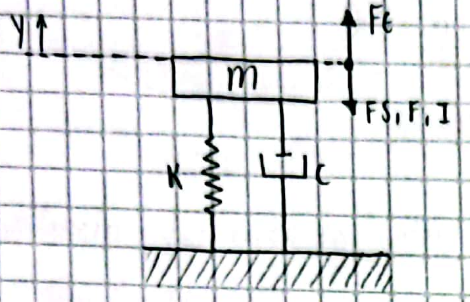
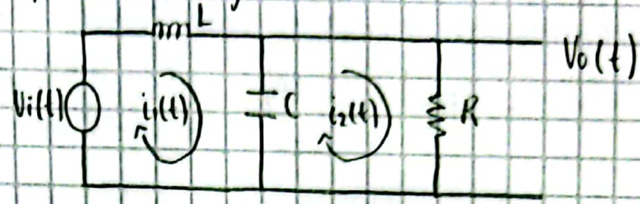
Parcial #3

1. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa resorte amortiguados presentado en la siguiente figura (asuma condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa resorte amortiguador a partir del siguiente circuito eléctrico:



Finalmente, proponga unos valores de m, K y c y sus equivalentes R, L y C, para simular un sistema subamortiguado, sobreamortiguado y de amortiguamiento crítico, la frecuencia natural no amortiguada, el tiempo pico, tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento en cada caso, también, grafique el diagrama de polos y ceros, el diagrama de BODE, la respuesta impulso, respuesta escalón y respuesta rampa. Repita el proceso para lazo cerrado.

Solución:

El sistema masa, resorte y amortiguador se puede modelar a partir de la conservación de fuerzas.

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

donde $F_S(t) = KY(t)$, $F_F(t) = C\frac{dY(t)}{dt}$, $F_I = m\frac{d^2Y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente:

$$m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + C\frac{dY(t)}{dt} + KY(t) = F_E(t) = X(t)$$

Aplicando la transformada de laplace

$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n X(t)}{dt}\right\} = S^n X(S)$, tenemos que

$$ms^2Y(s) + CSY(S) + KY(S) = X(S)$$ y:

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2 + CS + K}}$$ → Función de transferencia sistema masa, resorte amortiguador.

Ahora para el circuito eléctrico presentado, hallamos la respectiva función de transferencia:

LVK malla $i_1(t)$:

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$\boxed{V_i(s) = LS\,I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{CS}} \quad ①$$

Ahora hallamos LVK malla $i_2(t)$:

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0$$

donde $V_o(t) = i_2(t)R$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$I_2(s)R + (I_2(s) - I_1(s))\frac{1}{CS} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene:

$$\frac{I_1(s)}{CS} = +\frac{I_2(s)}{CS} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)\,CS + I_2(s)RCS}{CS} \longrightarrow \boxed{I_1(s) = I_2(s)\,(1 + (RS))} \quad ②$$

Reemplazando ② en ①:

$$V_i(s) = LS\,I_2(s)(1 + CRS) + (I_2(s)(1 + (RS) - I_2(s))\frac{1}{CS}$$

$$V_i(s) = LSI_2(s) + CRLS^2 I_2(s) + (I_2(s) + CRS\,I_2(s) - I_2(s))\frac{1}{CS}$$

$$V_i(s) = LSI_2(s) + CRLS^2 I_2(s) + RI_2(s)$$

$$V_i(s) = I_2(s)\left[RLS^2 + LS + R\right]$$

$$\frac{I_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CRLS^2 + LS + R}$$

Reemplazando $I_2(s) = \frac{V_o(s)}{R}$ se obtiene:

$$\frac{V_o(s)}{R\,V_i(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R} \longrightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{CRLs^2 + Ls + R} \cdot \left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$ $\longrightarrow$ Función de transferencia circuito eléctrico.

- Equivalencia del circuito eléctrico en péndulo elástico.

Circuito Eléctrico	Péndulo Elástico
CL	m
L/R	c
1	K

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Su equivalente en péndulo elástico sería:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} = \frac{1/m}{\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{K}{m}\right)}$$

- Hallando la forma canónica de segundo orden.

- Comparando: $s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{K}{m}$

- Igualando coeficientes:

$1 = 1 \longrightarrow$ COEF s^2

$2\xi W_n = \frac{c}{m} \longrightarrow$ COEF s

$W_n^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow$ COEF independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguada.

Powered by CamScanner

$$\boxed{W_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

- Hallando factor de amortiguamiento.

$$2\xi\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{C}{m} \longrightarrow \boxed{\xi = \frac{C}{2m\sqrt{K/m}}}$$

- Hallando la ganancia K.

$$K W_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow K = \frac{1}{m W_n^2} \longrightarrow K = \frac{1}{m \cdot K/m} \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{K}}$$

- Finalmente, la forma canónica de segundo orden es

$$H(s) = K \frac{W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{\cancel{K}} \frac{\cancel{K}/m}{s^2 + \cancel{2}\left(\frac{C}{\cancel{2}m\,\cancel{\sqrt{K/m}}}\right)\cancel{\sqrt{K/m}}\, s + \frac{K}{m}} \longrightarrow H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{C}{m} s + \frac{K}{m}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{C}{m} \cdot s + \frac{K}{m}\right)}}$$

- Hallando la frecuencia natural amortiguada

$$W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow W_d = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{C}{2m\sqrt{K/m}}\right)^2}\right)$$

$$\boxed{W_d = \frac{\sqrt{K/m}\,\sqrt{4Km - C^2}}{2\sqrt{Km}}}$$

- El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por medio de simulación.

- Hallando el tiempo de establecimiento.

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} \longrightarrow t_s = \frac{3}{\left(\frac{C}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{K/m}}$$

$$\boxed{t_s = \frac{6m}{C}}$$

Función de transferencia masa, resorte amortiguada lazo cerrado.

- Se puede representar la función de transferencia de un sistema de lazo cerrado de la siguiente manera.

$$H_{LC}(s) = \frac{\quad}{1 \pm A(s)H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \longrightarrow \text{Función de transferencia lazo abierto.}$$

$$A(s) = 1$$

Calculamos $H_{LC}(s)$:

$$H_{LC}(s) = \frac{\dfrac{1}{ms^2+cs+K}}{1 + \left(\dfrac{1}{ms^2+cs+K}\right)\cdot 1} = \frac{\dfrac{1}{ms^2+cs+K}}{\dfrac{ms^2+cs+K+1}{ms^2+cs+K}}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2+cs+K+1} \quad \text{ó} \quad \frac{1/m}{s^2 + \dfrac{c}{m}\cdot s + \left(\dfrac{K+1}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden

- Comparando:

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 = s^2 + \frac{c}{m}\cdot s + \left(\frac{K+1}{m}\right)$$

- Igualando coeficientes:

$$1 = 1 \longrightarrow \text{Coef } s^2$$

$$2\xi W_n = \frac{c}{m} \longrightarrow \text{Coef } s$$

$$W_n^2 = \frac{K+1}{m} \longrightarrow \text{Coef independiente.}$$

Hallando frecuencia natural no amortiguada.

$$\boxed{W_n = \sqrt{\frac{K+1}{m}}}$$

Hallando factor de amortiguamiento:

$$\xi = \frac{c}{2mW_n} = \boxed{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}}$$

- Hallando la ganancia:

$$KW_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow K = \frac{1}{mW_n^2} \longrightarrow K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{k+1}{m}}\right)^2} \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{k+1}}$$

- Entonces la forma canónica de segundo orden es:

$$H_{lc}(s) = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2} = \frac{k+1/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\left(\sqrt{k+1/m}\right)}\right)\sqrt{k+1/m}\,.\,s + k+1/m}$$

$$\boxed{H_{lc}(s) = \frac{1}{m(s^2 + \frac{c}{m}.s + \frac{k+1}{m}}}$$

- Hallando frecuencia natural amortiguada

$$w_d = W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$w_d = \sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{k+1/m}}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{k+1/m}\,\sqrt{4km+4m-c^2}}{2\sqrt{m(k+1)}}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento.

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{k+1/m}}\sqrt{\frac{k+1}{m}}} = \boxed{\frac{6m}{c}}$$