

Algorithmique 1

L3 RI

Table des matières

1	Algorithmes	1
1.1	Tris	1
1.2	Arbres binaires	1
1.3	Graphes	2
1.4	Algorithmes gloutons	2
1.5	Programmation dynamique	2
1.6	Flots	3
1.7	Programmation linéaire	3
2	Structures de données	3
2.1	Files de priorité	3
2.2	Tables de hachage	3
2.3	Structure Union-Find	4
3	Autres	4

1 Algorithmes

1.1 Tris

- ▷ Tri par insertion : $O(n^2)$
Considérer chaque élément un à un pour l'insérer à sa bonne place (penser à un jeu de cartes)
- ▷ Tri fusion : $O(n \log n)$
Paradigme diviser pour régner, diviser en deux sous-problèmes
- ▷ Tri Shell : $O(n^2)$
Suite de tris par insertion sur chaque constituant d'une partition du tableau
- ▷ Tri par tas : $O(n \log n)$
Utiliser une structure de file de priorité, ici un tas
- ▷ Tri sélection : $O(n^2)$
Mettre le plus grand à sa place, puis le suivant... Peu d'écritures. Utilisé pour le tri fusion en place.
- ▷ Optimalité : $\Omega(n \log n)$ nécessaire, arbres de décision

1.2 Arbres binaires

- ▷ Arbre binaire : $1 + h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$

- ▷ Arbre binaire presque complet : $2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$
- ▷ Tas
- ▷ Arbre binaire de recherche (ABR)
 - La recherche d'un élément ne suit qu'une branche, problème si arbre non équilibré
- ▷ Arbre AVL
 - Rééquilibrage d'un arbre par des rotations : $\log_2(n+1) \leq h \leq 1.44 \log_2 n$

1.3 Graphes

- ▷ Graphes orientés, pondérés
- ▷ Implémentations par liste d'adjacence ou matrice d'adjacence
- ▷ Parcours en profondeur
 - Valeurs de **pre** et **post** traitement, types d'arc, détection de cycles, tri topologique
 - Composantes fortement connexes, Algorithme de Kosaraju (un premier PP, puis un second PP dans l'ordre décroissant des temps de **post** sur le graphe transposé), graphe quotient
- ▷ Parcours en largeur
 - Recherche d'un plus court chemin
 - Algorithme de Dijkstra (mise à jour de distances, et considérer le sommet qui minimise)
 - Algorithme A* (même principe, mais le choix se base en plus sur une heuristique)
- ▷ Arbre couvrant de poids minimal
 - Algorithme de Kruskal (utiliser une structure Union-Find, trier les arêtes par poids croissants, et les considérer toute une à une, si pas dans la même classe, on fusionne)
 - Algorithme de Prim (similaire à Dijkstra, tant qu'il reste des sommets non traités, on prend l'arête qui minimise à partir d'un sommet traité)

1.4 Algorithmes gloutons

- ▷ Prendre un choix localement meilleur
- ▷ Algorithmes de Kruskal, de Prim
- ▷ Rendu de monnaie
- ▷ Couverture d'ensemble (exemple où le choix glouton ne donne pas forcément la solution optimale)

1.5 Programmation dynamique

- ▷ Paradigme de conception d'algorithmes
- ▷ Définir les sous-problèmes, en revoyant à la baisse l'objectif si nécessaire
- ▷ Trouver une relation de récurrence
- ▷ Écrire l'algorithme (mémoïsation)
- ▷ Exemples
 - Recherche plus court chemin dans un graphe
 - Algorithme de Floyd-Warshall
 - $d_{i,j,k}$ = distance minimale d'un chemin allant de i à j passant par les k premiers sommets

- Algorithme de Bellman-Ford
 $d_{i,j,k}$ = distance minimale d'un chemin allant de i à j contenant au plus k arcs

Recherche plus longue sous-suite croissante
 Problème du sac à dos

1.6 Flots

- ▷ Problème du flot maximal
- ▷ Algorithme de Ford-Fulkerson (Tant qu'il existe un chemin de la source à la cible dans le graphe résiduel, maximiser les flux sur ce chemin)
- ▷ L'algorithme se termine si les poids sont entiers (ou rationnels), sinon ne termine pas forcément
- ▷ Réduction du problème de couplage maximal au problème de flot maximal

1.7 Programmation linéaire

- ▷ Forme canonique :
MAX expression
 $x_1 = \dots$
 \vdots
 $x_n = \dots$
 $x_1 \dots x_n \geq 0$
- ▷ Algorithme du simplexe (Tant qu'on peut maximiser la solution, échanger deux variables en utilisant l'expression la plus contraignante)

2 Structures de données

2.1 Files de priorité

Implémentées par exemple avec un tas.
 Méthodes :

- ▷ Enfiler
- ▷ Défiler un élément maximal
- ▷ Est vide ?
- ▷ Construire file vide

2.2 Tables de hachage

Méthodes :

- ▷ Ajout d'un élément
- ▷ Suppression d'un élément
- ▷ Contient x ?

Risque de collisions, n'est pas rare (idem paradoxe des anniversaires)

2.3 Structure Union-Find

Méthodes :

- ▷ Créer partition
- ▷ Fusionner deux classes (union)
- ▷ Obtenir un représentant (find)

Implémentation par une forêt d'arbres. Complexité améliorée en utilisant la compression de chemin.

3 Autres

- ▷ Encodage de Huffman
- ▷ Formules de Horn
- ▷ FFT
- ▷ Master Theorem
- ▷ Classes P, NP, EXPTIME
- ▷ Classe NP : Réduction à SAT, Branch&Bound, Local Search