درسنامه ترکیبیات و کاربردها

فهرست

فصل اول: شمارش

فصل دوم: شمارش درختها

فصل سوم: قضیه‌ی ازدواج

فصل چهارم: سه اصل بنیادی

فصل پنجم: مربع لاتین

فصل ششم: چند جمله‌ای رخ

استاد: دکتر سمیه بندری

فصل اول

شمارش

قاعده جمع: اگر کاری را بتوان به m طریق و کار دیگر را بتوان به n طریق انجام داد و اگر این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه این یا آن کار را به $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال: فرض کنیم کتابخانه ای ۵۰ کتاب ریاضی و ۳۰ کتاب زبان داشته باشد، یک دانشجو به چند طریق می‌تواند یک کتاب انتخاب کند؟ $30+50=80$

مثال: از A به B به سه طریق هوایی، به دو طریق زمینی و به یک طریق دریایی می‌توان رسید، به چند طریق می‌توان از A به B رسید؟ $3+2+1=6$

قاعده حاصل ضرب: اگر عملی در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم به n طریق صورت گیرد، آنگاه کل عمل به $m\times n$ طریق انجام می گیرد.

مثال: یک فروشگاه ۵ نوع کمربند برای آقایون دارد و از هر نوع کمربند ۷ اندازه وجود دارد، چند نوع کمربند مختلف در این فروشگاه وجود دارد؟ $7\times 5 = 35$

جایگشت: گردایه ای از n شیء متمایز مفروض است، هر ترتیب خطی از این اشیا را یک جایگشت گویند.

مثال: تعداد جایگشت های حروف واژه کامپیوتر (computer)، $8\times7\times6\times\ldots\times1=8!$ است.

تعریف: به طور کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم و r عددی صحیح باشد که $1\le r\le n$، آنگاه بنابر قاعده حاصل‌ضرب، تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء را با نماد $p(n,r)$ نمایش میدهند و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$p(n,r) = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: تعداد جایگشت های پنج تایی از حروف واژه کامپیوتر برابر است با

$$\frac{8!}{(8-5)!}=\frac{8!}{3!}$$

مثال: در کلاسی که ۱۰ دانشجو دارد، می‌خواهیم ۳ نفر را برای گرفتن عکس در یک ردیف بنشانیم به چند طریق میتوان این کار را کرد؟

$$p(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\times9\times8$$

ترکیب: انتخاب r شی از n شی متمایز به شرط آنکه ترتیب مهم نباشد:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}.$$

مثال: شخصی می‌خواهد از بین ۲۰ نفر ۵ نفر را به عنوان مهمان دعوت کند. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

$$\binom{20}{5}=\frac{20!}{5!15!}$$

ما در ادامه می‌خواهیم فرمولهای شمارش را به صورت کاربردی توضیح دهیم.

مثال: کتابی ۱۶ فصل دارد. به چند طریق می‌توان ۲ فصل از این کتاب را انتخاب کرد؟

$$\binom{16}{2}=\frac{16\times15}{2}=120$$

راههای مختلفی برای رسیدن به این جواب وجود دارد. به عنوان مثال می‌توانید تمام جفت فصلهای ممکن برای انتخاب را بنویسید:

$$\begin{array}{lll} 1,2 & 2,1 & 16,14 \\ 1,3 & 2,3 & 16,15 \\ 1,4 & \vdots & \\ \vdots & 2,16 & \\ 1,16 & & \end{array}$$

۱۶ حالت برای فصل اول و ۱۵ حالت برای فصل دوم داریم. بنابراین ۱۵×۱۶ زوج از فصول برای انتخاب داریم. ولی دقت کنید که هر دو فصلی دقیقاً دوبار در لیست فوق ظاهر شده است. در حالی که این دو حالت

را باید یک بار بشماریم. بنابراین باید نصف عدد بدست آمده را در نظر بگیریم. پس مقدار $\binom{16}{2}$ برابر است با ۱۲۰.

از طرف دیگر لیست بالا را می‌توانیم طوری آماده کنیم که عدد اول هر جفت، عدد کوچکتر باشد. در این حالت هر انتخاب مورد نظر دقیقاً یک بار در لیست ظاهر می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}1,2\\1,3\\\vdots\\1,16\end{array}\right\}15$$
$$\left.\begin{array}{l}2,3\\\vdots\\2,16\end{array}\right\}14$$
$$\left.\begin{array}{l}3,4\\\vdots\\3,16\end{array}\right\}13$$
$$\vdots$$
$$15,16\}1$$

تعداد حالتهای مورد نظر برابر تعداد جفت عددهای موجود در این لیست می‌باشد که این تعداد برابر است با

$$\binom{16}{2}=15+14+\cdots+2+1=\frac{1}{2}\times 15\times 16.$$

از دو روش اثبات بالا می‌توان فهمید که تعداد راههای انتخاب دو شیء از میان n شیء متمایز بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب برابر است با: $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ فصل از ۱۶ فصل یک کتاب را انتخاب کرد؟ در حالت کلی نشان دهید:

$$\binom{n}{3}=\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}.$$

حل: همانند روش اول در مثال قبل یک لیست کلی از سه تایی‌هایی که از فصول می‌توان ساخت، ایجاد می‌کنیم. برای اولین عضو سه تایی ۱۶ حالت مختلف داریم. هر یک از ۱۵ فصل باقیمانده را می‌توان به عنوان دومین عضو سه تایی در نظر گرفت و هر یک از ۱۴ فصل باقیمانده را برای سومین عضو انتخاب کرد.

ولی هر مجموعه‌ی سه تایی از فصول در این لیست دقیقاً ۶ بار ظاهر شده است. بنابراین راههای انتخاب ۳ فصل از ۱۶ فصل برابر است با:

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{6} = 560.$$

روش دوم مساله قبل لیست کردن زوجها به صورت صعودی بود. در این مساله نیز ما می‌توانیم سه تایی‌هایی را لیست کنیم که اعضای آنها به ترتیب صعودی باشند. یعنی عضو دوم از عضو اول و عضو سوم از عضو دوم بزرگتر باشد. به این ترتیب هر مجموعه سه تایی دقیقاً یک بار در این لیست ظاهر می‌شود و تعداد اعضای این لیست برابر تعداد مجموعه‌های سه تایی خواهد بود.

$$\left.\begin{matrix} 1,2,3 \\ 1,2,4 \\ \vdots \\ 1,15,16 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2,3,4 \\ \vdots \\ 2,15,16 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3,4,5 \\ \vdots \\ 3,15,16 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 13,14,15 \\ 13,14,16 \\ 13,15,16 \end{matrix}\right\} \quad 14,15,16\}$$

در نتیجه

$$\binom{16}{3} = \binom{15}{2} + \binom{14}{2} + \binom{13}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 560.$$

از این طریق می‌توان به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

اثبات مثال قبل مقدمه‌ای می‌شود برای بیان نتیجه‌ی زیر:

تعداد راههای انتخاب k شیء از میان n شیء متمایز با در نظر گرفتن ترتیب انتخاب برابر است با:

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$$

ولی هنگامی که ترتیب انتخاب مهم نباشد در آن صورت هر مجموعه‌ی k عضوی که انتخاب کرده‌ایم در مقدار بدست آمده به تعداد دفعات زیر محاسبه خواهد شد:

$$k\times(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times 1=k!$$

بنابرایت تعداد راههای انتخاب k شیء از میان n شیء متمایز در صورتیکه ترتیب مهم نباشد برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times(k-2)\times\cdots\times 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: فرض کنید n و k دو عدد صحیح باشند که $1\le k\le n$. با استفاده از روش ترکیبیاتی نشان دهید:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\cdots+\binom{k-1}{k-1}.$$

حل: سمت چپ تساوی تعداد راههای انتخاب یک زیر مجموعه‌ی k عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ می‌باشد. در چند تا از این مجموعه‌ها عدد ۱ به عنوان کوچکترین عدد ظاهر می‌شود؟ در چند تا عدد ۲؟ در چند تا عدد ۳؟ و ... . با شمارش تعداد این مجموعه‌ها به سمت دوم تساوی می‌رسیم.

مثال: ضریب جمله x^k در بسط $(1+x)^n$ چیست؟

حل:

$$(1+x)^n=(1+x)(1+x)(1+x)\cdots(1+x)$$

حاصل $(1+x)^n$ برابر حاصل جمع تعدادی جمله است که هر کدام حاصلضرب n عدد ۱ یا x می‌باشند. پس برای بدست آوردن x^k باید از k پرانتز عدد x و از $n-k$ پرانتز باقیمانده عدد ۱ انتخاب شده و در حاصلضرب شرکت کند. بنابراین ضریب x^k برابر تعداد راههای انتخاب k شی از میان n شی است که برابر $\binom{n}{k}$ می‌باشد.

از مساله بالا می‌توان فهمید که:

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{n}x^n.$$

قضیه دوجمله‌ای: فرض کنید x,y متغیر و n عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}x^ny^0\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^ky^{n-k}.
\end{aligned}
$$

عبارت بالا را بسط دوجمله‌ای می‌نامند و مقدار $\binom{n}{k}$ نیز مقدار ضریب دوجمله‌ای را نمایش می‌دهد.

مثال: نشان دهید:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

حل: ساده‌ترین راه برای بدست آوردن تساوی بالا قرار دادن $x=1$ و $y=1$ در بسط دوجمله‌ای می‌باشد. اما روشی که ما ارائه می‌دهیم شمارش تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی به دو روش مختلف می‌باشد. تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی این مجموعه برابر است با $\binom{n}{0}$، تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی این مجموعه برابر است با $\binom{n}{1}$ ، ... تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی این مجموعه برابر است با $\binom{n}{r}$، ... و تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی این مجموعه برابر است با $\binom{n}{n}$. بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با:

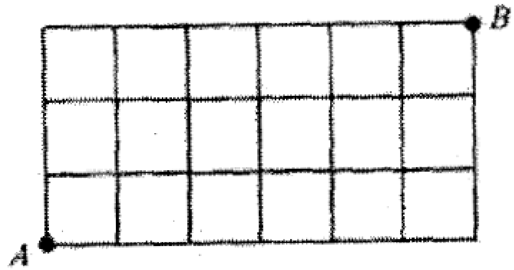
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

از طرفی تعداد این زیر مجموعه‌ها را از روشی ساده‌تر نیز می‌توانیم بدست آوریم. در هر زیرمجموعه تعدادی از اعضا وجود دارند و تعدادی نیز عضو زیرمجموعه نیستند. بنابراین برای هر عضو مجموعه اصلی ۲ حالت داریم: یا در یک مجموعه وجود دارد و یا وجود ندارد. بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر خواهد بود با:

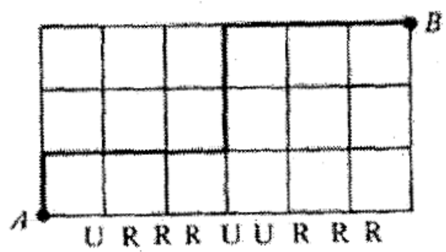
$$2\times2\times\cdots\times2=2^n.$$

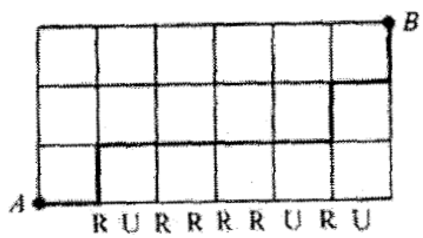
بنابراین تساوی داده شده همواره برقرار است.

مثال: فرض کنید تصویر زیر نمایشگر یک شبکه از راهها باشد و شما قصد دارید از نقطه‌ی A با حرکت روی خطوط به نقطه‌ی B بروید بطوری که کوتاهترین مسیر را طی کنید. به چند طریق مختلف می‌توان این کار را انجام داد؟ حکم مساله را برای شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف تعمیم دهید.



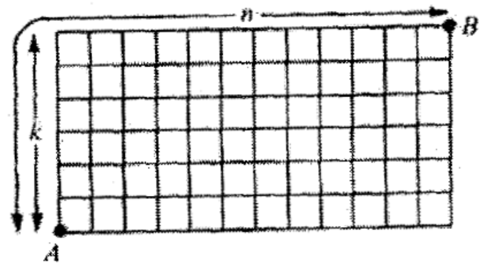
حل: دو مسیر حرکت از A به B در شکلهای زیر نمایش داده شده‌اند:





یک مسیر خواسته شده از A به B باید از ۹ حرکت تشکیل شده باشد. سه حرکت رو به بالا و شش حرکت رو به سمت راست. بنابراین تعداد راههای حرکت از A به B برابر است با تعداد انتخابهای ۳ حرکت رو به بالا از مجموع ۹ حرکت که برابر است با $\binom{9}{3}=84$.

به همین ترتیب در حالت کلی نیز تعداد مسیرهای حرکت با شرایط گفته شده برابر است با $\binom{n}{k}$



مثال: n و k اعداد صحیحی هستند به طوری که $1 \le k \le n$. نشان دهید

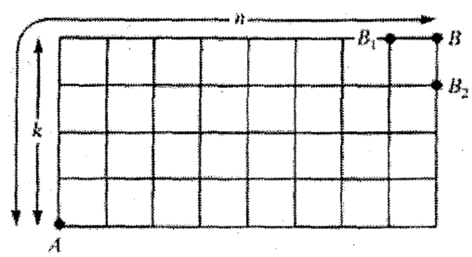
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

حل: روش اول: یافتن ضریب جمله‌ی x^k در بسط $(1+x)^n$ و

$$(1+x)(1+x)^{n-1}=1(1+x)^{n-1}+x(1+x)^{n-1}.$$

روش دوم: استفاده از مساله مسیر در شبکه راهها:

$\binom{n}{k}$ مسیر از A به B وجود دارد. این مسیرها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. مسیرهایی که از B_1 به B می‌رسیم و مسیرهایی که از B_2 به B می‌رسیم.



$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

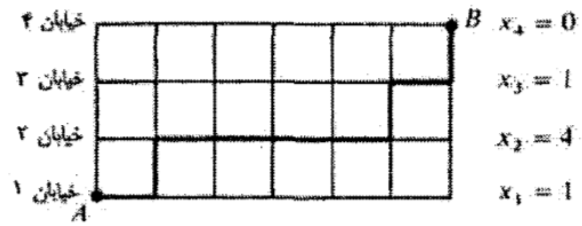
مثال: معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

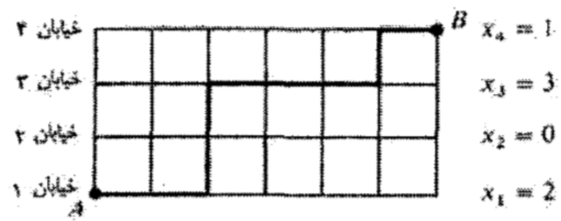
$$x_1+x_2+x_3+x_4=6 \qquad x_i \ge 0$$

معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n \qquad x_i \ge 0$$

حل: شبکه‌ای از راهها را در نظر می‌گیریم که ۴ خیابان افقی دارد و ۶ حرکت به سمت راست باید انجام دهیم. دو مسیر برای حرکت از A به B در شکلهای زیر نمایش داده شده‌اند. اگر تعداد حرکتهای به سمت راست در خیابان افقی iام را x_i تعریف کنیم، آنگاه تعداد این مسیرها برابر تعداد جوابهای نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ خواهد بود.





در اینجا به وضوح یک تناظر یک به یک میان جوابهای معادله و کوتاهترین مسیرها A به B وجود دارد و چون تعداد راهها برابر $84=\binom{9}{3}$ می‌باشد، بنابراین جوابهای معادله نیز برابر ۸۴ خواهد بود.

به همین سادگی می‌توان فهمید که تعداد جوابهای نامنفی معادله $x_i \geq 0 \qquad x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد مسیرهایی از گوشه‌ی پایین و سمت چپ به گوشه‌ی بالا و سمت راست با k خیابان افقی و n حرکت به سمت راست. در این شبکه همانطور که گفته شد باید $n+k-1$ حرکت داشته باشیم بطوری که $k-1$ حرکت به طرف بالا باشد. بنابراین جواب مساله برابر خواهد بود با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

مثال: چند عدد ۱۰ رقمی با ارقام ۱ و ۲و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و۴ و ۴ و ۴ و ۴ می‌توان تشکیل داد؟

حل: جواب برابر است با $\frac{10!}{4!3!2!}$ زیرا هر عدد $4!\times3!\times2!$ بار تکرار می‌شود. از طرف دیگر می‌توان مساله را این گونه در نظر گرفت که می‌خواهیم از بین ۱۰ مکان موجود برای قرار گرفتن رقمها، ۴ مکان برای ۴، از بین ۶ مکان باقیمانده ۳ مکان برای ۳، از بین ۳ مکان باقیمانده ۲ مکان برای ۲ و تنها یک مکان برای رقم یک انتخاب کنیم. تعداد راههای انجام این کار برابر است با:

$$\binom{10}{4}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{2}\times\binom{1}{1}=12600.$$

این جواب $\binom{10}{4}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{2}\times\binom{1}{1}=\frac{10!}{4!3!2!}$ تعداد راههای قرار دادن ۱۰ شیء در ۴ جعبه است بطوری که در جعبه‌ی اول ۴ شیء، در جعبه‌ی دوم ۳ شیء، در جعبه سوم ۲ شیء و در جعبه چهارم یک شیء قرار بگیرد.

تعریف: اگر k_1 شیء از نوع نخست، k_2 تا از نوع دوم، k_r تا از نوع rام وجود داشته باشد که در آن $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$، آنگاه $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$ ترتیب خطی برای n شیء مفروض وجود دارد و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\binom{n}{k_1\,k_2\cdots k_r}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

و آن را ضریب چند جمله‌ای می‌نامند.

در حالت خاص توجه کنید که هنگامی که $r=2$ ضرایب چند جمله‌ای تبدیل به ضرایب دو جمله‌ای می‌شوند:

$$\binom{n}{k_1\,k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}=\binom{n}{k_1}.$$

مثال: الف) با کلمه mississippi چند کلمه یازده حرفی می‌توان نوشت؟

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

ب) با حروف همین کلمه، چند کلمه می‌توان نوشت به قسمی که هر ۴ تا i کار هم باشند؟

$$\frac{8!}{1!1!4!2!}$$

مثال: نشان دهید:

$$\binom{n}{k_1\,k_2\cdots k_r}=\binom{n-1}{k_1-1\,k_2\cdots k_r}+\binom{n-1}{k_1\,k_2-1\cdots k_r}+\cdots+\binom{n-1}{k_1\,k_2\cdots k_r-1}.$$

حل: می‌خواهیم n شیء را در r جعبه قرار دهیم بطوری که k_1 شیء در جعبه اول، k_2 شیء در جعبه دوم و ... و k_r شیء در جعبه rام قرار بگیرد. اگر فرض کنیم که شیء اول در جعبه iام قرار گرفته باشد، در آن صورت $n-1$ شیء باقیمانده باید طوری در r جعبه قرار بگیرند که k_1 شیء در جعبه اول و ... و k_i-1 شی در جعبه iام و k_r شی در جعبه rام قرار بگیرند و از آنجا که i می‌تواند هر یک از مقادیر ۱ تا r را قبول کند در نتیجه درستی عبارت را می‌توان نتیجه گرفت.

مثال: بسط دو جمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$(a+b)^n=\binom{n}{n\ 0}a^n+\binom{n}{n-1\,1}a^{n-1}b+\binom{n}{n-2\ 2}a^{n-2}b+\cdots+\binom{n}{0\ n}b^n=\sum_{\substack{k_1,k_2\ge 0\\ k_1+k_2=n}}\binom{n}{k_1\ k_2}a^{k_1}b^{k_2}.$$

نشان دهید در حالت کلی می‌توان گفت:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_r\ge 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}}\binom{n}{k_1\,k_2\cdots k_r}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_r^{k_r}.$$

حل: داریم

$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n=(a_1+a_2+\cdots+a_r)(a_1+a_2+\cdots+a_r)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_r).$$

چون $a_1^{k_1}$ داریم پس از k_1 پرانتز از n پرانتز باید a_1 انتخاب کنیم (یعنی به چند طریق می‌توان k_1 پرانتز از n پرانتز را انتخاب کرد) جواب $\binom{n}{k_1}$ است. حال برای $a_2^{k_2}$ باید k_2 پرانتز از $n-k_1$ پرانتز باقیمانده را انتخاب کرد جواب $\binom{n-k_1}{k_2}$. همین روند را ادامه می‌دهیم لذا داریم:

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}=\binom{n}{k_1\,k_2\cdots k_r}.$$

نتیجه: به ازای هر عدد صحیح مثبت t,n ، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_t^{n_t}$ در بسط $\left(x_1+x_2+\cdots+x_t\right)^n$ برابر است با:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

که در آن n_iها صحیح مثبت هستند و $0 \le n_i \le n$, $n_1 + \cdots + n_t = n$.

مثال: با استفاده از روشهای مختلف نشان دهید $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

حل: روش اول: $\binom{n}{k}$ تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء برابر است با $\binom{n}{n-k}$ تعداد حالات انتخاب نکردن $n-k$ شیء از n شی متمایز است:

$$\frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(n-k-1))}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

روش دوم: ضریب x^k در $(1+x)^n$ برابر است با $\binom{n}{k}$. از طرفی ضریب x^k در $(1+x)^n = x^n(1+\frac{1}{x})^n$ برابر است با ضریب $(\frac{1}{x})^{n-k}$ در $(1+\frac{1}{x})^n$ که مساوی است با $\binom{n}{n-k}$.

مثال: در صف یک سینما n نفر ایستاده‌اند (هیچ دو نفری جای خود را با یکدیگر عوض نمی‌کنند). آنها در k دسته وارد سینما می‌شوند، بطوری که هر دسته حداقل شامل یک نفر باشد. به چند طریق می‌توان آنها را در k دسته تقسیم و به سینما وارد کرد؟ (هر دسته از تعدادی از کسانی که در صف پشت سر هم ایستاده‌اند تشکیل می‌شود)

حل: تعداد راههای انجام این کار برابر است با تعداد راههای قرار گرفتن $k-1$ مانع در $n-1$ فاصله میان n نفر که در یک ردیف هستند. پس جواب برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

مثال: معادله $x_1 + \cdots + x_k = n$ چند جواب در مجموعه اعداد مثبت دارد؟

حل: مانند این است که n نفر در یک ردیف ایستاده‌اند. حال به چند طریق می‌توان آنها را به k دسته تقسیم کرد که حداقل در هر دسته یک نفر باشد. لذا جواب $\binom{n-1}{k-1}$.

مثال: نشان دهید تعداد جوابهای غیر منفی معادله $x_1 + \cdots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

حل:

$$x_1+\cdots+x_k=n \quad x_i\geq 0 \Rightarrow (x_1+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k \quad x_i+1\geq 1$$
$$\Leftrightarrow y_1+\cdots+y_k=n+k \quad y_i\geq 1.$$

لذا با توجه به مثال قبل جواب $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

تمرین: در اتاق انتظار یک دکتر، یک ردیف صندلی n تایی است که k بیمار می‌خواهند در آنجا بنشینند اما به علت مسائل بهداشتی هیچ دو بیماری نباید کنار هم بنشینند. به چند طریق این کار ممکن است؟

مثال: فرض کنید می‌خواهیم از میان n شیء k شیء را انتخاب کرده و هر کدام را با یکی از دو رنگ در دسترس رنگ کنیم. با شمارش تعداد حالتهای این کار ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=2^k\binom{n}{k}.$$

حل: طرف راست: تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء برابر است با $\binom{n}{k}$. حال می‌خواهیم یک دسته شامل k عضو را رنگ کنیم به طوری که برای رنگ آمیزی هر عضو دو حق انتخاب داریم، لذا 2^k حالت داریم. پس جواب کل می‌شود $2^k\binom{n}{k}$.

طرف چپ: مرحله اول: هیچ عضوی از n شیء را انتخاب نمی‌کنیم که رنگ شماره یک را بزنیم. یعنی k شیء از n شیء را انتخاب می‌کنیم که با رنگ شماره دو رنگ آمیزی می‌کنیم. پس $\binom{n}{0}\binom{n}{k}$ حالت داریم.

مرحله دوم: انتخاب یک شیء از n شیء برای رنگ شماره یک و انتخاب $k-1$ شیء از $n-1$ شیء باقیمانده برای رنگ شماره دو. پس $\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$ حالت داریم.

همین روند را ادامه می‌دهیم.

لذا در حالت کلی $\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}$ حالت داریم.

بنابراین برابری صورت مساله ثابت شد.

تمرین: با استفاده از روشهای زیر ثابت کنید $\binom{2n}{n}=\binom{n}{n}^2+\cdots+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{0}^2$.

الف) در نظر گرفتن بسط $(1+x)^{2n}$.

ب) انتخاب n نفر از میان $2n$ نفر که n نفر از آنها زن و n نفر دیگر مرد هستند.

ج) استفاده از مساله مسیر در شبکه راهها.

تمرین: الف) یک گروه $2n$ نفری شامل n مرد و n زن داریم و می‌خواهیم یک زیرمجموعه از آنها انتخاب کنیم بطوری که تعداد مردها و زنها در آن برابر باشد. نشان دهید به $\binom{2n}{n}$ طریق این کار ممکن است.

ب) حال فرض کنید می‌خواهیم در قسمت الف علاوه بر انتخاب زیرمجموعه، یک نماینده مرد و یک نماینده زن برای زیرمجموعه انتخاب کنیم. تعداد راههای این انتخاب را به دو روش زیر بدست آورید:

یا در ابتدا مجموعه را انتخاب کرده و سپس نماینده‌ها را از آن انتخاب کنید و یا ابتدا نماینده‌ها را انتخاب کرده و سپس مابقی زیرمجموعه را انتخاب کنید. آیا می‌توانید اتحاد زیر را نتیجه بگیرید:

$$1^2\binom{n}{0}^2+2^2\binom{n}{1}^2+3^2\binom{n}{2}^2+\cdots+n^2\binom{n}{n}^2=n^2\binom{2n-2}{n-1}.$$

ج) به دو روش مختلف ثابت کنید:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\times 2^{n-1}.$$

فصل دوم

شمارش درختها

در ابتدا برخی از مفاهیم مورد نیاز در گراف را که در این فصل و فصلهای بعدی لازم داریم یادآوری می‌کنیم.

تعریف: گراف G تشکیل شده از مجموعه غیر تهی و متناهی V که آن را مجموعه راسها می‌نامیم و یک مجموعه E که از زیر مجموعه‌های دو عضوی V تشکیل می‌شود. به هر عضو E یک یال و E را مجموعه یالها می‌نامیم.

گرافی را که بین هر دو راس آن یالی وجود داشته باشد را گراف کامل گوئیم و گراف کامل n راسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف: فرض کنیم G یک گراف باشد. به ازای هر راسی مانند v، درجه v که با نماد $d(v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با تعداد یالهایی از G که از راس v می‌گذرد.

نکته: در گراف $G=(V,E)$ داریم $\sum_{v\in V} d(v)=2|E|$.

گراف دو بخشی: گراف $G=(V,E)$ را دو بخشی گوئیم، هرگاه $V=V_1\cup V_2$، $V_1\cap V_2=\varnothing$ و هر یال G به صورت $\{a,b\}$ باشد که در آن $a\in V_1$ و $b\in V_2$.

اگر هر راس V_1 به هر راس V_2 وصل شده باشد یگ گراف دوبخشی کامل خواهیم داشت. در این صورت اگر $|V_1|=m,|V_2|=n$ این گراف را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: گرافی را که بین هر دو راس آن مسیری وجود داشته باشد، همبند گوئیم.

درخت: گراف همبند بدون دور را یک درخت گوئیم و با نماد T نشان می‌دهیم.

نکته: فرض کنیم $T=(V,E)$ یک درخت باشد. آنگاه داریم $|V|=|E|+1$.

مثال: چند درخت روی مجموعه رئوس $\{1,2,3,4,5\}$ می‌توان ایجاد کرد بطوری که درجه‌ی رئوس آن بصورت زیر باشد:

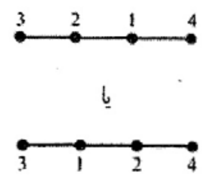
$$d(1)=3 \;\; d(2)=2 \;\; d(3)=1 \;\; d(4)=1 \;\; d(5)=1.$$

حل: تنها سه درخت با این مشخصات وجود دارد. برای پیدا کردن آنها راس ۵ را در نظر بگیرید. چون $d(5)=1$ در نتیجه در درخت مورد نظر این راس با راس دیگری مثل i مجاور است. بنابراین می‌توانیم برای تمام حالتهای ممکن i ($1\le i\le 4$) راس ۵ و یال $5i$ را حذف کرده و تعداد درختهای موجود را پیدا می‌کنیم.

$i=۱$

مجموعهٔ رئوس = $\{۱,۲,۳,۴\}$

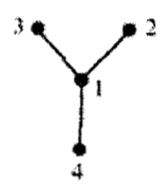
$d(۱)=۲, d(۲)=۲, d(۳)=۱, d(۴)=۱$



$i=۲$

مجموعهٔ رئوس = $\{۱,۲,۳,۴\}$

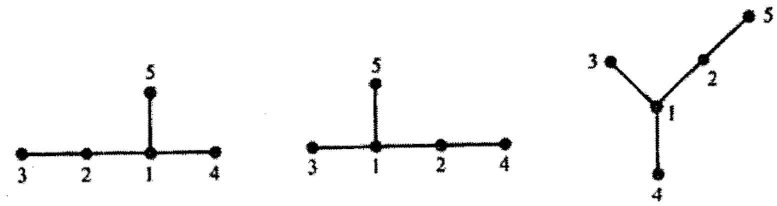
$d(۱)=۳, d(۲)=۱, d(۳)=۱, d(۴)=۱$



فرض کنید $i=3$، مجموعه رئوس برابر $\{1,2,3,4\}$ و $d(1)=3 \; d(2)=2 \; d(3)=0 \; d(4)=1$. در این صورت چنین درختی وجود ندارد.

حال فرض کنید $i=4$، مجموعه رئوس برابر $\{1,2,3,4\}$ و $d(1)=3$ $d(2)=2$ $d(3)=1$ $d(4)=0$. در این صورت چنین درختی وجود ندارد.

از روی این درختها با اضافه کردن راس و یال حذف شده به درخت اولیه می‌رسیم.



قضیه: فرض کنید $n \geq 2$ و $d_1, d_2, ..., d_n$، n عدد طبیعی با مجموع $2n-2$ باشند. در این صورت تعداد درختهای با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ و با درجه رئوس $d_1, d_2, ..., d_n$ برابر است با:

$$\binom{n-2}{d_1-1 \cdots d_n-1}.$$

اثبات: به استقراء بر روی n اثبات می‌کنیم. شروع استقراء $n=2$. در این حالت $d_1=d_2=1$. تنها یک درخت با این شرایط وجود دارد و ضریب چند جمله‌ای داده شده نیز برابر ۱ می‌باشد.

$$\binom{0}{0\ 0}=\frac{0!}{0!0!}=\frac{1}{1}=1$$

حال فرض کنید $n>2$ و $d_1, d_2, ..., d_n$، n عدد طبیعی با مجموع $2n-2$ باشند و قضیه برای کمتر از n اثبات شده است. حال چون مجموع n عدد $d_1, d_2, ..., d_n$ کمتر از $2n$ است پس حداقل یکی از آنها به عنوان مثال d_n برابر یک است. بنابراین راس n در درخت مورد نظر به یک راس دیگر مانند i وصل است. حال راس n و یال ni را از گراف حذف می‌کنیم. در نتیجه یک درخت با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n-1\}$ و دنباله درجات رئوس $d_1, d_2, ..., d_i-1, ..., d_{n-1}$ بدست می‌آید و چون i هر مقداری بین یک تا $n-1$ را می‌تواند قبول کند می‌توانیم نتیجه بگیریم:

تعداد درختهای روی مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ و با درجات $d_1, d_2, ..., d_n$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}$$ (تعداد درختهای روی مجموعه رئوس $\{1,2,...,n-1\}$ و با درجات $d_1, d_2, ..., d_i-1, ..., d_{n-1}$)

چند درخت روی مجموعه رئوس $\{1,2,...,n-1\}$ و با درجات رئوس $d_1,d_2,...,d_i-1,...,d_{n-1}$ وجود دارد؟ چون حاصل جمع این درجات برابر $2(n-1)-2$ می‌باشد، در نتیجه با توجه به فرض استقراء می‌توان نتیجه گرفت که تعداد درختها برابر

$$\binom{(n-1)-2}{d_1-1\cdots d_i-2\cdots d_{n-1}-1}$$

می‌باشد. بنابراین

تعداد درختهای روی مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ و با درجات $d_1,d_2,...,d_n$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-3}{d_1-1\cdots d_i-2\cdots d_{n-1}-1}$$

اما طبق خاصیت جمع ضرایب چند جمله‌ای این حاصل جمع برابر است با:

$$\binom{n-2}{d_1-1\ d_2-1\cdots d_{n-1}-1}=\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}=\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!\underbrace{(d_n-1)!}_{1}}$$

و این مقدار همان عدد مورد نظر در استقراء است.

قضیه (کیلی): برای $n\geq 2$، تعداد درختهایی که مجموعه رئوس آنها $\{1,2,...,n\}$ می‌باشد برابر n^{n-2} می‌باشد.

اثبات: می‌دانیم

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{n-2}=\sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=n-2}}\binom{n-2}{k_1\ k_2\ldots k_n}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_n^{k_n}$$
$$=\sum_{\substack{d_1,...,d_n\geq 1\\ (d_1-1)+\cdots+(d_n-1)=n-2}}\binom{n-2}{d_1-1\cdots d_n-1}a_1^{d_1-1}a_2^{d_2-1}\ldots a_n^{d_n-1}.$$

در عبارت فوق تمام a_iها را برابر ۱ قرار می‌دهیم. داریم:

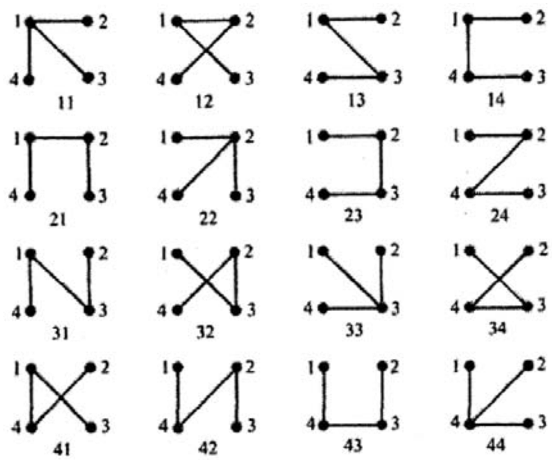
$$n^{n-2}=(1+1+\cdots+1)^{n-2}=\sum_{\substack{d_1,...,d_n\geq 1\\ (d_1-1)+\cdots+(d_n-1)=n-2}}\binom{n-2}{d_1-1\cdots d_n-1}.$$

$= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_n\ge 1\\ d_1+\cdots+d_n=2n-2}}$ (تعداد درختهایی با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ با درجات $d_1,d_2,...,d_n$

= $\{1,2,...,n\}$ تعداد درختهایی روی مجموعه رئوس =

بدین ترتیب قضیه کیلی اثبات می‌شود.

مثال: در اینجا ۱۶ درخت روی مجموعه رئوس $\{1,2,3,4\}$ وجود دارد. همچنین ۱۶ زوج از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ می‌توان انتخاب کرد. بنابراین می‌توان به هر درخت یکی از این زوج اعداد را نسبت داد.



در الگوریتم پروفر که در ادامه می‌آوریم به هر درخت با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ دقیقا یک کد $n-2$ رقمی نسبت می‌دهد.

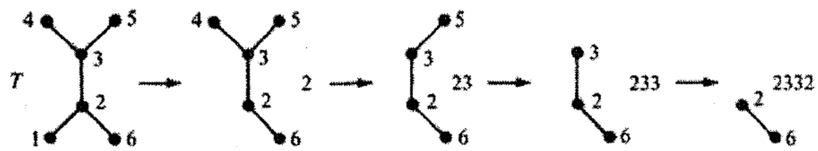
الگوریتم: یک درخت با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ داریم که می‌خواهیم کد پروفر مربوط به آن را پیدا کنیم.

۱) کوچکترین راسی را که درجه‌ی آن یک است را پیدا کنید. فرض کنید این راس v و راس مجاور آن w باشد.
۲) w را به عنوان رقم بدست آمده برای کد بنویسید و راس v و یال vw را حذف کنید.
۳) اگر از درخت بیش از یک یال باقی مانده به مرحله ۱ برگردید. در غیر این صورت به پایان الگوریتم رسیده‌اید.

چون درخت در ابتدا n راس دارد و الگوریتم تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تنها دو راس باقی بماند و در عین حال در هر مرحله شماره راس حذف شده یادداشت می‌شود، بنابراین کد بدست آمده باید یک کد $n-2$ رقمی از اعداد $\{1,2,...,n\}$ باشد. (ممکن است $n>9$ باشد، در این صورت کد ما بیش از $n-2$ رقم

می‌شود. برای راحتی کار هر عدد کوچکتر یا مساوی n که در کد ظاهر می‌شود را به عنوان یک رقم در نظر می‌گیریم)

مثال: الگوریتم پروفر را برای درخت زیر اعمال کنید:

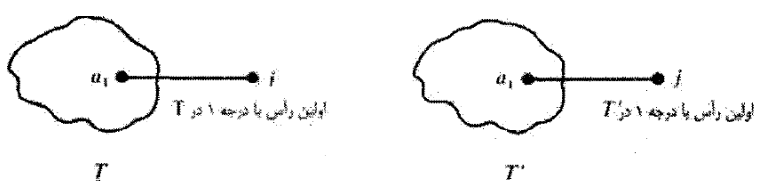


دقت کنید که در مثال داده شده هر راس v در کد ایجاد شده $d(v)-1$ مرتبه ظاهر شده است. زیرا هر بار که شماره‌ی آن در کد نوشته می‌شود یک راس مجاور آن حذف و مسلماً یک واحد از درجه آن کم می‌شود تا جایی که درجه‌ی آن به یک برسد. این موضوع برای همه‌ی درختها صادق است.

قضیه: هر لیست $n-2$ رقمی که از اعداد $\{1,2,...,n\}$ تشکیل شده است (تکرار مجاز است) یک کد پروفر مربوط به یک درخت از مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ می‌باشد.

اثبات: n^{n-2} درخت روی مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$ وجود دارد و ما اثبات کردیم که به هر درخت دقیقاً یک کد می‌توان نسبت داد. حال اگر اثبات کنیم که به هیچ دو درخت یک کد یکسان نسبت نداده‌ایم، نتیجه می‌شود که یک تناظر یک به یکی بین کدها و درخت‌ها وجود دارد.

فرض کنید T و T' دو درخت باشند که به هر دو یک کد نسبت داده باشیم: $a_1a_2...a_{n-2}$. حال می‌خواهیم اثبات کنیم که $T=T'$. هر راس v در کد $d(v)-1$ بار ظاهر می‌شود و چون در هر دو درخت به کد یکسانی رسیده‌ایم درنتیجه باید درجه‌ی تمامی رئوس در دو درخت یکسان باشند و در ضمن چون رقم اول کد برای هر دو درخت a_1 می‌باشد، پس باید حالت زیر اتفاق بیفتد:



ما می‌خواهیم نشان دهیم $i=j$. اگر اینگونه نباشد فرض می‌کنیم $i<j$. چون طبق الگوریتم راس j باید کوچکترین راس با درجه ۱ در درخت T' باشد، بنابراین درجه راس i (با توجه به اینکه i از j کوچکتر است) باید بیش از یک باشد و چون درجه این راس در T برابر یک است به تناقض می‌رس‌ی‌م. در نتیجه باید $i=j$ باشد. حال الگوریتم با حذف یال a_1i و راس i ادامه پیدا می‌کند. برای ادامه‌ی الگوریتم نیز همین استدلال را می‌توانیم بیاوریم. بدین ترتیب اثبات می‌شود که $T=T'$.

در ادامه با کمک کد پروفر می‌خواهیم درخت مربوطه را بیابیم.

الگوریتم: یک لیست $a_1a_2..a_{n-2}$ از اعداد $\{1,2,...,n\}$ داده شده است.

الف) سه لیست از اعداد را در نظر بگیرید. لیست اول (کد پروفر) $a_1a_2..a_{n-2}$، لیست دوم (مجموعه رئوس) $1,2,...,n$ می‌باشد و لیست سوم (مجموعه‌ی یالها) که در ابتدا خالی است.

ب) کوچکترین عددی را که در لیست دوم آمده است ولی در لیست اول نیامده است پیدا کنید (مثل i) اولین عدد لیست اول را حذف کنید (مثل j). عدد i را از لیست دوم حذف کنید و یال ij را به لیست سوم اضافه کنید.

ج) اگر هنوز عددی در لیست اول باقی مانده بود به مرحله ۲ بروید در غیر این صورت اگر لیست اول خالی باشد، لیست دوم باید تنها شامل دو عدد باشد. این دو عدد را به عنوان آخرین یال به لیست سوم اضافه کنید. اکنون به پایان الگوریتم رسیده‌اید.

مثال: درخت مربوط به کد پروفر ۲۳۳۲ را بیابید.

حل:

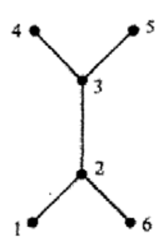
یال ۱۲ را به لیست سوم اضافه می‌کنیم ۱۲۳۴۵۶ **۲۳۳۲**

یال ۳۴ را به لیست سوم اضافه می‌کنیم ۲۳۴۵۶ **۳۳۲**

یال ۳۵ را به لیست سوم اضافه می‌کنیم ۲۳۵۶ **۳۲**

یال ۲۳ را به لیست سوم اضافه می‌کنیم ۲۳۶ **۲**

یال ۲۶ را به لیست سوم اضافه می‌کنیم ۲۶ -



T

مثال: الف) گراف کامل K_n از چند یال تشکیل شده است؟

ب) چند گراف با دقیقاً m یال با مجموعه رئوس $\{1,...,n\}$ وجود دارد؟

ج) در کل چند گراف با مجموعه رئوس $\{1,...,n\}$ وجود دارد؟

حل: الف) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ب) به چند طریق می‌توان m یال از مجموعه یالهای K_n انتخاب کرد. جواب: $\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m}$

ج) مجموعه یالهای K_n چند زیر مجموعه دارد. جواب: $2^{\binom{n}{2}}$

تمرین: برای $n \geq 2$ نشان دهید چه تعداد از n^{n-2} درخت با مجموعه رئوس $\{1,2,...,n\}$

الف) یک راس از درجه $n-1$ دارند؟

ب) یک راس از درجه $n-2$ دارند؟

ج) در آنها همه رئوس از درجه ۱ یا ۲ هستند؟

د) در آنها درجه‌ی راس ۱ برابر یک است؟

در ضمن نشان دهید نسبت تعداد درختهایی که در آنها $d(1)=1$ به تعداد کل n^{n-2} درخت وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند برابر $\frac{1}{e}$ است.

فصل سوم

قضیه‌ی ازدواج

در این فصل حول قضیه‌ای که توسط فیلیپ هال در سال ۱۹۳۵ ارائه شد بحث خواهیم کرد.

مثال: در یک گروه ۷ پسر $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7$ و ۶ دختر G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6 وجود دارند بطوری که:

دختر G_1 پسرهای B_1,B_2,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_2پسرهای B_2,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_3 پسرهای B_3,B_5,B_7 را می‌شناسد.

دختر G_4 پسرهای B_1,B_2 را می‌شناسد.

دختر G_5 پسرهای B_1,B_2,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_6 پسرهای B_4,B_5,B_6 را می‌شناسد.

آیا این ممکن است که هر دختر با یکی از پسرهایی که می‌شناسد ازدواج کند؟

حل: این کار ممکن نیست. زیرا چهار دختر G_1,G_2,G_4,G_5 در مجموع تنها سه پسر B_1,B_2,B_3 را می‌شناسد و واضح است که نمی‌توان برای این چهار دختر از بین این سه نفر همسری انتخاب کرد.

بنابراین برای این که بتوانیم برای هر دختری یک پسر برای ازدواج با او انتخاب کنیم باید هر زیرمجموعه r تایی از دخترها که انتخاب می‌کنیم، حداقل r پسر را بشناسند. در واقع برای هر دختری می‌توان یک همسر انتخاب کرد اگر و تنها اگر شرط بالا برقرار باشد.

مثال: فرض کنید:

دختر G_1 پسرهای B_1,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_2پسرهای B_2,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_3 پسرهای B_1,B_3,B_4,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_4 پسرهای B_2,B_4,B_6,B_7 را می‌شناسد.

دختر G_5 پسرهای B_1,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_6 پسرهای B_1,B_2 را می‌شناسد.

در این حالت هر مجموعه‌ای از دختران بین خودشان حداقل به تعداد خودشان از پسرها را می‌شناسند. به عنوان مثال دخترهای $\{G_1,G_2,G_6\}$ پسرهای $\{B_1,B_2,B_3\}$ را می‌شناسند. آیا می‌توانیم برای هر دختر یک همسر انتخاب کنیم؟

حل: ما کار را با انتخاب همسر برای هر یک از دخترها شروع می‌کنیم تا به دختری برسیم که دیگر نتوانیم پسری برای او انتخاب کنیم. به عنوان مثال G_1 می‌تواند با B_1 ازدواج کند، G_2 با B_2، G_3 با B_3، G_4 با B_4، G_5 با B_5. امّا در آن صورت چون دختر G_6 فقط پسرهای B_1,B_2 را می‌شناسد که برای آنها قبلاً همسری انتخاب شده است، چگونه می‌توانیم برای او یک همسر انتخاب کنیم؟

$$
\begin{aligned}
G_1 &\to B_1\\
G_2 &\to B_2\\
G_3 &\to B_3\\
G_4 &\to B_4\\
G_5 &\to B_5\\
G_6 &\to ?
\end{aligned}
$$

دختر G_6 یک میهمانی بر پا می‌کند. او تمام پسرانی که می‌شناسد دعوت میکند. آنها نیز همسران خود را به میهمانی دعوت می‌کنند. این دخترها نیز پسرهایی را دعوت می‌کنند که آنها را می‌شناسند و تا به حال دعوت نشده‌اند. این پسرها هم به نوبه‌ی خود همسران خود را دعوت می‌کنند و ... . این روند ادامه پیدا می‌کند تا جایی که پسری (مثل B_k) دعوت شود که هنوز همسری نداشته باشد. در این مثال داریم:

$$\{G_6\} \to \{B_1,B_2\} \to \{G_1,G_2\} \to \{B_3\} \to \{G_3\} \to \{B_4,B_5\} \to \{G_4,G_5\} \to \{B_6,B_7\}$$

در این مرحله توقف می‌کنیم. زیرا B_7 هنوز همسری انتخاب نکرده است و به مهمانی دعوت شده است. حال از میان دعوت شدگان زوجهای زیر را تشکیل می‌دهیم:

پسر B_7 با دختری که او را دعوت کرده است G_4، همسر این دختر B_4 با دختری که او را دعوت کرده است G_3، همسر این دختر B_3 با دختری که او را دعوت کرده است G_1، و نهایتاً همسر او B_1 با دختر G_6 که او را دعوت کرده است.

$$\underbrace{\{G_6\} \to \{B_1, B_2\}} \to \underbrace{\{G_1, G_2\} \to \{B_3\}} \to \underbrace{\{G_3\} \to \{B_4, B_5\}} \to \underbrace{\{G_4, G_5\} \to \{B_6, B_7\}}$$

در نتیجه توانسته‌ایم زوجهایی تشکیل دهیم که هر یک از دخترها در یک زوج با پسری که می‌شناسد قرار داشته باشد. یعنی روشی برای ازدواج دختران و پسران پیدا کرده‌ایم که هر دختری بتواند با پسری که می‌شناسد ازدواج کند.

$$\begin{array}{l} G_1 \to B_3 \\ G_2 \to B_2 \\ G_3 \to B_4 \\ G_4 \to B_7 \\ G_5 \to B_5 \\ G_6 \to B_1 \end{array}$$

قضیه هال- صورت ازدواج: یک مجموعه از دختران می‌توانند از بین مجموعه‌ای از پسران که هر یک بعضی از آنها را می‌شناسد، برای خود همسری پیدا کنند اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه r عضوی از دختران با حداقل r پسر آشنا باشند.

در ادامه صورتهای دیگری از قضیه‌ی هال را می‌آوریم:

یک خانواده از مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم: $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$. یک مجموعه نماینده‌های متمایز از A یک مجموعه X است بطوری که $|X| = n$ و اعضای آن را بتوان طوری در یک ردیف قرار داد که اگر $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ در آن صورت $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$. به بیان دیگر n عضو مجموعه X نماینده‌ی n مجموعه‌ی A_1 تا A_n می‌باشند.

مثال: $A = (A_1, A_2, ..., A_6)$ را به صورت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{1,3\} \quad A_2 = \{2,3\} \quad A_3 = \{1,3,4,5\}$$
$$A_4 = \{2,4,6,7\} \quad A_5 = \{1,5\} \quad A_6 = \{1,2\}$$

عدد ۳ را می‌توان نماینده A_1 در نظر گرفت، ۲ را نماینده A_2، ۷ را نماینده A_4، ۵ را نماینده A_5 و ۱ را نماینده A_6.

اما برای خانواده $A=(A_1,A_2,...,A_6)$ که بصورت زیر داده شده‌اند:

$$A_1=\{1,2,3\} \quad A_2=\{2,3\} \quad A_3=\{3,5,7\}$$
$$A_4=\{1,2\} \quad A_5=\{1,2,3\} \quad A_6=\{4,5,6\}$$

مجموعه‌ی نمایندگان متمایزی نمی‌توان انتخاب کرد. زیرا برای مجموعه‌های A_1,A_2,A_4,A_5 داریم:

$$A_1\cup A_2\cup A_4\cup A_5=\{1,2,3\}$$

در نتیجه ممکن نیست بتوان برای این ۴ مجموعه، ۴ نماینده‌ی متمایز انتخاب کرد.

در حالت کلی واضح است که برای آنکه امیدی به پیدا کردن یک مجموعه نماینده‌های متمایز از خانواده $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ داشته باشیم باید اجتماع هر r تایی از آنها تعداد اعضایی بیش‌تر یا مساوی r داشته باشند. یعنی:

$$\left|\bigcup_{i\in\{i_1,...,i_r\}} A_i\right| \geq |\{i_1,...,i_r\}|$$

و بطور خلاصه می‌توان نوشت: $|\bigcup_{i\in I} A_i| \geq |I|$ که I زیر مجموعه‌ای از $\{1,2,...,n\}$ می‌باشد.

نتیجه (قضیه هال- صورت مجموعه‌ای): $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ یک مجموعه نماینده‌های متمایز دارد اگر و تنها اگر برای هر $I\subseteq\{1,2,...,n\}$، داشته باشیم $|\bigcup_{i\in I} A_i| \geq |I|$.

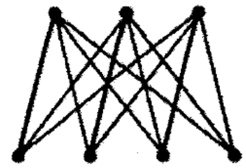
اثبات: n دختر $1,2,...,n$ را در نظر بگیرید و برای هر $1\leq i\leq n$، A_i را مجموعه پسرانی در نظر بگیرید که دختر i، آنها را می‌شناسد. حال سعی کنید قضیه‌ی هال را برای دختران و پسران در نظر بگیرید:

A یک مجموعه‌ی نماینده متمایز دارد اگر و تنها اگر دخترهای $1,2,...,n$ بتوانند از میان پسرهایی که می‌شناسند برای خود همسری پیدا کنند اگر و تنها اگر هر مجموعه‌ی I از دختران حداقل $|I|$ پسر را بشناسند اگر و تنها اگر برای هر I، مجموعه‌ی $\bigcup_{i\in I} A_i$ حداقل $|I|$ عضو داشته باشد اگر و تنها اگر برای هر $I\subseteq\{1,2,...,n\}$، داشته باشیم $|\bigcup_{i\in I} A_i| \geq |I|$.

حال می‌خواهیم صورت گرافی قضیه‌ی هال را بیان کنیم.

تعریف: گراف دوبخشی $G=(V,E)$ با افراز $V=V_1\cup V_2$ را در نظر بگیرید. یک تطابق از V_1 به V_2 یک مجموعه شامل $|V_1|$ یال می‌باشد که هیچ دو یالی راس مشترک نداشته باشند. در واقع در تطابق ما یک تابع یک به یک از V_1 به V_2 داریم.

تطابقی از V_1 به V_2 وجود ندارد.



یالهای پررنگ یک تطابق در $K_{3,4}$ هستند.

یالهای پررنگ یک تطابق از V_1 به V_2 می‌باشند.

نتیجه (قضیه‌ی هال- صورت گرافی): گراف دوبخشی $G=(V,E)$ با افراز $V=V_1\cup V_2$ را در نظر بگیرید. این گراف شامل یک تطابق از V_1 به V_2 خواهد بود اگر و تنها اگر هر مجموعه‌ی I از رئوس V_1 به حداقل $|I|$ راس از رئوس V_2 وصل باشند.

نتیجه (قضیه‌هال- صورت ماتریسی): ماتریس M یک ماتریس $m\times n$ با درایه‌های صفر و یک می‌باشد. در این صورت در هر سطر آن یک عدد ۱ وجود دارد و در هیچ ستونی بیش از یک ۱ وجود ندارد اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی r تایی از سطرها تعداد ستونهایی که ۱های این سطرها در آنها قرار دارند، حداقل برابر r باشد.

مثال: دختر G_1 پسرهای B_1,B_2,B_7 را می‌شناسد.

دختر G_2 پسرهای B_5,B_6,B_8 را می‌شناسد.

دختر G_3 پسرهای B_1,B_3,B_7 را می‌شناسد.

دختر G_4 پسرهای B_1,B_3,B_4,B_7 را می‌شناسد.

دختر G_5 پسرهای B_1,B_2,B_6,B_8 را می‌شناسد.

واضح است که انتخاب همسر برای این دختران از میان پسرهایی که می‌شناسند ممکن است. مثلاً:

$$G_1\to B_7 \quad G_2\to B_5 \quad G_3\to B_1 \quad G_4\to B_3 \quad G_5\to B_8$$

حال آیا ممکن است که دختران بتوانند برای خود شوهر انتخاب کنند بطوری که حتماً پسرهای B_5,B_6,B_7,B_8 انتخاب شوند؟ خیر. زیرا برای مثال دختران G_1,G_3,G_4 در بین خود پسرهای B_1,B_2,B_3,B_4,B_7 را می‌شناسند و بنابراین این سه دختر تنها می‌توانند با یکی از آن پسرهای مورد نظر یعنی B_7 ازدواج کنند. در نتیجه تنها ۲ دختر دیگر باقی می‌ماند (G_2,G_5) که با ۳ پسر مود نظر باقیمانده ازدواج کنند (B_5,B_6,B_8) که این امر ممکن نیست.

نتیجه: برای پیدا کردن همسر برای مجموعه‌ای از دختران به طوری که مجموعه P از پسرها حتماً به عنوان همسر تعدادی از دختران انتخاب شوند باید برای هر زیر مجموعه‌ی I از دختران داشته باشیم:

تعداد پسرهایی از P که دخترهای عضو I آنها را نمی‌شناسند

$$\leq$$

تعداد دخترهایی که عضو I نیستند

تمرین: در کدام یک از حالات زیر دخترها می‌توانند از میان پسرهایی که آنها را می‌شناسند، همسری برای خود پیدا کنند؟

الف) دختر G_1 پسرهای B_1,B_2 را می‌شناسد.

دختر G_2 پسرهای B_1,B_2,B_4 را می‌شناسد.

دختر G_3 پسرهای B_1,B_2,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_4 پسرهای B_1,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_5 پسرهای B_4,B_5,B_6 را می‌شناسد.

دختر G_6 پسرهای B_1,B_2,B_5 را می‌شناسد.

ب) دختر G_1 پسرهای B_1,B_3,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_2 پسرهای B_1,B_3 را می‌شناسد.

دختر G_3 پسرهای B_1,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_4 پسرهای B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_5 پسرهای B_3,B_5 را می‌شناسد.

دختر G_6 پسرهای B_2,B_4,B_6,B_7 را می‌شناسد.

مثال: فرض کنید $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها است بطوری که هر مجموعه شامل حداقل d ($d>0$) عضو است و هیچ عضوی در بیش از d مجموعه ظاهر نشده است. نشان دهید A یک مجموعه نماینده‌های متمایز دارد.

حل: r مجموعه از خانواده‌ی A انتخاب می‌کنیم و اعضای آنها را با در نظر گرفتن اعضای تکراری در یک لیست می‌نویسیم. این لیست شامل حداقل rd عضو (نه لزوماً غیر تکراری) خواهد بود. اگر اجتماع r مجموعه مفروض کمتر از r عضو متمایز باشد (یعنی حداکثر $r-1$ عضو متمایز داشته باشد)، آنگاه لیست باید شامل حداکثر $(r-1)d$ عضو باشد (زیرا هیچ عضوی در بیش از d مجموعه ظاهر نشده است) که می‌دانیم درست نیست زیرا شامل حداقل rd است.

مثال: گراف دو بخشی $G=(V_1,V_2)$ با افراز $V=V_1\cup V_2$ را در نظر بگیرید که درجه هر راس در V_1 حداقل برابر d ($d>0$) است و درجه هر راس در V_2 برابر d یا کمتر است. نشان دهید که گراف G شامل یک تطابق از V_1 به V_2 است.

حل: باید نشان دهیم هر مجموعه‌ی I از رئوس V_1 به حداقل $|I|$ راس از رئوس V_2 وصل می‌باشند. $I\subseteq V_1$ را در نظر می‌گیریم. هر راس موجود در I درجه‌اش حداقل برابر d است. اگر راسهای مجاور به رئوس I را با تکرار بنویسیم، یک لیست با حداقل $d|I|$ عضو ایجاد می‌شود. حال اگر مجموعه I با حداکثر $|I|-1$ راس از رئوس V_2 مجاور باشد، چون درجه هر راس در V_2 نیز حداکثر d است پس لیست ما حداکثر $(|I|-1)d$ عضو خواهد بود که تناقض است.

فصل چهارم

سه اصل بنیادی

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر در n لانه منزل کنند و $m>n$، آنگاه حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یا بیشتری کبوتر خواهد بود.

در حالت کلی اگر $kn+1$ کبوتر یا بیشتر، n لانه را اشغال کنند، آنگاه در حداقل یکی از لانه‌ها بیش از k کبوتر (حداقل $k+1$ کبوتر) خواهد بود.

مثال: در جعبه‌ای ۸ کتاب ریاضی، ۱۷ کتاب کامپیوتر، ۶ کتاب فیزیک، ۱۲ کتاب فارسی و ۲۰ کتاب داستان وجود دارند. حداقل چند کتاب برداریم تا مطمئن باشیم که حداقل:

الف) ۵ کتاب هم موضوع ب) ۷ کتاب هم موضوع ج) ۹ کتاب هم موضوع د) ۱۷ کتاب هم موضوع

حل: موضوع کتابها را لانه کبوترها و کتابها را کبوترها در نظر می‌گیریم.

اگر حداقل $kn+1=5k+1$ کبوتر، این $n=5$ لانه را اشغال کنند، آنگاه در یکی از لانه‌ها حداقل $k+1$ کبوتر وجود دارد.

الف) $k+1=5$ لذا $k=4$. پس حداقل باید $5k+1=21$ کتاب از جعبه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم که حداقل ۵ کتاب از یک موضوع از جعبه بیرون آورده‌ایم.

ب) $6+6+6+6+6+1=31$. پس حداقل ۳۱ کتاب باید از جعبه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم که حداقل ۷ کتاب از یک موضوع است.

ج) $8+8+6+8+8+1=39$.

د) $8+16+6+12+16+1=59$.

مثال: ۱۰ عدد صحیح و مثبت کوچکتر از ۱۰۷ داده شده است. نشان دهید دو زیرمجموعه‌ی مجزا از این اعداد وجود دارد که حاصل جمع اعضای این دو مجموعه با هم برابر باشد.

حل: بزرگترین اعدادی که ممکن است داده شده باشند $97,98,...,106$ می‌باشند که حاصل جمع آنها برابر ۱۰۱۵ می‌باشد. بنابراین تعدادی جعبه با شماره‌های صفر تا ۱۰۱۵ در نظر می‌گیریم.

$$\underbrace{\square}_{0}\ \underbrace{\square}_{1}\ \underbrace{\square}_{2}\underbrace{\square}_{3}\cdots\ \underbrace{\square}_{1014}\ \underbrace{\square}_{1015}$$

همانطور که می‌دانید تعداد تمام زیرمجموعه‌های این مجموعه ۱۰ عضوی برابر است با $1024 = 2^{10}$. فرض کنید هر زیرمجموعه روی یک کاغذ نوشته شده و در جعبه‌ای قرار گرفته که حاصل جمع اعضای آن برابر شماره جعبه می‌باشد. بنابراین ۱۰۲۴ کاغذ در ۱۰۱۶ جعبه قرار گرفته اند که طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یک جعبه بیش از یک کاغذ قرار دارد و این بدین معنی است که دو زیرمجموعه دارای حاصل جمعی برابر هستند. البته در این حالت ممکن است این دو زیرمجموعه با هم اشتراک داشته باشند. ولی با حذف اعضای مشترک آنها، از هر یک از آنها به دو زیرمجموعه جدید می‌رسیم که حاصل جمعی برابر دارند.
بنابراین اگر از جعبه شماره صفر شروع کرده و به ترتیب به طور صعودی به جعبه‌ها نگاه کنیم اولین جعبه‌ای که بیش از یک کاغذ در آن باشد، شامل دو زیرمجموعه با مجموع اعضای برابر خواهد بود. حال با حذف اعضای مشترک آنها، از هر یک از آنها به دو زیرمجموعه مجزا می‌رسیم که حاصل جمعی برابر دارند.

مثال: در یک جمع چند نفر با هم دست داده‌اند. (البته هیچ دو نفری با هم دو بار دست نداده‌اند و هیچ کس هم با خودش دست نداده است) ثابت کنید در این جمع حداقل ۲ نفر وجود دارند که به تعداد مساوی دست داده باشند.

حل: فرض کنید n نفر در این جمع بوده‌اند که بعضی از آنها با بعضی دیگر دست داده‌اند. بنابراین تعداد دست دادنهای هر نفر بین صفر تا $n-1$ خواهد بود. تعدادی جعبه در نظر بگیرید و آنها را با اعداد $0,1,...,n-1$ شماره‌گذاری کنید. نام هر شخص را روی یک تکه کاغذ نوشته و آن را در جعبه‌ای قرار می‌دهیم که شماره‌ی آن برابر تعداد دست دادنهای آن شخص باشد.

$$\underbrace{\square}_{0}\ \underbrace{\square}_{1}\ \underbrace{\square}_{2}\cdots\ \underbrace{\square}_{n-2}\ \underbrace{\square}_{n-1}$$

فرض کنید در هیچ خانه‌ای بیش از یک کاغذ وجود نداشته باشد و دقیقاً یک کاغذ وجود داشته باشد (زیرا تعداد خانه‌ها و کاغذها با هم برابر است) یعنی هم در خانه‌ی شماره صفر و هم در خانه‌ی شماره $n-1$ یک کاغذ داشته باشیم. به عبارتی دیگر باید یک نفر باشد که با هیچ کسی دست نداده باشد و از طرفی یک نفر باشد که با همه دست داده باشد. ولی این امر ممکن نیست. بنابراین حداقل یکی از این دو خانه خالی است و با این فرض طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از خانه‌ها بیش از یک کاغذ وجود دارد و این بیانگر وجود حداقل دو نفر با تعداد دست دادنهای برابر است.

مثال: نشان دهید اگر n عدد صحیح مثبت داشته باشیم، زیر مجموعه‌ای غیر تهی از آن وجود دارد که مجموع اعضای آن بر n قابل قسمت باشد.

حل: اعداد را برابر $a_1, a_2, ..., a_n$ قرار دهید و n خانه زیر را در نظر بگیرید:

$$\underbrace{\square}_{0}\ \underbrace{\square}_{1}\ \underbrace{\square}_{2}\ \cdots\ \underbrace{\square}_{n-2}\ \underbrace{\square}_{n-1}$$

n زیرمجموعه‌ی $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, ..., \{a_1, ..., a_n\}$ را در نظر بگیرید. هر کدام را در خانه‌ای که شماره‌ی آن برابر باقیمانده‌ی تقسیم حاصل جمع اعضای زیرمجموعه بر n می‌باشد، قرار دهید. اگر در هر خانه دقیقاً یک زیرمجموعه قرار بگیرد، پس در خانه شماره صفر نیز یک زیرمجموعه قرار گرفته که به معنی این است که حاصل جمع اعضای این زیرمجموعه بر n بخش‌پذیر است. در غیر این‌صورت باید طبق اصل لانه کبوتری دو زیرمجموعه در یک خانه قرار گرفته باشند. فرض کنیم دو زیرمجموعه‌ی $\{a_1, ..., a_r\}$ و $\{a_1, ..., a_s\}$ که $r < s$ در یک خانه قرار گرفته باشند. لذا

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + \cdots + a_r = nk + p \\ a_1 + \cdots + a_s = nl + p \end{array}\right\} \overset{r<s}{\Rightarrow} \underbrace{a_1 + \cdots + a_r}_{nk+p} + a_{r+1} + \cdots + a_s = nl + p \Rightarrow a_{r+1} + \cdots + a_s = n(l - k).$$

بنابراین حاصل جمع اعضای زیرمجموعه‌ی $\{a_{r+1}, ..., a_s\}$ بر n بخش‌پذیر است.

اصل همخوانی: به طور کلی فرض کنید در ابتدا در وضعیت S با ویژگی P هستیم و در هر مرحله از وضعیتی به وضعیت دیگر برویم بطوری که ویژگی P حفظ شود، در این صورت گوئیم اصل همخوانی برقرار است.

مثال: فرض کنید در ابتدا عدد ۸ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم اعداد ۳۳ یا ۱۲ را به عددمان اضافه کنیم. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان با تعدادی مرحله به عدد ۱۳۹۵ رسید یا خیر.

حل: در ابتدا عدد ما به صورت $3k+2$ است. در هر مرحله یک عدد مضرب ۳ به آن اضافه می‌شود پس همواره عدد ما در هر مرحله به صورت $3k+2$ باقی می‌ماند، در حالی که عدد ۱۳۹۵ به صورت $3k+2$ نیست. پس نمی‌توان به عدد ۱۳۹۵ رسید.

مثال: نشان دهید در هر گراف تعداد راسهای با درجه‌ی فرد، عددی زوج است.

حل: می‌دانیم برای گراف $G=(V,E)$ داریم $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$ که عددی زوج است. فرض کنید V_1 مجموعه رئوس با درجه زوج و V_2 مجموعه رئوس با درجه فرد باشند. لذا

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2|E|.$$

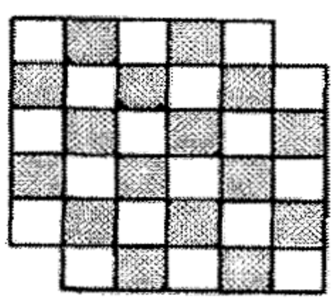
از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که مجموع درجات راسهای فرد، زوج است. بنابراین باید تعدادی زوج از اعداد فرد داشته باشیم.

مثال: یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ و تعدادی دومینو را در نظر بگیرید که هر کدام از آنها دو خانه‌ی مجاور از صفحه‌ی شطرنجی را می‌پوشانند. نشان دهید صفحه را می‌توان با دومینوهای غیر متداخل پوشاند اگر و تنها اگر n زوج باشد. در ضمن نشان دهید اگر دو خانه‌ی گوشه‌های مخالف صفحه را حذف کنیم، نمی‌توان این صفحه را بوسیله‌ی دومینوها پوشاند.

در ادامه پوششی از یک صفحه‌ی 6×6 با ۱۸ دومینو را در نظر بگیرید. نشان دهید برای اینگونه پوششی می‌توان صفحه را به دو مستطیل تقسیم کرد بطوری که خط تقسیم کننده‌ی صفحه از میان هیچ دومینویی نگذرد.

حل: اگر اندازه‌ی طول و عرض صفحه زوج باشد، پوشاندن آن بوسیله‌ی دومینوها کاری ساده است. فرض کنید n فرد باشد. تعداد مربعها در صفحه‌ی شطرنج n^2 است و چون هر دو خانه مجاور توسط یک دومینو پوشانده می‌شود، پس تعداد دومینوها باید $\frac{n^2}{2}$ باشد که این امر غیر ممکن است زیرا n^2 عددی فرد است.

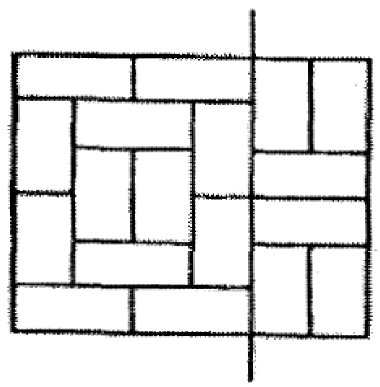
در حالتی که دو گوشه‌ی مقابل هم از صفحه حذف شده باشند، اگر n فرد باشد در آن صورت تعداد دومینوهایی که احتیاج داریم ($\frac{n^2-2}{2}$) عدد صحیحی نخواهد بود و اگر n زوج باشد، در آن صورت صفحه را به صورت شطرنجی همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است رنگ می‌کنیم. دو خانه حذف شده مسلماً همرنگ خواهند بود.



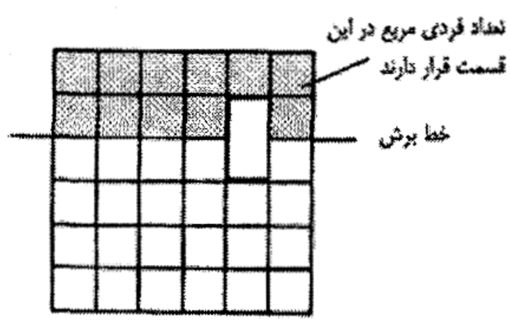
بنابراین در صفحه باقیمانده تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر نخواهند بود. از طرفی می‌دانیم هر دومینو دقیقاً یک خانه‌ی سیاه و یک خانه‌ی سفید را می‌پوشاند، یعنی باید تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر باشد.

در نتیجه نمی‌توان این صفحه را با دومینوها پوشاند. (دقت کنید که در اینجا نیز از همخوانی تعداد خانه‌های سیاه و سفید استفاده کردیم)

حال حالتی را در نظر بگیرید که صفحه‌ی 6×6 را با ۱۸ دومینو پوشانده‌ایم. شکل زیر نمایانگر این حالت می‌باشد و خط مشخص شده نیز صفحه را به دو مستطیل تقسیم کرده است طوری که از میان هیچ دومینویی عبور نکرده است.



در کل می‌بینیم که در هر جهت می‌توان ۵ خط روی صفحه رسم کرد که صفحه را به دو مستطیل تقسیم کند و هر دومینو حداکثر توسط یک خط قطع می‌شود. با استفاده از اصل همخوانی (زوجیت) می‌توان فهمید که هیچ کدام از ۱۰ خط نمی‌تواند تنها یک دومینو را قطع کند. (یا در کل تعداد فردی دومینو را قطع کند)



زیرا اگر هر خط فقط یک دومینو را قطع کند در آن صورت در هر طرف آن فرد خانه برای پوشیده شدن توسط دومینوها باقی می‌ماند که ممکن نیست. بنابراین چون هر خطی حداقل باید دو دومینو را قطع کند (چون ۱۸ دومینو و ۱۰ خط داریم) در نتیجه خطی وجود دارد که هیچ دومینویی را قطع نکند.

قضیه: گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

اثبات: فرض کنید $G=(V,E)$ دو بخشی با مجموعه رئوس $V=X\cup Y$ باشد. همچنین فرض کنید $C: v_0v_1...v_kv_0$ دوری از G باشد. بدون لطمه به کلیت مطلب فرض می‌کنیم $v_0\in X$. پس چون $v_0v_1\in E$ و G دو بخشی است داریم $v_1\in Y$. بطور مشابه $v_2\in X$. پس در حالت کلی $v_{2i}\in X$ و $v_{2i+1}\in Y$. چون $v_0\in X$ و $v_kv_0\in E$ پس $v_k\in Y$. لذا iای وجود دارد که $k=2i+1$. درنتیجه C دوری زوج است.

حال می‌خواهیم عکس را ثابت کنیم. به روشنی کافی است که معکوس آن را برای گرافهای همبند ثابت کنیم. فرض کنید G گرافی همبند باشد که شامل هیچ دور فرد نیست. راس دلخواه u را انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم

$$X=\{x\in V \mid d(u,x) \text{ زوج}\}$$

$$Y=\{y\in V \mid d(u,y) \text{ فرد}\}$$

($d(u,x)$ طول کوتاهترین مسیر بین u و x است). نشان می‌دهیم که $V=X\cup Y$ معرف دو بخشی بودن G است. فرض کنیم $v,w\in X$ و فرض کنیم P کوتاهترین مسیر (u,v) و Q کوتاهترین مسیر (u,w) باشند. آخرین راس مشترک P و Q را با u_1 نشان می‌دهیم. چون P و Q کوتاهترین مسیرها هستند، پس بخش (u,u_1) مربوط به هر دو مسیر P و Q کوتاهترین مسیرهای (u,u_1) است و بنابراین دارای طول یکسان هستند. حال چون طولهای هر دو مسیر P و Qزوج‌اند، طولهای P_1 که بخش (u_1,v) از P و Q_1 که بخش (u_1,w) از Q هستند باید هر دو زوج یا فرد باشند. نتیجه اینکه $P_1^{-1}Q_1$ که مسیر (v,w) است، طولش زوج است. حال اگر v به w وصل باشد $P_1^{-1}Q_1v$ دوری به طول فرد می‌شود که خلاف فرض است. بنابراین هیچ دو راسی در X مجاور نیستند. به طور مشابه هیچ دو راسی در Y مجاور نیستند.

اصل شمول و عدم شمول

اصل جمع در مجموعه‌ها و قوانین دمورگان:

$$|A\cup B|=|A|+|B| \qquad A\cap B=\varnothing$$
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \qquad A\cap B\neq\varnothing$$
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$
$$|A'|=|U|-|A|$$

U در اینجا مجموعه مرجع است.

مثال: فرض کنید $A=\{1,...,1000\}$ مطلوب است تعداد اعضایی از A که بر 3 یا بر 5 بخش‌پذیر باشند.

توجه داریم که تعداد اعدادی که از 1000 کوچکتر هستند و بر 3 بخش پذیرند برابر است با

$$D_3=\{x\mid 1\le x\le 1000,3\mid x\}=\left[\frac{1000}{3}\right]=333.$$

به طور مشابه داریم:

$$D_5=\{x\mid 1\le x<1000,5\mid x\}=\left[\frac{1000}{5}\right]=200$$
$$D_{15}=\{x\mid 1\le x\le 1000,15\mid x\}=\left[\frac{1000}{15}\right]=66$$
$$\left|D_3\cup D_5\right|=\left|D_3\right|+\left|D_5\right|-\left|D_3\cap D_5\right|=333+200-66=467$$

مثال: در یک دانشگاه از ۲۵۰ دانشجوی سال اول ۱۳۵ نفر درس ریاضی، ۷۵ نفر درس فیزیک و ۲۰ نفر هر دو درس را گرفته اند. چند نفر از دانشجویان سال اول این دانشکده هیچ کدام از این دروس را انتخاب نکرده‌اند؟

حل) $250-125-75+20=60$

مثال: تعداد جایگشت از حروف a,b,c,d,e را بیابید که نه با a شروع شود و نه به c ختم شود.

حل) تعداد کل جایگشت‌ها $5!$ است. فرض کنیم A جایگشت‌هایی باشند که با a شروع شوند و B جایگشت‌هایی باشند که به c ختم شوند.

$$|A|+|B|=4!+4!=2\times 4!$$
$$|A\cap B|=3!$$
$$|A'\cap B'|=|U|-(|A|+|B|)+|A\cap B|=5!-(2\times 4!)+3!$$

قضیه (اصل شمول و عدم شمول): یک مجموعه متناهی از اشیاء که بعضی از آنها شامل خواص $\{1,2,...,n\}$ می‌باشند را در نظر بگیرید. $N(i_1,i_2,...,i_r)$ را تعداد اعضایی از این مجموعه در نظر بگیرید که حداقل r خاصیت $i_1,i_2,...,i_r$ را داشته باشند. در آن صورت تعداد اعضایی از مجموعه که حداقل یکی از خصوصیات $\{1,2,...,n\}$ را دارند برابر است با:

$$\begin{aligned}&N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(n)\\&-N(1,2)-N(1,3)-\cdots-N(n-1,n)\\&+N(1,2,3)+N(1,2,4)+\cdots+N(n-2,n-1,n)\\&-\cdots+(-1)^{n-1}N(1,2,...,n).\end{aligned}$$

اثبات: ما باید نشان دهیم که اعضایی که حداقل یکی از خصوصیات $\{1,2,...,n\}$ را دارند دقیقاً یک بار در مقدار داده شده شمرده شده‌اند. فرض کنید عضوی از مجموعه (که حداقل یک خاصیت را دارد) دقیقاً r خاصیت از n خاصیت موجود را داشته باشد. حال این عضو چند بار در حاصل جمع زیر ظاهر شده است؟

$$\begin{aligned}&N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(n)\\&-N(1,2)-N(1,3)-\cdots-N(n-1,n)\\&+N(1,2,3)+N(1,2,4)+\cdots+N(n-2,n-1,n)\\&-\cdots+(-1)^{n-1}N(1,2,...,n).\end{aligned}$$

در سطر اول این عضو r بار با علامت + ظاهر شده است، در سطر دوم $\binom{r}{2}$ بار با علامت $-$ ظاهر شده است، در سطر سوم $\binom{r}{3}$ بار با علامت + و ... و در سطر rام $\binom{r}{r}$ بار با علامت $(-1)^{r-1}$ ظاهر شده است. از این سطر به بعد این عضو هیچ‌گاه شمارش نشده است. حاصل جمع تعداد دفعاتی که این عدد شمرده شده است برابر است با:

$$\binom{r}{1}-\binom{r}{2}+\binom{r}{3}-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r}=1-\left[\binom{r}{0}+(-1)\binom{r}{1}+(-1)^2\binom{r}{2}+\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}\right]=$$
$$1-\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i 1^{r-i}=1-(1+(-1))^r=1.$$

از آنچه گفته شد می‌توان فهمید که اگر عضوی حداقل یکی از n خاصیت را داشته باشد، دقیقاً یک بار در مقدار نهایی عبارت داده شده شمرده شده است.

مثال: چند عدد بین ۲ تا ۱۰۰۰ وجود دارد که مربع کامل یا مکعب کامل یا توانهای بالاتر یک عدد صحیح باشد؟

حل: مجموعه‌ی $\{2,...,1000\}$ را در نظر بگیرید و عضوی از این مجموعه را که خاصیت i را دارد، عضوی در نظر بگیرید که برابر iامین توان حداقل یکی از اعداد صحیح می‌باشد. پس $N(i)$ تعداد اعدادی بین $\{2,...,1000\}$ می‌باشد که iامین توان حداقل یکی از اعداد صحیح است. از آنجا که $2^{10}>1000$ بنابراین در بین اعضای این مجموعه هیچیک، دهمین توان یک عدد صحیح نیست. (یعنی به ازای هر $k\geq 10$ داریم $N(k)=0$) بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای تعداد اعدادی که حداقل یکی از خواص $\{2,...,9\}$ را دارند، داریم:

$$
\begin{aligned}
&N(2)+N(3)+\cdots+N(9)\\
&-N(2,3)-N(2,4)-\cdots-N(8,9)\\
&+\cdots-N(2,3,\ldots,9).
\end{aligned}
$$

هر کدام از این اعداد به راحتی قابل محاسبه هستند. برای مثال:

$$
\begin{aligned}
&N(2)=\left[\sqrt{1000}\right]-1=30 && N(3)=\left[\sqrt[3]{1000}\right]-1=9\ \cdots\\
&N(2,3)=N(6)=\left[\sqrt[6]{1000}\right]-1=2 && N(2,4)=N(4)=4\ \cdots\\
&N(2,3,4)=N(12)=0 && N(2,3,6)=N(6)=2\ \cdots
\end{aligned}
$$

حال رابطه بدست آمده برابر تعداد اعضایی است که حداقل یکی از توانهای یک عدد صحیح می‌باشند:

$$30+9+4+2+2+1+1+1-2-4-2-1-2-1-1+2+1=40.$$

مثال (تابع اویلر): عدد صحیح و مثبت m را با عوامل اول $P_1,P_2,\ldots,P_n$ در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد اعداد صحیح بین ۱ و m که نسبت به m اول هستند برابر است با:

$$m(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_n})$$

این مقدار را با $\varphi(n)$ نمایش می‌دهند و در نظریه اعداد تابع اویلر نامند.

حل: مجموعه $A=\{1,2,\ldots,m\}$ را در نظر بگیرید و برای هر $1<i<n$ خاصیت i را برای یک عدد این تعریف کنید که P_i مقسوم علیه آن عدد باشد. لذا $N(i)$ تعداد اعداد صحیحی بین ۱ تا m است که P_i آنها را عاد می‌کند. اکنون تعداد اعدادی از مجموعه‌ی A که نسبت به m اول هستند برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&m\\
&-N(1)-N(2)-\cdots-N(n)\\
&+N(1,2)+N(1,3)+\cdots+N(n-1,n)\\
&-N(1,2,3)-N(1,2,4)-\cdots-N(n-2,n-1,n)\\
&+\cdots+(-1)^n N(1,2,\ldots,n).
\end{aligned}
$$

می‌دانیم مقدار $N(i)$ برابر است با $\frac{m}{P_i}$. بهمین ترتیب $N(i,j)=\frac{m}{P_iP_j}$ و ... . بنابراین مقدار نهایی رابطه برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&m\\
&-\frac{m}{P_1}-\frac{m}{P_2}-\cdots\\
&+\frac{m}{P_1P_2}+\frac{m}{P_1P_3}+\cdots\\
&-\frac{m}{P_1P_2P_3}-\frac{m}{P_1P_2P_4}-\cdots\\
&+\cdots+(-1)^n\frac{m}{P_1P_2\ldots P_n}.
\end{aligned}
$$

این مقدار پس از تجزیه شدن برابر همان مقدار داده شده $\varphi(n)$ می‌باشد.

مثال (قضیه پریش): فرض کنید هریک از n فردی که در یک مهمانی شرکت می‌کنند کلاه خود را به وسط اتاق پرتاب می‌کنند و سپس کلاه‌ها را مخلوط کرده و هریک به تصادف کلاهی را بردارد. تعداد طرقی که هیچ یک از این n فرد کلاه خود را برندارد را محاسبه کنید.

حل) فرض کنید برای $1\le i\le n$، خاصیت i این باشد که مرد iام کلاه خود را بردارد. لذا طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد طرقی که هیچ یک از این n فرد کلاه خود را برندارند برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&n!\\
&-N(1)-N(2)-\cdots-N(n)\\
&+N(1,2)+N(1,3)+\cdots+N(n-1,n)\\
&-\cdots+(-1)^nN(1,2,\ldots,n).
\end{aligned}
$$

از طرفی مقدار $N(1,2,\ldots,r)$ برابر است با تعداد حالاتی که مردهای $1,2,\ldots,r$ هر کدام کلاه خودشان را برداشته باشند. واضح است که این تعداد برابر است با $(n-r)!$. لذا مقدار بدست آمده از رابطه‌ی فوق برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!\\
&=n!-\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)!+\frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)!-\frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)!+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!(n-n)!}(n-n)!\\
&n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].
\end{aligned}
$$

مثال: فرض کنید $n+1$ عدد مثبت متمایز کوچکتر یا مساوی با $2n$ داریم. نشان دهید در بین آنها ۲ عدد وجود دارد که حاصل جمع آنها برابر با $2n+1$ باشد.

حل: اعداد یک تا $2n$ را به n دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\underbrace{\square}_{1,2n}\ \underbrace{\square}_{2,2n-1}\ \underbrace{\square}_{3,2n-2}\cdots\underbrace{\square}_{n,n+1}$$

از هر دسته یک عدد را بر می‌داریم. بنابراین n عدد داریم و چون n لانه داریم، پس برای عدد آخر مجبوریم دوباره از یک لانه یک عدد دیگر انتخاب کنیم. لذا بناچار دو تا از این اعداد در یک دسته هستند و بنابراین جمعشان $2n+1$ است.

تمرین: فرض کنید $n+1$ عدد مثبت متمایز کوچکتر یا مساوی با $2n$ داریم. نشان دهید:

الف) حداقل یک جفت از آنها وجود دارند که نسبت به هم اول باشند.

ب) در بین آنها دو عدد وجود دارند که یکی مضربی از دیگری باشد.

مثال: ثابت کنید در بین هر $n+1$ عدد صحیح یک جفت عدد وجود دارد که تفاضلشان مضربی از n است.

حل: باقیمانده هر عددی بر n، $0,1,2,...,n-1$ می‌باشد. پس n لانه زیر را داریم:

$$\underbrace{\square}_{0}\ \underbrace{\square}_{1}\ \underbrace{\square}_{2}\cdots\underbrace{\square}_{n-1}$$

حال چون $n+1$ عدد داریم، پس حداقل دو عدد وجود دارند که باقیمانده‌ی آنها بر n یکسان است. فرض کنیم a,b هر دو باقیمانده‌ی r داشته باشند. لذا

$$\left.\begin{array}{l} a = nq + r \\ b = nq' + r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = n(q-q') \Rightarrow n \mid a-b.$$

مثال: نشان دهید حاصل جمع دو عدد فرد مربع کامل نمی‌تواند یک مربع کامل باشد.

حل: در ابتدا نشان می‌دهیم هر مربع کامل فردی به صورت $4q+1$ است. فرض کنید n^2 فرد باشد. لذا n فرد است. بنابراین

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+1+4k = 4q+1.$$

حال فرض کنیم n^2, m^2 دو عدد فرد مربع کامل باشند. پس

$$\left.\begin{array}{l} n^2 = 4q+1 \\ m^2 = 4q'+1 \end{array}\right\} \Rightarrow n^2+m^2 = 4q''+2.$$

$4q''+2$ عددی زوج است و واضح است که مربع کامل هیچ عددی نمی‌تواند به فرم $4q''+2$ باشد.

تمرین: الف) چند عدد صحیح بین ۱ تا ۱۰۰۰۰ وجود دارند که حداقل بر یکی از ۲، ۳ و ۵ قابل قسمت باشند؟

ب) چند عدد صحیح بین ۱ تا ۱۰۰۰۰ وجود دارند که حداقل بر یکی از ۲، ۳، ۵ و ۷ قابل قسمت باشند؟

تمرین: عدد صحیح و مثبت n داده شده است. نشان دهید ضریبی از آن وجود دارد که به صورت 99...900...0 باشد.

تمرین: n نامه نوشتیم و n پاکت در اختیار داریم. (هر نامه پاکت مخصوص به خود دارد) به طور تصادفی نامه‌ها را درون پاکت‌ها قرار می‌دهیم. احتمال اینکه هیچ نامه‌ای در پاکت خودش قرار نگیرد چقدر است؟ نشان دهید این احتمال اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند برابر $\frac{1}{e}$ خواهد بود.

تمرین: الف) چند تابع از $\{1,...,m\}$ به $\{1,...,n\}$ می‌توان تعریف کرد؟

ب) چند تابع یک به یک از $\{1,...,m\}$ به $\{1,...,n\}$ می‌توان تعریف کرد؟

ج) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول نشان دهید که تعداد توابع پوشا از $\{1,...,m\}$ به $\{1,...,n\}$ برابر است:

$$n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m.$$

فصل پنجم

مربع لاتین

تعریف: یک آرایه $n\times n$ از n شیء مختلف را یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n گوئیم، هرگاه در هیچ سطر و ستونی آرایه تکراری نداشته باشیم.

مثال: ماتریسهای زیر مربع لاتین هستند:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

نکته: واضح است که برای هر n حداقل یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n وجود دارد. مثلا آرایه $n\times n$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & & & & & \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

این مربع لاتین را مربع لاتین چرخشی گوئیم.

یک مربع لاتین را به صورت $L=\{(i\,,j\,;a_{ij})\ |\ i=1,2,\ldots,n\ \ ;\ j=1,2,\ldots,n\}$ نیز نمایش می‌دهند. مثلاً مربع چرخشی به صورت $L=\{(i\,,j\,;i+j-1\ (\overset{n}{\equiv}))\ |\ i\,,j=1,\ldots,n\}$ است.

مثال: آیا مستطیل لاتین زیر یک بخش از مربع لاتین 4×4 است؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر آیا می‌توان دو سطر به این مستطیل لاتین اضافه کرد که تبدیل به مربع لاتین 4×4 شود؟ به طور مشابه آیا مستطیل لاتین

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

بخشی از مربع لاتین 5×5 است؟

حل: به سادگی می‌توان دید که مستطیل لاتین اول می‌تواند به مربع لاتین زیر گسترش پیدا کند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

در ادامه نشان خواهیم داد که هر مستطیل لاتین $p\times n$ با درایه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ را می‌توان به مربع لاتین $n\times n$ گسترش داد.

اما مستطیل دوم قابل گسترش نیست چون به ستونهای اول، دوم و سوم باید عدد ۲ اضافه شود. چون این سه عدد ۲ باید در دو سطر قرار گیرند پس دو تا از آنها در یک سطر واقع شده بنابراین مربع بدست آمده لاتین نخواهد بود.

مثال: اضافه کردن یک سطر به مستطیل لاتین زیر برای بدست آوردن یک مستطیل لاتین 3×5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

در واقع یافتن اعضای متفاوت از مجموعه‌های مشخص شده‌ی زیر است. هر مجموعه شامل اعضایی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5\}$ است که در آن ستون ظاهر نشده‌اند. توجه کنید که هر مجموعه شامل سه عضو است و هر یک از اعضای $\{1,2,3,4,5\}$ دقیقاً در سه تا از مجموعه‌ها ظاهر شده‌اند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\{2,3,4\}\ \{3,4,5\}\ \{1,3,5\}\ \{1,2,4\}\ \{1,2,5\}$$

$$\downarrow$$

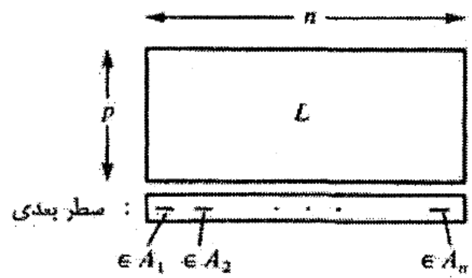
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

در ادامه می‌توان همین روش را برای گسترش مستطیل لاتین 3×5 بدست آمده به مستطیل 4×5 و نهایتاً مربع لاتین 5×5 استفاده کرد.

قضیه: هر مستطیل لاتین $p\times n$ را می‌توان به مربع لاتین $n\times n$ گسترش داد.

اثبات: فرض کنیم L مستطیل لاتین $p\times n$ باشد. برای هر $1\le i\le n$ تعریف می‌کنیم:

$A_i=\{$اعضایی از مجموعه $\{1,2,...,n\}$ که در ستون i نیامده‌اند$\}$



یافتن یک سطر اضافی از اعضای مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ برای تبدیل L به مستطیل لاتینی $(p+1)\times n$ در واقع معادل یافتن یک مجموعه‌ی نماینده‌های متمایز از خانواده‌ی $A=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ است. از قضیه‌ی هال استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اجتماع هر r تا از این مجموعه‌ها حداقل شامل r عضو متمایز است که $1\le r\le n$. قبل از ارائه استدلال توجه داریم که اولاً

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=...=|A_n|=n-p$$

چون هر یک از مجموعه‌ها شامل عضوهایی از مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ است که در ستون p عضوی مربوط به آن نیامده است. ثانیاً به ازای هر $1\le j\le n$ عدد j در دقیقاً $n-p$ مجموعه از خانواده‌ی A وجود دارد. زیرا ما p سطر داریم که هر سطری همه‌ی n مولفه را دارد. لذا هر عدد j در دقیقاً p مکان (L p ستون مختلف) ظاهر می‌شود پس در $n-p$ ستون وجود ندارند و بنا بر تعریف A_iها در $n-p$ مجموعه‌ی مختلف ظاهر می‌شود. حال با استفاده‌ی از قضیه‌ی هال این مساله را اثبات می‌کنیم. r مجموعه از خانواده‌ی A را در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم که شامل حداقل r عضو متمایز است. ابتدا همه‌ی اعضای r مجموعه‌ی مفروض را (با در نظر گرفتن اعضای تکراری) در یک لیست ردیف می‌کنیم، لذا $r(n-p)$ عضو بدست می‌آیند. از طرفی همانطوری که قبلاً گفتیم هر j دقیقاً در $n-p$ مجموعه ظاهر می‌شود. بنابراین اگر اجتماع r مجموعه‌ی مفروض شامل کمتر از r عضو متمایز باشد (یعنی حداکثر $r-1$ عضو متمایز داشته باشد) لیست باید حداکثر $(n-p)(r-1)$ عضو باشد که می‌دانیم درست نیست چون شامل

$r(n-p)$ عضو است. پس هر خانواده‌ی A شامل r مجموعه از A_iها حداقل r عضو متمایز دارد و طبق قضیه‌ی هال خانواده‌ی $A=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ شامل یک مجموعه نماینده‌های متمایز از A_iها می‌باشد.

از طرفی همانطور که قبلاً گفتیم هر مجموعه‌ی نماینده‌های متمایز می‌تواند به عنوان یک سطر اضافی برای L در نظر گرفته شود و آن را به مستطیل لاتین $(p+1)\times n$ تبدیل کند. به همین ترتیب می‌توان با ادامه‌ی این رویه به مربع لاتین $n\times n$ رسید.

مثال زیر نشان می‌دهد که هر مستطیل لاتین $p\times q$ را نمی‌توان به مربع لاتین $n\times n$ گسترش داد.

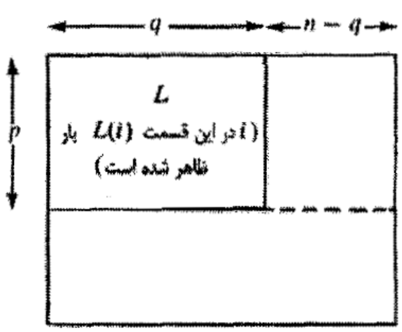
مثال: آیا می‌توان مستطیل لاتین زیر را به مربع لاتین 6×6 گسترش داد؟

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

حل: خیر. یک راه برای بدست آوردن پاسخ این است که توجه کنیم در هر گسترش برای بدست آوردن مربع لاتین 6×6 نیاز به اضافه کردن سه عدد ۵ برای سطر اول، سوم و چهارم داریم. چون این سه عدد ۵ باید در دو ستونی که می‌خواهیم به مستطیل اضافه کنیم واقع شوند پس دو عدد ۵ باید در یک ستون واقع شوند که لاتین بودن مربع را نقض می‌کند.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & - & - \\ 5 & 6 & 3 & 1 & - & - \\ 1 & 3 & 6 & 2 & - & - \\ 3 & 2 & 4 & 6 & - & - \end{pmatrix}$$

نکته: فرض کنید هر عدد i دقیقاً $L(i)$ مرتبه در L ظاهر شده باشد.



مربع لاتین $n \times n$

در مربع نهایی در p سطر اول نیاز به p عدد i داریم. بنابراین در قسمت بالایی سمت راست L باید تعداد $p-L(i)$ عدد i وجود داشته باشد. از طرفی چون این قسمت تنها شامل $n-q$ ستون است، برای ممانعت از قرار گرفتن دو i در یک ستون و اطمینان از گسترش L واضح است که باید داشته باشیم:

$$p-L(i)\le n-q \Rightarrow p+q-n\le L(i)$$

در ادامه بیان می‌شود که این شرط یک شرط لازم و کافی برای گسترش یک مستطیل لاتین $p\times q$ به یک مربع لاتین $n\times n$ است.

مثال: مستطیل لاتین $\begin{pmatrix}1&3&4\\4&1&5\end{pmatrix}$ را به مربع لاتین 5×5 گسترش دهید.

حل: در اینجا یک L 2×3 داده شده است. پس داریم

$$p=2,\ q=3,\ n=5\Rightarrow p+q-n=0$$

پس شرط $L(i)\ge p+q-n$ به ازای هر i برقرار است. می‌توانیم کار را با تبدیل L به مستطیل 2×4 آغاز کنیم:

$$\begin{pmatrix}1&3&4&\in\{2,5\}\\4&1&5&\in\{2,3\}\end{pmatrix}$$

این کار ممکن است به یکی از سه روش زیر انجام شود که در هر صورت سعی می‌کنیم مستطیل 2×4 بدست آمده را به یک مستطیل 2×5 گسترش دهیم:

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&1&5&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&2&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$ طبق قضیه قبل قابل گسترش به مربع 5×5 است

$$\begin{pmatrix}1&3&4&5\\4&1&5&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&4&5&2\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$ طبق قضیه قبل قابل گسترش به مربع 5×5 است

$$\begin{pmatrix}1&3&4&5\\4&1&5&3\end{pmatrix}\Rightarrow 0=L(2)<p+q-n=1\Rightarrow$$ گسترش این مستطیل غیر ممکن است

نکته: فرض می‌کنیم L یک مستطیل لاتین $p\times q$ با درایه‌هایی از مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ باشد که در شرایط $p+q-n\le L(i)$ به ازای هر $1\le i\le n$ صدق می‌کند و می‌خواهیم آن را به مربع لاتین $n\times n$ گسترش دهیم. بدیهی است که مانند مثال بالا وقتی ما یک ستون به L اضافه می‌کنیم به مستطیل لاتین $p\times(q+1)$ (که آن را L' می‌نامیم) تبدیل می‌شود و ستون اضافی را باید طوری انتخاب کنیم که رویه‌ی

ما قابل تکرار برای L' باشد و بتوان L' را نیز گسترش داد. یعنی باید شرط $p+q+1-n \le L'(i)$ برقرار باشد. پس برای هر i که $L(i)=p+q-n$ برقرار بود باید آن را در ستون اضافی قرار دهیم تا رابطه $L'(i)=L(i)+1$ برقرار شده و نامساوی فوق درست باشد. به همین منظور مجموعه‌ی P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $P=\{i \mid 1\le i \le n,\, L(i)=p+q-n\}$.

همانطور که در بالا گفته شد، برای ادامه دادن روند اضافه کردن ستونها به L باید ستون اضافی در هر صورت شامل مجموعه‌ی P باشد تا در هر مرحله‌ی بعد تعداد iهای واقع شده در L' برابر $p+q+1-n$ باشد.

مثال: مستطیل لاتین زیر را به مربع لاتین گسترش دهید:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & \in\{2,3,4\} \\ 6 & 5 & 2 & \in\{1,3,4\} \\ 1 & 2 & 3 & \in\{4,5,6\} \end{pmatrix} \qquad p+q-n=3+3-6=0$$

پس ستون جدید باید شامل مجموعه $P=\{i \mid L(i)=0\}=\{4\}$ باشد. ستون را اضافه کرده و رویه را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & \in\{2,3\} \\ 6 & 5 & 2 & 1 & \in\{3,4\} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \in\{4,6\} \end{pmatrix} \qquad p+q-n=3+4-6=1$$

پس ستون جدید باید شامل مجموعه‌ی $P=\{i \mid L(i)=1\}=\{3,4\}$ باشد. ستون را اضافه کرده و رویه را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & \in\{2\} \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & \in\{3\} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & \in\{4\} \end{pmatrix} \qquad p+q-n=3+5-6=2$$

پس ستون اضافی باید شامل مجموعه‌ی $P=\{i \mid L(i)=2\}=\{2,3,4\}$ باشد. این مجموعه را اضافه کرده و یک مستطیل لاتین 3×6 بدست می‌آوریم.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

بنابر قضیه‌ی قبل این مستطیل می‌تواند به مربع لاتین 6×6 گسترش یابد. یک نمونه از گسترش در زیر آمده است:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

قضیه: اگر L یک مستطیل لاتین $p\times q$ با درایه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ باشد، آنگاه L را می‌توان به یک مربع لاتین $n\times n$ گسترش داد اگر و تنها اگر مقدار $L(i)$ برای هر $1\le i\le n$ در شرط زیر صدق کند:

$$L(i)\ge p+q-n$$

تمرین: برای کدام مقادیر i, j مستطیل‌های لاتین زیر قابل گسترش به مربع لاتین 6×6 می‌باشند. یک نمونه از این گسترش را انجام دهید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & j \end{pmatrix}$$

تعریف: دو مربع لاتین $n\times n$ با نامهای $L=(L_{ij})$ و $M=(M_{ij})$ متعامدند اگر n^2 جفت (L_{ij},M_{ij}) همگی متمایز باشند. این مربع بدست آمده که شامل درایه‌های دوتایی می‌باشد را مربع لاتین اویلر یا مربع لاتین جریکو می‌نامند.

سوال: آیا برای هر مقدار n دو مربع لاتین $n\times n$ متعامد وجود دارد؟

خیر برای $n=2$ دو نوع مربع لاتین 2×2، $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ وجود دارند. لذا جفت مربعهای لاتین متعامد 2×2 نداریم. ثابت شده است که برای $n=6$ نیز جفت مربع لاتین متعامد نداریم. همچنین ثابت شده است که برای همه‌ی nهای غیر از ۲ و ۶ جفت مربعهای لاتین متعامد وجود دارد.

مثال: ۱۶ افسر از ۴ لشگر و در هر لشگر ۴ افسر با چهار درجه‌ی متفاوت در یک صف ایستاده‌اند. آنها را در یک آرایش 4×4 طوری قرار دهید که در هر سطر و در هر ستون از هر لشگر دقیقاً یک افسر قرار گیرد و هیچ دو افسری با درجه‌ی یکسان در یک صف نباشند.

حل:

ترکیب شماره‌ی درجه‌ی افسرها
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

ترکیب شماره‌ی لشگر افسرها
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix}1,1 & 2,2 & 3,3 & 4,4\\ 2,3 & 1,4 & 4,1 & 3,2\\ 3,4 & 4,3 & 1,2 & 2,1\\ 4,2 & 3,1 & 2,4 & 1,3\end{pmatrix}$$

درایه‌ی اول مربوط به شماره لشگر و درایه‌ی دوم مربوط به درجه‌ی افسرها است. لذا دو مربع لاتین فوق متعامد هستند.

مثال: چهار مربع لاتین دوبدو متعامد 5×5 بیابید.

حل:

$$L_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}\qquad L_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$$

$$L_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\\2&3&4&5&1\\5&1&2&3&4\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}\qquad L_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$$

قضیه: برای هر $n>1$ حداکثر $n-1$ مربع لاتین $n\times n$ دو بدو متعامد وجود دارد.

اثبات: مجموعه $L_1,L_2,\ldots,L_q$ از مربعهای لاتین دو به دو متعامد را در نظر می‌گیریم. هدف ما این است که نشان دهیم $q\le n-1$. ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $L_1,L_2,\ldots,L_q$ را می‌توان به مجموعه‌ی $L_1',L_2',\ldots,L_q'$ تبدیل کرد که سطر اول همه‌ی L_i'ها به صورت $(1,2,\ldots,n)$ باشد. فرض می‌کنیم سطر اول مربع L_1 به صورت $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ باشد. در کل مربع L_1 به جای a_1 عدد ۱، به جای a_2 عدد ۲ و ... به جای a_n عدد n قرار می‌دهیم تا L_1' بدست بیاید. می‌توان به سادگی نشان داد L_1' هنوز مربع لاتین است و با دیگر مربعهای $L_2,L_3,\ldots,L_q$ متعامد است. همین رویه را برای دیگر مربعها اجرا می‌کنیم تا مربعهای $L_1',L_2',\ldots,L_q'$ که سطر اول همه‌ی آنها به صورت $(1,2,\ldots,n)$ است بدست بیایند:

$$L_1'=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n\\?&&&&\\&&&&\\&&&&\end{pmatrix},\ L_2'=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n\\?&&&&\\&&&&\\&&&&\end{pmatrix},\ \ldots\ ,L_q'=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n\\?&&&&\\&&&&\\&&&&\end{pmatrix}$$

حال درایه‌های ؟ چه اعدادی می‌توانند باشند. اولاً: ۱ نمی‌تواند باشد چون لاتین بودن مربعها را نقض می‌کند. ثانیاً: هیچ کدام از آنها تکراری نمی‌تواند باشد.

$$L_j'=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&i&\ldots&n\\i&&&&&&\\&&&&&&\\&&&&&&\end{pmatrix},\quad L_k'=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&i&\ldots&n\\i&&&&&&\\&&&&&&\\&&&&&&\end{pmatrix}$$

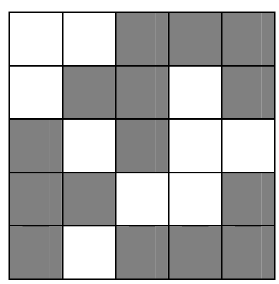
چون جفت (i,i) یک بار در سطر اول تولید شده و نمی‌تواند دوباره تکرار شود وگرنه تعامد دو به دوی مربعها را نقض می‌کند. در نتیجه به جای هر یک از علامتها باید یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{2,3,4,...,n\}$ قرار بگیرد که حداکثر این عضوها $n-1$ است یعنی $q \le n-1$.

قضیه: اگر n اول یا توانی از یک عدد اول باشد، آنگاه $n-1$ مربع لاتین $n \times n$ دو بدو متعامد وجود دارد.

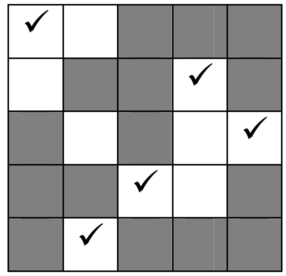
فصل ششم

چند جمله‌ای رخ

مثال: مدرسه‌ای باید پنج معلم برای تدریس دروس ریاضیات، علوم کامپیوتر، شیمی، فیزیک و زیست شناسی به خدمت گیرد. پنج داوطلب برای تدریس داریم. تخصص نفر اول در ریاضی و علوم کامپیوتر، تخصص نفر دوم در ریاضی و فیزیک، تخصص نفر سوم در علوم کامپیوتر، فیزیک و زیست، تخصص نفر چهارم در شیمی و فیزیک و تخصص نفر پنجم در علوم کامپیوتر است. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم به هر معلم دقیقاً یک درس برای تدریس متفاوت با موضوع محول شده به دیگران چنان محول کردکه هر معلم در آن موضوع تخصص داشته باشد.

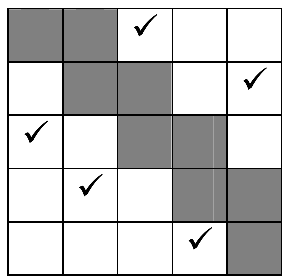


در مربع فوق مربع‌هایی که شامل درس‌های غیر تخصصی معلمان است را سیاه کرده‌ایم. اکنون اختصاص دادن این پنج درس به پنج معلم معادل قرار دادن پنج علامت تیک در خانه‌های سفید است بطوری که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر و ستون نباشند. حال می‌خواهیم مساله را به مساله‌ی رخهای صفحه‌ی شطرنج تبدیل کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که جدول بالا یک صفحه‌ی شطرنج است. همانطور که می‌دانید در صفحه‌ی شطرنج هر رخ می‌تواند در طول سطر یا ستون خودش حرکت کند. یک مجموعه از رخها در صفحه شطرنج سازگار نامیده می‌شوند اگر هیچ دوتایی از آنها روی یک سطر یا ستون نباشند. در نتیجه مساله انتصاب اشخاص بالا متناظر مساله قرار دادن پنج رخ سازگار در قسمتهای سفید است. به طور مثال یک چنین شیوه‌ای در شکل زیر نشان داده شده است:



مثال: تعداد جایگشتهای مجموعه‌ی $\{1,2,...,5\}$ را پیدا کنید که عدد i در مکان i یا $i+1$ قرار نگیرد.

حل: فرض کنید که بخشهای سفید صفحه 5×5 شکل زیر برای قرار دادن پنج رخ سازگار در نظر گرفته شده‌اند. یک چنین ترکیب سازگاری نشان داده است:



چه رابطه‌ای میان این شکل و مساله جایگشتها وجود دارد؟ اگر تصور کنید که رخ واقع شده در سطر i و ستون j به معنای نگاشتن i به j است آنگاه ترکیب بالا مطابق نگاشت زیر است:

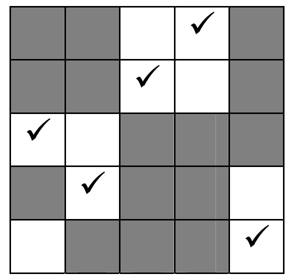
$$1\to3,\ 2\to5,\ 3\to1,\ 4\to2,\ 5\to4$$

این شرط که رخها سازگارند اطمینان می‌دهد که این نگاشت یک جایگشت است و با سایه زدن تعدادی مربع مطمئن هستیم که عدد i به i یا $i+1$ نگاشته نمی‌شوند. بنابراین تعداد روشهای قرار دادن پنج رخ سازگار در خانه‌های سفید صفحه‌ی مورد نظر دقیقاً برابر تعداد جایگشتهای مورد نظر ما خواهد بود.

مثال: به چند طریق می‌توان سطر چهارمی به این مستطیل لاتین 3×5 اضافه کرد که یک مستطیل لاتین 4×5 با درایه‌هایی از $\{1,2,3,4,5\}$ داشته باشیم.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

حل: به سادگی می‌توانیم ببینیم که اضافه کردن سطر چهارم به مستطیل لاتین مذکور متناظر است با قرار دادن پنج رخ سازگار در قسمتهای سفید صفحه‌ی 5×5 نشان داده شده در شکل زیر. مثلاً یک ترکیب نشان داده شده در شکل زیر مطابق سطر جدید $(3,4,2,1,5)$ است.



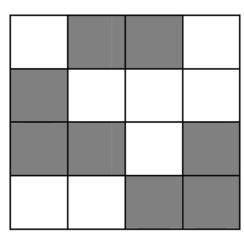
این مثالها نشان می‌دهند که چطور برخی مسائل قابل بیان به صورت مساله قرار دادن تعدادی رخ در صفحه‌ی شطرنج هستند.

تعریف: در آغاز یک صفحه‌ی $n\times n$ را در نظر می‌گیریم و یک قسمت از آن را انتخاب می‌کنیم که مجاز به استفاده از آن هستیم و آن را صفحه B می‌نامیم. برای چنین صفحه‌ای چند جمله‌ای رخ B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_B(x) = 1 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots + r_k x^k + \cdots + r_n x^n$$

که در آن r_k تعداد روشهای قرار دادن k رخ سازگار در صفحه B است.

مثال: چند جمله‌ای رخ صفحه‌ی 4×4 زیر را بیابید.

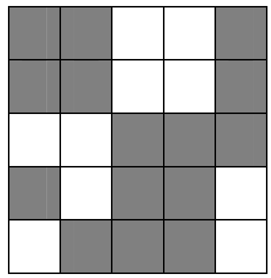


حل: یک رخ می‌تواند به ۸ طریق در صفحه‌ی مورد نظر قرار بگیرد. با کمی محاسبه طولانی متوجه می‌شویم دو رخ سازگار به ۱۹ روش مختلف می‌توانند در جدول قرار گیرند. همچنین سه رخ می‌توانند با ۱۴ روش مختلف و چهار رخ با تنها ۲ روش مختلف به صورت سازگار در صفحه‌ی مذکور قرار می‌گیرند. بنابراین چند جمله‌ای رخ صفحه‌ی مورد نظر به این صورت است:

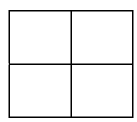
$$r_B(x) = 1 + 8x + 19x^2 + 14x^3 + 2x^4.$$

قضیه: اگر صفحه‌ی B را بتوان به دو قسمت C و D تقسیم کرد که هیچ سطر و ستون خانه‌های سفید صفحه‌ی B در آن دو مشترک نباشند، آنگاه داریم $r_B(x) = r_C(x) \times r_D(x)$.

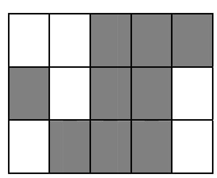
مثال: مستطیل لاتین زیر را در نظر بگیرید:



حل: خانه‌های سفید این صفحه دارای این خاصیت هستند که می‌توانند به دو بخش C و D تقسیم شوند که هیچ سطر و ستون مشترکی نداشته باشند:

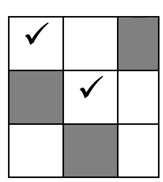


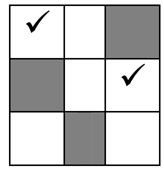
$$r_C(x) = 1 + 4x + 2x^2$$

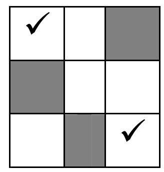


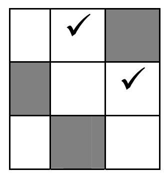
$$r_D(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$$

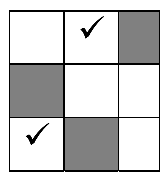
به طور مثال نحوه بدست آوردن عدد ۹ را در چند جمله‌ای فوق نشان می‌دهیم:

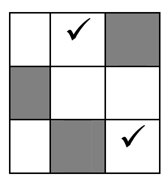


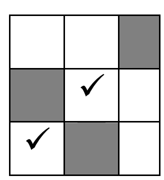


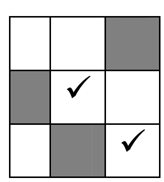


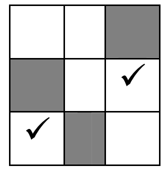






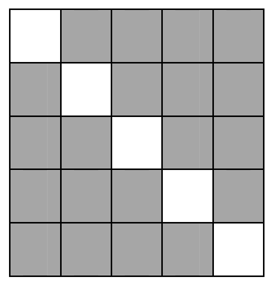






$$\Rightarrow r_B(x) = r_C(x) \times r_D(x) = (1+4x+2x^2)(1+6x+9x^2+2x^3)$$
$$= 1+10x+35x^2+50x^3+26x^4+4x^5.$$

مثال: صفحه‌هایی به فرم زیر که دارای n خانه سفید هستند دارای یک چند جمله‌ای رخ به صورت $(1+x)^n$ دارند.

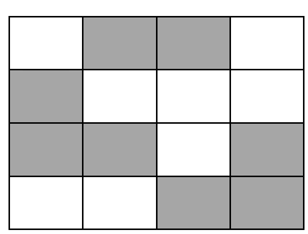


هر کدام از مربعهای کوچک دارای چند جمله‌ای رخ به صورت $1+x$ هستند. لذا با استفاده از تعمیم قضیه‌ی قبل چند جمله‌ای رخ صفحه‌ی حاصل برابر حاصل ضرب این چند جمله‌ای‌های مستقل است. یعنی $(1+x)^n$.

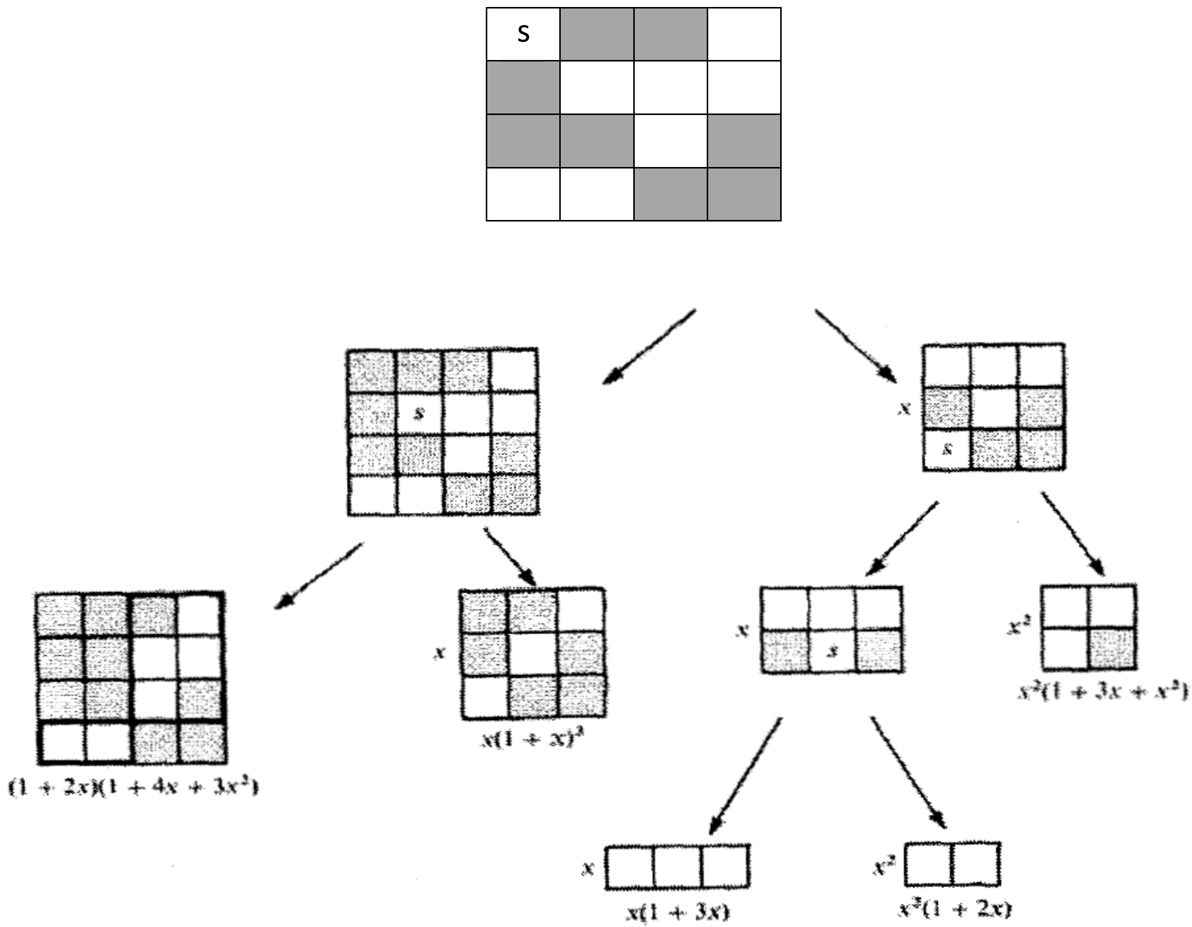
قضیه: B یک صفحه است و S یک مربع سفید خاص از آن صفحه. B_1 را صفحه‌ی حاصل از حذف S از B و B_2 را صفحه‌ی حاصل از حذف سطر و ستون مربع S از صفحه B می‌نامیم. آنگاه داریم:

$$r_B(x) = r_{B_1}(x) + x r_{B_2}(x).$$

مثال: چند جمله‌ای رخ صفحه زیر را بیابید:



حل:



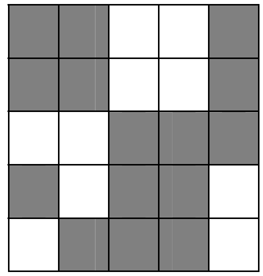
در نتیجه داریم:

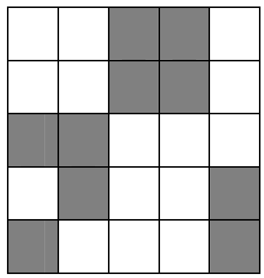
$$r_B(x) = (1+2x)(1+4x+3x^2) + x(1+x)^3 + x(1+3x) + x^2(1+2x)$$
$$+x^2(1+3x+x^2) = 1+8x+19x^2+14x^3+2x^4.$$

قضیه: اگر صفحه‌ی $n\times n$ B دارای چند جمله‌ای رخ $r_B(x) = 1+r_1x+r_2x^2+\ldots+r_kx^k+\ldots+r_nx^n$ باشد و $\bar{B}$ مکمل B نسبت به صفحه‌ی $n\times n$ باشد، آنگاه تعداد روشهای قرار دادن n رخ سازگار در $\bar{B}$ برابر عدد زیر است:

$$n! - (n-1)!\times r_1 + (n-2)!\times r_2 - \cdots + (-1)^n 0!\times r_n.$$

مثال: صفحه‌ی B (شکل اول) و صفحه‌ی $\bar{B}$ (شکل دوم) را در زیر داریم.





چند جمله‌ای‌های رخ $r_B(x)$ و $r_{\bar{B}}(x)$ به صورت زیر است:

$$r_B(x) = 1 + 10x + 35x^2 + 50x^3 + 26x^4 + 4x^5$$

$$r_{\bar{B}}(x) = 1 + 15x + 75x^2 + 145x^3 + 96x^4 + 12x^5$$

ضرایب در $r_B(x)$:

$$\begin{aligned} &1,\ 10,\ 35,\ 50,\ 26,\ 4 \\ &\Rightarrow 5!\times 1 - 4!\times 10 + 3!\times 35 - 2!\times 50 + 1!\times 26 - 0!\times 4 \\ &= 120 - 240 + 210 - 100 + 26 - 4 = 12 \end{aligned}$$

۱۲ برابر ضریب x^5 در $r_{\bar{B}}(x)$ است.

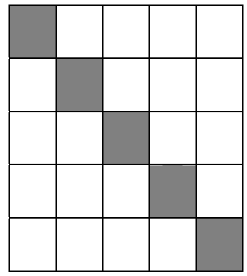
ضرایب در $r_{\bar{B}}(x)$:

$$\begin{aligned} &1,\ 15,\ 75,\ 145,\ 96,\ 12 \\ &\Rightarrow 5!\times 1 - 4!\times 15 + 3!\times 75 - 2!\times 145 + 1!\times 96 - 0!\times 12 \\ &= 120 - 360 + 450 - 290 + 96 - 12 = 4 \end{aligned}$$

۴ برابر ضریب x^5 در $r_B(x)$ است.

مثال: در فصلهای قبل تعداد پریشهای مجموعه‌ی $\{1,2,...,n\}$ را محاسبه کردیم. (پریش یعنی تعداد جایگشتی که برای هر $i \in \{1,2,...,n\}$ داشته باشیم $i \not\to i$) حال می‌خواهیم این نتیجه را با استفاده از

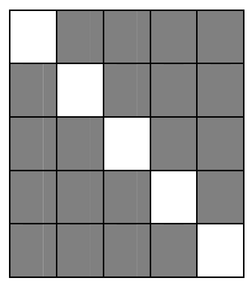
چند جمله‌ای رخ بدست بیاوریم. تعداد پریش‌های مجموعه‌ی فوق برابر تعداد حالات قرار دادن n رخ در صفحه‌ی زیر است:



با استفاده از قضیه‌ی قبل تعداد روشهای قرار دادن n رخ در صفحه‌ی ترسیم شده برابر است با:

$$n!-(n-1)!\times r_1+(n-2)!\times r_2-\ldots+(-1)^n\times 0!\times r_n$$

که $1+r_1x+r_2x^2+\ldots+r_kx^k+\ldots+r_nx^n$ چند جمله‌ای رخ صفحه‌ی زیر است:



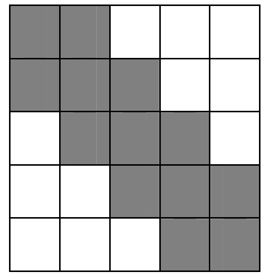
ما قبل دیدیم که چند جمله‌ای رخ چنین صفحاتی به صورت $(1+x)^n$ است. پس $r_k=\binom{n}{k}$ و از آنجا پریشهای $\{1,2,\ldots,n\}$ برابر است با

$$\begin{aligned}
&n!-(n-1)!\times r_1+(n-2)!\times r_2-\cdots+(-1)^n\times 0!\times r_n\\
&=n!-(n-1)!\times\binom{n}{1}+(n-2)!\times\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\times 0!\times\binom{n}{n}\\
&=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].
\end{aligned}$$

این همان فرمولی است که قبلاً بدست آورده‌ایم.

تمرین: آیا یک چند جمله‌ای می‌تواند هم چند جمله‌ای رخ باشد و هم چند جمله‌ای رنگی یک گراف؟

تمرین: الف) چند جمله‌ای رخ صفحه زیر را بدست آورید:



ب) چند جایگشت از $\{1,2,3,4,5\}$ وجود دارد که هر عدد i به i یا $i-1$ و یا $i+1$ نگاشته نشود؟

ج) چند جایگشت از $\{1,2,3,4,5\}$ وجود دارد که هر عدد i به i یا $i-1$ و یا $i+1$ نگاشته شود؟

تمرین: بوسیله چند جمله‌ای رخ تعداد روشهای چیدن اعداد یک تا ۵ را در یک ردیف به طوریکه عدد هر مکان از مجموعه‌های زیر آن انتخاب می‌شود بدست آورید:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \{2,3,4,5\} & \{1,2,5\} & \{1,4,5\} & \{2,3,4\} & \{1,3,4,5\} \end{array}$$

تمرین: مستطیل لاتین زیر را در نظر بگیرید:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تعداد روشهای اضافه کردن سطر سوم برای ایجاد مستطیل لاتینی ازدرایه های $\{1,2,\ldots,5\}$ را بدست آورید.

منابع:

1- جلوه‌هایی از ترکیبیات، مؤلف ویکتور برایانت، مترجمین عباس ثروتی و مهدی محمدی، انتشارات دانش پژوهان جوان (۱۳۸۴) چاپ ششم.

2- ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی۱، مؤلف رالف ب. گریمالدی، مترجمین محمد علی رضوانی و بیژن شمس، انتشارات فاطمی (۱۳۷۶) چاپ نهم.