

# Oplossingen Lineaire Algebra 2013

TODO

October 4, 2013

## Contents

1 Oefeningen	3
2 Opdrachten	16

# 1 Oefeningen

## oef 1

### Echelonvorm

a)

Do row reduction:  $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

The following steps are done sequentially:

1. Add  $2/3$  x row 1 to row 2
2. Divide row 1 by 3:
3. Subtract  $1/3$  (row 2) from row 3:
4. Multiply row 3 by 3/11:
5. Subtract 4 (row 3) from row 2:
6. Subtract 3 (row 3) from row 1:
7. Divide row 2 by 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Do row reduction:  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -3 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

The following steps are done sequentially:

1. Swap row 1 with row 2:
2. Add  $3/5$  (row 1) to row 2:
3. Multiply row 1 by -1:
4. Multiply row 2 by -5:
5. Add  $3/5$  (row 1) to row 3:
6. Multiply row 3 by 5:
7. Subtract  $2/5$  (row 1) from row 4:
8. Multiply row 4 by 5:
9. Swap row 2 with row 3:
10. Subtract  $2/7$  (row 2) from row 3:

11. Multiply row 3 by  $-7/5$ :
12. Add  $11/14$  (row 2) to row 4:
13. Multiply row 4 by  $14/5$ :
14. Add  $1/3$  (row 3) to row 4:
15. Multiply row 4 by  $3/259$ :
16. Subtract 7 (row 4) from row 3:
17. Subtract 5 (row 4) from row 1:
18. Divide row 3 by 3:
19. Subtract 11 (row 3) from row 2:
20. Add 8 (row 3) to row 1:
21. Divide row 2 by 14:
22. Add 2 (row 2) to row 1:
23. Divide row 1 by 5:

De matrix staat nu wel in gereduceerde echelon vorm, maar dat is ook een echelon vorm ;) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## oef 2

## oef 3

### Echelonvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - 3 \cdot R1$$

$$R4 \mapsto R4 - 4 \cdot R1$$

$$R5 \mapsto R5 - 5 \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & -3 & -11 & -14 & -17 \\ 0 & -9 & -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

$$R3 \mapsto R3 - 2 \cdot R2$$

$$R4 \mapsto R4 - 2 \cdot R2$$

$$R5 \mapsto R5 - 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 60 \end{pmatrix}$$

Wissel R3 en R4

$$R5 \mapsto R5 + R4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

**Rij-gereduceerde vorm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**oef 4**

**a)**

Het oplossingsstelsel is bijna letterlijk af te lezen:  
Stel  $t = \lambda$  dan is:

$$\begin{aligned} x &= -4\lambda - 1 \\ y &= -2\lambda + 6 \\ z &= -3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt de oplossingsverzameling:

$$V = \{(-4\lambda - 1, -2\lambda + 6, -3\lambda + 2, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

**b)**

Dit triviaal direct te bepalen door de laatste rij:

$$V = \emptyset$$

**oef 5****oef 6****a)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 14 & 16 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(4, -3, 2)\}$$

**b)**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1 - 10t, 1 + 13t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

**c)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

**d)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1, 2a, a, -3b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

**oef 7****a)**

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 8 \\ 4 & -5 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$R3 \mapsto R3 - 3 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$z = 4$$

$$y = -4 - 1 = -5$$

$$2x = -(-3 \cdot -5) + 8 = -7$$

$$x = -7/2$$

Antwoord:

$$V = \{(-\frac{7}{2}, -5, 4)\}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -10 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$R1 \leftrightarrow R3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 6 \\ 4 & -10 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1/3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -10 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 4 \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 + 3 \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \leftrightarrow R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(-\frac{\lambda+1}{2} + 2, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - 3 \cdot R1$$

$$R4 \mapsto R4 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R2 \leftrightarrow R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto -1 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R3 \mapsto R3 + 3 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R3 \leftrightarrow R4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$R3 \mapsto \frac{R3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$R4 \mapsto R4 - 11 \cdot R3$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(-\frac{175}{8}, -\frac{135}{8}, -\frac{31}{16}, \frac{17}{16})\}$$

**oef 8**

**oef 9**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 6 & -2 & 11 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 3 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 0 & -5 & -10 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto -\frac{1}{5}R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 + 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & b_1 + \frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 0 & 0 & (b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \end{pmatrix}$$

Antwoord:

Als  $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) = 0$  dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Als  $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \neq 0$  dan heeft het stelsel geen oplossingen ( $V = \emptyset$ )

**oef 10**

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & 3 - 2h & k - 2 \end{pmatrix}$$

**a) Geen oplossing:**

Als  $h = \frac{3}{2}$  en  $k \neq 2$

**b) Unieke oplossing:**

Als  $h \neq \frac{3}{2}$

**c) Meerdere oplossingen:**

Als  $h = \frac{3}{2}$  en  $k = 2$

**oef 11**

**oef 12**

**a)**

Wissel R1 en R3, en daarna R2 en R1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - R1$$

$$R3 \mapsto R3 - k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$$

Geval 1:  $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1-a-b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2:  $k \neq 1$

$$R2 \mapsto \frac{1}{k-1} R2$$

$$R3 \mapsto \frac{1}{1-k} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a:  $k = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2b:  $k \neq -2$

$$\begin{aligned} R3 &\mapsto \frac{1}{k+2} R3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} \\ R1 &\mapsto R1 - (k+1) \cdot R3 \\ R2 &\mapsto R2 + R3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Antwoord:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

### Samenvatting:

Als  $k = 1$  dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(1 - a - b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Als  $k = -2$  dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

**b)**

Wissel R1 en R2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ R2 &\mapsto R2 - k \cdot R1 \\ \begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k^2 & -k^2-k+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geval 1:  $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2:  $k = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 3:  $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

$$R2 \mapsto \frac{1}{1 - k^2} \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k + 1 \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - k \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2k^2+4k+1}{k+1} \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left( \frac{2k^2 + 4k + 1}{k + 1}, -\frac{k + 2}{k + 1} \right) \right\}$$

**Samenvatting:**

Als  $k = 1$  dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Als  $k = -1$  dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left( \frac{2k^2 + 4k + 1}{k + 1}, -\frac{k + 2}{k + 1} \right) \right\}$$

c)

$$\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Geval 1:  $k = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 - R2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2:  $k \neq 0$ :

$$R1 \mapsto \frac{1}{k} R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ k & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - k \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - 2k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & -2k-1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto \frac{-1}{k} R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2k-1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - \frac{k+1}{k} \cdot R2$$

$$R3 \mapsto R3 + (2k+1) \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2k-2 & k+1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a  $k = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left( \frac{t}{k}, t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geval 2b  $k \neq -1$ :

$$\begin{aligned} R3 &\mapsto \frac{1}{-2k-2} R3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ R1 &\mapsto R1 - \frac{k+2}{k} \cdot R3 \\ R2 &\mapsto R2 + R3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{k+2}{k} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left( 2\frac{k+2}{k}, -2, -2 \right) \right\}$$

**Samenvatting:**

Als  $k = 0$  dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Als  $k = -1$  dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \left\{ \left( \frac{t}{k}, t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left( 2\frac{k+2}{k}, -2, -2 \right) \right\}$$

**oef 13**

De onderlinge stand van twee rechten bestaat uit 3 mogelijkheden:

1. Evenwijdig = geen oplossing voor het stelsel.  
 $1 - ca = 0$  en  $d - bc \neq 0$
2. Samenvallend = oneindig veel oplossingen voor het stelsel.  
 $1 - ca = 0$  en  $d - bc = 0$
3. Snijdend = een unieke oplossing voor het stelsel.  
 $1 - ca \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \end{pmatrix} \\ R2 &\mapsto R2 - c \cdot R1 \\ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 - ca & d - cb \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oef 14

oef 15

Wissel R1 en R3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - a \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ 0 & 1-a & b-a^2b & 1-a \\ 0 & a-1 & b-ab & 0 \end{pmatrix}$$

Geval 1:  $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1-p-bq, p, q) | p, q \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2:  $a \neq -1$

$$R2 \mapsto \frac{1}{1-a} \cdot R2$$

$$R3 \mapsto \frac{1}{1-a} \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & -1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 + R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & b(2+a) & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a:  $b = 0 \vee a = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2b:  $b \neq 0 \wedge a \neq -2$

$$R3 \mapsto \frac{1}{b(2+a)} \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b(2+a)} \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R2 + b \cdot R3$$

$$R2 \mapsto R2 - b(1+a) \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b(2+a)} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left( 0, \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)}, \frac{1}{b(2+a)} \right) \right\}$$

**Samenvatting:**

Als  $b = 0 \vee a = -2$  dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(1 - p - bq, p, q) | p, q \in \mathbb{R}\}$$

Als  $k = -1$  dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left( 0, \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)}, \frac{1}{b(2+a)} \right) \right\}$$

## 2 Opdrachten

### opdracht 1.2

Om op een matrix een ERO uit te voeren, berekenen we eigenlijk de vermenigvuldiging van de matrix met de corresponderende elementaire matrix. Dus:  $M' = M \cdot E$ . Om de ERO om te keren vermenigvuldigen we  $M'$  met een matrix  $E^{-1}$  zodat  $M' \cdot E^{-1} = M \cdot I = M$ . Om aan te tonen dat alle elementaire rijoperaties inverteerbaar zijn, tonen we het aan voor elk van de EROs. Elk van de EROs komt overeen met een elementaire matrix (zie p 36). We bewijzen dat deze inverteerbaar zijn door de de inverse te construeren.

$$R_i \rightarrow \lambda R_i$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$



met de  $\lambda$  op rij  $i$ .  
De inverse hiervan is

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$R_i \leftrightarrow R_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

met de eerste 1, niet op de hoofddiagonaal, op rij  $i$  en de tweede op rij  $j$ .  
De inverse hiervan is  $E^{-1} = E$

$R_i \rightarrow R_i \lambda R_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

met de  $\lambda$  op rij  $i$ , kolom  $j$ .  
De inverse hiervan is

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**opdracht 1.23**

**opdracht 1.33**