

Oplossingen Lineaire Algebra 2013

TODO

September 27, 2013

Contents

1	Oefeningen	3
2	Opdrachten	8
3	Extra bewijzen	8

1 Oefeningen

oef 1

oef 2

oef 3

Echelonvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - 3 \cdot R1$$

$$R4 \mapsto R4 - 4 \cdot R1$$

$$R5 \mapsto R5 - 5 \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & -3 & -11 & -14 & -17 \\ 0 & -9 & -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

$$R3 \mapsto R3 - 2 \cdot R2$$

$$R4 \mapsto R4 - 2 \cdot R2$$

$$R5 \mapsto R5 - 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 60 \end{pmatrix}$$

Wissel R3 en R4

$$R5 \mapsto R5 + R4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

Rij-geredeuceerde vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oef 4

oef 5

oef 6

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 14 & 16 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(4, -3, 2)\}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1 - 10t, 1 + 13t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1, 2a, a, -3b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

oef 7

oef 8

oef 9

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 6 & -2 & 11 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - 3 \cdot R1$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 0 & -5 & -10 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto -\frac{1}{5}R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 + 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & b_1 + \frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 0 & 0 & (b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \end{pmatrix}$$

Antwoord:

Als $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) = 0$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Als $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \neq 0$ dan heeft het stelsel geen oplossingen ($V = \emptyset$)

oef 10

oef 11

oef 12

a)

Wissel R1 en R3, en daarna R2 en R1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - R1$$

$$R3 \mapsto R3 - k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$$

Geval 1: $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1 - a - b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2: $k \neq 1$

$$R2 \mapsto \frac{1}{k-1} R2$$

$$R3 \mapsto \frac{1}{1-k} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - R2$$

$$R3 \mapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a: $k = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2b: $k \neq -2$

$$R3 \mapsto \frac{1}{k+2} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - (k+1) \cdot R3$$

$$R2 \mapsto R2 + R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

Samenvatting:

Als $k = 1$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(1 - a - b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Als $k = -2$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies één oplossing:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

b)

Wissel R1 en R2

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R2 \mapsto R2 - k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k^2 & -k^2-k+2 \end{pmatrix}$$

Geval1: $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(2-t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Geval2: $k = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval3: $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

$$R2 \mapsto \frac{1}{1-k^2} \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$

$$R1 \mapsto R1 - k \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2k^2+4k+1}{k+1} \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(\frac{2k^2 + 4k + 1}{k + 1}, -\frac{k + 2}{k + 1} \right) \right\}$$

Samenvatting:

Als $k = 1$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(2 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Als $k = -1$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies één oplossing:

$$V = \left\{ \left(\frac{2k^2 + 4k + 1}{k + 1}, -\frac{k + 2}{k + 1} \right) \right\}$$

c)

2 Opdrachten

opdracht 1.2

opdracht 1.23

opdracht 1.33

3 Extra bewijzen

1.10

1.44