Oplossingen Lineaire Algebra 2013

TODO

October 3, 2013

Contents

1 Oefeningen 1.7.1

oef 1

Echelonvorm

a)

Do row reduction: $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
The following steps are done sequentially:

1. Add 2/3 x row 1 to row 2
2. Divide row 1 by 3:
3. Subtract 1/3 (row 2) from row 3:
4. Multiply row 3 by 3/11:
5. Subtract 4 (row 3) from row 2:
6. Subtract 3 (row 3) from row 1:
7. Divide row 2 by 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Do row reduction: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -3 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$
The following steps are done sequentially:

1. Swap row 1 with row 2:
2. Add 3/5 (row 1) to row 2:
3. Multiply row 1 by -1:
4. Multiply row 2 by -5:
5. Add 3/5 (row 1) to row 3:
6. Multiply row 3 by 5:
7. Subtract 2/5 (row 1) from row 4:
8. Multiply row 4 by 5:
9. Swap row 2 with row 3:
10. Subtract 2/7 (row 2) from row 3:

11. Multiply row 3 by -7/5:
12. Add 11/14 (row 2) to row 4:
13. Multiply row 4 by 14/5:
14. Add 1/3 (row 3) to row 4:
15. Multiply row 4 by 3/259:
16. Subtract 7 (row 4) from row 3:
17. Subtract 5 (row 4) from row 1:
18. Divide row 3 by 3:
19. Subtract 11 (row 3) from row 2:
20. Add 8 (row 3) to row 1:
21. Divide row 2 by 14:
22. Add 2 (row 2) to row 1:
23. Divide row 1 by 5:

De matrix staat nu wel in gereduceerde echelon vorm, maar dat is ook een echelon vorm ;) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oef 2

oef 3

Echelonvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - 2 \cdot R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - 3 \cdot R1$$

$$R4 \longmapsto R4 - 4 \cdot R1$$

$$R5 \longmapsto R5 - 5 \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & -3 & -11 & -14 & -17 \\ 0 & -9 & -13 & -17 & -21 \end{pmatrix}$$

$$R3 \longmapsto R3 - 2 \cdot R2$$
$$R4 \longmapsto R4 - 2 \cdot R2$$
$$R5 \longmapsto R5 - 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 60 \end{pmatrix}$$

Wissel R3 en R4

$$R5 \longmapsto R5 + R4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}$$

Rij-geredeuceerde vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oef 4

a)

Het oplossingsstelsel is bijna letterlijk af te lezen:
Stel $t = \lambda$ dan is:

$$\begin{aligned} x &= -4\lambda - 1 \\ y &= -2\lambda + 6 \\ z &= -3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt de oplossingsverzameling:

$$V = \{(-4\lambda - 1, -2\lambda + 6, -3\lambda + 2, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

b)

Dit triviaal direct te bepalen door de laatste rij:

$$V = \emptyset$$

oef 5

oef 6

a)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 6\\ 3 & 8 & 14 & 16\\ 2 & 6 & 11 & 12\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(4, -3, 2)\}$$

b)

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & -3 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 7\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 10 & 1\\ 0 & 1 & -13 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1 - 10t, 1 + 13t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

c)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 7\\ 5 & 3 & -4 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{7} & 0\\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

d)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2\\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1, 2a, a, -3b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

oef 7

oef 8

oef 9

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 7 & b_1\\ 6 & -2 & 11 & b_2\\ 2 & -1 & 3 & b_3\end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - 3 \cdot R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 7 & b_1\\ 0 & -5 & -10 & b_2 - 3b_1\\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1\end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto -\frac{1}{5}R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & -2 & -4 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - R2$$

$$R3 \longmapsto R3 + 2 \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & b_1 + \frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{5}(b_2 - 3b_1) \\ 0 & 0 & 0 & (b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \end{pmatrix}$$

Antwoord:
Als $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) = 0$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.
Als $(b_3 - b_1) - \frac{2}{5}(b_2 - 3b_1) \neq 0$ dan heeft het stelsel geen oplossingen ($V = \emptyset$)

oef 10

oef 11

1

oef 12

a)

Wissel R1 en R3, en daarna R2 en R1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$$

Geval 1: $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1 - a - b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2: $k \neq 1$

$$R2 \longmapsto \frac{1}{k-1}R2$$

$$R3 \longmapsto \frac{1}{1-k}R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - R2$$

$$R3 \longmapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a: $k = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2b: $k \neq -2$

$$R3 \longmapsto \frac{1}{k+2} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - (k+1) \cdot R3$$

$$R2 \longmapsto R2 + R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

Samenvatting:
Als $k = 1$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(1 - a - b, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Als $k = -2$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \{(\frac{3}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})\}$$

b)

$$\text{Wissel R1 en R2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$R2 \longmapsto R2 - k \cdot R3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1-k^2 & -k^2-k+2 \end{pmatrix}$$

Geval 1: $k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(2-t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2: $k = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 3: $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

$$R2 \longmapsto \frac{1}{1-k^2} \cdot R2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$
$$R1 \longmapsto R1 - k \cdot R2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2k^2+4k+1}{k+1} \\ 0 & 1 & -\frac{k+2}{k+1} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(\frac{2k^2+4k+1}{k+1}, -\frac{k+2}{k+1} \right) \right\}$$

Samenvatting:
Als $k = 1$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(2-t, t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Als $k = -1$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left(\frac{2k^2+4k+1}{k+1}, -\frac{k+2}{k+1} \right) \right\}$$

c)

$$\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Geval 1: $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - R2$$

$$R3 \longmapsto R3 - R2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2: $k \neq 0$:

$$R1 \longmapsto \frac{1}{k} R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ k & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - k \cdot R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - 2k \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & -2k-1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto \frac{-1}{k} R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k+1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2k-1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - \frac{k+1}{k} \cdot R2$$

$$R3 \longmapsto R3 + (2k+1) \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2k-2 & k+1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(\frac{t}{k}, t, t \right) | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geval 2b $k \neq -1$:

$$R3 \longmapsto \frac{1}{-2k-2} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{k+2}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - \frac{k+2}{k} \cdot R3$$

$$R2 \longmapsto R2 + R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\frac{k+2}{k} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(2\frac{k+2}{k}, -2, -2 \right) \right\}$$

Samenvatting:
Als $k = 0$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Als $k = -1$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \left\{ \left(\frac{t}{k}, t, t \right) | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left(2\frac{k+2}{k}, -2, -2 \right) \right\}$$

oef 13

oef 14

oef 15

Wissel R1 en R3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - a \cdot R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ 0 & 1-a & b-a^2b & 1-a \\ 0 & a-1 & b-ab & 0 \end{pmatrix}$$

Geval 1: $a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \{(1-p-bq, p, q) | p, q \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2: $a \neq -1$

$$R2 \longmapsto \frac{1}{1-a} \cdot R2$$

$$R3 \longmapsto \frac{1}{1-a} \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ab & 1 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & -1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - R2$$

$$R3 \longmapsto R3 + R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & b(2+a) & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 2a: $b = 0 \vee a = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2b: $b \neq \wedge a \neq -2$

$$R3 \longmapsto \frac{1}{b(2+a)} \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & b(1+a) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b(2+a)} \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R2 + b \cdot R3$$

$$R2 \longmapsto R2 - b(1+a) \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b(2+a)} \end{pmatrix}$$

Antwoord:
$$V = \left\{ \left(0, \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)}, \frac{1}{b(2+a)} \right) \right\}$$

Samenvatting:
Als $b = 0 \vee a = -2$ dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen:

$$V = \{(1-p-bq, p, q) | p, q \in \mathbb{R}\}$$

Als $k = -1$ dan heeft het stelsel geen oplossingen:

$$V = \emptyset$$

Anders heeft het stelsel precies n oplossing:

$$V = \left\{ \left(0, \frac{b(2+a)-1}{b(2+a)}, \frac{1}{b(2+a)} \right) \right\}$$

Extra (oefenzitting)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & 4y & + & az & = & 0 \\ x & + & ay & + & 3z & = & b \\ (a+1)x & + & (a+4)y & + & (a-b^2)z & = & b-2 \end{array} \right\}$$

De matrix die hiermee overeen komt is:

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a & 0 \\ 1 & a & 3 & b \\ (a+1) & (a+4) & (a-b^2) & (b-2) \end{pmatrix}$$

Wissel R1 en R2

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & b \\ a & 4 & a & 0 \\ (a+1) & (a+4) & (a-b^2) & (b-2) \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - a \cdot R1$$

$$R3 \longmapsto R3 - (a+1) \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 4-a^2 & -2a & -ab \\ 0 & 4-a^2 & -b^2-2a-3 & -2-ab \end{pmatrix}$$

Geval 1: $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -4 & -2b \\ 0 & 0 & -b^2-7 & -2-2b \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto \frac{-1}{4} R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -b^2-7 & -2-2b \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - 3 \cdot R2$$

$$R3 \longmapsto R3 + (b^2+7) \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^3+3b-4}{2} \end{pmatrix}$$

Vereenvoudig

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b^3+3b-4 \end{pmatrix}$$

Geval 1a: $b = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(-\frac{1}{2} - 2\lambda, \lambda, \frac{1}{2} \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Geval 1b: $b \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b^3+3b-4 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 2: $a = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 4 & 2b \\ 0 & 0 & 1-b^2 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto \frac{1}{4} \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1-b^2 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - 3 \cdot R2$$

$$R3 \longmapsto R3 - (1-b^2) \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^3+3b-4}{2} \end{pmatrix}$$

Vereenvoudig

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b^3+3b-4 \end{pmatrix}$$

Geval 2a: $b = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(2\lambda - \frac{1}{2}, \lambda, \frac{1}{2} \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Geval 2b: $b \neq 1$

$$R3 \longmapsto \frac{1}{b^3+3b-4} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \emptyset$$

Geval 3: $a \neq 2 \wedge a \neq -2$

$$R2 \longmapsto \frac{1}{4-a^2} R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 1 & \frac{-2a}{4-a^2} & \frac{-ab}{4-a^2} \\ 0 & 4-a^2 & -b^2-2a-3 & -2-ab \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - a \cdot R2$$

$$R3 \longmapsto R3 - (4-a^2) \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{12-a^2}{4-a^2} & \frac{4b}{4-a^2} \\ 0 & 1 & \frac{-2a}{4-a^2} & \frac{-ab}{4-a^2} \\ 0 & 0 & -b^2-3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R3 \longmapsto -\frac{1}{b^2+3} R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{12-a^2}{4-a^2} & \frac{4b}{4-a^2} \\ 0 & 1 & \frac{-2a}{4-a^2} & \frac{-ab}{4-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{b^2+3} \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - \frac{12-a^2}{4-a^2} \cdot R3$$

$$R2 \longmapsto R2 + \frac{2a}{4-a^2} \cdot R3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4b^3+2a^2-12}{(4-a^2)(b^2+3)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-ab^3-3ab+4a}{(4-a^2)(b^2+3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{b^2+3} \end{pmatrix}$$

Antwoord:

$$V = \left\{ \left(\frac{4b^3 + 2a^2 - 12}{(4-a^2)(b^2+3)}, \frac{-ab^3 - 3ab + 4a}{(4-a^2)(b^2+3)}, \frac{2}{b^2+3} \right) \right\}$$

Samenvatting:

- $a = 2$
  - $b = 1$
    $$V = \left\{ \left(-\frac{1}{2} - 2\lambda, \lambda, \frac{1}{2} \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
  - $b \neq 1$
    $$V = \emptyset$$
- $a = -2$
  - $b = 1$
    $$V = \left\{ \left(2\lambda - \frac{1}{2}, \lambda, \frac{1}{2} \right) | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
  - $b \neq 1$
    $$V = \emptyset$$
- $a \neq 2 \wedge a \neq -2$
  $$V = \left\{ \left(\frac{4b^3 + 2a^2 - 12}{(4-a^2)(b^2+3)}, \frac{-ab^3 - 3ab + 4a}{(4-a^2)(b^2+3)}, \frac{2}{b^2+3} \right) \right\}$$

2 Oefeningen 1.7.2

oef 4

a)

Proof. Bewijs uit het ongerijmde:
Stel $A \neq 0$, neem X_1 en X_2 zodat $AX_1 = 0$ en $AX_2 = 0$ met $X_1 \neq X_2$

$$AX_1 = AX_2 = 0$$

Omdat $A = A$ zijn X_1 en X_2 gelijk. Contradictie. □

b)

Proof. Rechtstreeks bewijs:

$$AX = BX \Leftrightarrow AX - BX = 0$$

Dus $(A - B)X = 0$. Dit betekent volgens de stelling in 4.a dat $A - B = 0$. Nu zien we dat $A = B$. □

oef 9

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto \frac{1}{a}R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 - c \cdot R1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{bc}{a} & \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto -\frac{a}{bc}R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} \end{pmatrix}$$

$$R1 \longmapsto R1 - \frac{b}{a} \cdot R2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} \end{pmatrix}$$

De inverse van

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

is dus

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{a} & -\frac{b}{a} \\ -\frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} \end{pmatrix}$$

Waarbij a,b,c niet nul mogen zijn.
Nu hebben we dus het stelsel:

$$\begin{cases} a & = \frac{2}{a} \\ b & = -\frac{b}{a} \\ c & = -\frac{1}{b} \\ d & = -\frac{a}{bc} \end{cases}$$

De oplossingen van de stelsel zijn geven een antwoord op te vraag.

oef 16

a)

Te bewijzen: A is inverteerbaar $\Rightarrow \nexists k \; A^k = 0$

Proof. We bewijzen een equivalente bewering:

$$\exists k \geq 1 : \; A^k = 0 \Rightarrow \quad \text{A is niet inverteerbaar}$$

Bewijs door volledige inductie:
Stap 1 $k = 1$: $A = 0$ (basis) A is niet inverteerbaar.

Stap 2: Stel dat de stelling waar is voor een bepaalde $n = k$. (inductiehypothese)
Stap 3: We bewijzen dat de stelling waar is voor $n = k + 1$. (inductiestap)

$$A^{k+1} = 0 \Leftrightarrow A^k \cdot A = 0$$

Door de inductiehypothese weten we dat A^k niet inverteerbaar is. Dat betekent dat A^k rij-equivalent is met een matrix met een nulrij. $A^k \cdot A$ is dus ook niet inverteerbaar. □

b)

Proof. Als we een matrix $\mathbb{I} - A$ vermeningvuldigen met zijn inverse $(\mathbb{I} + A + A^2 + ... + A^{k+1})$ zouden we $\mathbb{I}$ moeten uitkomen.

$$\begin{aligned} &(\mathbb{I} - A)(\mathbb{I} + A + A^2 + ... + A^{k+1}) \\ &= \mathbb{I}^2 - A + A - A^2 + A^2 - ... - A^{k-1} + A^{k-1} - A^k \\ &= \mathbb{I} - A^k \end{aligned}$$

Omdat A nilpotent is met $A^k = 0$, is dit gelijk aan $\mathbb{I}$ □

oef 22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R2 + R1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R2 \longmapsto R3 + R1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu weten we dat

$$E_2 \cdot E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Dus

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

heeft als oplossingsverzameling:

$$V = \{(4, 3, 1)\}$$

b)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$$

heeft als oplossingsverzameling:

$$V = \{(6, 4, 2)\}$$

3 Opdrachten

opdracht 1.2

Om op een matrix een ERO uit te voeren, berekenen we eigenlijk de vermenigvuldiging van de matrix met de corresponderende elementaire matrix. Dus: $M' = M \cdot E$. Om de ERO om te keren vermenigvuldigen we M' met een matrix E^{-1} zodat $M' \cdot E^{-1} = M \cdot I = M$. Om aan te tonen dat alle elementaire rijoperaties inverteerbaar zijn, tonen we het aan voor elk van de EROs. Elk van de EROs komt overeen met een elementaire matrix (zie p 36). We bewijzen dat deze inverteerbaar zijn door de de inverse te construeren.

$R_i \to \lambda R_i$

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

met de λ op rij i.
De inverse hiervan is

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$R_i \leftrightarrow R_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

met de eerste 1, niet op de hoofddiagonaal, op rij i en de tweede op rij j.
De inverse hiervan is $E^{-1} = E$

$R_i \to R_i \lambda R_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

met de λ op rij i, kolom j.
De inverse hiervan is

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

opdracht 1.23

opdracht 1.33