Zelfreflectie hoofdstuk 3

1. Ga na welke eigenschappen horen bij de volgende twee verzamelingen.

   $\{(1,0),(0,1)\}$

   - ∘ vrij
   - ∘ niet vrij
   - ∘ lineair onafhankelijk
   - ∘ lineair afhankelijk

   $\{(1,0,1),(1,0,2),(1,0,3)\}$

   - ∘ vrij
   - ∘ niet vrij
   - ∘ lineair onafhankelijk
   - ∘ lineair afhankelijk

2. Zij V een reële vectorruimte met optelling $\boxplus$ en scalaire vermenigvuldiging $\boxdot$. Welke van volgende uitdrukkingen is de correcte formulering van gemengde associativiteit?

   - $\lambda_1.(\lambda_2.v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2).v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $v \in V$.
   - $\lambda_1 \boxdot (\lambda_2 \boxdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \boxdot v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $v \in V$.
   - $\lambda_1 \boxdot (\lambda_2 \boxdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2).v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $v \in V$.
   - $\lambda_1 \boxplus (\lambda_2 \boxdot v) = (\lambda_1 \boxplus \lambda_2) \boxdot v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $v \in V$.

3. Kan een reële vectorruimte een eindige verzameling zijn?

4. Net als het gepunte vlak zoals beschreven in voorbeeld 3.1, kan men de gepunte (driedimensionale) ruimte beschouwen. Hierin worden vectoren opnieuw opgeteld via de parallellogramregel en ook de scalaire vermenigvuldiging verloopt analoog aan die in het gepunte vlak.

   Bepaal nu in de gepunte ruimte de vectorruimte voortgebracht door één, twee, drie, vier, enz. vectoren. Hou hierbij rekening met de onderlinge ligging van die vectoren. Kan je op die manier beschrijven hoe alle deelruimten van de gepunte ruimte eruit zien? Kan je ook beschrijven wat het betekent voor één, twee, drie, enz. vectoren om lineair onafhankelijk te zijn? Hoe ziet een basis van de gepunte ruimte eruit?

5. Bewijs dat een basis minimaal voortbrengend en maximaal vrij is.

6. Zij $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Zij A de matrix met in de kolommen de vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Toon aan: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vormen een basis van $\mathbb{R}^n$ als en slechts als $\det(A) \neq 0$. Wat als we voor A de matrix nemen met in de *rijen* de vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

7. Zij V een reële eindigdimensionale vectorruimte en U en W deelruimten van V zodat $V = U + W$. Bewijs dat $\dim U + \dim W = \dim V$ als en slechts als $V = U \oplus W$.

8. *(p. 96)* Toon Propositie 3.14 aan voor oneindig veel deelruimten.

9. *(p. 96)* Toon aan dat de verzameling van alle lineaire combinaties van elementen uit D een deelruimte is.

10. *(p. 101)* Wat is er anders in Propositie 3.26 wanneer D oneindig in plaats van eindig is? Mogen we ook $k = \infty$ nemen?

11. *(p. 111)* Gebruik dezelfde notatie als in Stelling 3.45 en neem $w_1, \ldots, w_n \in V$. Toon aan dat $\{w_1, \ldots, w_n\}$ vrij is als en slechts als $\{co_\beta(w_1), \ldots, co_\beta(w_n)\}$ vrij is.

12. Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^m$. Toon aan dat

   $$\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$$

   een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$ als en slechts als $B = 0$.

13. Ga na dat de verzameling $\{1, X, \ldots, X^n, \ldots\}$ een basis is van $\mathbb{R}[X]$.

14. Zij V een vectorruimte en $\beta \subset V$ een eindige deelverzameling van V. Toon aan: als elke vector van V op een unieke manier kan geschreven worden als een lineaire combinatie van vectoren in β, dan is β een basis van V.
15. Ga in ander vakken (meetkunde, analyse, informatica, fysica, ...) op zoek naar wiskundige structuren met een vectorruimtestructuur.