Zelfreflectie Hoofdstuk 5

1. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte, $L : V \to V$ een lineaire transformatie en α een basis van V. Dan geldt er $\text{Spec}(L) = \text{Spec}(L_\alpha^\alpha)$.

2. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte van dimensie n en $T : V \to V$ een lineaire transformatie van V. Juist of fout:
$$1 \leq m(\lambda) \leq d(\lambda) \leq n$$
waarbij $\lambda \in \text{Spec}(L)$?

3. Verklaar de zin boven Gevolg 5.9 op pagina 182.

4. Argumenteer welke van de volgende matrices diagonaliseerbaar zijn:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Hebben twee matrices met dezelfde rijgereduceerde vorm dezelfde eigenwaarden?

6. Zij $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met Q inverteerbaar. We hebben gezien dat $Q^{-1}AQ$ en A dezelfde eigenwaarden hebben. Stel dat v een eigenvector is van A met eigenwaarde λ. Kan je expliciet een eigenvector van $Q^{-1}AQ$ met eigenwaarde λ opschrijven?

7. Beschouw Stelling 5.8 op pagina 182. Welke kenmerken hebben gelijkvormige matrices nog meer gemeen (bijvoorbeeld: nulruimte, kolomruimte, ...)?

8. Juist of fout? De eigenruimte van de eigenwaarde λ bevat precies alle eigenvectoren horende bij λ.

9. Juist of fout?
   (a) Elke matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar over $\mathbb{C}$.
   (b) Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$ is automatisch diagonaliseerbaar over $\mathbb{C}$.

10. Toon aan dat de determinant en het spoor van $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ respectievelijk gelijk zijn aan het product en de som van alle (complexe) eigenwaarden van A, waarbij elke eigenwaarde geteld wordt met haar algebraïsche multipliciteit.

11. Zoek de fout in de volgende redenering.
Zij $\mathcal{L} : V \to V$ een lineaire transformatie. Door Stelling 4.34 toe te passen op deze transformatie vindt men een matrixvoorstelling L van $\mathcal{L}$ van de vorm
$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
met r de rang van $\mathcal{L}$. Dus $\mathcal{L}$ is diagonaliseerbaar met $\text{Spec}(\mathcal{L}) = \{1, 0\}$.