Zelfreflectie Hoofdstuk 4

1. Hoe ziet een willekeurige lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ eruit?
2. Zij V en W vectorruimten. Is $\{f : V \to W \mid f \text{ is niet lineair}\}$ een vectorruimte?
3. Zij V en W vectorruimten.
   (a) Bestaan er twee verschillende lineaire afbeeldingen van V naar W waarmee dezelfde matrix overeenkomt?
   (b) Bestaan er twee verschillende matrices waarmee dezelfde lineaire afbeelding van V naar W overeenkomt?
4. Bewijs in detail dat twee eindigdimensionale vectorruimten isomorf zijn als en slechts als ze dezelfde dimensie hebben.
5. Zij V en W vectorruimten met als basis respectievelijk $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ en zij $L : V \to W$ een lineaire afbeelding. Leg in detail uit hoe L_α^β eruit ziet.
6. Zij α en β basissen van een vectorruimte V. Zij A de matrix van basisverandering van α naar β en zij $L : V \to V$ de lineaire afbeelding waarvoor geldt dat $L_\alpha^\beta = A$. Waarom is er dan altijd voldaan aan $L(v) = v$ voor alle $v \in V$?
7. Bewijs Gevolg 4.39.
8. Zij V een vectorruimte en zij $\lambda \in \mathbb{R}$. Is $L_\lambda : V \to V : v \mapsto \lambda v$ een lineaire afbeelding?
9. Zij $L : V_1 \to V_2$ een lineaire afbeelding tussen twee vectorruimten. Zij U_2 een deelruimte van V_2. Toon dan aan dat $U_1 = \{x \in V \mid L(x) \in U_2\}$ een deelruimte is van V_1.
10. Herformuleer Stelling 4.12 door gebruik te maken van het begrip *isomorfisme*.
11. Zij $G : U \to V$ en $L : V \to W$ lineaire afbeeldingen. Waar of fout: $L_\beta^\gamma G_\alpha^\beta = (L \circ G)_\alpha^\gamma$?
12. Ga na waar en hoe je de bevindingen in Opmerking 4.7 gebruikt in dit hoofdstuk.
13. Zij V en W vectorruimten van dimensie resp. n en m, met resp. basissen β_V en β_W. Toon aan dat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ isomorf is met de vectorruimte van reële $(m \times n)$-matrices. Construeer met behulp van β_V en β_W een basis voor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$. Je kan inspiratie zoeken in de standaardbasis van $\mathbb{R}^{m \times n}$.
14. Toon aan dat Gevolg 4.35 ook geldt voor een lineaire afbeelding tussen verschillende vectorruimten V en W op voorwaarde dat $\dim V = \dim W$.
15. Inspireer je op het bewijs van de dimensiestelling om Stelling 4.34 te bewijzen.
16. Zij $AX = B$ een stelsel eerstegraadsvergelijkingen met drie onbekenden. We weten dat de nulruimte van de coëfficiëntenmatrix A een deelruimte is van $\mathbb{R}^3$, dus een triviale deelruimte, of een rechte of vlak door de oorsprong. Kan je met behulp van Stelling 4.43 in elk van die gevallen een meetkundige interpretatie geven voor de oplossingsverzameling van $AX = B$ als $B \neq 0$?