

Roll No .....

AI/AL/CD-401 (GS)

B.Tech. IV Semester

Examination, June 2024

Grading System (GS)

Introduction to Discrete Structure and Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Let  $T$  be the set of positive integers less than 10 and let " $R$ " be the relation on  $T$  defined by  $aRb$  if and only if  $|a^2 - b^2|$  is a multiple of 5". Prove that  $R$  is reflexive, symmetric, but not transitive. 7

मान लीजिए  $T$ , 10 से कम धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय है और मान लीजिए " $R$ ",  $T$  पर संबंध  $aRb$  द्वारा परिभाषित है यदि और केवल यदि  $|a^2 - b^2|$ , 5 का गुणज है।" सिद्ध करें कि  $R$  रिफ्लेक्सिव, सममित है, लेकिन संक्रमक नहीं है।

- b) Consider a set  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15\}$  ordered by divisibility. Draw its Hasse diagram. 7

विभाज्यता द्वारा आदेशित एक सेट  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15\}$  पर विचार करें। इसका हैस आरेख बनाइए।

2. a) Consider two sets  $A$  and  $B$ . Let  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  and  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ . Using Venn diagrams, prove the following statements: 7

Prove that  $(A \cup B) = A' \cap B'$ .

Prove that  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .

दो सेट  $A$  और  $B$  पर विचार करें। माना  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  और  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  है। वेन आरेखों का उपयोग करके, निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कीजिए।

सिद्ध कीजिए कि  $(A \cup B) = A' \cap B'$ .

सिद्ध कीजिए कि  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .

- b) Given the recurrence relation  $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2}$  with initial conditions  $a_0 = 2$  and  $a_1 = 5$ , determine the closed-form expression for the sequence. 7

प्रारंभिक स्थितियों  $a_0 = 2$  और  $a_1 = 5$  के साथ पुनरावृत्ति संबंध  $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2}$  को देखते हुए, अनुक्रम के लिए बंद-रूप अभिव्यक्ति निर्धारित करें।

3. a) Show that the set  $H = \{e, a, a^2, a^3\}$  is a subgroup of a group  $G$  where  $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ . 7

दिखाइए कि समुच्चय  $H = \{e, a, a^2, a^3\}$  समूह  $G$  का एक उपसमूह है जहाँ  $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$  है।

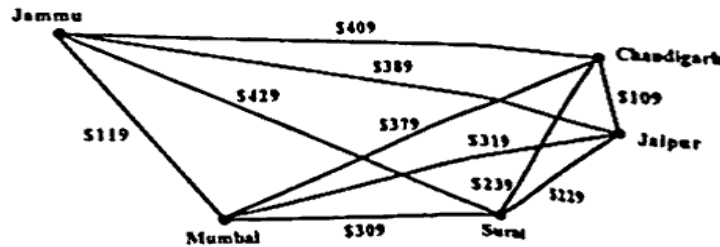
[3]

- b) Let  $(A, *)$  be a semigroup. Show that, for  $a, b, c$  in  $A$ , if  $a * c = c * a$  and  $b * c = c * b$ , then  $(a * b) * c = c * (a * b)$ .  
मान लीजिए  $(A, *)$  एक अर्ध समूह है, दर्शाइए कि  $A$  में  $a, b, c$  के लिए यदि  $a * c = c * a$  तथा  $b * c = c * b$ , तो  $(a * b) * c = c * (a * b)$  है।

4. a) Let  $G$  be a simple graph. Show that the relation  $R$  on the set of vertices of  $G$  such that  $uRv$  if and only if there is an edge associated to  $\{u, v\}$  is a *symmetric, irreflexive* relation on  $G$ .

मान लीजिए  $G$  एक सरल ग्राफ है। दिखाइए कि  $G$  के शीर्षों के समुच्चय पर संबंध  $R$ , इस प्रकार है कि  $uRv$  यदि और केवल यदि  $\{u, v\}$  से संबंध कोई किनारा है, तो  $G$  पर एक सममित, अपरिवर्तनीय संबंध है।

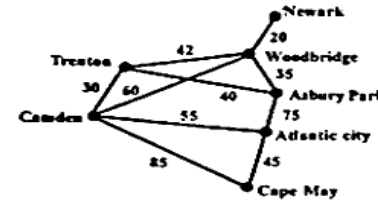
- b) Find a route with the least total airfare that visits each of the cities in this graph, where the weight on an edge is the least price available for a flight between the two cities.  
इस ग्राफ में प्रत्येक शहर के लिए सबसे कम कुल हवाई किराया वाला मार्ग खोजें, जहाँ किनारे पर भार दो शहरों के बीच उड़ान के लिए उपलब्ध सबसे कम कीमत है।



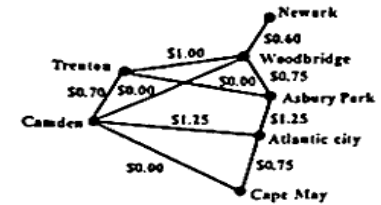
[4]

5. The weighted graphs in the figures here show some major roads in New Jersey.

Part (A) shows the distances between cities on these roads;  
Part (B) shows the tolls.



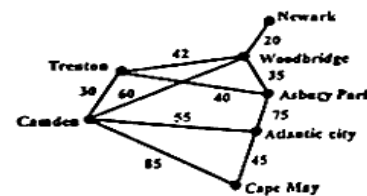
(A)



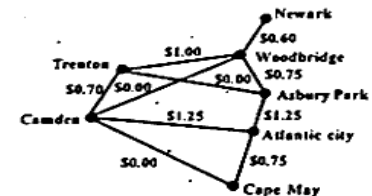
(B)

- a) Find a shortest route in distance between Newark and Camden, and between Newark and Cape May, using these roads.  
b) Find a least expensive route in terms of total tolls using the roads in the graph between the pairs of cities in part (A).

यहाँ दिए गए ग्राफ में न्यू जर्सी की कुछ प्रमुख सड़कें दिखाई गई हैं।  
भाग (A) में इन सड़कों पर शहरों के बीच की दूरी दिखाई गई है  
भाग (B) में टोल दिखाया गया है।



(A)



(B)

- अ) इन सड़कों का उपयोग करके न्यूआर्क और कैमडेन के बीच और न्यूआर्क और Cape May के बीच की दूरी में सबसे छोटा मार्ग खोजें।  
ब) भाग (A) में शहरों के जोड़े के बीच ग्राफ में सड़कों का उपयोग करके कुल टोल के संदर्भ में सबसे कम खर्चीला मार्ग ढूँढ़ें।

[5]

6. a) Calculate the gradient of the function  $f(X) = \text{Tr}(X^T X)$ , where  $X$  is a matrix. 7
- फंक्शन  $f(X) = \text{Tr}(X^T X)$  के ग्रेडिएंट की गणना करें, जहाँ  $X$  एक मैट्रिक्स है।

- b) Write a short note on Cholesky Decomposition. 7
- कोलेस्की अपघटन पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

7. a) Define Hypothesis. Write a short note on Null Hypothesis and Alternative Hypothesis. <https://www.rgpvonline.com> 7
- परिकल्पना को परिभाषित कीजिए। शून्य परिकल्पना तथा वैकल्पिक परिकल्पना पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

- b) Suppose the average salary of a principal in a college in the private sector is Rs. 45,000 per month, and a sample of 50 principals has a mean of Rs. 48,326 with a significance level of  $\alpha = 0.05$ . Can we claim that principals earn Rs. 45,000 per month, given that the standard deviation of the population is Rs. 1,523? 7

मान लीजिए कि निजी क्षेत्र के किसी कॉलेज में प्रिंसिपल का औसत वेतन 45,000 रुपये प्रति माह है, और 50 प्रिंसिपलों के नमूने का माध्य 48,326 रुपये है, जिसका महत्व स्तर  $\alpha = 0.05$  है। क्या हम यह दावा कर सकते हैं कि प्रिंसिपल 45,000 रुपये प्रति माह कमाते हैं, यह देखते हुए कि जनसंख्या का मानक विचलन 1,523 रुपये है।

[6]

8. Write short note on any two:

- a) Recurrence Relation  
b) Tautologies and Contradiction  
c) Time Series Analysis
- किन्हीं दो पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

- अ) पुनरावृत्ति संबंध  
ब) टॉटोलॉजी और विरोधाभास  
स) समय श्रृंखला विश्लेषण

\*\*\*\*\*

14