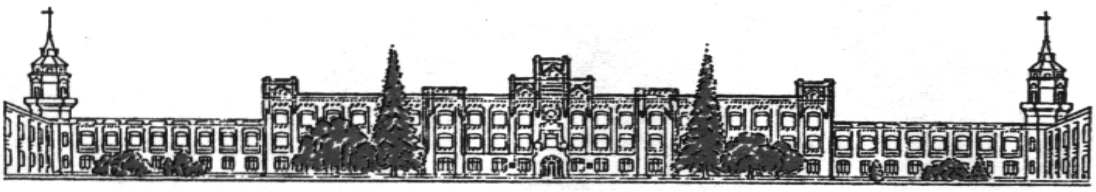


Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»
Кафедра системного проектування

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів напряму підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки», спеціальностей 8.05010102 «Інформаційні технології проектування» та 8.05010103 «Системне проектування» денної та заочної форм навчання

Склали: доц. БЕЗНОСИК ОЛЕКСАНДР ЮРІЙОВИЧ
доц. ЛАДОГУБЕЦЬ ВОЛОДИМИР ВАСИЛЬОВИЧ
доц. ФІНОГЕНОВ ОЛЕКСІЙ ДМИТРОВИЧ

Київ – 2013

Теорія прийняття рішень : Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів напряму підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки», спеціальностей 8.05010102 «Інформаційні технології проектування» та 8.05010103 «Системне проектування» денної та заочної форм навчання / Укл. О.Ю. Безносик, В.В. Ладогубець, О.Д. Фіногенов. – К. : НТУУ «КПІ», 2013. – 76 с.

Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 2 від 26.02.2013)

Укладачі: *Безносик Олександр Юрійович*, канд. техн. наук
Ладогубець Володимир Васильович, канд. техн. наук
Фіногенов Олексій Дмитрович, канд. техн. наук

Відповідальний редактор: *Г.Д. Кисельов*, к.т.н., доц.

Рецензент: *О.Л. Тимощук*, к.т.н., доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Теорія прийняття рішень» відноситься до циклу математичної, природничо-наукової підготовки; базується на знанні дисциплін «Теорія ймовірностей і математична статистика» та «Методи оптимізації» і використовується при вивченні дисциплін «Методи та засоби штучного інтелекту» та «Моделювання складних систем», а також в рамках магістерської підготовки.

Метою дисципліни є систематизоване викладання сучасного математичного апарату прийняття рішень в складних системах та набуття студентами необхідних знань в цій галузі та практичних навичок у розробці моделей, а також розв'язання практичних задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Завдання вивчення дисципліни полягає у формуванні системи наступних знань та умінь:

<u>Знання:</u>

- знання принципів і правил формалізації економічних ситуацій, здатність застосовувати математичні методи обґрунтування та прийняття управлінських і технічних рішень у різних ситуаціях;
- ґрунтовна математична підготовка та знання теоретичних, методичних і алгоритмічних основ інформаційних технологій для їх використання під час розв'язання прикладних і наукових завдань в області інформаційних систем і технологій.

<u>Уміння:</u>

- підготовленість до розроблення нових математичних методів, ефективних алгоритмів і методів реалізації функцій інформаційних систем і технологій в прикладних областях, зокрема під час розробки методів і систем штучного інтелекту;

– уміння застосовувати математичні методи обґрунтування та прийняття управлінських і технічних рішень, адекватних умовам, в яких функціонують об’єкти інформатизації.

Лабораторні роботи орієнтовані на студентів-бакалаврів, що навчаються за напрямом 6.050101 «Комп'ютерні науки» та суміжними напрямами галузі 0501 – «Інформатика та обчислювальна техніка». Роботи мають дослідницький характер. Для полегшення підготування студентів до лабораторних робіт у методичних вказівках наведено необхідні довідникові дані і матеріали. Бажано також, щоб лабораторні роботи стимулювали подальше поглиблене вивчення студентами теоретичного матеріалу [2-4;7-10] та сприяли оволодінню українською науково-технічною термінологією [3;7;9;10].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1.
БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ ВИБІР. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ АЛЬТЕРНАТИВ ЗА ПАРЕТО ТА СЛЕЙТЕРОМ

1 Мета роботи

Ознайомитись з поняттями оптимальності за Парето та за Слейтером при багатокритеріальному виборі [1-3;6;7].

2 Короткі теоретичні відомості

Задачу вибору, яка включає множину можливих рішень X та векторний критерій *f,* зазвичай називають багатокритеріальною задачею або задачею багатокритеріальної оптимізації. Позначимо множину рішень, що обираються, як $C(X)$. Ця множина представляє собою рішення задачі вибору і до неї може входити будь-яка підмножина множини можливих рішень X.

Постановка задачі багатокритеріального вибору включає:

1) множину можливих рішень X;
2) векторний критерій f;
3) відношення переваги (рос. «отношение предпочтения») $\succ_X$.

В загальному випадку векторний критерій має вигляд:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m) \qquad (1.1)$$

де $f_1, f_2, ..., f_m$ – числові функції, які визначені на множині можливих рішень X. Задача багатокритеріального вибору складається у знаходженні множини рішень, що обираються, $C(X) \subset X$ з врахуванням відношення переваги $\succ_X$ на основі заданого векторного критерію *f*, який відображає набір цілей особи, що приймає рішення (ОПР).

Розглянемо випадок, коли ОПР повинен обрати одно з двох можливих рішень x' або x''. Для цих рішень має місце один і тільки один з наступних трьох випадків:

1) $x' \succ_X x''$ – ОПР віддає перевагу першому рішенню (x');

2) $x'' \succ_X x'$ – ОПР віддає перевагу другому рішенню (x'');

3) не виконується ані $x' \succ_X x''$, ані $x'' \succ_X x'$ – ОПР не може надати переваги жодному рішенню.

Варіант, коли виконуються обидва випадки: $x' \succ_X x''$ та $x'' \succ_X x'$, не можливий внаслідок асиметричності відношення переваги $\succ_X$.

Для першого випадку $x' \succ_X x''$ говорять, що рішення x' *домінує* рішення x'' по відношенню $\succ_X$, або що рішення x'' *доміноване* x'. Для другого випадку $x'' \succ_X x'$ говорять, що рішення x'' *домінує* рішення x' по відношенню $\succ_X$, або що рішення x' *доміноване* x''. Для третього випадку кажуть, що рішення x' та x'' непорівнянні по відношенню $\succ_X$.

Нехай задана множина можливих рішень *X*, векторний критерій *f* та відношення переваги $\succ_X$. Припустимо, що для деякого можливого рішення x' виконується умова $x' \succ_X x''$. За визначенням відношення переваги $\succ_X$ це означає, що із пари x', x'' ОПР обере рішення x'. Тобто в термінах множини рішень, що обираються, це буде виглядати як:

$$x' \succ_X x'' \quad \Leftrightarrow \quad C\{x', x''\} = \{x'\}$$

Якщо рішення x'' не обирається із пари $\{x', x''\}$, це значить, що є рішення (x'), яке краще за нього ($x' \succ_X x''$). Розумно припустити, що на всій множині можливих рішень X рішення x'' також не буде обране, оскільки є принаймні одне рішення x' краще за нього. Таким чином, сформулюємо у вигляді аксіоми вимогу до поведінки ОПР:

Аксіома 1. (Аксіома виключення рішень, що домінуються)
Для будь-якої пари допустимих рішень $x', x'' \in X$, для яких має місце відношення $x' \succ_X x''$, виконується $x'' \notin C(X)$.

Незважаючи на очевидну «розумність» цієї аксіоми, не слід вважати, що вона виконується у будь-якому випадку при виборі рішень.

Розглянемо, наприклад, таку задачу вибору з трьох претендентів на два робочих місця за умови, що обидва робочі місця обов'язково повинні бути заповнені. Нехай в процесі порівняння претендентів з'ясувалося, що перший переважає другого та третього, а другий переважає третього. Вочевидь, що обрані будуть перший (x') та другий (x'') претенденти, хоча і виконується умова $x' \succ_X x''$ [1].

Цю задачу можливо розглядати як дві в сенсі вибору одного претендента на першу посаду з трьох можливих, а потім на другу посаду з виключенням з множини претендентів (можливих рішень) першого претендента.

Якщо задано декілька критеріїв оптимальності, то для кожного з них необхідно визначити напрямок зацікавленості ОПР. Тут і надалі будемо вважати, що ОПР зацікавлений в отриманні максимальних значень всіх компонентів векторного критерію *f*. Таким чином, сформулюємо «Аксіому Парето»:

Аксіома Парето. Для всіх пар можливих рішень $x', x'' \in X$, для яких має місце нерівність $f(x') \geq f(x'')$, виконується співвідношення $x' \succ_X x''$.

Запис $f(x') \geq f(x'')$ означає виконання покомпонентних нерівностей $f_j(x') \geq f_j(x'')$ для всіх *j=1(1)m*, причому $f(x') \neq f(x'')$. Це означає, що компоненти першого вектора $f(x')$ не менші за відповідні компоненти другого вектора $f(x'')$, і принаймні одна компонента першого вектора суворо більша за відповідну компоненту другого.

Визначення 1. Рішення $x^* \in X$ називається оптимальним за Парето (парето-оптимальним), якщо не існує такого можливого вирішення $x \in X$, для якого має місце нерівність $f(x) \geq f(x^*)$. Всі парето-оптимальні рішення утворюють множину Парето, що позначається $P_f(X)$.

У відповідності до «Визначення 1»:

$$P_f(X) = \{x^* \in X \,|\, \text{не існує такого } x \in X \text{, що } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Тобто, парето-оптимальне рішення – це таке можливе рішення, яке не може бути покращене (збільшене) по жодному з наявних критеріїв без погіршення (зменшення) по будь-якому хоча б одному іншому критерію. Рішення, що входять до множини Парето, також називають парето-ефективними.

Принцип Еджворта-Парето. Якщо ОПР веде себе «розумно» (тобто виконуються умови «Аксіоми 1» та «Аксіоми Парето»), то рішення, що їм обираються, обов’язково повинні бути парето-оптимальними $C(X) \subset P_f(X)$.

Домінування рішення $x^* \in X$ над $x \in X$ за Парето позначається як

$x^* \succ_P x$, або $x^* \succ Px$, або $x^* \overset{P}{\succ} x$.

В багатьох випадках пошук парето-оптимальних рішень є вкрай трудомісткою задачею. Тому введемо поняття «слабкого» парето-оптимального рішення або рішення, оптимального за Слейтером.

Визначення 2. Рішення $x^* \in X$ називається оптимальним за Слейтером, якщо не існує такого можливого вирішення $x \in X$, для якого має місце нерівність $f(x) > f(x^*)$. Всі оптимальні рішення за Слейтером утворюють множину Слейтера, що позначається $S_f(X)$.

Запис $f(x') > f(x'')$ означає виконання покомпонентних нерівностей $f_j(x') > f_j(x'')$ для всіх *j=1(1)m*, причому $f(x') \neq f(x'')$. Це означає, що компоненти першого вектора $f(x')$ суворо більші за відповідні компоненти другого вектора $f(x'')$.

Домінування рішення $x^* \in X$ над $x \in X$ за Слейтером позначається як $x^* \succ_S x$, або $x^* \succ Sx$, або $x^* \overset{S}{\succ} x$.

Хоча рішення, оптимальні за Слейтером, менш цікаві за оптимальні за Парето, але в багатьох випадках при вирішенні задач багатокритеріальної оптимізації отримуються саме такі рішення.

Як при пошуку парето-оптимальних рішень, так і при пошуку рішень, оптимальних за Слейтером, необхідно враховувати узгодженість побажань ОПР. Тобто, ОПР зацікавлений в отриманні максимальних значень всіх компонентів векторного критерію *f*.

Геометрична інтерпретація принципу Еджворта-Парето наведена на рис. 1.1.

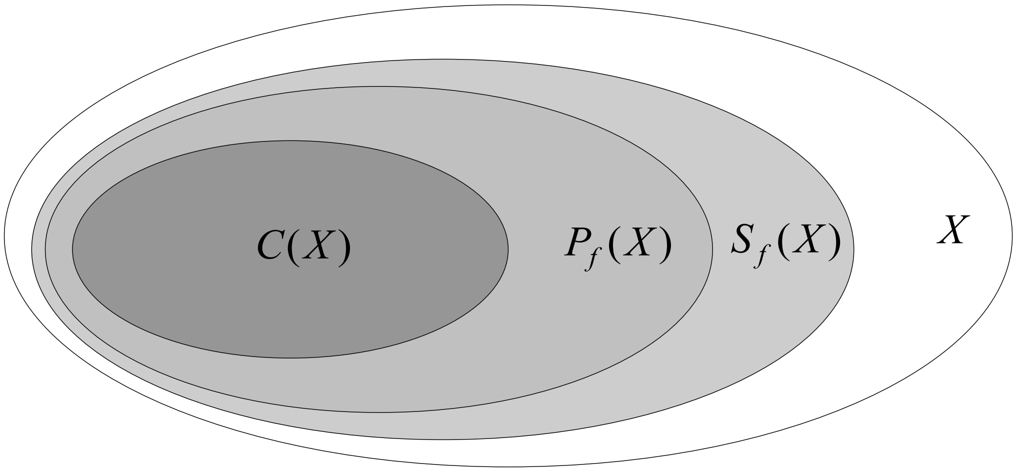


Рисунок 1.1 – Відношення між множинами допустимих, оптимальних за Слейтером, парето-оптимальних та обираємих рішень

3 Алгоритми знаходження множини Парето та Слейтера

3.1 Алгоритм знаходження множини Парето

1) Покласти $P(X) = X, i=1, j=2$.

2) Перевірити $f(x_i) \succ Pf(x_j)$. Якщо умова виконуються, перейти до п. 3, інакше – до п. 5.

3) Виключити з множини Х рішення x_j. Перейти до п. 4.

4) Перевірити виконання нерівності $j < N$. Якщо умова виконується, покласти $j = j + 1$ і повернутися до п. 2, інакше – перейти до п. 7.

5) Перевірити нерівність $f(x_j) \succ Pf(x_i)$. Якщо умова виконується, перейти до п. 6, інакше – повернутися до п. 4.

6) Видалити з поточної множини $P(X)$ рішення x_i. Перейти до п. 7.

7) Перевірити виконання нерівності $i < N - 1$. Якщо умова виконується, послідовно покласти $i = i + 1, j = i + 1$. Повернутися до п. 2. Інакше (якщо $i \geq N - 1$) обчислення закінчити (залишилися лише парето-оптимальні рішення).

3.2 Алгоритм знаходження множини Слейтера

1) Покласти $S(X) = X, i=1, j=2$.

2) Перевірити $f(x_i) \succ Sf(x_j)$. Якщо умова виконуються, перейти до п. 3, інакше – до п. 5.

3) Виключити з множини X рішення x_j. Перейти до п. 4.

4) Перевірити виконання нерівності $j < N$. Якщо умова виконується, покласти $j = j + 1$ і повернутися до п. 2, інакше – перейти до п. 7.

5) Перевірити нерівність $f(x_j) \succ Sf(x_i)$. Якщо умова виконується, перейти до п. 6, інакше – повернутися до п. 4.

6) Видалити з поточної множини $S(X)$ рішення x_i. Перейти до п. 7.

7) Перевірити виконання нерівності $i < N - 1$. Якщо умова виконується, послідовно покласти $i = i + 1, j = i + 1$. Повернутися до п. 2. Інакше (якщо $i \geq N - 1$) обчислення закінчити (залишилися лише оптимальні рішення за Слейтером).

4 Завдання

4.1 Для кожного рядка (1-3) за варіантом («Додаток А») побудувати таблицю значень альтернатив (A1-A20) в області критеріїв (Q1, Q2), де значення за першим критерієм відповідають першій цифрі числа, за другим критерієм – другій цифрі числа. Аналітично (за допомогою алгоритмів п. 3.1–3.2) та графічно визначити множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером (6 рисунків).

4.2 Для рядка, що складається з рядків 1-3 («Додаток А») за варіантом, побудувати таблицю значень альтернатив (A1-A60) в області критеріїв (Q1, Q2), де значення за першим критерієм відповідають першій цифрі числа, за другим критерієм – другій цифрі числа. Аналітично (за допомогою алгоритмів п. 3.1–3.2) та графічно визначити множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером (2 рисунки).

5 Приклад виконання

Надано рядок з 10-ти чисел: {79, 95, 4, 37, 92, 95, 12, 52, 70, 14}. Необхідно:

1) побудувати значення альтернатив в області критеріїв (Q1, Q2), де значення за першим критерієм відповідають першій цифрі числа, за другим критерієм – другій цифрі числа;
2) визначити аналітично множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером;
3) визначити графічно множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером.

П.1) Побудуємо значення альтернатив в області критеріїв (Q1, Q2) (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Значення альтернатив в області критеріїв

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4

П.2) Визначимо аналітично множину оптимальних рішень (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Значення альтернатив в області критеріїв

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1	A1	A2		A1	A2	A2	A2
Домінується за Слейтером			A1	A1			A1	A2	A2	A2

Множина оптимальних значень за Парето: A1, A2=A6.

Множина оптимальних значень за Парето: A1, A2=A6, A5.

П.3) Визначимо графічно границю Парето (рис. 1.2) та Слейтера (рис. 1.3).

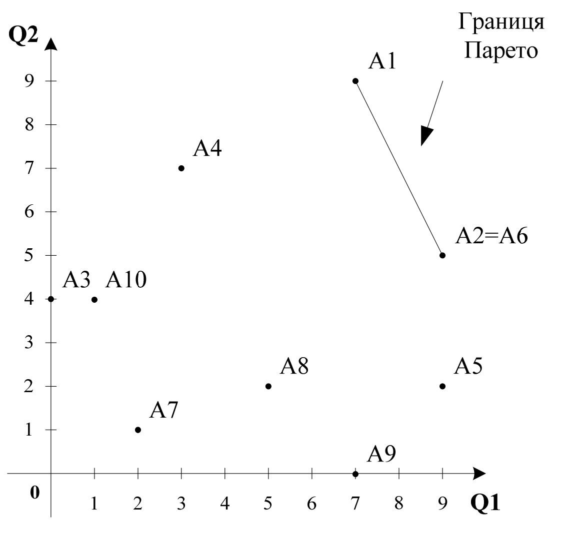


Рисунок 1.2 – Границя Парето

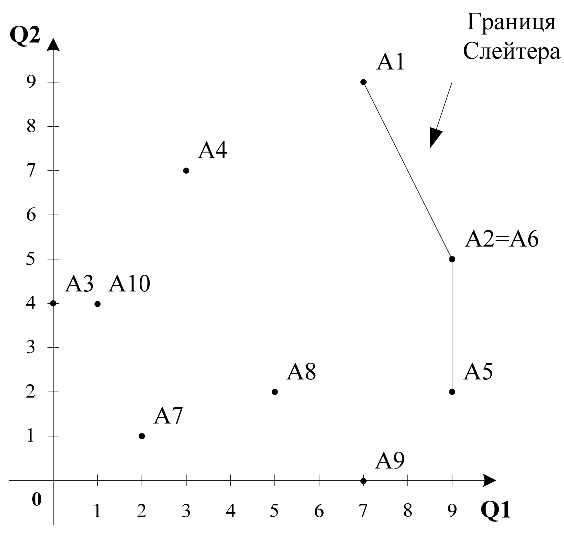


Рисунок 1.3 – Границя Слейтера

6 Зміст звіту

Звіт має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) варіант завдання;

5.4) короткі теоретичні відомості;

5.5) результати побудови значень альтернатив у області критеріїв у вигляді таблиці 1.1 (4 таблиці);

5.6) результати визначення множини оптимальних рішень за Парето та за Слейтером у вигляді таблиці 1.2 (4 таблиці);

5.7) рисунки з графічним визначенням границі Парето та Слейтера (аналогічно до рис. 1.2, 1.3);

5.8) лістинг програми обчислення множини оптимальних рішень за Парето та за Слейтером;

5.9) висновки щодо кількості альтернатив, які увійшли до складу оптимальних за Парето та за Слейтером.

7 Контрольні запитання

7.1 З чого складається постановка задачі багатокритеріального вибору?

7.2 В чому полягає роль ОПР?

7.3 Що таке «оптимальність» при багатокритеріальному виборі?

7.4 Що таке множина оптимальних рішень за Парето та за Слейтером?

7.5 Як співвідносяться множини допустимих, оптимальних за Парето, оптимальних за Слейтером та обираємих рішень?

7.6 Що таке «слабке» парето-оптимальне рішення?

7.7 В чому полягає принцип Еджворта-Парето?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2.
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ ПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ.
ЗАДАЧА ПРО УПАКУВАННЯ В КОНТЕЙНЕРИ

1 Мета роботи

Ознайомитись з методами прийняття рішень в умовах повної інформації на прикладі задачі про упакування в контейнери та дослідити особливості їх використання [3-5].

2 Короткі теоретичні відомості

Задача про упакування в контейнери відноситься до NP–важких комбінаторних задач. Завдання полягає в упаковці об'єктів зумовленої форми в кінцеве число контейнерів зумовленої форми таким чином, щоб кількість використаних контейнерів була найменшою. Іноді розглядають зворотну задачу, щоб кількість або обсяг об'єктів, які упаковують, були найбільшими.

Існує безліч різновидів цієї задачі (двовимірна упаковка, лінійна упаковка, упаковка по вазі, упаковка по вартості і т.і.), які можуть застосовуватися в різних областях, наприклад, в задачі оптимального заповнення контейнерів, завантаження вантажівок з обмеженням по вазі, створення резервних копій на змінних накопичувачах і т.і.

Оскільки задача є NP-важкою, часто використовують алгоритми з евристичним та метаевристичним методом вирішення для отримання оптимальних результатів. Також активно використовуються методи штучного інтелекту, як, наприклад, нейронні мережі.

Математична постановка задачі

Розглянемо умову задачі. Дано:

– нескінчена кількість контейнерів розміром C;

– перелік вантажів розміром (вагою) c_i.

$$x_i^j = \begin{cases} 1, \textit{якщо i-й об'єкт пакується в j-й контейнер} \\ 0, \textit{в іншому випадку} \end{cases} \qquad (2.1)$$

Бінарна змінна y_j дорівнює 1, якщо j-й контейнер використовується, та 0 в протилежному випадку.

Необхідно так упакувати вантажі в контейнери, щоб загальна кількість контейнерів була найменшою

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j$$

при наступних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^j \le C y_j,\ j = 1(1)n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_i^j = N, i = 1(1)N$$

$$x_i^j \in \{0,1\}, i = 1(1)N, j = 1(1)n$$

$$y_j \in \{0,1\}, j = 1(1)n$$

Перша нерівність фіксує, що розмір (вага) вантажів в одному контейнері не буде більшою, ніж його розмір (вантажопідйомність). Друга рівність потребує, щоб всі елементи були розміщені по контейнерах.

Для вирішення цієї задачі розглянемо наступні алгоритми:

– NFA (Next Fit Algorithm) – алгоритм «заповнення наступного»;
– FFA (First Fit Algorithm) – алгоритм «заповнення першого, що підходить»;
– WFA (Worst Fit Algorithm) – алгоритм заповнення «найменш повного»;
– BFA (Best Fit Algorithm) – алгоритм заповнення «найкращого».

Хоча всі алгоритми націлені на мінімізацію кількості контейнерів, але для різних алгоритмів є відмінності в пошуку контейнера і, відповідно в кількості обчислень, що потребується для цього.

3 Алгоритми

Існує декілька варіацій кожного алгоритму: без впорядкування, з впорядкуванням, з оглядом всіх наявних контейнерів та інші.

3.1 Алгоритми без впорядкування

Особливістю даних алгоритмів є те, що відсутній крок впорядкування вантажів за розмірами. За рахунок цього значно зменшується кількість операцій порівняння, але, найчастіше, збільшується кількість необхідних контейнерів.

Розглянемо дані алгоритми на прикладі наступної задачі: дано контейнер розміром (вантажопідйомністю) $C = 100$, та $N = 15$ вантажів з розмірами (вагою) відповідно до таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Розміри (вага) вантажів

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_i	23	3	51	20	51	42	52	12	4	7	59	58	25	94	18

3.1.1 Алгоритм «заповнення наступного»

Найбільш простий алгоритм, що в більшості випадків дає найгірші результати. Його перевагою є те, що він потребує найменшу кількість операцій порівняння.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується – йдемо на крок 2.

Таблиця 2.2 – Розподіл вантажів за алгоритмом NFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					
4											59				
5												58	25		
6														94	
7															18

Кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N = 15$. Головною перевагою даного алгоритму є те, що для розміщення вантажів не потрібна інформація про попередні контейнери. Дана обставина робить доцільним використання даного алгоритму, наприклад, при розташуванні вантажів на конвеєрі, оскільки контейнер готовий до відправки як тільки береться наступний.

3.1.2 Алгоритм «заповнення першого, що підходить»

Більш вдалий алгоритм, що намагається мінімізувати кількість контейнерів, зменшуючи при цьому кількість порівнянь для пошуку найбільш вдалого розташування.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується, перевіряємо всі контейнери по черзі, починаючи з першого. Якщо знайдено контейнер з достатньою кількістю місця для розташування вантажу – йдемо на крок 3. Якщо вантаж не вміщується в жоден наявний контейнер – йдемо на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) доцільно обирати останній за номером, оскільки, потенційно, він є найменш заповненим.

Таблиця 2.3 – Розподіл вантажів за алгоритмом FFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					18
4											59				
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомності) контейнеру, але, зазвичай, при великій кількості вантажів та контейнерів, кількість обчислень значно менша за N^2.

3.1.3 Алгоритм заповнення «найменш повного»

Головна ідея алгоритму – рівномірне розподілення вантажів по контейнерах.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується контейнер – перевіряємо всі контейнери на максимум вільного місця. Якщо в мінімально заповнений контейнер вантаж вміщується – йдемо на крок 3, якщо ні – на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) доцільно обирати останній за номером, оскільки, потенційно, він є найменш заповненим.

Таблиця 2.4 – Розподіл вантажів за алгоритмом WFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					
4											59				18
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомності) контейнеру.

3.1.4 Алгоритм заповнення «найкращого»

Головна ідея алгоритму – створення більшої кількості повністю заповнених контейнерів.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується контейнер – перевіряємо всі контейнери на мінімум вільного місця, але в який ще можна покласти вантаж. Якщо такий контейнер знайдено – йдемо на крок 3, якщо ні – на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) обирається останній за номером.

Таблиця 2.5 – Розподіл вантажів за алгоритмом BFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					18
4											59				
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомність) контейнеру.

3.2 Алгоритми з впорядкуванням

Алгоритми з попереднім впорядкуванням вимагають більшого числа порівнянь, але на великих об'ємах вибірки можуть давати кращі результати.

Розглянемо дані алгоритми на прикладі попередньої задачі, але з початковим впорядкуванням вантажів від більшого до меншого: дано контейнер ємністю $C = 100$ та $N = 15$ вантажів з розмірами (вагою), наведеними у таблиці 2.6.

Таблиця 2.6 – Розміри (вага) вантажів (впорядковані за спаданням)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_i	94	59	58	52	51	51	42	25	23	20	18	12	7	4	3

3.2.1 Алгоритм NFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 2.7 – Розподіл вантажів за алгоритмом NFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														
2		59													
3			58												
4				52											
5					51										
6						51	42								
7								25	23	20	18	12			
8													7	4	3

3.2.2 Алгоритм FFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 2.8 – Розподіл вантажів за алгоритмом FFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94													4	
2		59						25				12			3
3			58						23		18				
4				52						20					
5					51										
6						51	42						7		

3.2.3 Алгоритм заповнення WFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 2.9 – Розподіл вантажів за алгоритмом WFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														
2		59									18				3
3			58							20					
4				52					23			12			
5					51			25						4	
6						51	42						7		

3.2.4 Алгоритм заповнення BFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 2.10 – Розподіл вантажів за алгоритмом BFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														3
2		59						25				12		4	
3			58						23		18				
4				52						20					
5					51										
6						51	42						7		

3.3 Оцінка мінімальної кількості контейнерів

Мінімально можливу кількість контейнерів для даної вибірки можна оцінити як:

$$M_{\min} = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i}{C} \right\rceil \tag{2.2}$$

Дана оцінка є нижньою границею і може бути недосяжною для жодного алгоритму. В цьому легко переконатись, якщо уявити вибірку, в якої всі елементи c_i більше половини розміру (вантажопідйомності) контейнеру C. В цьому випадку мінімальна можлива кількість контейнерів (до речі, як і фактична) буде рівною розміру вибірки N.

Для алгоритмів FFA та BFA існує верхня границя оцінки кількості контейнерів:

$$M_{\max} = \frac{11}{9} M' + 1$$

де M' – кількість контейнерів при найкращому вирішені задачі.

Існують також алгоритми, що для великих розмірів вибірки можуть вирішувати задачу про упакування в контейнери із наперед заданим відсотком від найкращого (асимптотична схема наближення поліноміального часу). Це виділяє дану задачу серед інших основних NP-важких задач, більшість з яких взагалі не можуть бути наближені.

4 Завдання

У контейнери вантажопідйомністю 100 потрібно розкласти вантажі за варіантом («Додаток А»).

4.1 Скласти програму, що реалізує алгоритми NFA, FFA, WFA, BFA без впорядкування і з впорядкуванням та обраховує кількість порівнянь (обчислювальну складність алгоритму), враховуючи витрати на впорядкування.

Розрахувати:

4.2 Мінімально можливу кількість контейнерів для 20-ти вантажів («Додаток А»), за допомогою (2.2) – 3 значення окремо для 1-го, 2-го та 3-го рядка варіанту та для 60 вантажів для 1-3 рядка варіанту сумісно.

4.3 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 20-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA без впорядкування окремо для 1-го, 2-го та 3-го рядка варіанту (12 значень).

4.4 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 20-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA з впорядкуванням окремо для 1-го, 2-го та 3-го рядка варіанту (12 значень).

4.5 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 60-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA без впорядкування для 1-3 рядка варіанту сумісно (4 значення).

4.6 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 60-и вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA з впорядкуванням для 1-3 рядка варіанту сумісно (4 значення).

4.7 Результати п. 4.2–4.6 за кількістю контейнерів та за обчислювальною складністю звести у таблицю 2.11 (одна таблиця).

Таблиця 2.11 – Результати розрахунку

Дані	Аналітичний розрахунок (кількість контейнерів)							
1 рядок								
2 рядок								
3 рядок								
1+2+3 рядок								
Дані	Кількість контейнерів				Обчислювальна складність			
	Без впорядкування				Без впорядкування			
	NFA	FFA	WFA	BFA	NFA	FFA	WFA	BFA
1 рядок								
2 рядок								
3 рядок								
1+2+3 рядок								
Дані	З впорядкуванням				З впорядкуванням			
	NFA	FFA	WFA	BFA	NFA	FFA	WFA	BFA
1 рядок								
2 рядок								
3 рядок								
1+2+3 рядок								

5 Зміст звіту

Звіт має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) варіант завдання;

5.4) короткі теоретичні відомості;

5.5) лістинг програми, що реалізує алгоритми FFA, NFA, WFA, BFA;

5.6) аналітичний розрахунок мінімально можливої кількості контейнерів (п. 4.2);

5.7) результати роботи програми для п. 4.3-4.6 у вигляді таблиць розміщення вантажів за кожним з алгоритмів, з впорядкуванням та без нього, для множини вантажів в 1-3 рядках окремо та в 1-3 рядках сумісно;

5.8) сумарні результати у вигляді таблиці 2.11;

5.9) висновки щодо кількості контейнерів та обчислювальної складності алгоритмів за однаковими множинами вантажів при використанні різних алгоритмів та з використанням впорядкування та без нього (на основі таблиці 2.11).

6 Контрольні запитання

6.1 Які особливості задачі о контейнерах серед інших NP-важких задач?

6.2 Навести приклади практичних задач, які зводяться до задачі о контейнерах.

6.3 Які головні ідеї та відмінності алгоритмів FFA, NFA, WFA та BFA?

6.4 Порівняти оптимальне рішення та рішення, що отримане за допомогою алгоритмів FFA, NFA, WFA та BFA.

6.5 Яка роль ОПР при вирішенні задачі о контейнерах?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

1 Мета роботи

Ознайомитись з методами прийняття рішень в умовах, коли вибір деякої стратегії пов’язаний з певним набором станів середовища з визначеною ймовірністю [1;2;6;7;9;10].

2 Короткі теоретичні відомості

Задача прийняття рішень в умовах ризику виникає в тих випадках, коли з кожною стратегією x_i, що обирається, пов’язана ціла множина різноманітних результатів O_j з відомими ймовірностями $P(O_j \mid x_i)$. В цьому випадку, модель задачі може бути представлена у вигляді такої матриці:

	O_1	O_2	…	O_m
x_1	$u(x_1,O_1)$	$u(x_1,O_2)$	...	$u(x_1,O_m)$
x_2	$u(x_2,O_1)$	$u(x_2,O_2)$	...	$u(x_2,O_m)$
…	...	...	...	...
x_n	$u(x_n,O_1)$	$u(x_n,O_2)$	...	$u(x_n,O_m)$

(3.1)

Тут $u(x_i,O_j)$ – корисність результату O_j при використанні стратегії x_i.

Якщо відомі ймовірності $P(O_j \mid x_i), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, то можливо вивести очікувану корисність для кожної стратегії:

$$E[U(x_i)] = \sum_{j=1}^{m} u(x_i,O_j)P(O_j \mid x_i), i=\overline{1,n} \qquad (3.2)$$

Вочевидь, в якості оптимальної стратегії слід обирати ту, для якої очікувана корисність максимальна. У разі, коли елементи матриці (3.1) є від'ємними числами (тобто виступають у ролі витрат), в якості найкращої стратегії обирається стратегія, для якої очікувані витрати мінімальні.

Даний критерій оптимальності носить назву «критерій Байеса-Лапласа» і застосовується при відомих значеннях ймовірностей, або є підстави вважати, що ймовірності виникнення кожного з результатів приблизно однакові.

Задачі, для яких можливо отримати ймовірність результатів, є вкрай поширеними у практиці і, найчастіше, виникають при обробці статистичних даних. Наприклад, дані по врожаю за декілька років, найбільш популярні марки автомобілів та т.і. В цьому випадку, для визначення ймовірностей, внаслідок великої кількості можливих результатів (O_j), переходять до ймовірностей потрапляння результатів в певний інтервал. Наприклад, у таблиці 3.1 наведено врожай з ділянки у певній місцевості в залежності від обраної культури за роками.

Таблиця 3.1 – Дані по врожаю

Культура	Врожай за роками, т/га									
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Просо	1201	1350	1317	1415	1134	1512	1650	1517	1035	1156
Ячмінь	1453	1258	1056	1687	1652	1245	1469	1124	1089	1214

Кількість результатів (значень врожаю за роками) може бути надвелика, і тому доцільно виділити декілька інтервалів врожаю, наприклад:

– інтервал 1 = врожай становить від 1000 до 1200 т/га;
– інтервал 2 = врожай становить від 1200 до 1400 т/га;

– інтервал 3 = врожай становить від 1400 до 1600 т/га;

– інтервал 4 = врожай становить від 1600 до 1800 т/га.

Переходячи до матриці ймовірностей результатів, отримаємо дані, наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Ймовірності врожаю за інтервалами

Культура	Ймовірності врожаю, т/га			
	1000-1200	1200-1400	1400-1600	1600-1800
Просо	0.3	0.3	0.3	0.1
Ячмінь	0.3	0.3	0.2	0.2

В якості значення врожаю можна використовувати середини відповідних інтервалів. Для деяких задач значення можуть також визначатися лівою або правою границею інтервалів, що залежить від цілей досліджень та формулювання задачі. Наприклад, «обрати систему електропостачання потужністю не менше ніж 1200 кВт, 1400 кВт, … з врахуванням ймовірності працездатності …» або «обрати матеріали для системи теплопостачання, що забезпечують неефективні витрати не більше ніж 100кВт/100МВт, 200кВт/100МВт,…, якщо ймовірність виходу з ладу в залежності від матеріалу …» і т.і.

Хоча такий підхід призводить до деякої втрати точності обрахунків, але він дозволяє грубо оцінити можливі наслідки стратегій і відкинути деякі з них з подальшим більш детальним аналізом тих стратегій, що залишилися.

3 Приклад вирішення

Розглянемо знаходження оптимальної стратегії на прикладі наступної задачі: необхідно визначити оптимальну стратегію з вибору одягу для подорожі за умови, що Ви відбуваєте та повинні повернутись у вказане місце.

Набори одягу, які можна взяти із собою, складаються з: верхнього одягу, головного убору, брюк, взуття та рукавиць (рис. 3.1), причому кожен набір одягу є оптимальним для деякого діапазону температур. Час, який Ви будете перебувати в іншому місці, Вам невідомий, бо все залежить від обставин, тому Вам необхідно визначитись з набором одягу заздалегідь. А уніформа, в якій Ви перебуваєте на час відправлення, до кінця поїздки вже зноситься.

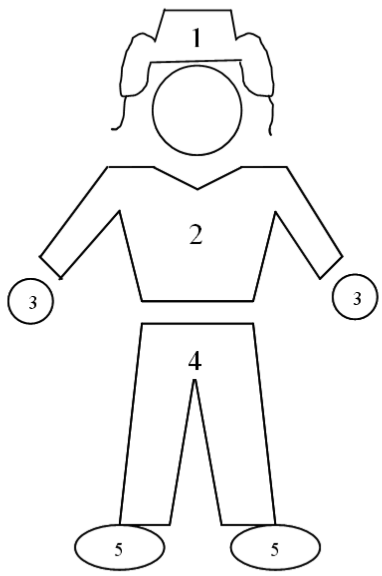


Рисунок 3.1 – Умовні позначення типів одягу

Кожен елемент одягу, що входить до складу набору, характеризується параметрами ваги та вартості, наведеними у таблиці 3.3. Перелік елементів одягу, які потрібні при кожному діапазоні температур, наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.3 – Елементи одягу

№	Елемент одягу	Вага, кг	Вартість, у.о.
1	Блайзер	0.5	6
2	Бушлат	4	48
3	Ватні штани	2	24
4	В’єтнамки	0.5	6
5	Джинси	1	12
6	Кепка	0.5	6
7	Кросівки	1	12
8	Куртка	2	24
9	Пальто	3	36
10	Рукавички	0.5	6
11	Светр	1	12
12	Сорочка	0.5	6
13	Футболка	0.5	6
14	Черевики	1.5	18
15	Чоботи	2	24
16	Шапка	1	12
17	Шорти	0.5	6

Таблиця 3.4 – Набори одягу

Н	Т,◦	Головний убір	Верхній одяг	Рукавиці	Штани	Взуття	Вага, кг
1	< -10	Шапка	Бушлат	Рукавички	Ватні штани	Чоботи	9.5
2	-9..0	Шапка	Пальто	Рукавички	Джинси	Чоботи	7.5
3	1..10	Кепка	Куртка	–	Джинси	Черевики	5
4	11..20	–	Светр	–	Джинси	Кросівки	3
5	21..30	Блайзер	Сорочка	–	Джинси	Кросівки	3
6	30+	Блайзер	Футболка	–	Шорти	В’єтнамки	2

Н – номер набору одягу (стратегії), Т – температура.

Для визначення найкращого набору (стратегії) необхідно враховувати час повернення. Взяти більше одного набору Вам бракує місця, а в разі відсутності необхідних речей, Ви можете докуповувати їх на місці, але дорожче (+2 у.о. за кожну річ). Вартість перевезення багажу складає 10 у.о. за 1 кг ваги. Взагалі нічого не брати із собою та купувати все на місці не варто, оскільки у Вас з’являться однотипні речі, які Вам не потрібні.

Припустимо, що відправний пункт – м. Тегеран, а час повернення серпень або листопад. Для визначення оптимальної стратегії врахуємо середньомісячні температури м. Тегеран в червні (+28.2) та в листопаді (+12.3).

В цьому випадку, якщо Ви взяли із собою, наприклад, речі з першого набору (Шапка, Бушлат, Рукавички, Ватні штани, Чоботи), а повертаєтесь у червні, Вам необхідно докупити до набору 5 (що відповідає температурі +20..+30 градусів): Блайзер, Сорочку, Джинси та Кросівки, що обійдеться в

6+6+12+12+2*4=44 у.о. При повернені у листопаді (+12.3) та виборі набору 3, Вам необхідно докупити: Светр та Кросівки, що обійдеться в 12+12+2*2=28 у.о. і так далі.

Зведемо у таблицю перелік речей, які необхідно докуповувати до кожного набору при повернені в означені місяці (табл. 3.5) без врахування вартості перевезення речей, що залишилися.

Таблиця 3.5 – Вартість використання наборів

Набір	Вартість перевезення	Необхідно докупити	
		Червень	Листопад
Н1	95	36+8=44 Блайзер, Сорочка, Джинси, Кросівки	36+6=42 Светр, Джинси, Кросівки
Н2	75	24+6=30 Блайзер, Сорочка, Кросівки	24+4=28 Светр, Кросівки
Н3	50	24+6=30 Блайзер, Сорочка, Кросівки	24+4=28 Светр, Кросівки
Н4	30	12+4=16 Блайзер, Сорочка	–
Н5	30	–	12+2=14 Светр
Н6	20	30+6=36 Сорочка, Джинси, Кросівки	36+6=42 Светр, Джинси, Кросівки

Оскільки ймовірність повернутися у червні або серпні однакова (p=0.5), а корисність визначається найменшими витратами, то з врахуванням вартості перевезення отримаємо:

$$E[U(x_1)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_1, O_j) P(O_j \mid x_1) = -144 \cdot 0.5 - 142 \cdot 0.5 = -143$$

$$E[U(x_2)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_2, O_j) P(O_j \mid x_2) = -105 \cdot 0.5 - 103 \cdot 0.5 = -104$$

$$E[U(x_3)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_3, O_j) P(O_j \mid x_3) = -80 \cdot 0.5 - 78 \cdot 0.5 = -79$$

$$E[U(x_4)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_4, O_j) P(O_j \mid x_4) = -46 \cdot 0.5 - 30 \cdot 0.5 = -38$$

$$E[U(x_5)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_5, O_j) P(O_j \mid x_5) = -38 \cdot 0.5 - 44 \cdot 0.5 = -41$$

$$E[U(x_1)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_6, O_j) P(O_j \mid x_6) = -56 \cdot 0.5 - 62 \cdot 0.5 = -59$$

Звідси, найкращою стратегією для подорожі буде стратегія x_4.

4 Завдання

4.1 Обрати варіант та дані температури («Додаток Б»).

4.2 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення в кожен з місяців однакова.

4.3 Визначити найкращу стратегію за при поверненні протягом одного сезону за наданих наборів ймовірностей повернення у кожен з місяців (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 – Набори значень ймовірностей

№	Назва набору	Місяць, P_i											
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
1	Зима	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3
2	Весна	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0
3	Літо	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0
4	Осінь	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0

4.4 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення взимку втричі більша за інші місяці.

4.5 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення залежить від кількості днів у місяці (рік вважати не високосним).

4.6 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення в кожен з місяців однакова, а початкова вартість речей з номерами № 2, 4, 9, 15, 16 (табл. 3.1) зменшилася втричі.

5 Зміст звіту

Зміст має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) варіант завдання;

5.4) короткі теоретичні відомості;

5.5) результати розрахунку вартості використання наборів для п. 4.2 у вигляді таблиці 3.5;

5.6) розрахунок найкращої стратегії для п. 4.2 (у вигляді (3.2));

5.7) результати розрахунку вартості використання для кожного з наборів ймовірностей для п. 4.3 у вигляді таблиці 3.5 (фрагменти таблиці з п. 5.5) – 4 таблиці;

5.8) розрахунки найкращої стратегії для кожного набору ймовірностей п. 4.3 (у вигляді (3.2)) – 4 розрахунки;

5.9) розрахунки найкращої стратегії для п. 4.4 та п. 4.5 (у вигляді (3.2)) – 2 розрахунки;

5.10) результати розрахунку вартості використання наборів для п. 4.6 у вигляді таблиці 3.5 – 1 таблиця;

5.11) розрахунок найкращої стратегії для п. 4.6 (у вигляді (3.2)) – 1 розрахунок;

5.12) зведені результати визначення найкращих стратегій за різними наборами ймовірностей та вартості речей (п. 5.5 – п. 5.11) у вигляді таблиці 3.7;

5.13) висновки.

Таблиця 3.7 – Результати визначення найкращих стратегій

№	Назва завдання	Найкраща стратегія(-ї), x_i	Значення $E[U(x_i)]$
1	За 12-ть місяців		
2	«Зима»		
3	«Весна»		
4	«Літо»		
5	«Осінь»		
6	«Зима» x3		
7	За 12-ть місяців (за кількістю днів)		
8	За 12-ть місяців (зменш. вартість)		

6 Контрольні запитання

6.1 В чому полягає особливість вирішення задачі прийняття рішення в умовах ризику, на відміну від задач прийняття рішень в умовах повної інформації?

6.2 За яких умов застосовується критерій Байеса-Лапласа?

6.3 Яка роль ОПР при вирішенні задачі в умовах ризику?

6.4 Навести приклад практичних задач, які можуть бути зведені до задач прийняття рішень в умовах ризику.

6.5 Які особливості обробки великих обсягів статистичних даних?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4.
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ЗАДАЧАХ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

1 Мета роботи

Дослідження методів вирішення задачі ідентифікації з використанням апарату багатокритеріальної оптимізації [1;2;7-9].

2 Короткі теоретичні відомості

Задачу розпізнавання образів (ідентифікацію об’єкту) можна представити у вигляді задачі багатокритеріальної оптимізації, де в якості критеріїв будуть виступати деякі признаки (точніше, їх відхилення), за якими можна ідентифікувати об’єкт. Кількість об’єктів, що ідентифікуються, відома заздалегідь, і кожен такий об’єкт буде виступати у ролі альтернативи.

Для розв’язання багатокритеріальних задач застосовуються два основні підходи:

1. Вважають, що мету достатньо адекватно відображає множина критеріїв, і тому постає багатокритеріальна задача.
2. Вважають, що задано множину альтернатив, які можна обирати з цієї множини за допомогою покрокового діалогу з ОПР, будуючи послідовність слабших бінарних відношень для звуження первісної множини альтернатив.

Представниками першого підходу є різноманітні методи згортання критеріїв, а також методи поступок, а другого – методи ELECTRE.

Методи згортання критеріїв

Методи згортання критеріїв зводять первісну задачу (4.1)

$$Q_1(a,x) \Rightarrow Max, Q_2(a,x) \Rightarrow Max, ..., Q_n(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X \tag{4.1}$$

де a – вектор відомих детермінованих значень параметрів задачі, x – вектор керованих змінних, X – множина допустимих варіантів рішень, до задачі наступного вигляду (4.2):

$$Q(Q_1(x),...,Q_n(x)) \Rightarrow Max, \quad x \in X \tag{4.2}$$

1.а) Лінійна згортка

За допомогою лінійного згортання глобальний критерій подається у вигляді лінійної комбінації компонентів векторного критерію якості з ваговими коефіцієнтами, основне призначення яких – врахування відносної важливості критеріїв (4.3):

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \times Q_i(x)) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{4.3}$$

де $Q_i(x)$ – i-та компонента векторного критерію якості, λ_i – ваговий коефіцієнт, що відображає відносну важливість i-го критерію.

1.б) Нормована лінійна згортка

Лінійне згортання нормованих критеріїв ґрунтується на ідеї зведення часткових критеріїв до безрозмірних величин з інтервалом можливих значень кожного з них [0,1]. Щоб виконати таке перетворення, необхідно для кожного з критеріїв визначити межі його зміни від мінімального значення $Q^{\min}$ до максимального $Q^{\max}$ та коефіцієнти відносної важливості нормованих критеріїв λ_i (4.4):

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \times \frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}\right) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \qquad (4.4)$$

Головною проблемою цих методів є виявлення точних значень вагових коефіцієнтів. Найчастіше ця процедура суб’єктивна. Окрім того, коефіцієнти в методі лінійного згортання мають бути розмірними величинами, тому що критерії можуть мати різну розмірність. Щоб позбутися цієї вади в згортанні нормованих критеріїв (нормована лінійна згортка), окремі критерії спочатку нормують (нормовані критерії безрозмірні та змінюються в інтервалі від 0 до 1). Проте, нормовані критерії, що з’являються внаслідок такого «вдосконалення», не мають змістовної інтерпретації, і тому об’єктивне визначення вагових коефіцієнтів ще більше ускладнюється. Отже, невизначеність мети, спричинена багатокритеріальністю, не зменшується, а переходить в іншу форму – виникає проблема обчислення значень вагових коефіцієнтів.

Адитивні згортання мають ще одну ваду – значення одного зі складових критеріїв може бути дуже великим внаслідок того, що значення інших мінімальні. Дана обставина є вкрай небажаною.

У разі опуклої області значень векторного критерію лінійне згортання можна використати для отримання кількох розв’язків, оптимальних за Парето, змінивши значення вагових коефіцієнтів. Це дає ОПР можливість у діалозі дослідити саме ту частину області Парето, яка найбільше його цікавить. У разі неопуклої області значень векторного критерію лінійне згортання не дає можливість визначити всі оптимальні розв’язки за Парето за будь-яких значень вагових коефіцієнтів.

2.а) Максмінна згортка

У методі максмінного згортання глобальний критерій визначається як (4.5):

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n} \lambda_i Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{4.5}$$

На значення глобального критерію впливає лише той частковий критерій, який має у відповідній точці найменше значення. Береться до уваги лише «найгірший» випадок, тому значення *Q(x)* визначає гарантовану нижню оцінку для всіх часткових критеріїв.

2.б) Нормована максмінна згортка

Ідея нормованого визначення глобального критерію методом максмінної згортки аналогічна до методу нормованої лінійної згортки (п. 1.б) – зведення часткових критеріїв до безрозмірних величин (4.6):

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n} \lambda_i \left(\frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}} \right) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{4.6}$$

3) Метод «ідеальної» точки

Метод «ідеальної» точки реалізує принцип Джофріона, згідно з яким визначається існування «ідеальної» точки, тобто точки, у якій всі критерії сягають максимуму. Оскільки на практиці такий випадок є дуже маловірогідним, то найкраща альтернатива визначається за відстанню до «ідеальної» точки (рис. 4.1) за допомогою введеної метрики.

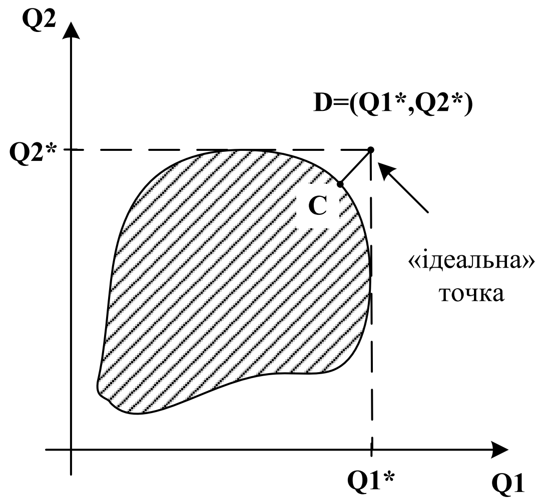


Рисунок 4.1 – Метод ідеальної точки

Для знаходження координат ідеальної точки необхідно розв’язати n однокритеріальних задач за кожним з критеріїв оптимізації (4.7):

$$Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, i = \overline{1,n} \tag{4.7}$$

Оптимальні значення критеріїв кожної з однокритеріальних задач $Q_i^* = MaxQ_i(x), \quad x \in X$, є координатами ідеальної точки $Q^* = (Q_1^*,...,Q_n^*)$ у просторі критеріїв.

Відстань до «ідеальної» точки із використанням обраної метрики зводить первісну задачу до задачі вирішення однокритеріальних задачі вигляду (4.8):

$$Q(x) = \rho(Q(x) - Q^*) \Rightarrow Min, \quad x \in X \tag{4.8}$$

де ρ – обрана метрика. Якщо в якості метрики обрано метрику Евкліда, то задача (4.8) набуває наступного вигляду (4.9):

$$Q(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Q_i(x) - Q_i^*)^2} \Rightarrow Min \qquad (4.9)$$

До недоліків метрики Евкліда слід віднести некоректність її використання у деяких випадках: наприклад, відстань між містами земної кулі обраховується скрізь неї, а не по поверхні. Взагалі метрику Евкліда дуже рідко використовують при кількості критеріїв більше двох. Тому відшукання метрики, яка б враховувала мету задачі, стає суттєвою перешкодою перед застосуванням методу «ідеальної» точки.

4) Метод лексикографічної оптимізації

Метод лексикографічної оптимізації складається з двох етапів: на першому етапі за допомогою ОПР визначається послідовність критеріїв за важливістю в порядку спадання важливості $Q_1 \succ Q_2 \succ ... \succ Q_n$, на другому – за кожним критерієм послідовно розв'язується задача оптимізації, починаючи з Q_1. Якщо при оптимальному значенні першого критерію Q_1^* можна поліпшити значення наступного, це виконують, а у протилежному випадку переходять до наступного. Процес припиняється, коли переглянуто всі критерії. Отже, на *i*-му кроці розв'язують задачу однокритеріальної оптимізації виду (4.10) з додатковими обмеженнями у вигляді рівностей на оптимальні значення попередніх критеріїв:

$$Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad Q_1(x) = Q_1^*, ..., Q_{i-1}(x) = Q_{i-1}^* \qquad (4.10)$$

Вада цього методу – надмірна жорсткість: покращення значень наступних в лексикографічному порядку критеріїв в багатьох випадках є неможливим.

5) Метод послідовних поступок

Метод послідовних поступок є логічним продовженням методу лексикографічної оптимізації, в якому передбачена процедура «допуску» на оптимальне значення критерію, якщо ОПР згодна на певне погіршення значення поточного критерію за умови, що покращаться значення наступних критеріїв.

В даному методі, як і в методі лексикографічної оптимізації, визначається порядок важливості критеріїв $Q_1 \succ Q_2 \succ ... \succ Q_n$. Після цього на кожному *i*-му кроці алгоритму розв'язують задачу оптимізації за критерієм Q_i та призначають поступку $\Delta Q_i > 0$ (або позначають, як $Q_i \overset{\Delta Q_i}{\succ} Q_{i+1}$), на яку готова піти ОПР в зменшенні оптимального значення *i*-го критерію, щоб поліпшити значення менш важливих критеріїв. Призначення поступки означає введення на кожному кроці одного додаткового обмеження $Q_i \geq Q_i^* - \Delta Q_i$, тому на *(i+1)*-му кроці розв'язують задачу виду (4.11):

$$Q_{i+1}(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad Q_1(x) \geq Q_1^* - \Delta Q_1, ..., Q_i(x) \geq Q_i^* - \Delta Q_i \qquad (4.11)$$

Процес розв'язання задачі закінчується, коли досягнуто останнього критерію, або ж призначення поступки становиться недоцільним. У разі потреби процес повторюють, проаналізувавши попередні результати (зі зміною величин поступки або зі змінами у порядку важливості критеріїв). Для реалізації методу послідовних поступок достатньо мати ефективний алгоритм вирішення однокритеріальної задачі.

3 Завдання

3.1 Обрати набір символів («Додаток В») та методи вирішення (табл. 4.1) за варіантом.

Таблиця 4.1 – Методи вирішення багатокритеріальної задачі

№	Назва методу
1	Метод лінійної згортки
2	Метод нормованої лінійної згортки
3	Метод максмінної згортки
4	Метод нормованої максмінної згортки
5	Метод «ідеальної» точки
6	Метод лексикографічної оптимізації
7	Метод послідовних поступок

Для символів базового набору використати шрифт «Times New Roman» та кількість комірок у сітці 11x11 (або 13x13, 15x15, 17x17). Розмір сітки повинен бути однаковим для всіх символів.

3.2 Для заданого набору символів (альтернатив) розробити систему ознак (не менше 5-ти) різних типів (наприклад, кількість перетинів із заданою прямою, кількість зафарбованих комірок у певній ділянці тощо), що дозволяють однозначно ідентифікувати всі символи набору. Для цього для кожного символу з набору визначити значення альтернатив в області критеріїв та обрати в якості кращих множину альтернатив з мінімальним значенням комплексного критерію для «Метод 1» та «Метод 2» (табл. 4.1):

$$Q_i(x) = \left| S_j - S_j(x_i) \right| \Rightarrow Min, \quad x \in X, i = 1(1)n, j = 1(1)m \tag{4.12}$$

де S_j – значення *j*-ої ознаки для символу-еталону; $S_j(x_i)$ – значення *j*-ої ознаки для *i*-го символу, що розпізнається; *n* – кількість символів у наборі; *m* – кількість ознак.

У випадку, коли множина отриманих рішень містить більше одної альтернативи (символу), тобто коли символ, що розпізнається, визначений неоднозначно, змінити систему ознак (змінити вагові коефіцієнти, розміри поступок, обрати інші ознаки та ін.) та повторити п. 3.2. Сформована таким чином система ознак повинна однозначно ідентифікувати кожен символ з базового набору заданими методами. Остаточну систему ознак і значення параметрів «Метод 1» та «Метод 2» звести у таблицю 4.2.

Таблиця 4.2 – Система ознак та параметрів методів

№	Ознака	Графічна інтерпретація
1	Опис ознаки 1	Рисунок 1
…	…	…
m	Опис ознаки m	Рисунок m
№	Метод	Параметри методу
1	Назва «Метод 1»	…
2	Назва «Метод 2»	…

3.3 Сформувати набір символів (16 символів), що розпізнаються, наступним чином (використовуючи табл. В.1 Додатка В):

– $\{x_1–x_4\}$ – символи відповідають символам А1, А3, А7, А9 відповідно з підкресленням;

– $\{x_5–x_8\}$ – символи відповідають символам А2, А4, А6, А8 відповідно з виділенням курсивом;

– $\{x_9–x_{11}\}$ – символи відповідають символам А2, А5, А6 відповідно з виділенням жирним;

– $\{x_{12}–x_{15}\}$ – символи відповідають символам А1, А4, А7, А10 відповідно з використанням шрифту «Verdana»;

– $\{x_{16}\}$ – символ відповідає символу А10, який задано числом, з додаванням одиниці (наприклад, для А10 = «2», x_{16} = 2 + 1 = «3»). Якщо при додаванні одиниці число стає рівним 10 (що відповідає А10 = «9»), то x_{16} прийняти рівним «0».

Отриманий набір символів із розміщенням в сітці обраного розміру навести у таблиці 4.3, де С – символ базового набору, що відповідає x_i (для x_{16} – вказати початкове значення А10); Р – символ, що розпізнається, з п. 3.3 (x_i); графічне зображення (С) та (Р) – зображення в сітці обраного розміру символів з стовпчиків (С) та (Р).

Таблиця 4.3 – Набір символів, що розпізнається

№	С	Р	Графічне зображення (С)	Графічне зображення (Р)
1				
…				
16				

3.4 Для кожного символу $\{x_1–x_{16}\}$, що розпізнається, визначити значення в області критеріїв та значення оптимальних альтернатив за Парето та Слейтером (див. «Лабораторна робота №1»). Врахувати, що оптимальні значення за Парето (Слейтером) будуть мати нульові значення критеріїв, тобто, оптимальними будуть ті альтернативи/символи, що мають менші відхилення від еталону (4.12). Вказати, якою альтернативою були доміновані альтернативи, що відкинуті.

3.5 Обрати найкращу альтернативу(-и) із множини оптимальних за Парето, використовуючи «Метод 1» та «Метод 2» із значеннями вагових коефіцієнтів, розмірів поступок та інших параметрів з п. 3.2.

3.6 У випадку, якщо символ, що розпізнається, визначений невірно, ввести додаткову(-і) ознаку або змінити параметри методу, щоб однозначно і вірно ідентифікувати даний символ (вводити додаткову ознаку або параметри методу потрібно лише для даного символу).

3.7 Результати розпізнавання для кожного символу з використанням «Метод 1» та «Метод 2» звести у таблицю 4.4 та вказати у «Примітки» тип та параметри модифікації з п. 3.6.

Таблиця 4.4 – Результати розпізнавання

№	C	P	M1	M2	Графічне зображення (Р)	Примітки
1						
…						
16						

У таблиці 4.4: С – символ базового набору, що відповідає x_i (для x_{16} – вказати початкове значення А10); Р – символ, що розпізнається, з п. 3.3 (x_i); М1 – результати розпізнавання за допомогою «Метод 1» з параметрами методу та за системи ознак з п. 3.2; М2 – результати розпізнавання за допомогою «Метод 2» з параметрами методу та за системи ознак з п. 3.2; графічне зображення (Р) – зображення в сітці обраного розміру символу зі стовпчика (Р); «Примітки» – змінені параметри «Метод 1» та/або «Метод 2» або опис додатково введених ознак з п. 3.6. Для символу x_{16} – вказати лише результати розпізнавання («Примітки» залишаться пустими), оскільки відповідний йому символ відсутній в наборі.

3.8 Зробити висновки щодо результатів ідентифікації, розробленої системи ознак, переваг та недоліків методів, що були використані тощо.

4 Приклад

Для заданого набору символів (табл. 4.5) розробити систему ознак (m=3) та розпізнати символ (рис. 4.2) за допомогою «Метод 1» та «Метод 2».

Таблиця 4.5 – Базовий набір символів

A1	A2	A3	A4	Метод 1	Метод 2
A	I	Z	6	1	7

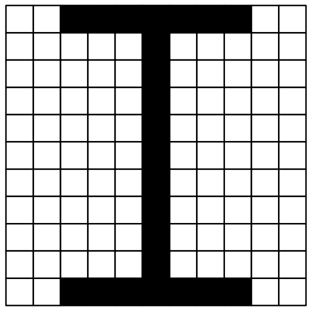


Рисунок 4.2 – Символ, що розпізнається

4.1 Оберемо розмір сітки 11x11 та зобразимо символи базового набору (рис. 4.3).

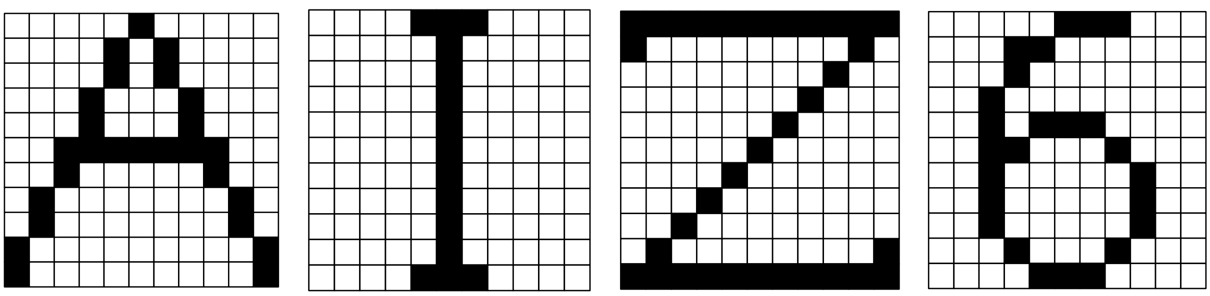


Рисунок 4.3 – Зображення символів базового набору

4.2 Для базового набору символів, що розглядається, введемо наступну систему ознак:

– S1= {Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)};

– S2 = {Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)};

– S3 = {Кількість зафарбованих клітинок в середньому квадраті 3x3}.

Еталонні значення ознак для базового набору та їх графічна інтерпретація наведені у таблицях 4.6–4.7.

Таблиця 4.6 – Еталонні значення ознак

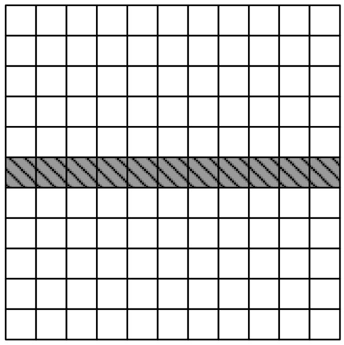
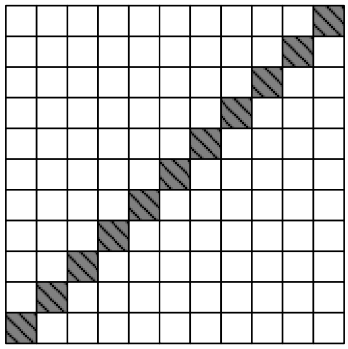
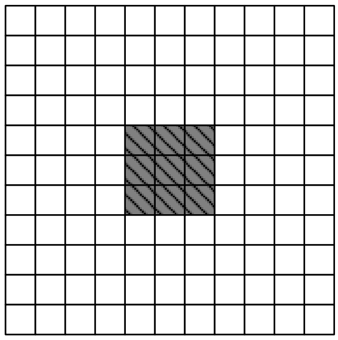
Ознака	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	1	1	1	2
S2	3	1	1	2
S3	3	3	3	3

Як видно з таблиці 4.6, значення ознак для символів «I» та «Z» повністю співпадають, що свідчить про неможливість однозначно визначити ці символи за обраного набору ознак. Змінимо ознаку S3 наступним чином:

– S3 = {Кількість зафарбованих клітинок на сітці 11x11}.

В цьому випадку еталонні значення ознак приймуть вигляд, наведений у табл. 4.8.

Таблиця 4.7 – Система ознак

№	Ознака	Графічна інтерпретація
S1	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)	
S2	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)	
S3	Кількість зафарбованих клітинок в середньому квадраті 3x3	

Таблиця 4.8 – Еталонні значення ознак (модифіковані)

Ознака	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	1	1	1	2
S2	3	1	1	2
S3	26	15	33	25

Припустимо, що розпізнати необхідно символ «A», значення ознак якого за критеріями S1-S3 відповідають значенням символу «А» у таблиці 4.8, та зведемо дані у таблицю 4.9.а.

4.2.1) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «А»:

$$Q_1(x_1) = \left|S_1 - S_1(x_1)\right| = \left|1-1\right| = 0$$

$$Q_2(x_1) = \left|S_2 - S_2(x_1)\right| = \left|3-3\right| = 0$$

$$Q_3(x_1) = \left|S_3 - S_3(x_1)\right| = \left|26-26\right| = 0$$

4.2.2) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «I»:

$$Q_1(x_2) = \left|S_1 - S_1(x_2)\right| = \left|1-1\right| = 0$$

$$Q_2(x_2) = \left|S_2 - S_2(x_2)\right| = \left|3-1\right| = 2$$

$$Q_3(x_2) = \left|S_3 - S_3(x_2)\right| = \left|26-15\right| = 11$$

4.2.3) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «Z»:

$$Q_1(x_3) = \left|S_1 - S_1(x_3)\right| = \left|1-1\right| = 0$$

$$Q_2(x_3) = \left|S_2 - S_2(x_3)\right| = \left|3-1\right| = 2$$

$$Q_3(x_3) = \left|S_3 - S_3(x_3)\right| = \left|26-33\right| = 7$$

4.2.4) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «6»:

$$Q_1(x_4) = \left|S_1 - S_1(x_4)\right| = \left|1-2\right| = 1$$

$$Q_2(x_4) = \left|S_2 - S_2(x_4)\right| = \left|3-2\right| = 1$$

$$Q_3(x_4) = \left|S_3 - S_3(x_4)\right| = \left|26-25\right| = 1$$

Таблиця 4.9.а – Розпізнавання символу «А» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	0	2	2	1
Q3	0	11	7	1

Аналогічно будуються значення альтернатив в області критеріїв і для інших символів (результати без розрахунків наведені в табл. 4.9.б-4.9.г).

Таблиця 4.9.б – Розпізнавання символу «І» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	0
Q2	2	0	0	0
Q3	11	0	18	10

Таблиця 4.9.в – Розпізнавання символу «Z» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	2	0	0	1
Q3	7	18	0	8

Таблиця 4.9.г – Розпізнавання символу «6» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	1	1	1	0
Q2	1	1	1	0
Q3	1	10	8	0

4.2.5) Покладемо для «Метод 1» (метод лінійної згортки – табл. 4.1) наступні вагові коефіцієнти: $\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2$. Визначимо найкращу альтернативу, використовуючи значення альтернатив в області критеріїв (табл. 4.9.а) при розпізнаванні символу «А». Значення комплексного критерію обрахуємо за (4.3) та зведемо результати у таблицю 4.10:

$$Q(x_1) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \times Q_i(x_1)) = 0.4*0 + 0.4*0 + 0.2*0 = 0$$

$$Q(x_2) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \times Q_i(x_2)) = 0.4*0 + 0.4*2 + 0.2*11 = 3$$

$$Q(x_3) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \times Q_i(x_3)) = 0.4*0 + 0.4*2 + 0.2*7 = 2.2$$

$$Q(x_4) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i \times Q_i(x_4)) = 0.4*1 + 0.4*1 + 0.2*1 = 1$$

Таблиця 4.10 – Розпізнавання символу «А» («Метод 1»)

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	0	2	2	1
Q3	0	11	7	1
Q	0	3	2.2	1

Мінімальне значення комплексного критерію (Q) відповідає одній альтернативі A1(«A»), тобто символ розпізнаний та розпізнаний однозначно. Аналогічно розпізнаються і всі інші символи, що входять до базового набору.

Таким чином, розроблена система ознак для «Метод 1» з ваговими коефіцієнтами лінійної згортки $\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2$, дозволяє однозначно ідентифікувати всі символи базового набору.

4.2.6) Покладемо для «Метод 2» (метод послідовних поступок – табл. 4.1) наступний порядок критеріїв за важливістю та значення поступок: $Q_2 \overset{2}{\succ} Q_3 \overset{7}{\succ} Q_1$ та врахуємо, що краще значення за критеріями мають альтернативи, значення яких у просторі критеріїв найменше (оскільки критерії задають відхилення від еталону).

1) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символами базового набору (табл. 4.9.а):

Крок 1. Визначимо найменше значення альтернатив за другим критерієм з таблиці 4.9.а: $\min Q_2(x_i) = 0, \quad x \in X$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_1 = 2$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за другим критерієм в межах від 0 до $\min Q_2(x_i) + \Delta Q_1 = 0 + 2 = 2$. Тобто на першому кроці до множини найкращих альтернатив (К1) увійдуть К1 = {А1,А2,А3,А4}.

Крок 2. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К1 за третім критерієм (табл. 4.9.а): $\min Q_3(x_i) = 0, \quad x \in K1$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_2 = 7$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за третім критерієм в межах від 0 до $\min Q_3(x_i) + \Delta Q_2 = 0 + 7 = 7$. Тобто, на другому кроці до множини найкращих альтернатив (К2) увійдуть К2 = {А1, А3, А4}.

Крок 3. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К2 за першим критерієм (табл. 4.9.а): $\min Q_1(x_i) = 0, \quad x \in K2$, тобто до множини найкращих альтернатив (К3) входять ті, які мають значення за першим критерієм 0: К3={А1,А3}.

Остаточно, множина найкращих альтернатив $Q = \min K3 = \{A1, A3\}$ складається з А1 та А3. Таким чином, отримано більше ніж одну альтернативу, що свідчить про невдалий вибір ознак або параметрів методу (порядку критеріїв за важливістю, розмірів поступок).

Оберемо інший порядок важливості критеріїв для перевірки символу «А» (символу, що розпізнається) з усіма альтернативами $Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$.

1) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символами базового набору (табл. 4.9.а):

Крок 1. Визначимо найменше значення альтернатив за першим критерієм з таблиці 4.9.а: $\min Q_1(x_i) = 0, \quad x \in X$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_1 = 2$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за першим критерієм в межах від 0 до $\min Q_1(x_i) + \Delta Q_1 = 0 + 2 = 2$. Тобто, на першому кроці до множини найкращих альтернатив (К1) увійдуть К1 = {А1,А2,А3,А4}.

Крок 2. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К1 за другим критерієм (табл. 4.9.а): $\min Q_2(x_i) = 0, \quad x \in K1$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_2 = 7$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за третім критерієм в межах від 0 до $\min Q_3(x_i) + \Delta Q_2 = 0 + 7 = 7$. Тобто, на другому кроці до множини найкращих альтернатив (К2) увійдуть К2 = {А1, А2, А3, А4}.

Крок 3. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К2 за третім критерієм (табл. 4.9.а): $\min Q_3(x_i) = 0, \quad x \in K2$, тобто до множини найкращих альтернатив (К3) входять ті, які мають значення за третім критерієм 0: К3={А1}.

Оскільки отримано лише одне значення в множині найкращих альтернатив, то за даних ознак та параметрів методу символ «А» розпізнається однозначно. Аналогічно перевіряються інші символи набору з використанням відповідних значень альтернатив в області критеріїв (наведемо без пояснень).

2) Порівняння символу, що розпізнається («I»), з символами базового набору (табл. 4.9.б):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4}, $Q = \min K3 = \{A2\}$

Крок 3. К3={А2}.

3) Порівняння символу, що розпізнається («Z»), з символами базового набору (табл. 4.9.в):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4}, $Q = \min K3 = \{A3\}$

Крок 3. К3={А3}.

4) Порівняння символу, що розпізнається («6»), з символами базового набору (табл. 4.9.г):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4}, $Q = \min K3 = \{A4\}$

Крок 3. К3={А4}.

Зведемо дані у таблицю 4.11. Як видно з таблиці 4.11, для «Метод 2» за обраних ознак, порядку важливості критеріїв та розмірів поступок всі символи базового набору ідентифікуються вірно та однозначно.

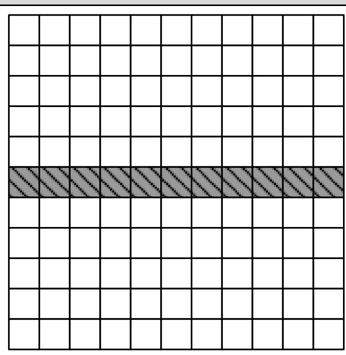
Таблиця 4.11 – Розпізнавання символів («Метод 2»)

Крок	Символ, що розпізнається			
	«A»	«I»	«Z»	«6»
К1	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4
К2	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4
К3	A1	A2	A3	A4
Q	A1	A2	A3	A4

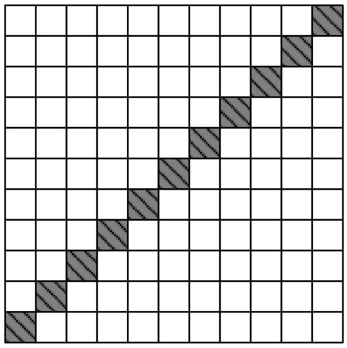
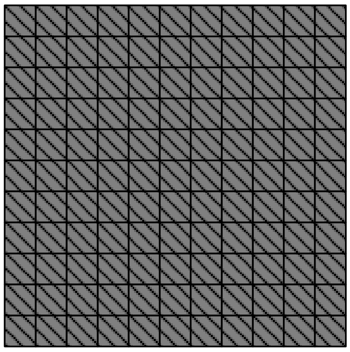
Таким чином, розроблена система ознак та обрані параметри для «Метод 1» та «Метод 2» дозволяють однозначно ідентифікувати всі символи набору, якщо вони отримані у «чистому» вигляді, але для символів, що потрібно розпізнати, у багатьох випадках присутні «шуми». Шуми з’являються внаслідок інструментальних похибок отримання зображення, наявності сторонніх позначень (плям, приміток), використання інших шрифтів та засобів форматування тексту (підкреслення, курсиву) та т.і. Вочевидь, в цьому випадку розпізнавання символів може ставати вкрай важкою задачею.

Зведемо дані, що їх отримано під час розробки системи ознак, у таблицю 4.2 (табл. 4.12).

Таблиця 4.12 – Система ознак та параметрів методів

№	Ознака	Графічна інтерпретація
1	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)	

Таблиця 4.12 (закінчення)

№	Ознака	Графічна інтерпретація
2	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)	
3	Кількість зафарбованих клітинок в квадраті 11x11	
№	**Метод**	**Параметри методу**
1	Метод лінійної згортки	$\lambda_1 = 0.4, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.2$
2	Метод послідовних поступок	$Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$

4.3 Розглянемо розпізнавання символу «I» за наявності «шумів» введення – збільшених нижнього та верхнього відрізків (рис. 4.2). Надалі будемо позначати цей символ, як «I*» (табл. 4.13).

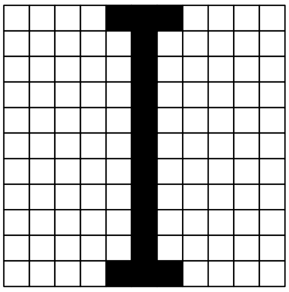
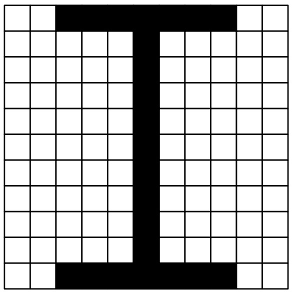
Обрахуємо значення ознак даного символу:

– S1=1,

– S2=1,

– S3=23.

Таблиця 4.13 – Набір символів, що розпізнається

№	C	P	Графічне зображення (C)	Графічне зображення (P)
1	I	I*		

4.4 За допомогою (4.3) та значень ознак еталонного набору (табл. 4.8), визначимо значення альтернатив в області критеріїв при розпізнаванні символу «I*», зводячи дані у таблицю (табл. 4.14).

Таблиця 4.14 – Значення альтернатив в області критеріїв для символу «I*»

Критерій (I*)	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	0	0	0	1
S2	2	0	0	1
S3	3	8	10	2

Визначимо оптимальні альтернативи за Парето та Слейтером, враховуючи, що значеннями альтернатив є відхилення, тобто найкращими є найменші значення (табл. 4.15).

Таким чином, множина оптимальних альтернатив становить:

– за Парето: P(X)={A1,A2,A4};

– за Слейтером: S(X)={A1,A2,A3,A4}.

Таблиця 4.15 – Визначення оптимальних альтернатив для символу «І*»

Критерій (І*)	Символи базового набору			
	А1(«А»)	А2(«І»)	А3(«Z»)	А4(«6»)
S1	0	0	0	1
S2	2	0	0	1
S3	3	8	10	2
домінується за Парето	–	–	А2	–
домінується за Слейтером	–	–	–	–

4.5 Далі будемо шукати найкращу альтернативу серед множини оптимальних альтернатив за Парето, що дає змогу зменшити кількість необхідних обчислень.

4.5.1) Розпізнавання символу «І*» за допомогою методу лінійної згортки: $\lambda_1 = 0.4, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.2$ («Метод 1»).

Таблиця 4.16 – Розпізнавання символу «І*» («Метод 1»)

Критерії (І*)	Символи базового набору		
	А1(«А»)	А2(«І»)	А4(«6»)
Q1	0	0	1
Q2	2	0	1
Q3	3	8	2
Q	1.4	1.6	1.2

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А4 («6»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q.

4.5.2) Розпізнавання символу «І*» за допомогою методу послідовних поступок $Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$ («Метод 2»).

Крок 1. К1={A1,A2,A4}.

Крок 2. К2={A1,A2,A4}.

Крок 3. К3={A4}.

$$Q = \min K3 = \{A4\}$$

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А4 («6»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q.

4.6 Оскільки відбулося хибне розпізнавання символу «І*» за допомогою «Метод 1» та «Метод 2», введемо додаткові ознаки або змінимо параметри методів.

4.6.1) Для «Метод 1» змінимо значення вагових коефіцієнтів на $\lambda_1 = 0.45,\quad \lambda_2 = 0.45,\quad \lambda_3 = 0.1$. Визначимо найкращу альтернативу (табл. 4.17).

Таблиця 4.17 – Розпізнавання символу «І*» («Метод 1») – модифікація

Критерії (І*)	Символи базового набору		
	A1(«А»)	A2(«І»)	A4(«6»)
Q1	0	0	1
Q2	2	0	1
Q3	3	8	2
Q	1.2	0.8	1.1

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А2 («І»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q, тобто за допомогою модифікації вагових коефіцієнтів розпізнавання символу відбулося успішно.

4.6.2) Для «Метод 2» змінимо порядок важливості критеріїв та розміри поступки: $Q_3 \overset{6}{\succ} Q_2 \overset{1}{\succ} Q_1$. Визначимо найкращу альтернативу.

Крок 1. К1={А1,А2,А4}.

Крок 2. К2={А2,А4}.

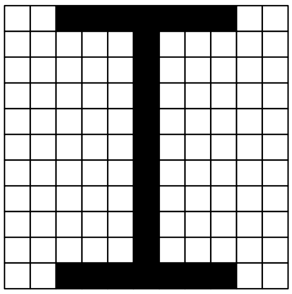
Крок 3. К3={А2,А4}.

$$Q = \min K3 = \{A2\}$$

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А2 («І»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q, тобто за допомогою модифікації порядку важливості критеріїв та розмірів поступки розпізнавання символу відбулося успішно.

4.7 Зведемо дані по розпізнаванню символу «І*» у таблицю (табл. 4.18).

Таблиця 4.18 – Результати розпізнавання

№	С	Р	М1	М2	Графічне зображення (Р)	Примітки
1	І	І*	6	6		Метод 1 (параметри): $\lambda_1 = 0.45, \quad \lambda_2 = 0.45, \quad \lambda_3 = 0.1$ Метод 2 (параметри): $Q_3 \overset{6}{\succ} Q_2 \overset{1}{\succ} Q_1$

5 Зміст звіту

Звіт має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) короткі теоретичні відомості;

5.4) варіант завдання (у вигляді табл. 4.5);

5.5) розроблену систему ознак та параметрів методів (у вигляді табл. 4.2);

5.6) значення ознак для символів еталонного набору (у вигляді табл. 4.8);

5.7) сформований набір символів, що потрібно розпізнати (у вигляді табл. 4.3);

5.8) значення ознак для символів набору, що потрібно розпізнати (у вигляді табл. 4.8);

5.9) перелік символів (альтернатив), що входять до множини Парето та Слейтера для кожного символу набору, що розпізнається (16-ть таблиць у вигляді табл. 4.15);

5.10) результати визначення кращої альтернативи з множини Парето для кожного символу, що розпізнається, у вигляді зведених таблиць або опису (аналогічно прикладу у п. 4.5), а також результати розпізнавання за змінених параметрів методів або додаткових ознак відповідно до п. 3.6 (аналогічно прикладу у п. 4.6) – 16 таблиць/підпунктів опису;

5.11) зведені результати розпізнавання (у вигляді табл. 4.4);

5.12) висновки.

6 Контрольні запитання

6.1 В чому полягає головна ідея методів згортання, які використовують нормування?

6.2 Які відмінності методів лексикографічної оптимізації та методу поступок?

6.3 В чому полягає сутність методу «ідеальної» точки?

6.4 Пояснити сутність невизначеності в методах багатокритеріальної оптимізації.

6.5 Яку форму приймає невизначеність у методах згортання, методі «ідеальної» точки та методах поступок?

6.6 Яку роль відіграє ОПР в методах багатокритеріальної оптимізації?

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Варіанти набору вантажів

№	С	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	83	86	77	15	93	35	86	92	49	21	62	27	90	59	63	26	40	26	72	36
	2	11	38	67	29	82	30	62	23	67	35	29	02	22	58	59	67	93	56	11	42
	3	29	73	21	19	84	37	98	24	15	70	13	26	91	80	56	73	62	70	96	81
2	1	05	25	84	27	36	05	46	29	13	57	24	95	82	45	14	67	34	64	43	50
	2	87	08	76	78	88	84	03	51	54	99	32	60	76	68	39	12	26	86	94	39
	3	95	70	34	78	67	01	97	02	17	92	52	56	01	80	86	41	65	89	44	19
3	1	40	29	31	17	97	71	81	75	09	27	67	56	97	53	86	65	06	83	19	24
	2	28	71	32	29	03	19	70	68	08	15	40	49	96	23	18	45	46	51	21	55
	3	79	88	64	28	41	50	93	51	34	64	24	14	87	56	43	91	27	65	59	36
4	1	32	51	37	28	75	07	74	21	58	95	29	37	35	93	18	28	43	11	28	29
	2	76	04	43	63	13	38	06	40	04	18	28	88	69	17	17	96	24	43	70	83
	3	90	99	72	25	44	90	05	39	54	86	69	82	42	64	97	07	55	04	48	11
5	1	22	28	99	43	46	68	40	22	11	10	05	01	61	30	78	05	20	36	44	26
	2	22	65	08	16	82	58	24	37	62	24	51	36	52	99	79	50	68	71	73	31
	3	81	30	33	94	60	63	99	81	99	96	59	73	13	68	90	95	26	66	84	40

С – номер рядка.

Таблиця А.1 (продовження)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	1	90	84	76	42	36	07	45	56	79	18	87	12	48	72	59	09	36	10	42	87
	2	06	01	13	72	21	55	19	99	21	04	39	11	40	67	05	28	27	50	84	58
	3	20	24	22	69	96	81	30	84	92	72	72	50	25	85	22	99	40	42	98	13
7	1	98	90	24	90	09	81	19	36	32	55	94	04	79	69	73	76	50	55	60	42
	2	79	84	93	05	21	67	04	13	61	54	26	59	44	02	02	06	84	21	42	68
	3	28	89	72	08	58	98	36	08	53	48	03	33	54	48	90	33	67	46	68	29
8	1	51	46	88	97	49	90	03	33	63	97	53	92	86	25	52	96	75	88	57	29
	2	36	60	14	21	60	04	28	27	50	48	56	02	94	97	99	43	39	02	28	03
	3	51	81	47	38	59	51	35	34	39	92	15	27	04	29	49	64	85	29	43	35
9	1	77	51	38	71	49	89	67	88	92	95	43	44	29	90	82	40	41	69	26	32
	2	61	42	60	17	23	61	81	09	90	25	96	67	77	34	90	26	24	57	14	68
	3	05	58	12	86	51	46	26	94	16	52	78	29	46	90	47	70	51	80	31	93
10	1	57	27	12	86	14	55	12	90	12	79	10	69	89	74	55	41	20	33	87	88
	2	38	66	70	84	56	17	06	60	49	37	05	59	17	18	45	83	73	58	73	37
	3	89	83	07	78	57	14	71	29	51	59	18	38	25	88	74	33	57	81	93	58

Таблиця А.1 (продовження)

№	С	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	1	70	99	17	39	69	63	22	94	73	47	31	62	82	90	92	91	57	15	21	57
	2	74	91	47	51	31	21	37	40	54	30	98	25	81	16	16	02	31	39	96	04
	3	38	80	18	21	70	62	12	79	77	85	36	04	76	83	07	59	57	44	99	11
12	1	27	50	36	60	18	05	63	49	44	11	05	34	91	75	55	14	89	68	93	18
	2	05	82	22	82	17	30	93	74	26	93	86	53	43	74	14	13	79	77	62	75
	3	88	19	10	32	94	17	46	35	37	91	53	43	73	28	25	91	10	18	17	36
13	1	63	55	90	58	30	04	71	61	33	85	89	73	04	51	05	50	68	03	85	06
	2	95	39	49	20	67	26	63	77	96	81	65	60	36	55	70	18	11	42	32	96
	3	79	21	70	84	72	27	34	40	83	72	98	30	63	47	50	30	73	14	59	22
14	1	47	24	82	35	32	04	54	43	98	86	40	78	59	62	62	83	41	48	23	24
	2	72	22	54	35	21	57	65	47	71	76	69	18	01	03	53	33	07	59	28	06
	3	97	20	84	08	34	98	91	76	98	15	52	71	89	59	06	10	16	24	09	39
15	1	51	78	09	53	81	14	38	89	26	67	47	23	87	31	32	22	81	75	50	79
	2	90	54	50	31	13	57	94	81	81	03	20	33	82	81	87	15	96	25	04	22
	3	92	51	97	32	34	81	06	15	57	08	95	99	62	97	83	76	54	77	09	87

Таблиця А.1 (продовження)

№	С	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16	1	32	82	21	66	63	60	82	11	85	86	85	30	90	83	14	76	16	20	92	25
	2	28	39	25	90	36	60	18	43	37	28	82	21	10	55	88	25	15	70	37	53
	3	08	22	83	50	57	97	27	26	69	71	51	49	10	28	39	98	88	10	93	77
17	1	90	76	99	52	31	87	77	99	57	66	52	17	41	35	68	98	84	95	76	05
	2	66	28	54	28	08	93	78	97	55	72	74	45	51	25	97	83	12	27	82	21
	3	93	34	39	34	21	59	85	57	54	61	62	72	41	16	52	50	62	82	99	17
18	1	54	73	15	06	51	64	90	63	91	72	37	37	59	28	71	80	87	56	90	41
	2	70	52	65	11	69	17	61	83	51	12	51	06	38	67	64	89	32	54	04	75
	3	79	41	12	38	69	36	70	56	44	60	49	14	65	14	26	86	83	39	69	35
19	1	52	21	93	90	89	09	31	73	64	35	48	95	77	13	33	98	49	55	55	93
	2	68	56	60	33	23	86	71	58	77	40	45	81	61	90	23	50	51	54	75	64
	3	42	24	59	19	89	44	69	38	51	76	83	19	33	43	04	56	81	75	66	11
20	1	67	12	92	29	02	68	31	02	74	07	18	16	83	77	87	72	73	57	62	25
	2	33	97	96	18	41	53	26	74	80	93	85	48	05	30	29	59	98	60	62	24
	3	19	80	41	02	10	80	26	83	89	40	08	23	38	57	93	31	10	20	05	90

Таблиця А.1 (продовження)

№	С	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	1	13	91	38	70	21	87	29	71	80	43	95	99	24	88	54	86	69	32	69	10
	2	73	30	33	63	87	79	94	49	99	51	39	64	42	30	86	15	49	15	86	81
	3	11	34	33	87	22	87	73	43	19	42	54	44	24	39	59	63	18	53	12	69
22	1	05	04	33	99	34	19	15	35	87	53	69	50	87	02	37	62	89	10	05	60
	2	04	11	57	29	03	16	92	21	22	05	43	79	61	28	78	47	51	45	82	87
	3	99	51	89	86	53	26	48	94	36	06	07	92	17	64	21	20	80	66	94	54
23	1	23	37	33	84	17	12	31	17	09	65	56	08	69	45	95	22	71	95	69	59
	2	01	76	52	71	40	25	43	72	91	89	27	66	78	12	50	96	24	33	13	86
	3	99	70	94	68	15	41	42	39	37	63	98	90	39	02	13	31	28	57	04	71
24	1	46	83	38	25	95	40	21	72	26	34	58	25	56	52	45	72	46	39	11	83
	2	03	61	25	42	16	39	74	44	96	30	67	94	13	57	19	60	50	92	32	76
	3	79	90	53	35	95	98	07	41	37	70	76	40	84	01	83	51	92	09	96	40
25	1	39	63	35	04	73	06	64	23	51	49	51	30	39	04	65	86	02	25	79	91
	2	47	07	84	31	61	19	31	53	28	27	94	19	43	81	23	68	87	39	43	38
	3	88	94	20	80	98	86	18	52	63	98	95	10	05	79	42	66	98	25	72	78

Таблиця А.1 (закінчення)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
26	1	53	66	97	48	47	72	16	86	12	59	77	51	53	97	32	03	35	51	07	98
	2	49	54	61	06	34	03	25	84	28	97	63	33	15	60	81	14	85	97	51	97
	3	08	29	49	13	79	34	16	14	85	75	65	86	30	26	92	16	29	69	52	09
27	1	66	15	95	33	28	76	47	13	26	51	62	86	29	63	51	08	97	16	75	82
	2	44	40	20	26	18	65	94	99	34	46	08	53	62	03	86	42	32	34	07	10
	3	34	69	96	15	84	96	24	82	65	51	16	61	43	37	87	61	02	81	60	88
28	1	79	20	41	93	24	28	35	08	62	42	70	96	63	66	11	51	15	87	34	32
	2	90	50	93	33	39	80	94	93	13	54	82	44	75	23	38	51	51	73	11	65
	3	68	81	13	83	99	77	35	14	64	69	46	07	72	91	40	11	23	87	57	36
29	1	93	39	81	20	14	71	71	18	96	34	83	64	67	97	51	67	74	35	33	90
	2	57	32	49	29	23	90	92	47	29	49	35	22	40	68	43	55	39	66	25	36
	3	53	60	52	20	57	04	87	83	40	21	26	97	05	27	78	28	69	70	27	98
30	1	20	63	21	60	83	16	67	23	82	92	11	35	53	63	08	62	68	95	98	60
	2	68	76	09	73	03	87	54	73	57	81	23	29	96	44	42	80	12	09	55	47
	3	54	66	34	59	81	42	73	01	38	71	13	58	99	22	84	55	61	90	80	71

ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Середньомісячна температура міст світу

№	Місто	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	Вологда (Росія)	-13	-11	-4	+3	+11	+15	+17	+15	+10	+3	-3	-9
2	Атланта (США)	+5	+7	+12	+16	+21	+24	+26	+26	+23	+17	+12	+7
3	Мурманськ (Росія)	-11	-11	-6	-1	+4	+10	+13	+11	+7	+1	-5	-9
4	Нуук (Данія)	-8	-8	-8	-4	+1	+4	+7	+7	+4	-1	-4	-7
5	Гус-Бей (Канада)	-18	-16	-10	-2	+5	+11	+15	+14	+9	+2	-4	-14
6	Біробіджан (Росія)	-23	-19	-9	+3	+11	+17	+20	+18	+12	+2	-11	-21
7	Архангельськ (Росія)	-15	-12	-6	0	+7	+13	+16	+14	+8	+2	-5	-10
8	Владикавказ (Росія)	-3	-2	+3	+10	+15	+18	+20	+20	+16	+9	+5	0
9	Даланзадгад (Монголія)	-12	-9	-2	+6	+14	+19	+22	+20	+14	+5	-3	-10
10	Ланьчжоу (Китай)	-5	-1	+6	+12	+17	+20	+23	+22	+16	+11	+3	-4
11	Владивосток (Росія)	-13	-10	-2	+5	+11	+14	+18	+20	+16	+9	-1	-9
12	Каунас (Літва)	-6	-5	0	+6	+13	+16	+17	+17	+12	+7	+2	-2
13	Сувалки (Польща)	-4	-4	0	+6	+12	+15	+17	+16	+12	+7	+1	-2
14	Урумчі (Китай)	-13	-11	-1	+11	+18	+23	+25	+24	+18	+9	-2	-10

Таблиця Б.1 (закінчення)

№	Місто	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
15	Улан-Батор (Монголія)	-20	-16	-7	+3	+11	+16	+18	+16	+10	+2	-10	-18
16	Рованіемі (Фінляндія)	-12	-11	-6	-1	+6	+12	+15	+12	+7	0	-6	-10
17	Саппоро (Японія)	-4	-4	0	+7	+12	+17	+21	+22	+18	+11	+5	-1
18	Пешавар (Пакистан)	+11	+13	+17	+23	+29	+33	+32	+31	+29	+24	+18	+13
19	Астана (Казахстан)	-17	-17	-10	+3	+13	+18	+20	+18	+12	+3	-7	-14
20	Квебек (Канада)	-13	-11	-5	+3	+11	+16	+19	+18	+12	+6	-1	-9
21	Шеньян (Китай)	-11	-7	+1	+1	+17	+22	+25	+24	+18	+10	+1	-7
22	Бішкек (Киргизія)	-3	-2	+5	+12	+17	+22	+24	+23	+18	+11	+5	0
23	Ейлат (Ізраїль)	+15	+16	+20	+24	+28	+31	+33	+33	+31	+27	+21	+17
24	Регенсбург (Німеччина)	-1	0	+5	+9	+14	+16	+18	+18	+14	+9	+3	0
25	Хорог (Таджикистан)	-6	-4	+3	+10	+15	+19	+23	+23	+18	+11	+4	-2
26	Чанчунь (Китай)	-15	-12	-3	+7	+15	+21	+23	+22	+15	+7	-3	-12
27	Хух-Хото (Китай)	-12	-8	0	+9	+15	+20	+22	+20	+14	+7	-2	-10
28	Колорадо-Спрингс (США)	-2	0	+3	+8	+13	+18	+22	+20	+16	+10	+3	-1
29	Йошкар-Ола (Росія)	-14	-12	-5	+5	+12	+16	+19	+17	+11	+3	-4	-9
30	Тирасполь (Молдова)	-3	-1	+4	+11	+16	+20	+21	+21	+17	+11	+5	0

ДОДАТОК В

Таблиця В.1 – Варіанти базового набору символів

№	А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	М1	М2
1	A	S	D	F	G	$	Ω	1	5	8	1	2
2	Q	W	E	R	T	∞	Ψ	2	3	4	1	3
3	Z	X	C	V	B	£	η	7	8	9	1	4
4	Y	U	I	O	P	∑	γ	4	6	8	1	5
5	H	J	K	L	N	€	β	5	7	8	1	6
6	Q	A	Z	W	S	+	π	3	4	6	1	7
7	X	C	R	F	V	/	φ	1	6	9	2	3
8	T	G	B	Y	H	#	ω	2	4	7	2	4
9	N	U	J	M	I	=	μ	3	5	8	2	5
10	K	O	L	P	Q	<	ξ	4	7	8	2	6
11	Z	S	E	F	V	>	δ	2	6	8	2	7
12	X	D	R	G	B	۞	τ	2	3	9	3	4
13	C	F	T	H	N	۩	Δ	2	5	6	3	5
14	V	G	Y	J	M	≡	Б	4	5	7	3	6
15	B	H	U	K	P	≠	Г	3	5	8	3	7
16	Q	E	T	U	O	≤	Д	3	6	9	4	5
17	W	R	Y	I	P	≥	Ж	3	7	8	4	6
18	A	D	G	J	L	♠	З	1	2	6	4	7
19	S	F	H	K	M	♣	Й	1	5	8	5	6
20	Z	C	B	M	Q	♥	П	1	7	9	5	7
21	Q	S	E	F	T	♦	Ф	1	3	5	6	7
22	H	U	K	O	Z	♪	Ц	5	6	9	1	2
23	S	X	D	C	F	♫	Ч	5	7	8	1	3
24	V	G	B	H	N	♂	Ш	4	6	8	1	4
25	J	M	K	A	W	♀	Щ	4	5	9	1	5
26	D	R	G	Y	J	☼	Ъ	3	4	5	1	6
27	Q	R	U	P	W	∫	Ы	2	8	9	1	7
28	T	I	A	F	J	≈	Э	1	3	8	2	3
29	Z	V	M	L	H	©	Ю	1	4	8	2	4
30	D	F	G	H	J	®	Я	6	7	9	2	5

А1..А10 – набір символів; М1 – «Метод 1»; М2 – «Метод 2».

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. В.Д. Ногин. Принятие решений при многих критериях : учебно-методическое пособие / В.Д. Ногин. – СПб. : Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.
2. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений / Лотов А.В., Поспелова И.И. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.
3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Зайченко Ю.П. – К. : Видавничий дім «Слово», 2003. – 688 с. – ISBN 966-8407-11-3.
4. Silvano Martello. Knapsack Problems : Algorithms and Computer Implemetations / Silvano Martello, Paolo Toth. – Chichester, England : John Wiley & Sons Ltd., 1990. – 306 p. – ISBN 0-471-92420-2.
5. Онлайн-калькулятор: Задача об упаковке в контейнеры. – Режим доступу : http://www.planetcalc.ru/917/. – Дата доступу : 02.01.2013. – Назва з екрану.
6. Мотузко Ю.О. Теория принятия решений: Учебно-методическое пособие / Мотузко Ю.О. – Запорожье : 2009. – 76 с.
7. Катренко А.В. Теорія прийняття рішень : підручник / Катренко А.В., Пасічник В.В., Пасько В.П. – Київ : Видавнича група BHV, 2009. – 448 с.
8. Шестаков К.М. Курс лекций по специальному курсу «Теория принятия решений и распознавания образов» : Учебное пособие для студентов факультета радиофизики и электроники. – Минск : БГУ, 2005. – 196 с.
9. Бідюк П.І. Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень/ Довгий С.О., Бідюк П.І., Трофимчук О.М., Савенков О.І – К. : Азимут-Україна, 2011. – 608 с.
10. Бідюк П.І. Проектування комп’ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень : Навч. посіб. / Бідюк П.І., Коршевнюк Л.О. – К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2010. – 340 с.