Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» –
Системное и прикладное программное обеспечение

Отчёт
По расчётно-графической работе
Математический анализ
"Интегральное исчисление"
Вариант: 7

Выполнили:
Бадамханов Тимур Шухратович
Демидов Иван Алексеевич
Батманов Даниил Евгеньевич
P3107

Приняла:
Холодова Светлана Евгеньевна

г. Санкт-Петербург, 2023

Теория

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим функцию $f(x; y)$ двух переменных, определенную для всех значений x в некотором – конечном и бесконечном – промежутке $[a; b]$, и всех значений y в множестве $Y = \{y\}$. Пусть при каждом постоянном значении y из Y функция $f(x; y)$ будет интегрируема в промежутке $[a; b]$, в собственном и несобственном смысле. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

будет, очевидно, функцией от вспомогательной переменной или параметра y.

Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру

В параграфе рассматривается понятие равномерной сходимости несобственных интегралов $\int_a^b f(x; \alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Определение 1. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ поточечно сходится на множестве E, если

$$\forall\alpha \in E \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists t_\alpha \in (a; b) \quad \forall\xi \in [t_\alpha; b) \mapsto \left|\int_\xi^b f(x; \alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Определение 2. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists t \in (a; b) \quad \forall\xi \in [t; b) \quad \forall\alpha \in E \mapsto \left|\int_\xi^b f(x; \alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Обозначим $F(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha)dx$ и $F(\xi; \alpha) = \int_a^\xi f(x; \alpha)dx$ — функцию, заданную, как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда определение поточечной сходимости интеграла при $\alpha \in E$ эквивалентно условию

$$\forall\alpha \in E \quad \exists \lim_{\xi \to b} F(\xi; \alpha) = F(\alpha).$$

Равномерная сходимость интеграла по параметру $\alpha \in E$ эквивалентна условию

$$F(\xi; \alpha) \rightrightarrows F(\alpha) \qquad \xi \to b.$$

Определение 3. Несобственный интеграл сходится неравномерно на множестве E, если
– он сходится при любом $\alpha \in E$,
– но не сходится равномерно, то есть

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall t \in (a;b) \quad \exists\xi \in [t;b) \quad \exists\alpha \in E \mapsto \left|\int\limits_{\xi}^{b} f(x;\alpha)dx\right| \geq \varepsilon.$$

Признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру

Теорема 1. Признак Вейерштрасса.

Пусть на множестве $[a;b) \times E$ определена функция $f(x;\alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке b.

Пусть $\exists g : [a,b) \to \mathbb{R} \quad \forall x \in [a;b) \quad \forall\alpha \in E \mapsto |f(x;\alpha)| \leq g(x)$ и интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на E.

Замечание об использовании признака Вейерштрасса:
При использовании теоремы Вейерштрасса необходимо предъявить функцию $g(x)$, равномерно ограничивающую функцию $f(x;\alpha)$ на множестве E, то есть оценку **модуля** подынтегральной функции функцией, независящей от α со сходящимся интегралом.

Теорема 2. Признак Дирихле.

Достаточное условие равномерной сходимости интеграла вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

Пусть на множестве $[a;+\infty) \times E$ заданы функции $f(x;\alpha)$ и $g(x;\alpha)$, такие что при любом фиксированном $\alpha \in E$:

$f(x;\alpha)$ непрерывна на луче $[a;+\infty)$;

$g(x;\alpha)$ непрерывно дифференцируема по x на луче $[a;+\infty)$.

Пусть

1) первообразная $F(t;\alpha) = \int\limits_{a}^{t} f(x;\alpha)dx$ равномерно по α ограничена на луче $[a;+\infty)$:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \quad \forall t \in [a;+\infty) \quad \forall\alpha \in E \mapsto |F(t;\alpha)| \leq C;$$

2) при любом $\alpha \in E$ функция $g(x;\alpha)$ является невозрастающей относительно x, начиная с некоторого x_0, не зависящего от α:

$$\exists x_0 \in [a;+\infty) : \quad \forall x \in [x_0;+\infty) \quad \forall\alpha \in E \mapsto g'_x(x;\alpha) \leq 0;$$

3) при $x \to +\infty$ функция $g(x;\alpha)$ стремится к нулю равномерно по $\alpha \in E$:

$$sup_{\alpha\in E}|g(x;\alpha)| \to 0 \quad x \to +\infty.$$

Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на множестве E.

Замечания об использовании признака Дирихле и признака Вейерштрасса:

1. Признак Дирихле целесообразно применять только, если нет возможности применить признак Вейерштрасса, проверка условий которого значительно проще.

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов влечет также абсолютную сходимость интеграла. Поэтому он не может быть применен, если интеграл сходится условно. В этом случае целесообразно проверить применимость признака Дирихле.

3. При проверке равномерной ограниченности первообразной целесообразно использовать запись первообразной через интеграл с переменным верхним пределом $F(t;\alpha)=\int\limits_a^t f(x;\alpha)dx$, так как эта запись явно показывает проверяемое условие.

4. Доказательство монотонности функции $g(x;\alpha)$ осуществляется исследованием знака производной по x при фиксированном α.

5. Доказательство равномерной сходимости, если функция $g(x;\alpha)$ явно зависит от α часто осуществляется достаточным условием равномерной сходимости, то есть построение мажорирующей модуль $g(x;\alpha)$ бесконечно малой функции:

$$\exists h(x) \quad \forall x \in (a,+\infty) \quad \forall \alpha \in E \mapsto |g(x;\alpha)| \le h(x),\, h(x) \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Доказательство неравномерной сходимости включает:

- доказательство поточечной сходимости;
- проверку отрицания условия (определения) равномерной сходимости или отрицания условия Коши).

Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру

Теорема 3. Критерий Коши.

Пусть на множестве $[a;b)\times E(a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\})$ определена функция $f(x;\alpha)$, такая что при любом $\alpha\in E$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке b.

Тогда, для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x;\alpha)dx$ сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in [a;b): \quad \forall \xi_1,\xi_2 \in [t;b) \quad \forall \alpha \in E \mapsto \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x;\alpha)dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Критерий Коши удобно использовать для доказательства того, что интеграл не сходится равномерно. Для этого достаточно проверить отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall t \in [a;b): \quad \exists \xi_1,\xi_2 \in [t;b) \quad \exists \alpha_0 \in E: \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x;\alpha_0)dx\right| \ge \varepsilon.$$

Решение

1) Исследовать на равномерную сходимость по параметру $y \in \mathbb{R}$ интегралы:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

Решение

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx$$

Используем признак Вейерштрасса:
$|e^{-x} \cos xy| \leq e^{-x}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx$ – сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos xy dx$ – сходится

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx, \ \ |e^{-xy}| \leq 1$$

Используем признак Вейерштрасса:
$|e^{-xy} \frac{\sin x}{x}| \leq \frac{\sin x}{x}$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ – сходится

2) Показать, что $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ сходится неравномерно по парметру $y : y \in [0; +\infty)$

Решение

$$\int\limits_A^{+\infty} ye^{-xy} dx = \int\limits_{Ay}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-Ay}$$

При изменении $y \in [0; +\infty)$: $\forall A > 0 : e^{-Ay} \xrightarrow[y \to 0]{} 1 > \varepsilon \Rightarrow$ интеграл не будет сходится равномерно

3) Исследовать на равномерную сходимость по параметру $\alpha : \alpha \in [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x dx$$

Доказательство поточечной сходимости: $\forall \alpha \in (0; +\infty) \quad \forall x > 1 : 0 \leq e^{-\alpha x^2} < e^{-\alpha x}$
Отрицание критерия Коши: $\exists \varepsilon = e^{-1} \quad \forall T > 0 \quad \exists \varepsilon_2 = T + 1 \geq \varepsilon_1 = T \quad \exists \alpha = \frac{1}{(T+1)^2}$

$$\left| \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-\alpha t^2} dt \right| = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-\alpha t^2} dt \geq \int\limits_T^{T+1} e^{-\frac{(T+1)^2}{(T+1)^2}} \geq e^{-1} = \varepsilon$$