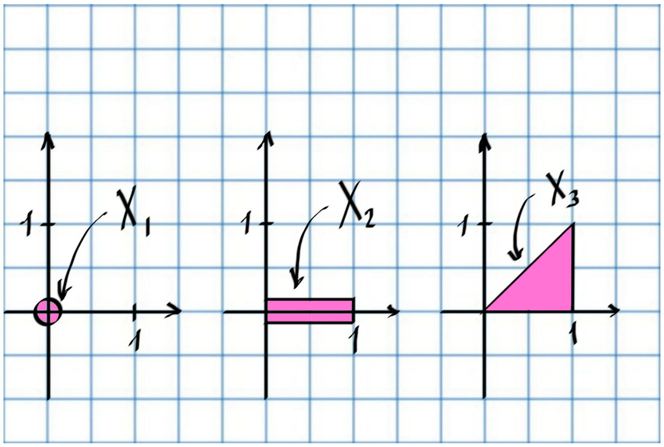

Рис. 7.

Шаг 2 – изучаем исходные функции.

Если f и g – удобные функции, а c и d – действительные числа, то функция $cf + dg$, которая по определению, принимает на фигуре F значение с $f(F)+dg(F)$, очевидно, является удобной.

Итак, с удобными функциями можно обращаться как с векторами: их можно умножать на действительные числа и складывать. Положим, например, $P=N_2–2N+E$ (т. е. $P(F)=N(2F)–2N(F)+1$). Так как функции N_2, N и E – удобные, то и функция P – удобная.

Сопоставим теперь каждой удобной функции $f\in Y$ вектор в трёхмерном пространстве, а именно, вектор $(f(X_1); f(X_2); f(X_3))$, где X_1, X_2, X_3 – три целочисленные фигуры, изображенные на рисунке 7. Этот вектор мы будем обозначать через $\vec{f}$. В первых пяти строках таблицы 1 записано, какие векторы сопоставляются уже известным нам удобным функциям.

Таблица 1

	f	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$
1	S	0	0	1/2
2	N	1	2	3
3	E	1	1	1
4	N	1	3	6
5	P	0	0	1
6	?	0	2	3
7	$e=2E+2S–N$	1	0	0
8	$e=N–E–4S$	0	1	0
9	$e=2S$	0	0	1

А всякий ли вектор соответствует какой-нибудь удобной функции (например, вектор (0; 2; 3) из шестой строки)? Положительный ответ на этот вопрос дают строки 7–9 таблицы 1. Из них видно, что удобным функциям e_1, e_2, e_3 соответствуют базисные векторы в трёхмерном пространстве. Поэтому для любых чисел c_1, c_2, c_3 мы можем указать удобную функцию, которой соответствует вектор $(c_1; c_2, c_3)$, а именно – удобную функцию $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$. Например, вектор из шестой строки таблицы 1 соответствует функции $2e_2+3e_3=2(N–E–4S)+3\cdot 2S=2N–2E–2S$.

Шаг 3 – критерий совпадения удобных функций.

До сих пор мы нигде не пользовались тем, что имеем дело с удобными функциями. Любой функции на Φ можно было бы сопоставить вектор трехмерного пространства. Например, функции R из упражнения 2 соответствует вектор из шестой строки таблицы 1. Особое "удобство"удобных функций заключается в том, что между ними и векторами трехмерного пространства имеется *взаимно однозначное соответствие*. Иными словами, *если f и g удобные функции и если $f=g$, то функции f и g совпадают*.

Обозначим разность $f–g$ через h. Тогда утверждение о взаимной однозначности соответствия мужду удобными функциями и векторами принимает такой вид.

Основная теорема. *Если $h\in Y$ и вектор $\vec{f}$ равен нулю, то и функция h есть тождественный нуль.*

Мы рекомендуем читателю доказать основную теорему самостоятельно или прочесть доказательство в приложении к статье.

Из основной теоремы сразу следует формула *б)*. Действительно, из первой и пятой строк таблицы 1 мы получаем, что вектор, соответсвующий функции $P–2S$ – нулевой. Так как функция $P–2S$ удобная, то по основной теореме $P–2S=0$, т. е. $P(F)–2S(F)=0$ для любой фигуры F.