Лабораторная работа № 1.08

Маятник с переменным ускорением свободного падения

Содержание

Цель работы

1. Проверить теорию колебаний физического маятника

Задачи

1. Измерить период малых колебаний физического маятника при различных значениях ускорения свободного падения.

2. Измерить зависимости периода колебаний от эффективного ускорения свободного падения.

3. Определить приведенную длину физического маятника.

Введение

В системе отсчета, связанной с Землей, на любое тело массы m действует сила тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$. Ускорение свободного падения $\vec{g}$ является важной величиной в описании многих механических процессов. На поверхности Земли сила тяжести в основном обусловлена действием силы всемирного тяготения. Используя второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения, нетрудно получить

$$mg \approx G\frac{mM}{R^2}, \tag{1}$$

от куда следует, что

$$g \approx G\frac{M}{R^2}. \tag{2}$$

Здесь G – гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – расстояние от центра Земли до тела.

Формулы (1) и (2) не являются строгими. Это обусловлено следующими причинами: 1) система отсчета, связанная с поверхностью Земли, не является инерциальной, поскольку она вращается относительно своей оси и Солнца, то есть движется с ускорением в гелиоцентрической системе отсчета; 2) форма Земли отклоняется от формы идеального шара; 3) распределение массы внутри планеты неоднородно. Поэтому ускорение свободного падения даже на уровне моря зависит от места измерения: географической широты и долготы. Кроме того, оно также зависит от высоты над уровнем моря. Вариации ускорения свободного падения на уровне моря обычно не превышают 5% и с такой погрешностью принято использовать значение $g \approx 9.8$ м/с^2. Определить величину $\vec{g}$ можно с помощью приборов — гравиметров. Работа простейших гравиметров основана на точном измерении периода колебаний маятников.

Классические примеры маятников — математический и физический маятники. При малой амплитуде колебаний таких маятников в пренебрежении силами трения, совершаемые ими колебания являются гармоническими.

Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на невесомой, нерастяжимой нити длиной l. Материальная точка — тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с другими характерными размерами в данной задаче.

Известно, что при малых амплитудах колебаний период математического маятника зависит от его длины $l_м$ и ускорения свободного падения $\vec{g}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_м}{g}}. \tag{3}$$

Физический маятник это твердое тело массой m, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной оси, не проходящий через центр масс тела. При малой амплитуде колебаний период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{4}$$

Здесь I — момент инерции тела, a — расстояние между осью подвеса и центром масс.
Выражение (4) можно привести к виду (3), если в качестве $l_{\text{м}}$ взять так называемую длину физического маятника $l_{\text{пр}}$:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \tag{5}$$

Если приведенная длина физического маятника равно длине математического маятника, то периоды колебаний обоих маятников одинаковы.

Гармоническими колебаниями называют движения, при которых совершающая колебания величина $x(t)$ меняется по закону синуса или косинуса. Динамическое уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{7}$$

где x_0 — константа, называемая амплитудой колебания; φ_0 — константа, называемая начальной фазой; ω — круговая частота. Сведя уравнение описывающие движение маятника к уравнению (6), выразив соответствующим образом круговую частоту, можно найти и период колебаний T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{8}$$

Рассмотрим колебания физического маятника. Такое движение является частным случаем вращательного движения вокруг неподвижной оси. Поэтому в роли $x(t)$ может выступать угол φ отклонения маятника от положения равновесия и для описания динамики колебаний можно использовать уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_i M_i, \tag{9}$$

где I – момент инерции твердого тела относительно оси, вокруг которой происходит вращение; $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение; $\sum\limits_i M_i$ – сумма проекций моментов внешних сил на ось вращения.

Влияние ускорения свободного падения на период колебаний маятника можно исследовать на примере наклонного маятника – маятника, ось вращения которого наклонена под некоторым углом α к горизонту (см. рис. 1). При этом плоскость, в которой происходят колебания (плоскость качания), наклонена под углом α к вертикали. В качестве возвращающей силы для наклонного маятника будет выступать проекция силы тяжести на плоскость качания. При $\alpha = 0^o$ будет справедлива формула (3), при $\alpha \neq 0^o$ в роли ускорения свободного падения в формуле (3) будет выступать проекция $\vec{g}$ на плоскость качания, так называемое эффективное ускорение свободного падения

$$g_{\text{эфф}} = g\cos\alpha. \tag{10}$$

При отклонении наклонного маятника от положения равновесия в плоскости качания на некоторый угол φ на него действует осевой момент силы тяжести, который стремится возвратить маятник в положения равновесия

$$M = -mg_{\text{эфф}} a \sin\varphi, \tag{11}$$

где m — масса маятника; a — расстояние от оси колебаний до центра масс маятника. Знак «—» в формуле (**??**) учитывает, что осевой момент силы тяжести всегда имеет знак противоположный знаку угла отклонения маятника от положения равновесия. С учетом выражения (11) закон динамики для вращательного движения маятника (9) преобразуется к виду

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg_{\text{эфф}} a \sin\varphi. \tag{12}$$

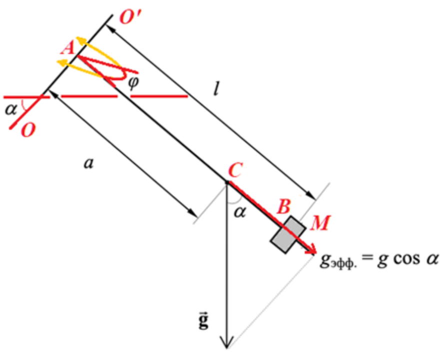

Рис. 1. Схематическое изображение наклонного маятника

На (рис. 1): OO' — ось колебаний, AB — подвес (легкая трубка), C — центр масс маятника, M — — груз (массивный цилиндр).

Для малых углов отклонения $\varphi << 1$ рад уравнение (12) принимает вид уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \tag{13}$$

где

$$\omega^2 = \frac{mg_{\text{эфф}}a}{I}. \tag{14}$$

Для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg_{\text{эфф}}a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g_{\text{эфф}}}}. \tag{15}$$

В лабораторной работе маятником служит массивный цилиндрический груз, закрепленный на тонкостенной легкой трубке — подвесе. Ось колебаний маятника можно устанавливать под разными углами к горизонту, изменяя тем самым величину $g_{\text{эфф}}$. Крепление груза позволяет также изменять расстояние l от центра груза до оси вращения, изменяя тем самым приведенную длину маятника. В работе измеряется зависимость периода T от эффективного ускорения свободного падения $g_{\text{эфф}}$ при разной приведенной длине.

Для расчета приведенной длины по формуле (5) необходимо учесть, что момент инерции тела в данном случае будет рассчитываться по следующей формуле:

$$I = \frac{1}{3}m_{\text{ст}}l_{\text{ст}}^2 + m_{\text{гр}}l^2. \tag{16}$$

Расстояние a между осью подвеса и центром масс равно:

$$a = \frac{1/2 m_{\text{ст}} l_{\text{ст}} + m_{\text{гр}} l}{m_{\text{ст}} + m_{\text{гр}}} \tag{17}$$

Экспериментальная установка

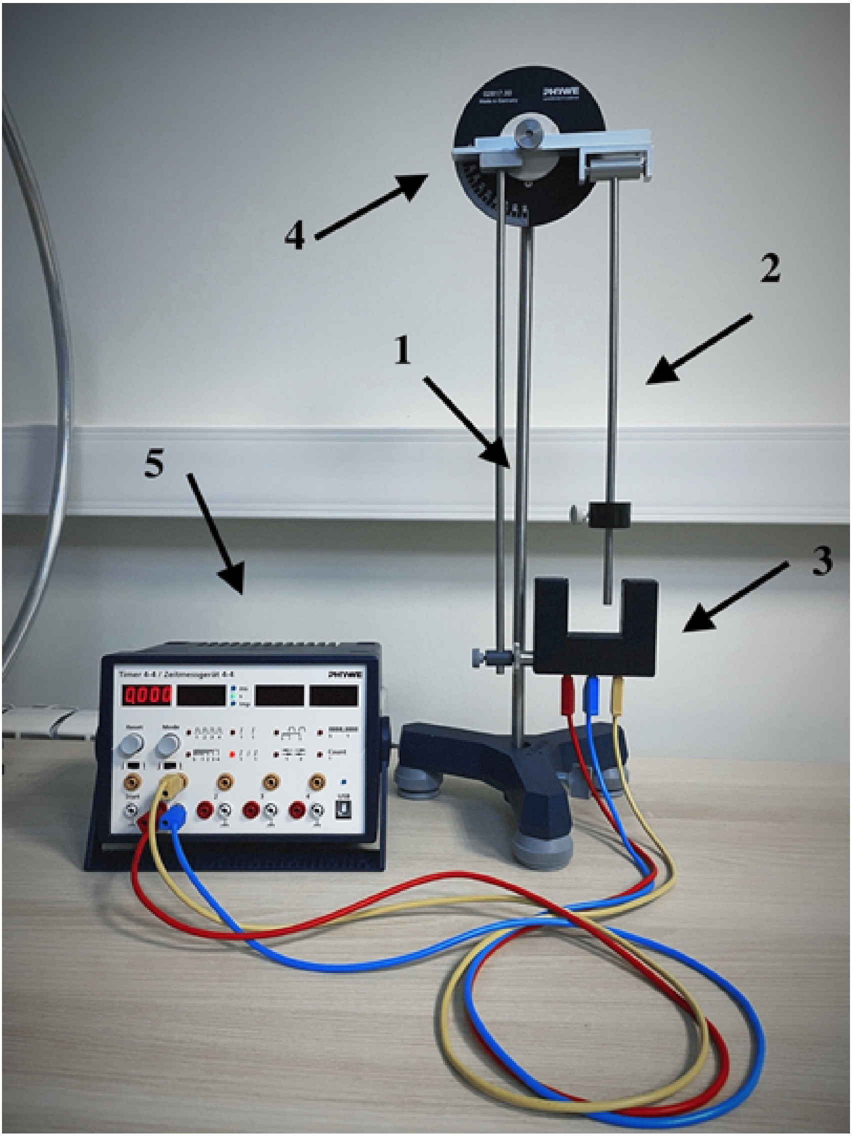

Рис. 2. Элементы лабораторной установки

На рисунке 2 показан комплект оборудования, входящий в состав лабораторной установки:

1. стойка с треножником;
2. маятник;
3. оптические ворота;
4. угломерная шкала для установки угол между плоскостью качания и вертикалью;
5. цифровой счетчик.

Для измерения периода колебаний используются оптические ворота, подключённые к цифровому счётчику. В лабораторной работе измеряется период колебаний при различных углах наклона α между плоскостью колебаний и вертикалью.

Проведение измерений

1. Провести юстировку установки по требованию преподавателя или дежурного инженера. Для этого установите плоскость качания на угол 90^o к вертикали. С помощью регулировочных колец на ножках штатива отрегулируйте высоту ножек так, чтобы маятник после отклонения от среднего положения оставался в состоянии безразличного равновесия. Опорную стойку с маятником после юстировки перемещать нельзя.

2. Значения длины стержня маятника $l_{\text{ст}} = (31.00 \pm 0.05)$ см, высота груза $h_{\text{гр}} = (2.00 \pm 0.05)$ см, диаметр $d_{\text{гр}} = (3.00 \pm 0.05)$ см. Масса стержня $m_{\text{ст}} = (20.90 \pm 0.05)$ г, масса груза $m_{\text{гр}} = (111.0 \pm 0.05)$ г.

3. Установить переключатель цифрового счетчика в положение, отвечающее измерению периода $-$ $Mode4$. В этом режиме счетчик измеряет период одного полного колебания маятника.

4. Измерить расстояние l от центра груза до оси вращения, записать измеренное значение в заголовок таблицы (1). Положение груза должно быть примерно на 1/3 длины стержня от его свободного конца.

5. Привести маятник в колебательное движение, отклонив его на угол φ не более $10-15$ градусов, после чего нажать кнопку «Reset» на цифровом счетчике.

6. Произвести измерения периода при значениях угла α в диапазоне 0^o...60^o с шагом не менее 10^o. Результаты измерений занести в таблицу (1).

7. Провести аналогичные п. 4–6 измерения для двух других значений расстояния l. Предлагаемые положения груза: 1) на середине стержня 2) на расстоянии примерно на 2/3 длины стержня

от конца. По результатам этих измерений заполнить таблицы (2) и (3) аналогично таблице (1).

Обработка результатов

1. Для таблиц (1) - (3) рассчитайте величины в последних четырех колонках. При расчёте g_{text}, по формуле (10) значение ускорения свободного падения g принять за 9.82 м/с^2 (табличное значение на широте СПб).

2. По данным таблиц (1) - (3) постройте график зависимости T^2 от $\frac{4\pi^2}{g_{\text{эфф}}}$ для разных положений груза. В соответствии с соотношением (16) полученная зависимость должна иметь вид прямой, угловой коэффициент которой равен приведенной длине физического маятника. Рассчитайте с помощью МНК наклоны зависимости T^2 от $\frac{4\pi^2}{g_{\text{эфф}}}$ и их погрешность.

3. Для трех экспериментальных значений l по формулам (5), (17) и (**??**) рассчитайте соответствующие теоретические значения приведенной длины маятника. Сравните экспериментальные значения приведенной длины маятника, полученные в п.2 с помощью графиков зависимости T^2 от $\frac{4\pi^2}{g_{\text{эфф}}}$ с рассчитанными теоретическими значениями.

В качестве результатов представьте:

1. Графики T^2 от $\frac{4\pi^2}{g_{\text{эфф}}}$, при трех разных положениях груза.

2. Найденные по наклону этих графиков экспериментальные значения приведенной длины маятника.

3. Соответствующие теоретические значения приведенной длины.

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение гармонических колебаний.
2. Напишите общее решение этого уравнения.
3. Получите уравнение колебаний физического маятника.
4. Будут ли колебания физического маятника гармоническими?
5. Какие колебания можно считать малыми?
6. Какой маятник называется математическим?
7. Получите выражение для периода колебаний математического маятника.
8. Зависит ли период колебаний математического маятника от амплитуды колебаний?
9. Приведите пример физического маятника и рассчитайте его период.
10. Получите формулу для расчета погрешности приведенной длины физического маятника.

Приложение

Таблица 1: Результаты измерений при $l = 1/3$ длины стержня

№	$\alpha,\ ^o$	T, с	$\cos\alpha$	T^2, с^2	$g_{эфф}$ м/с^2	$\frac{4\pi^2}{g_{эфф}}$, с^2/м

Таблица 2: Результаты измерений при $l = 2/3$ длины стержня

№	$\alpha,\ ^o$	T, с	$\cos\alpha$	T^2, с^2	$g_{эфф}$ м/с^2	$\frac{4\pi^2}{g_{эфф}}$, с^2/м

Таблица 3: Результаты измерений при $l = 1/2$ длины стержня

№	$\alpha,\ ^o$	T, с	$\cos\alpha$	T^2, с^2	$g_{\text{эфф}}$ м/с^2	$\frac{4\pi^2}{g_{\text{эфф}}}$, с^2/м