미적분 세부능력특기사항

<현수선>

3809 류한준

현수선이란 균일 밀도의 사슬 또는 케이블의 양단이 동일한 높이에 고정되어 자체 무게만으로 드리워져 있을 때 나타나는 곡선이다. 쉽게 말해 양손으로 줄의 양 끝을 잡고 같은 높이에 손을 위치해 놓았을 때 나타내는 줄이다. 상식적으로 현수선은 아래로 볼록한 곡선이고 우함수라는 것을 알 수 있다. 이러한 특징으로 판단했을 때 현수선은 이차곡선의 일부, 타원의 일부, 포물선, 또는 쌍곡선 이라고 유추해볼 수 있다. 현수선의 정의에 입각하여 식을 유도해보자.

일단 앞서 말한 것들을 식으로 정리해보자.
$f(x)$를 현수선의 식이라고 하면 $f(x)$는 $f(-a)=f(a)=b$이고 $[-a,a]$에서 연속, $(-a,a)$에서 미분가능한 함수이다. 여기서 a는 어떤 양의 실수이며 b는 임의의 실수이다. 여기서 a가 의미하는 것은 중심에서 줄의 끝까지 수평 길이이다.
$f(x)$의 길이를 구하는 방법은 미적분 수업시간에 배웠기 때문에 적용해보면
$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$이고 줄을 축 처지기 때문에 $L>2a$이다. 곡선의 질량은 곡선의 길이에 선밀도 λ를 곱한 값이므로 $m(p,q)=\lambda L(p,q)=\lambda\int_{p}^{q}\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$이다.

미소 길이에서의 힘의 평형 관계에 대해 잠시 알아보자. 미소 길이는 쉽게 말해 매우 짧은 길이이다. 점이라 생각해도 무방하다. 이를 확대해 양단을 각각 $(p,f(p))$, $(q,f(q))$라고 하면 미소 길이에서는 양단에 각각 장력이 작용하고 전체에 중력이 작용한다. 줄을 평형상태에 있으므로 두 축으로 나눠 평형 식을 써보면
x축 에서는$T_{px}+T_{qx}=0$이고 따라서 $|T_x|=c$이다. y축에서는 $T_{py}+T_{qy}-mg=0$이다.
$T_{py}=-T_x\tan\theta_p$이고 $T_{qy}=T_x\tan\theta_q$ 이다. 여기서 $T_x>0$이다.
이를 통해 식이 유도 된다.

$$-T_x\tan\theta_p+T_x\tan\theta_q-\lambda g\int_{p}^{q}\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx=0$$

$$-T_xf'(p)+T_xf'(q)-\lambda g\int_{p}^{q}\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx=0$$

$\tan\theta=f'(x)$이기 때문이다.

양변을 $q-p$로 나눠주고 미소길이였기 때문에 극한을 씌워주면

$$\lim_{q\to p}\frac{1}{q-p}\left(-T_xf'(p)+T_xf'(q)-\lambda g\int_{p}^{q}\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx\right)=0$$이고

$T_xf''(p)-\lambda g\sqrt{f'(p)^2+1}=0$이다. 이항하고 정리하면

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{f'(x)^2+1}}=\frac{\lambda g}{T_x}$$이다.

여기서 양변을 x에 대해 부정적분 하자.

좌변은 $u = f'(x)$로 치환하여 적분하자.

$\sinh^{-1}u = \frac{\lambda g}{T_x}x + C_1$이고 $u = f'(x) = \sinh\left(\frac{\lambda g}{T_x}x + C_1\right)$이다.

적분하면

$$f(x) = \frac{T_x}{\lambda g}\cosh\left(\frac{\lambda g}{T_x}x + C_1\right) + C_2 \text{ 이다.}$$

그런데 이 함수는 우함수이므로 $C_1 = 0$이고 $\frac{\lambda g}{T_x} = k$라고 하면

$f(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx) + C_2$이다.

k와 C_2의 값을 알기 위해 처음 기본 가정에 다시 대입해 보자.

$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{f'(x)^2 + 1}\,dx$에 $f(x)$를 대입하면

$L = 2\sinh(ka)$이므로 $k = \frac{1}{a}\sinh^{-1}(\frac{L}{2})$이고

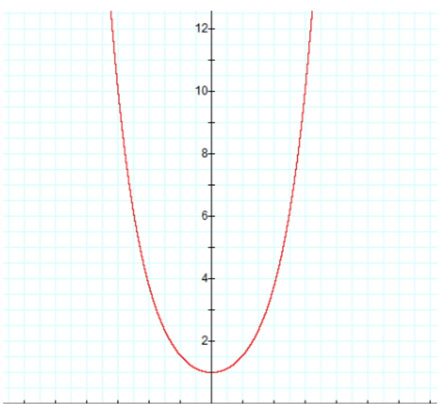
$f(a) = b$이므로 $\frac{1}{k}\cosh(ka) + C_2 = b$, $C_2 = b - \frac{1}{k}\cosh(ka)$이다.

간단하게 보면 결국 현수선의 개형 함수는

$f(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx)$라는 것이다. 이는 쌍곡선함수이다.

여기서 $\cosh x$의 개형은 다음과 같다.

$$\sinh\ x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}), \quad \cosh\ x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$



현수선 함수를 유도하면서 새롭게 접한 것은 hyperbolic function 이다.
앞서 치환적분할 때 사용한 것이 (a)이다.

$$(a)\ (\sinh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(b)\ (\cosh^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad (x>1)$$

$$(c)\ (\tanh^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2}\quad (|x|<1)$$

$$(d)\ (\coth^{-1}x)' = \frac{1}{1-x^2}\quad (|x|>1)$$

$$(e)\ (\mathrm{sech}^{-1}x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\quad (0<x<1)$$

$$(f)\ (\mathrm{csch}^{-1}x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\quad (x\neq 0)$$

▶ 쌍곡선 함수의 미분

$$(1)\ (\sinh x)' = \cosh x$$

$$(2)\ (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(3)\ (\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x$$

$$(4)\ (\coth x)' = -\mathrm{csch}^2 x$$

$$(5)\ (\mathrm{sech}\ x)' = -\mathrm{sech}\ x \tanh x$$

$$(6)\ (\mathrm{csch}\ x)' = -\mathrm{csch}\ x \coth x$$

그 아래에서 사용한 것이 (1)이다.

보고서 작성 후 느낀점

어렸을 때부터 항상 궁금했던 것이 어떤 자연스러운 상태의 곡선을 함수로 표현하는 것이 가능한지였다. 학교에서 배우는 함수들은 자연의 모습이 아니라 인간이 유용하게 사용하기 위한 함수들이 대부분이기 때문이다. 연구를 하다보니 그 해답은 물리학과 수학의 만남이었다. 물리학적으로 힘의 평형 관계를 적용시켜 관계식을 도출한 뒤 수학적으로 그 식을 유도하는 과정이 매우 인상깊었다. 또 현수선을 함수로 표현하는 과정에 있어서 미적분 수업 시간에 배운 치환적분을 비롯한 적분을 사용하고 개인적으로 공부하면서 알게된 하이퍼볼릭 함수들도 사용하면서 지식이 쌓일수록 내가 이해할 수 있는 학문의 깊이도 달라진다는 것을 깨달았다.
기계공학자가 되는 것이 꿈인데 물리학과 수학의 융합을 통해 새로운 지식을 얻으니 더욱 흥미를 느꼈다.