Simulación de Sistemas 2022-2023
Grado en Ingeniería Informática
Universidad de Granada

Memoria Práctica 1

Autor:
Brian Sena Simons.

Grupo:
3ºA Subgrupo A2

Índice

1. Problema de la Moneda

El problema de la moneda consiste en analizar los beneficios de jugar al siguiente juego: El jugado va lanzando sucesivamente una moneda y se va anotando el resultado obtenido (c:cara,x:cruz). Por cada lanzamiento el jugador debe pagar una cuantía “y”. El juego continua hasta que la diferencia entre números de cara y cruz sean igual a “d”, por defecto “d=3”. El jugado al finalizar recibe una cuantía “z”.

El análisis consiste en verificar como se relacionan esas variables y cuales son los resultados esperados para este juego. Con esa información sabremos estimar el beneficio y/o rentabilidad del juego.

1.1. Variables y restricciones

Tendremos un conjunto de variables exógenas(o de entrada) que son las configuraciones iniciales del modelo, como lo son la cuantía “y”, la diferencia “d”, el pago “z” y la probabilidad de la moneda “p” (asumiendo posibilidad de trucar-la). Digamos que en la realidad, las variables controladas son “y, d, z” según la persona que propone el juego. Las variables endógenas(calculadas) de nuestro sistema será el beneficio medio esperado y el número medio de lanzamientos realizados.

1.2. Resultados

A priori, no es inesperado que uno piense que si la diferencia entre la cuantía a pagar y la cuantía a recibir no es exuberante el juego no es beneficioso. Sin embargo, si simulamos el sistema varias veces, cuanta más veces más fiable es el valor [1], vemos que al parecer el resultado si es es beneficioso.

Al jugar pagando 10, recibiendo 100, con diferencia igual a 3, obtenemos de media 10 euros. Y a pesa de su carácter estocástico, el resultado tiene muy baja variabilidad para un número muy alto de repeticiones para la media. Este fenómeno se puede observar en las siguientes imágenes:

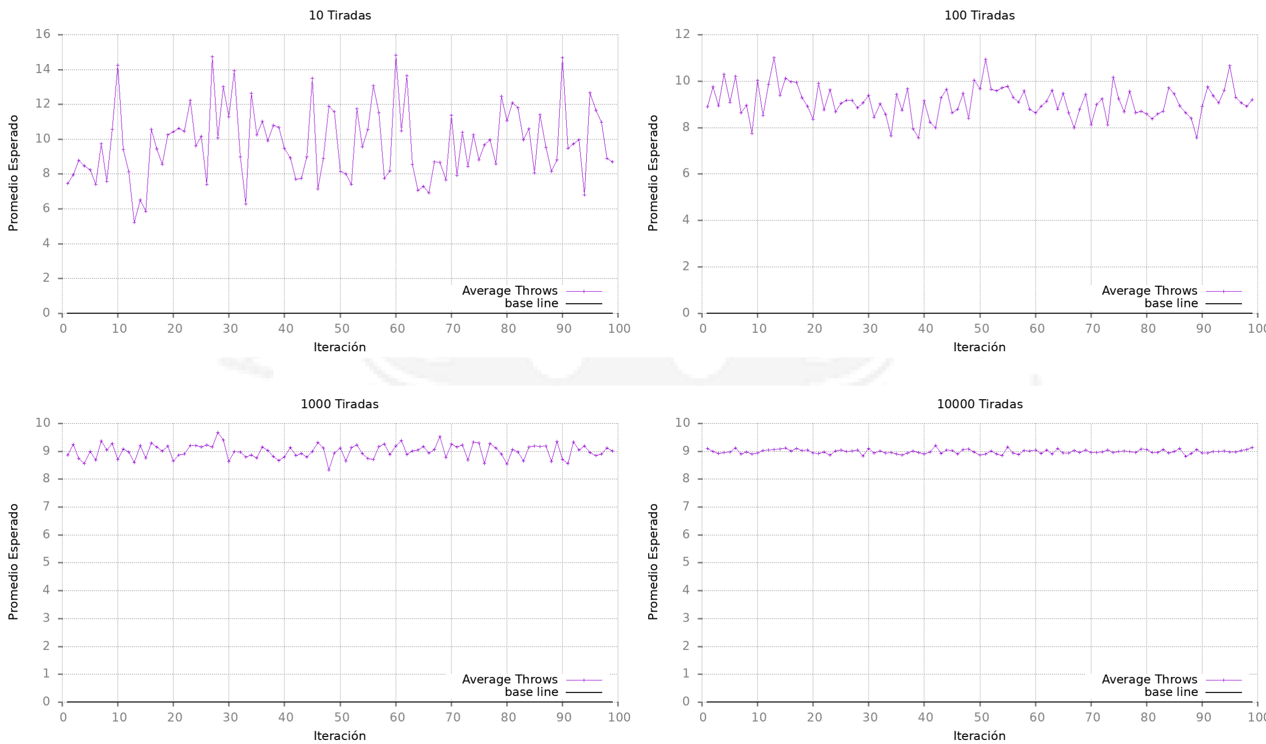


Figura 1.1: Medía de lanzamientos necesarios para terminar una partida, de 10, 100,1000,10000 repeticiones del experimento

Lo mismo pasa con el beneficio esperado, la función que lo define se vuelve más homogénea cuanto mayor sea el número de repeticiones. Aumentando así la fiabilidad y reproducibilidad del experimento y sus resultados.

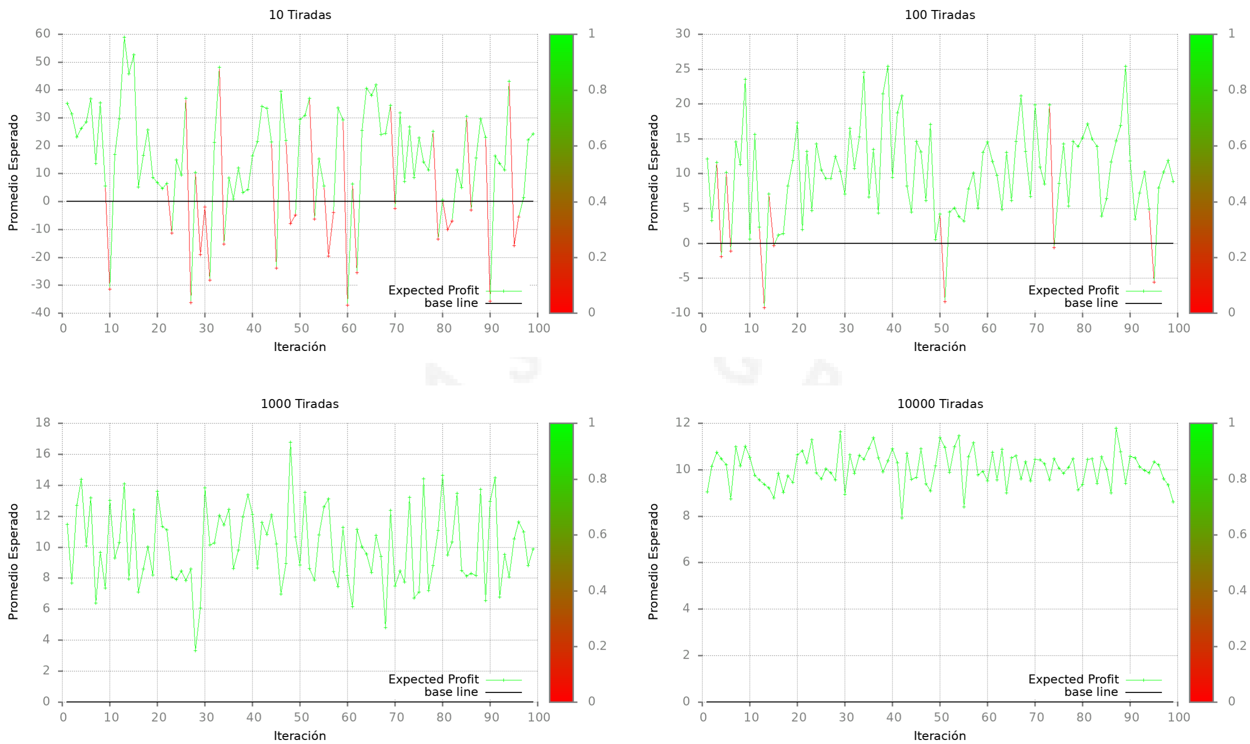


Figura 1.2: Beneficio medio esperado al terminar una partida,10,100,1000,10000

Claramente la cuestión que surge es entonces averiguar que relación tienen las variables "y" y "z" (pagar y recibir), para poder determinar cuándo es oportuno o no jugar a un juego del estilo. Para ello podemos ir variando los valores y buscar algún patrón que determine su comportamiento.

Si observamos las siguientes gráficas, vemos que apartir de una diferencia de 80 (z-y) euros entre lo que vas a pagar y lo que vas a ganar hay un comportamiento lineal desde beneficio igual a 0. Es decir, cada 10 euros más de diferencia, eso es el beneficio que se obtiene.

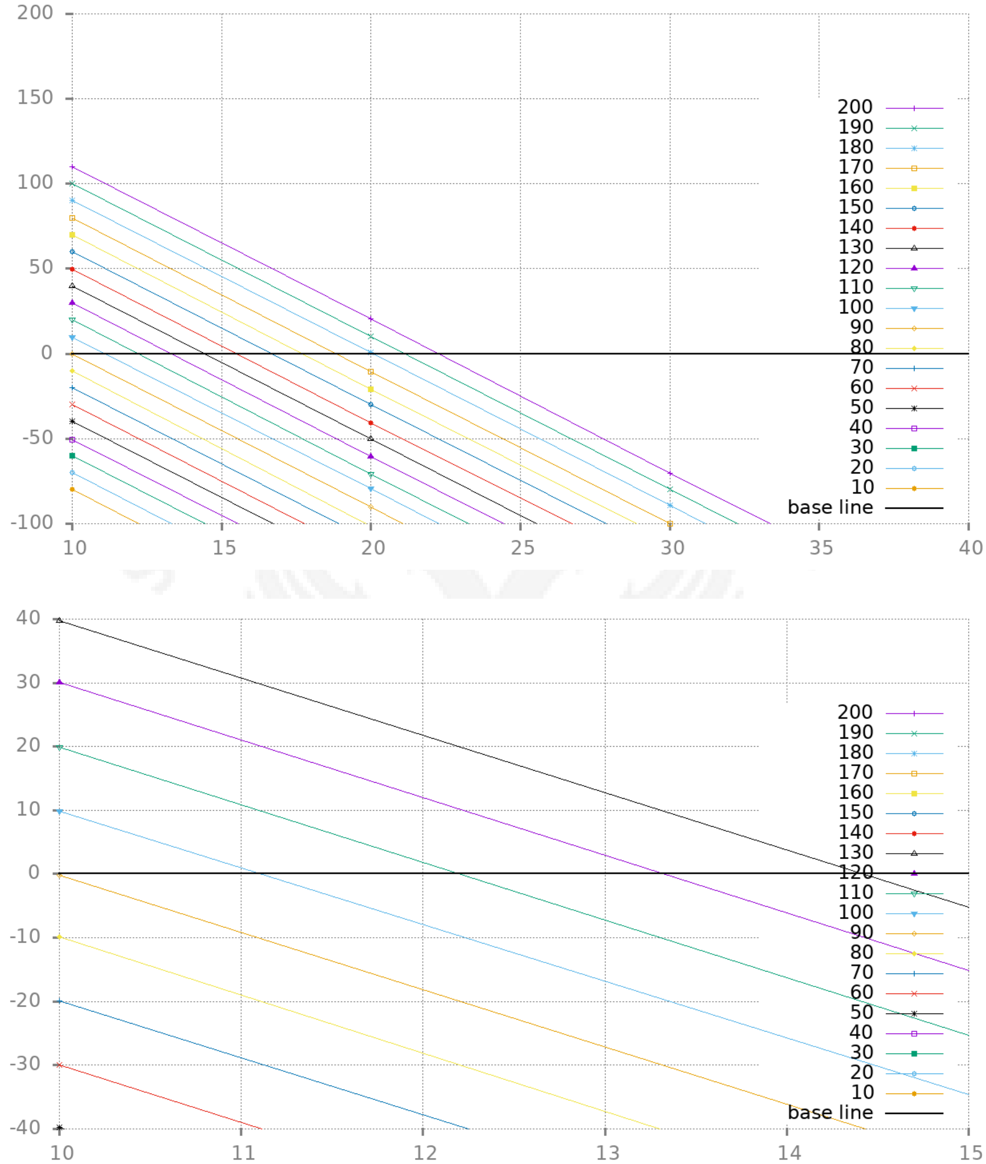


Figura 1.3: Variable "y" va de 10 a 100, y las líneas representan el beneficio esperado según el punto de partida de "z"

Lo último que cabe observar es cómo afecta el resultado las variables implícitas e explícitas del juego, como lo son la probabilidad y la diferencia. Es trivial notar que probabilidad extremas conllevarán a resultados similares ya que hablamos de diferencia entre cara y cruz, y no cantidad de una específico.

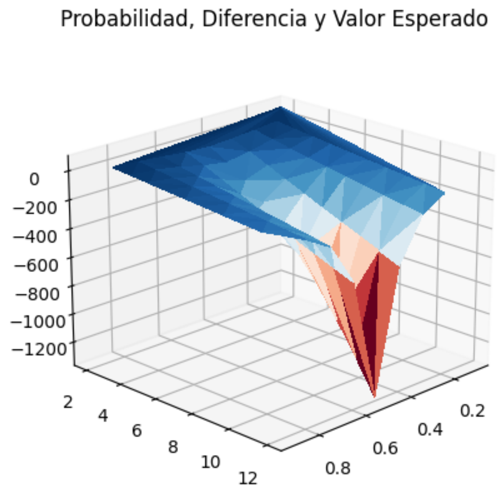


Figura 1.4: Superficie de variación de beneficio esperado según valores de probabilidad y diferencia. Los valores de probabilidad cercanos a 0.5 conllevan a una distribución más homogenea de valores, asiendo que sea difícil que la diferencia entre monedas sea grande y por ellos los mínimos locales obtenidos (Ver color rojo) para diferencias grandes.

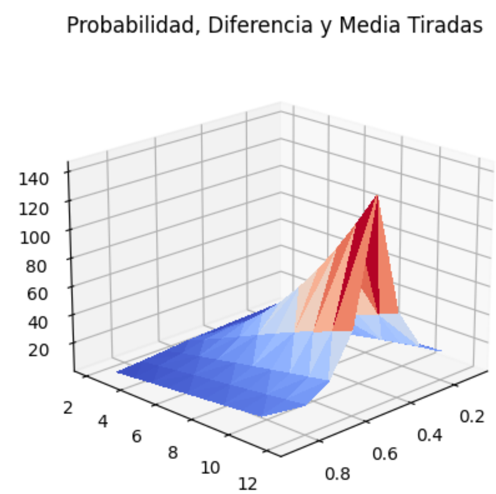


Figura 1.5: Superficie de variación de lanzamientos medios necesarios según valores de probabilidad y diferencia. Aquí se puede verificar lo mismo que anteriormente mencionado. Los valores intermedios de probabilidad hace que sea más difícil obtener la diferencia necesaria haciendo que se tenga que repetir los lanzamientos más veces y generando mayores pérdidas.

Se puede ver de forma más clara en 2 dimensiones. Vemos que con una probabilidad de 0.5, y una diferencia fija, el valor esperado decrece y el valor medio de tiradas crece con las siguientes imagenes:

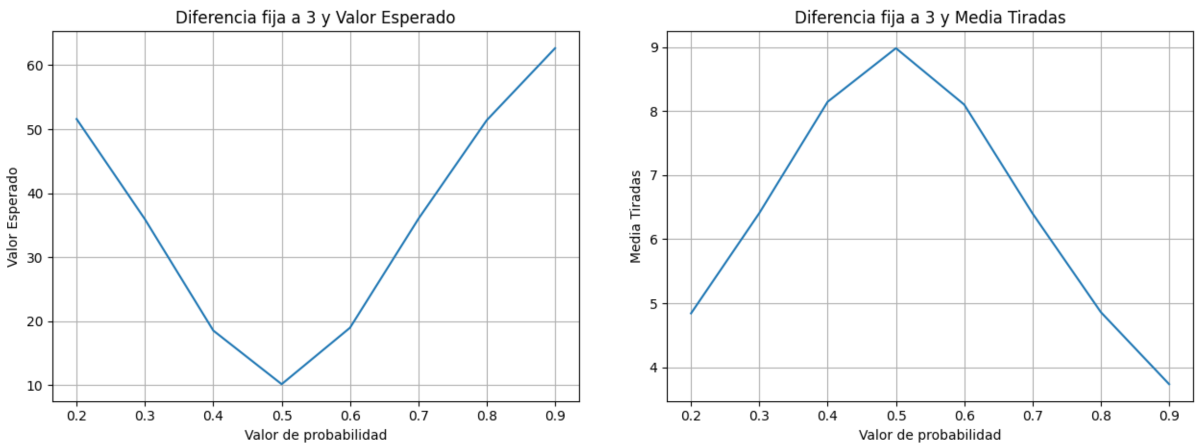


Figura 1.6: Comportamiento de las variables de salida para diferencia igual a 3 y variación de las probabilidad. El punto de probabilidad intermedio entre ambas posibilidad ocasiona una pérdida de beneficio.

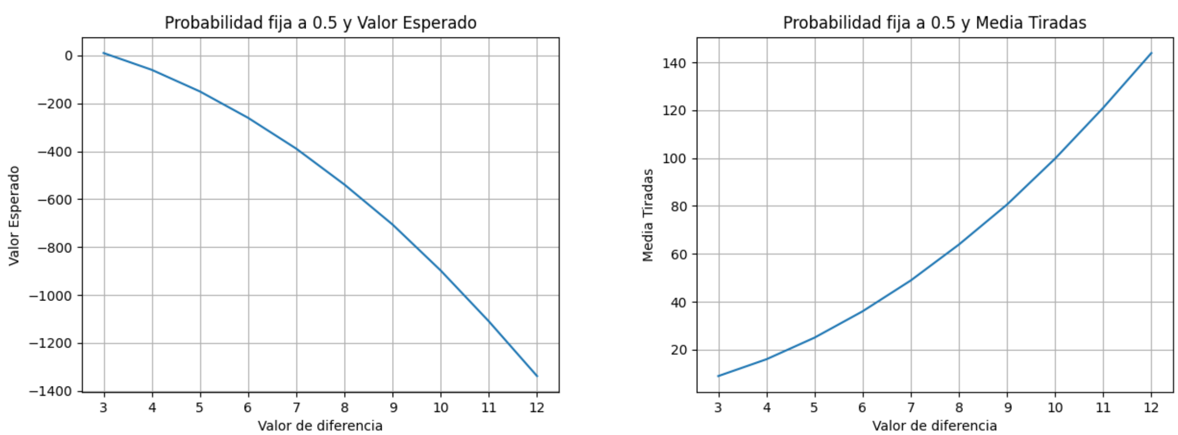


Figura 1.7: Comportamiento de las variables de salida para probabilidad fija y variación del valor de diferencia. Es la inversa de las gráficas anteriores

2. Primer modelo discreto

2.1. Introducción

En este apartado discutiremos un problema de simulación de un modelo discreto. Supongamos que una compañía que vende un único producto, y quisiera decidir cuantas ítems mantener en inventario durante los siguientes “n” meses, de cara a minimizar los gastos. Tendremos un tamaño de demanda, “D”, una variable aleatoria independiente que sigue:

$$D = \begin{cases} 1 \text{ con probabilidad } 1/6 \\ 2 \text{ con probabilidad } 1/3 \\ 3 \text{ con probabilidad } 1/6 \\ 4 \text{ con probabilidad } 1/3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Al principio de cada mes revisamos el nivel de inventario y decidimos cuántos ítems pedir a nuestro proveedor. Si la compañía incurre en un costo de “K + iZ”, donde “K=32” es el costo por hacer el pedido, e “i=3” es el costo por unidad. La compañía usa lo que se denomina como política estacionaria (s,S) para decidir cuanto pedir, es decir pedimos “S-I” valores para cuando estemos por debajo del valor “s”.

Sea I(t) el nivel de inventario en tiempo t. Sea $I^+(t)$ = max(I(t),0) el número de ítems que hay en el inventario en realidad, y $I^- = =$ max(-I(t),0) el número de ítem por satisfacer de demandas previas. Supondremos:

$$h = \frac{\int_0^n I^+(t)dt}{n} \qquad \text{Costo promedio de mantenimiento para n meses} \tag{2.2}$$

$$\pi = \frac{\int_0^n I^+(t)dt}{n} \qquad \text{Costo medio de déficit para los n meses} \tag{2.3}$$

Supondremos H=1, y $\pi = 5$ por ítem y por mes.

2.2. Variables y restricciones

Tendremos varias variables exogenas dentro de la simulación de estos modelos. Dentro de las políticas estacionarias tendremos los límites, mínimos y máximos, de inventario establecidos por las variables “s” y “S” que determinan los cambios y cantidad de inventario. A continuación tendremos, en ambas políticas, la media de demanda utilizada para inicializar nuestro generador de demandas. Luego tendremos también las constantes multiplicadores de los diversos costes como lo son la “h”, “π”, “i” y el valor de base “K”.

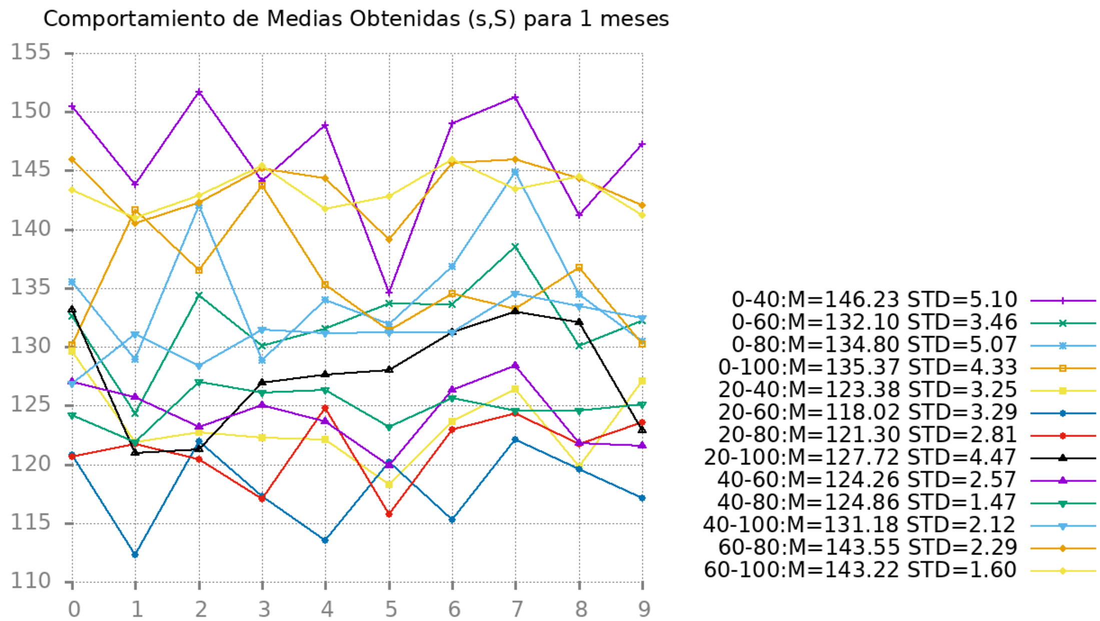
Además tendremos un conjunto de variables de control que definen el estado en el que se encuentra nuestro sistema en un determinado momento en el tiempo. Estas variables nos ayudaran a establecer el comportamiento de nuestro sistema. Son por ejemplo el reloj temporizador y la lista de sucesiones. Y por último, tendremos las variables de salida como el coste medio para analizar el rendimiento de cada política.

2.3. Resultados

Para garantizar un adecuado estudio estadístico como definido anteriormente, todas las gráficas que se disponen a continuación son resultado de adaptar el código y escribir valores medios dentro de un archivo y plotear el comportamiento de la media respecto a los valores obtenidos de simular las políticas N veces, y luego utilizaremos la media de la media para establecer que valor final que obtiene la política para los valores dados de “s” y “S” en su caso.

El primer estudio que realizaremos es ver como afecta el número de meses a realizar la simulación. Es esperable, como estudiado anteriormente, que para un número menor de meses habrá un alto valor de variación que se estabilizará conforme aumentemos el número de meses.

Para el primer modelo estacionario:



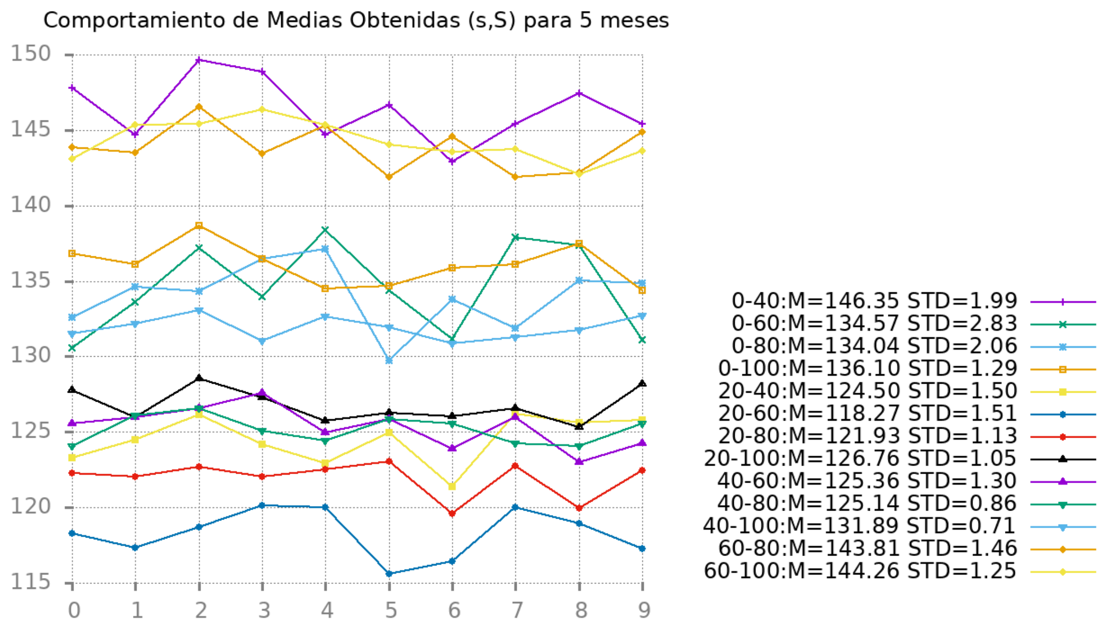
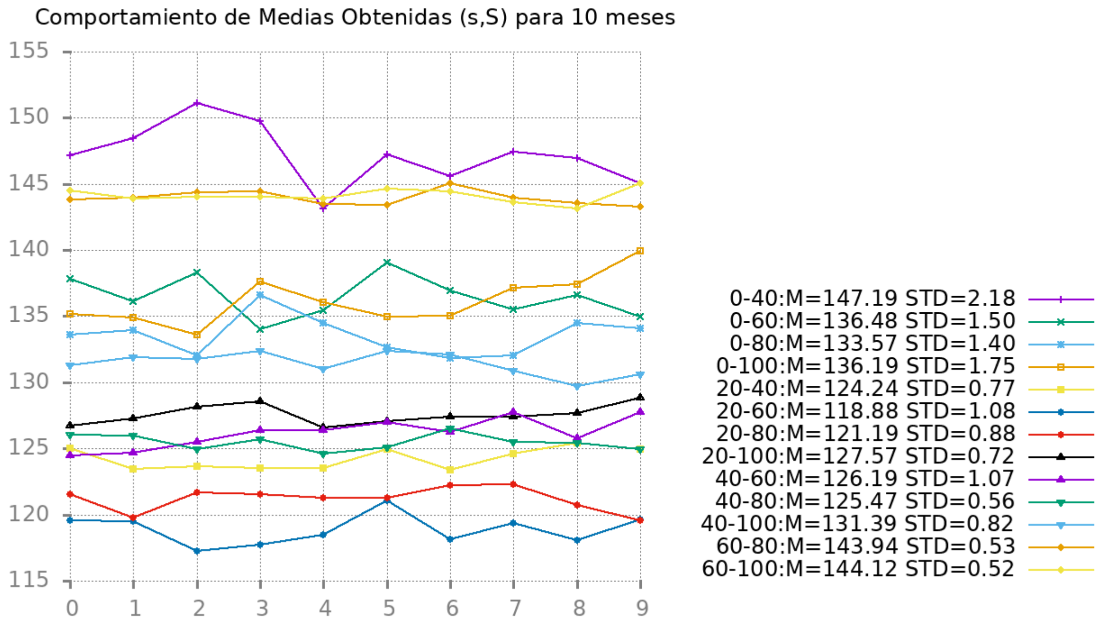


Figura 2.1: Vemos que para pocos meses la variación es muy alta.



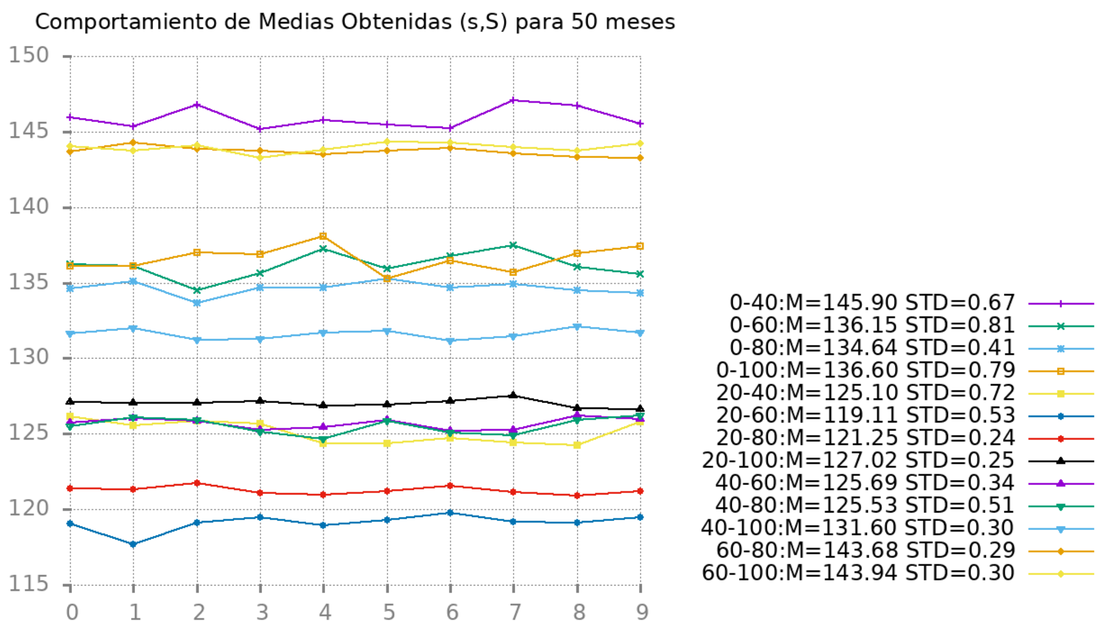
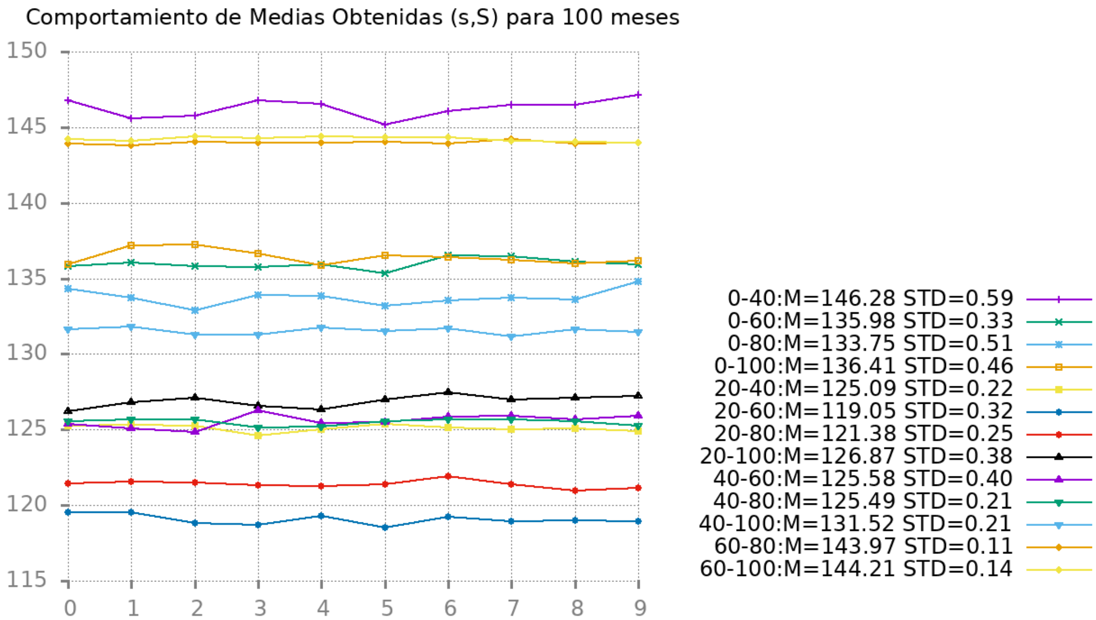


Figura 2.2: Para valores medios empezamos a ver cierta normalización



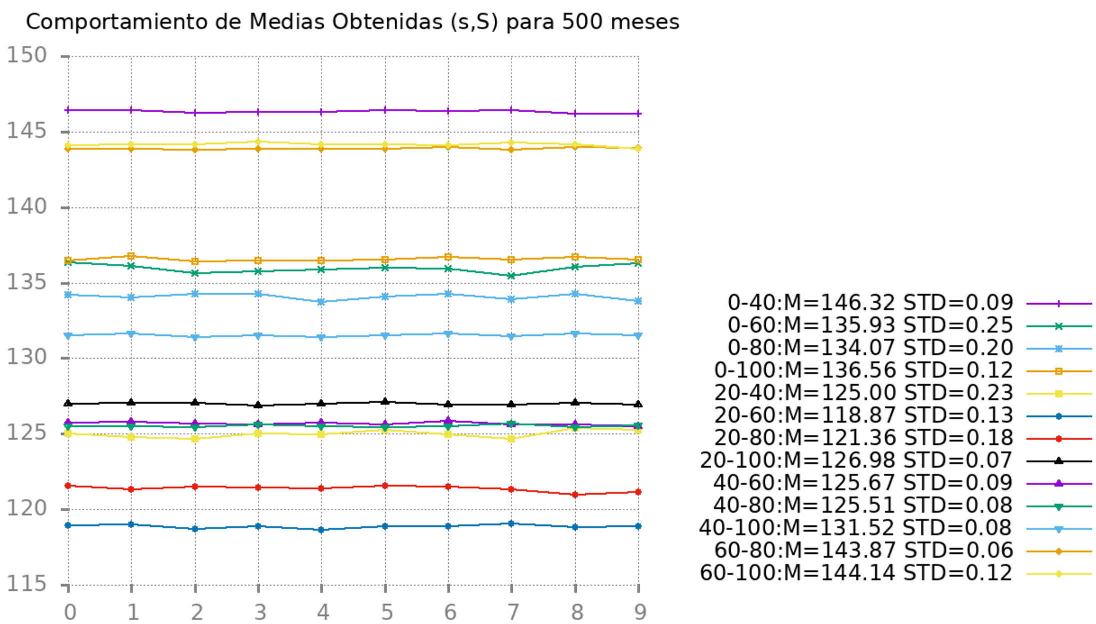


Figura 2.3: Para proyecciones muy futuras obtenemos valores con muy baja desviación

Es por ello que tomaremos como medida de referencia la proyección para meses superiores a 100. Es decir, proyecciones menos arriesgadas y no tan lejanas. Para el primer modelo el mejor resultado obtiene un coste de **118.87** y una desviación de tan solo **0.13**.

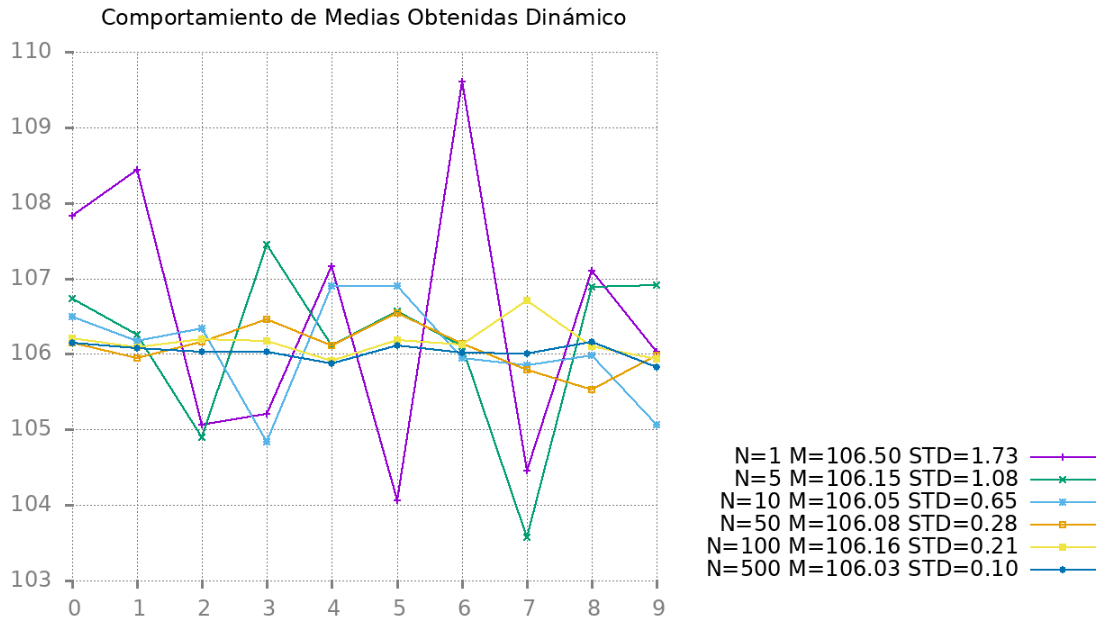


Figura 2.4: Variaciones con N meses crecientes desde 1 a 500.

Si ahora observamos el comportamiento del modelo número 2, el dinámico, obtenemos el siguiente comportamiento: Vemos que las variaciones son enormes para pocos meses, obteniendo incluso un mínimo en alrededor de **103**. Pero luego se estabiliza con **106** de coste y una desviación de **0.10**. Por lo que a priori podemos afirmar que es mejor modelo que el primero. Además que, incluso con la elevada variación que impone **N=1**, el máximo obtenido es apenas alrededor de **110**, directamente inferior que la política anterior. Lo que se entiende de esta política es que es muy estable con respecto al tiempo.

Para el caso de la última política, que es una mezcla de las dos, obtenemos un resultado sorprendente. Dónde el mínimo alcanzado es aproximable al de la primera política. Dejando como ganador la política enteramente dinámica basada en la venta de los meses anteriores para minimizar los costes en su totalidad. Se puede observar el comportamiento medio de la política 3 con la siguiente gráfica:

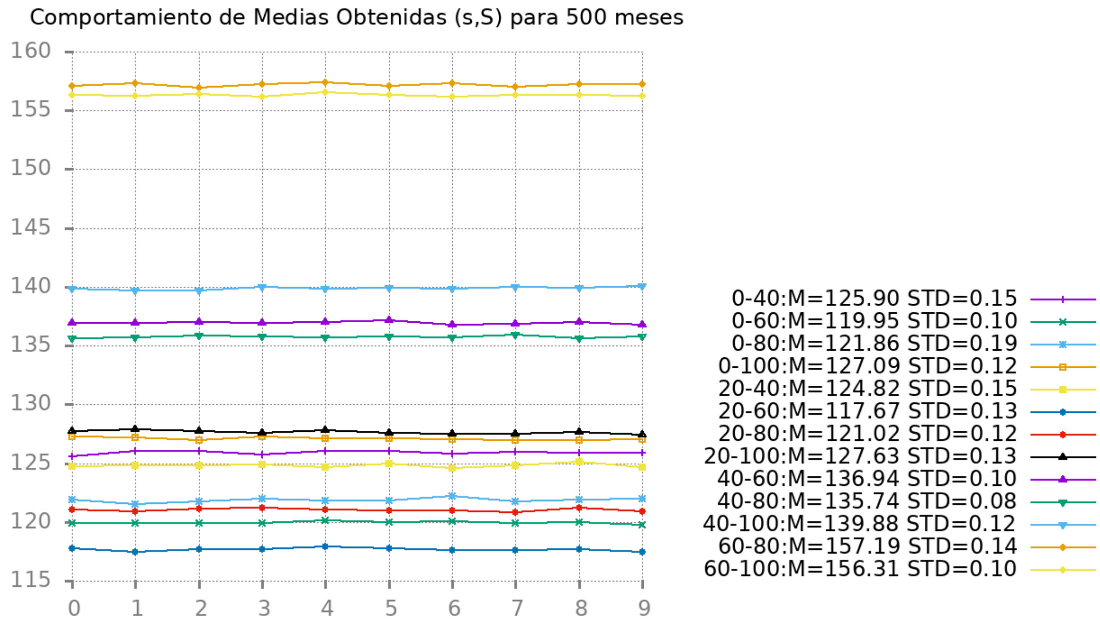


Figura 2.5: Valores obtenidos para 500 meses con la política estacionaria-dinámica (3)

Lo que más sorprende de esta política es la capacidad de alcanzar máximos aún mayores que la política estacionaria número 1 para valores de $s = 60$ y $S \in \{80, 100\}$. Llegando a alcanzar un máximo de **157.19** de coste en su totalidad (Algo que no queremos).

En conclusión, el mejor modelo es el dinámico, incluso con un margen con respecto a los otros dos.

3. Modelo de simulación continuo

En este modelo vamos a intentar simular un ecosistema. Imaginemos que tenemos una especia de pez pequeño que vive en un lago. Ese pez tendrá asociado su tasa natural de natalidad asociada "a" y el número de peces "x". Además, tendremos restricciones respecto al número máximo de peces que pueden existir en nuestro pequeño lago, esa constante será "b". Por último, supondremos que hay otra especia que compite por los recursos y encima se alimenta de la primera, la denotaremos como "y".

Con lo mencionado anteriormente, tendremos dos ecuaciones que nos determina las tasas de crecimiento de ambas especies:

$$\frac{dy}{dt} = cy\left(\frac{x}{d} - \frac{y}{e}\right) \qquad \text{Especie grande} \tag{3.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{b}\right) - fy \qquad \text{Especie pequeña} \tag{3.2}$$

Para ilustrar las características de esas ecuaciones supongamos que los coeficientes tienen los siguientes valores:

$$a = \frac{2}{30} = 0{,}06667 \text{ días}^{-1} \tag{3.3}$$

$$b = 5000000 \tag{3.4}$$

$$c = \frac{2}{90} = 0,0222 \text{ días}^{-1} \tag{3.5}$$

$$d = 5000000 \tag{3.6}$$

$$e = 36000 \tag{3.7}$$

$$f = 5 \text{ días}^{-1} \tag{3.8}$$

Se tiene interés en estudiar si ese sistema es estable, en ausencia de factores externos. Además, se plantea un escenario donde el pez depredador tiene interés comercial, y que, en algún instnate de tiempo, por ejemplo el 50 % de esos peces, o un determinado número de ellos, son pescados. Se desae conocer cómo afectará esta intervención al posible equilibrio del sistema, si se podrá recuperar o no, y cuándo.

Por último, se plantea el problema de diseñar una política de pesca óptima.

3.1. Resultados

Para buscar la relación entre ambas especies, hemos utilizado varios valores en busca de encontrar un equilibrio ecológico. Ese objetivo, con las restricciones anteriormente definidas, hace que sea sensato utilizar un número muy superior de peces pequeños versus los peces grandes. Y como se puede observar en las siguientes gráficas, es necesario utilizar una diferencia adecuada para que converja el sistema.

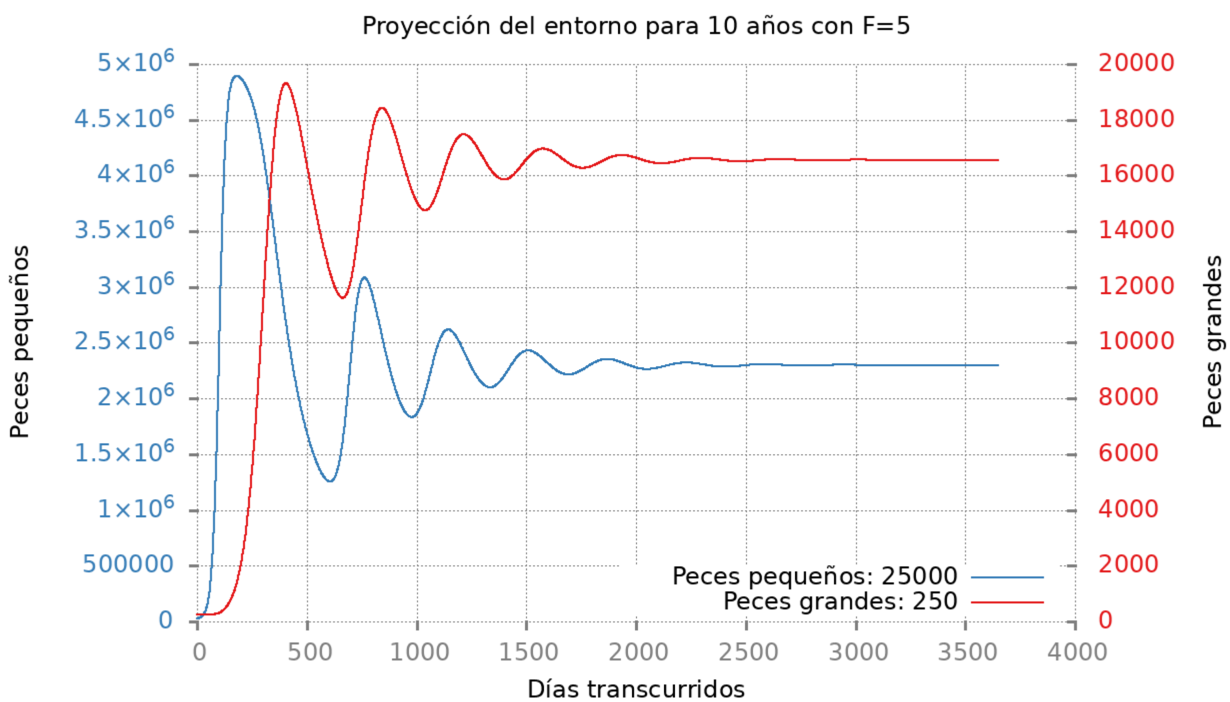


Figura 3.1: Evolución del entorno y visualización de su comportamiento

Es importante remarcar que hemos optado por utilizador dos ejes Y en nuestra gráfica para ahorrar espacio y tener una mejor visualización entre las líneas. Vemos que a partir del día 2000 ya hay cierto equilibrio entre especies cuando la diferente entre ellas es de 100 veces más pequeños que grandes. Podemos también graficar utilizando como eje X una especie y como eje Y la otra y visualizar la velocidad de convergencia del sistema (alcanzar el equilibrio).

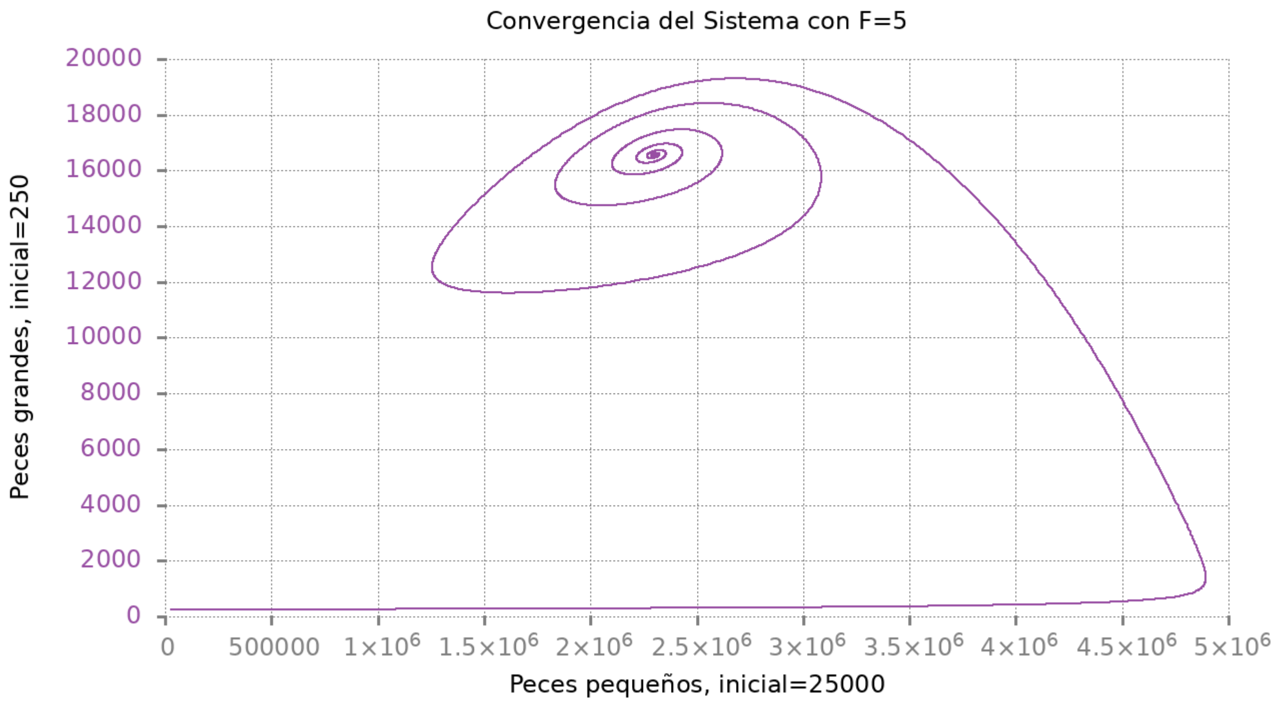


Figura 3.2: Visualización de la convergencia entre las dos especies

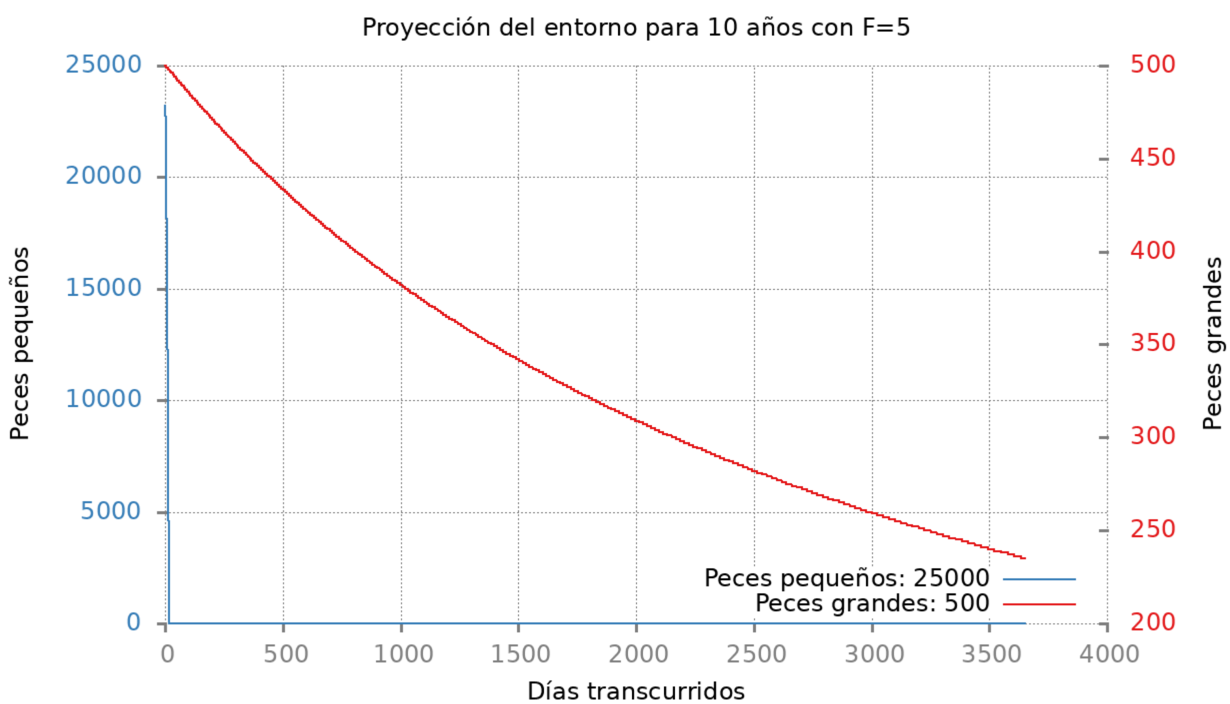


Figura 3.3: **Diferencia inicial insuficiente**, ambas especies terminan por fallecer

Si disminuímos la voracidad de los depredadores no afectamos drásticamente la necesidad de la diferencia entre el número de espécimens pero si en el nivel de oscilación de la función para hallar el equilibrio como se muestra en el ejemplo posterior. Para los análisis a posterior se utiliza la voracidad F=5.

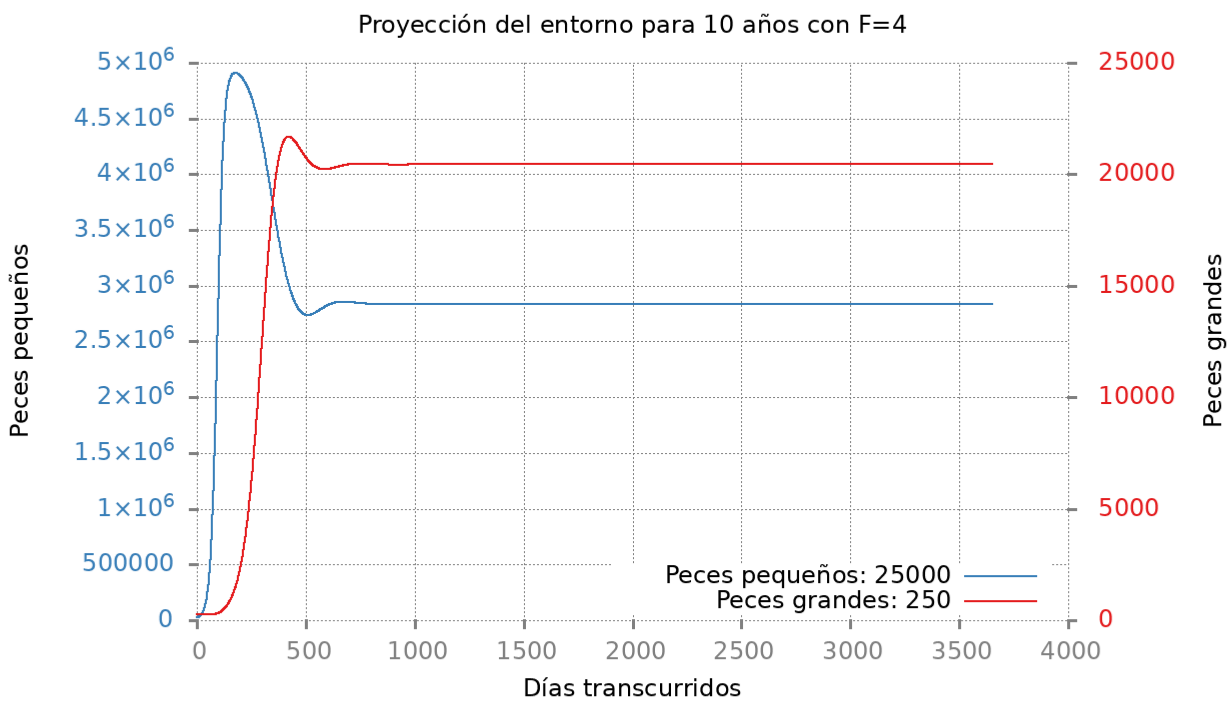


Figura 3.4: Evolución del entorno y visualización de su comportamiento

3.2. Desarrollo de política de pesca

Para el análisis de una política de pesca, se ha realizado un primer acercamiento manual y basado en repetición y visualización de datos para encontrar un valor adecuado de referencia. Es decir, primeramente hemos ido probando con valores razonables y hemos verificado un comportamiento casi lineal, dónde podemos pescar, asumiendo una población inicial de 3.000.000 de peces pequeños y 750 grandes dentro de un periodo de estabilidad de 3000 días, una cantidad equivalente a la frecuencía (en días) multiplicada por 100 tal que:

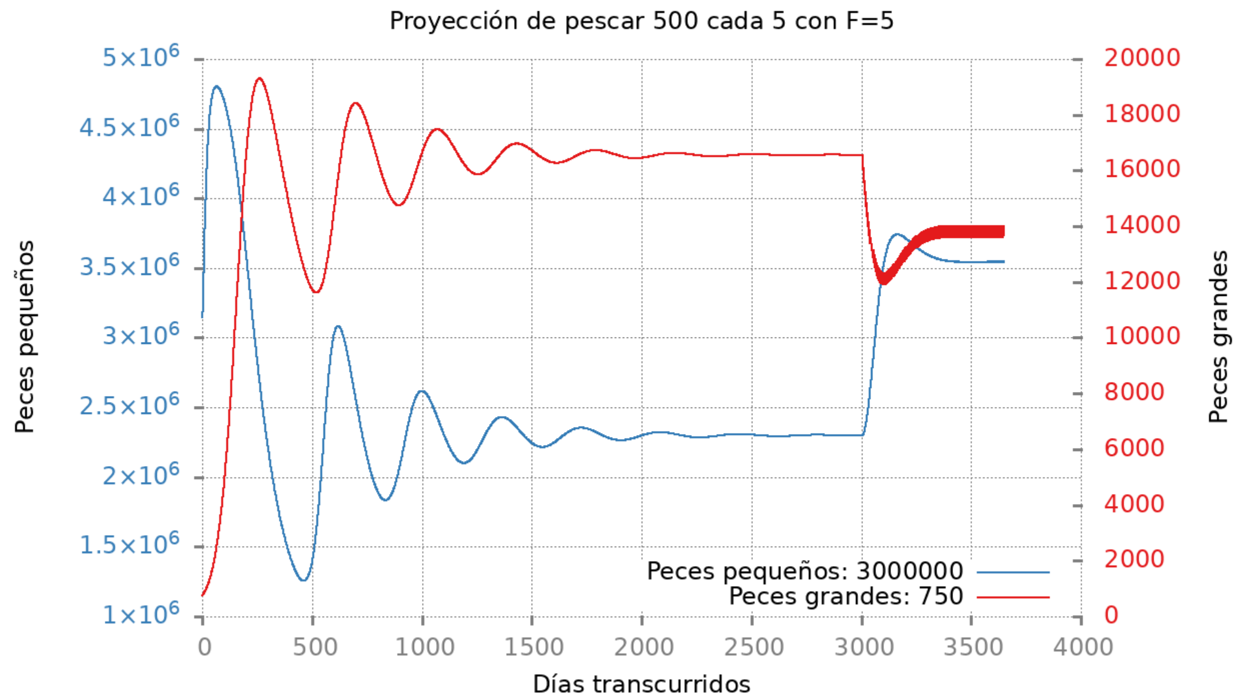


Figura 3.5: Equilibrio alcanzado usando política con valor de referencia

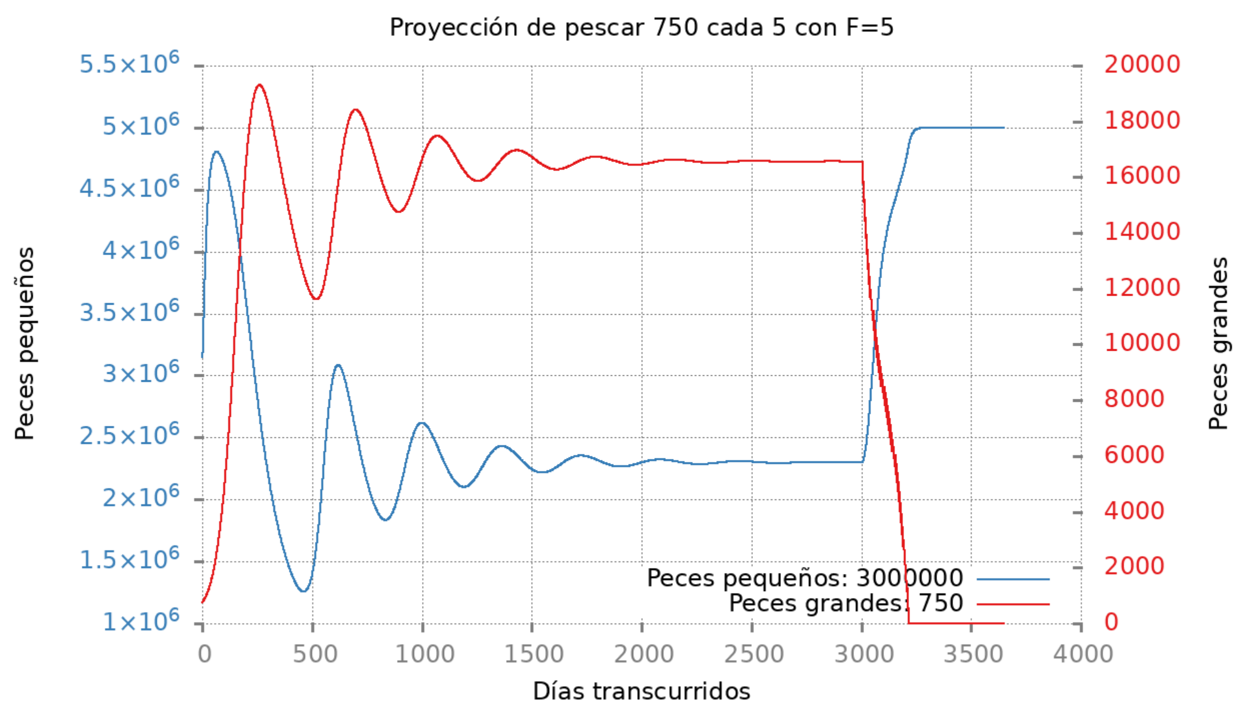


Figura 3.6: Comportamiento al asumir una política de pesca arbitraria fuera del rango.

Con este primer visualizado del comportamiento se ha desarrollado una modificación del archivo inicial para la búsqueda de la política de pesca óptima. La modificación consiste en diseñar un algoritmo capaz de decirnos tras N iteraciones si el número de pescados de interés comercial es mayor que 0 dado una política de pesca iterativa.

Para que sea eficiente, partiremos de un valor máximo encontrado experimentalmente, pescar 1100 cada 10 días (mejor ratio experimental), dónde a partir de este datos sabemos que apenas habrá que verificar que, mínimo, se mantenga esa frecuencia de pesca, limitando así los días a 16.000 (máximo aproximado de peces comerciales en fase de equilibrio) entre 1100 por 10 días. (Ir cada día, cada 2 día... hasta a cada 145). Donde en cada día pescaremos, mínimo, $\frac{1100}{10} \times F + 1$, siendo F la frecuencia (cada x días).

Luego probamos de forma iterativa hasta que el programa nos devuelva un posible máximo. El resultado obtenido es el que se muestra a continuación, con un ratio equivalente a la **pesca de 119.614 peces díarios y un resultado anual de 43.678.** Ese ratio sale del resultado de pescar **359 peces cada 3 días**.

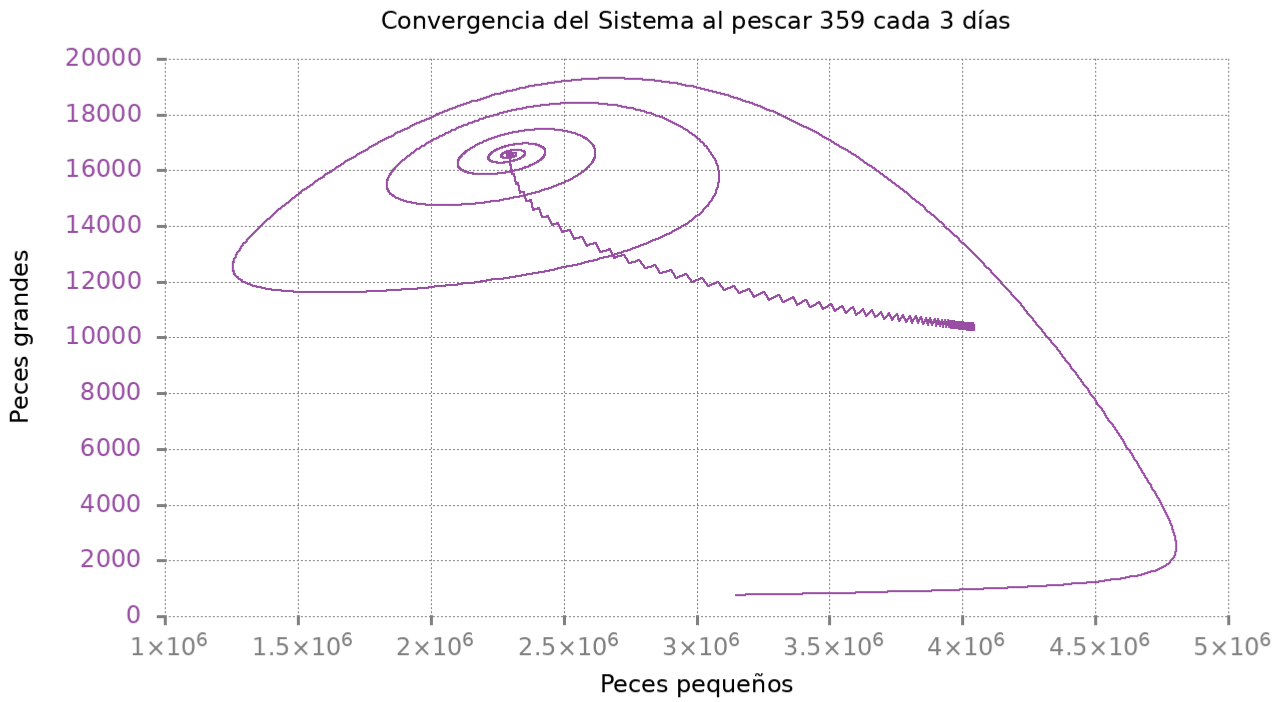


Figura 3.7: Mejor política de pesca obtenida

Referencias

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/reproducibilidad_y_repetibilidad, consultado el 27 de Septiembre de 2022.