
COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIE CRISTALLINE ET COHOMOLOGIE ÉTALE p -ADIQUE SUR CERTAINES VARIÉTÉS DE SHIMURA

par

Sandra Rozensztajn

Résumé. — Soit X un modèle entier en un premier p d'une variété de Shimura de type PEL, ayant bonne réduction associée à un groupe réductif G . On peut associer aux \mathbb{Z}_p -représentations du groupe G deux types de faisceaux : des cristaux sur la fibre spéciale de X , et des systèmes locaux pour la topologie étale sur la fibre générique. Nous établissons un théorème de comparaison entre la cohomologie de ces deux types de faisceaux.

Abstract (Comparison between crystalline cohomology and p -adic étale cohomology on certain Shimura varieties)

Let X be an integral model at a prime p of a Shimura variety of PEL type having good reduction, associated to a reductive group G . To \mathbb{Z}_p representations of the group G can be associated two kinds of sheaves : crystals on the special fiber of X , and locally constant étale sheaves on the generic fiber. We establish a comparison between the cohomology of these two kinds of sheaves.

1. Introduction

Considérons X un modèle entier d'une variété de Shimura de type PEL, défini sur une extension de \mathbb{Z}_p . Cette variété de Shimura correspond à un groupe réductif G , défini sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. On peut associer aux $\mathbb{Z}_{(p)}$ -représentations du groupe G différents faisceaux : des systèmes locaux en \mathbb{Z}_p -modules sur la fibre générique de X , et des cristaux sur sa fibre spéciale. Nous établissons une comparaison entre la cohomologie étale du système local d'une part, et la cohomologie log-cristalline d'une extension du cristal à une compactification appropriée de X , pour une même représentation V du groupe G . Nous traitons ici le cas des variétés de Shimura unitaires et de celles de type Siegel. Dans le cas unitaire, nous obtenons un résultat qui tient compte de la torsion (théorème 6.3), dans le cas Siegel les résultats sont moins précis et ne sont valables qu'après tensorisation par \mathbb{Q}_p (théorème 6.4). L'intérêt de cette comparaison est que nous pouvons obtenir des renseignements sur le côté cristallin : des techniques de type complexe BGG, décrites par exemple dans [3], chapitre VI, permettent d'avoir

des renseignements sur la filtration de Hodge. On déduit alors des informations sur le côté étale, vu comme représentation galoisienne.

La théorie de Hodge p -adique nous donne de tels théorèmes de comparaison entre cohomologie étale p -adique et log-cristalline dans le cas des coefficients constants, pour des schémas propres et possédant certaines propriétés de lissité. Ces résultats sont dûs entre autres à Tsuji ([15]) pour le cas où l'on considère les groupes de cohomologie après tensorisation par \mathbb{Q}_p , et à Tsuji et Breuil pour le cas où l'on tient compte de la torsion ([16] et [2], il y a alors des restrictions sur le degré des groupes de cohomologie que l'on peut étudier). Ces théorèmes sont rappelés dans le paragraphe 6.1.

Le principe de notre méthode est de considérer la cohomologie à coefficients constants de la variété abélienne universelle sur X et de ses puissances, et d'en déduire la comparaison qui nous intéresse en découpant les groupes de cohomologie des faisceaux considérés dans les groupes de cohomologie à coefficients constants à l'aide de certaines correspondances algébriques.

Le premier problème est que de tels théorèmes de comparaison n'étant valables que sur des schémas propres, nous devons supposer l'existence (prouvée dans certains cas seulement) de compactifications non seulement de X , mais aussi des variétés de Kuga-Sato, et plus précisément un système projectif de telles compactifications. La partie 2 explique précisément dans quelle situation nous nous plaçons, ainsi que les propriétés des compactifications que nous utilisons.

Le deuxième problème est que toutes les représentations de G ne donnent pas des faisceaux dont la cohomologie puisse être découpée par des correspondances algébriques dans la cohomologie de la variété abélienne universelle. On détermine dans la partie 3 quelles sont les représentations de G qui donnent des faisceaux que l'on peut atteindre de cette façon, qui sont les seuls pour lesquels nous obtenons un résultat. Cette partie utilise fortement la structure des représentations du groupe réductif G , ce qui explique que l'on soit obligé de faire une description cas particulier par cas particulier.

Nous expliquons la construction des faisceaux ainsi que l'action de ces correspondances algébriques dans la partie 4.

Enfin l'énoncé et la preuve du théorème principal occupent la partie 6. C'est ici qu'apparaît une différence entre les cas unitaire et Siegel : en effet le point-clé de la preuve est la compatibilité de l'action des correspondances algébriques que nous considérons avec les théorèmes de comparaison à coefficients constants. Le cas Siegel utilise la compatibilité de cet isomorphisme de comparaison avec les structures produit sur les groupes de cohomologie, ce qui n'est démontré que dans le cas rationnel et non dans le cas de torsion.

2. Les objets considérés

2.1. Variétés de Shimura de type PEL. —

2.1.1. Les données. — On se donne B une \mathbb{Q} -algèbre simple finie, munie d'une involution positive notée $*$ (c'est-à-dire que $\mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xx^*) > 0$ pour tout x non nul de B), \mathfrak{V} un module de type fini sur B , muni d'une forme bilinéaire $(,)$ telle que pour tous v et w dans \mathfrak{V} , et tout b dans B on ait $(bv, w) = (v, b^*w)$. On notera $2g$ la dimension de \mathfrak{V} sur \mathbb{Q} .

On fixe dans toute la suite un nombre premier p , et on fera l'hypothèse que $p > 2g$. Le rôle de cette hypothèse est expliqué au paragraphe 4.3.1.

On suppose que B est non ramifié en p , c'est-à-dire que $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit d'algèbres de matrices sur des extensions non ramifiées de \mathbb{Q}_p .

On se donne un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -ordre \mathcal{O}_B dans B qui devient un ordre maximal de $B_{\mathbb{Q}_p}$ après tensorisation par \mathbb{Z}_p , et stable par l'involution de B .

On se donne aussi \mathcal{V} un \mathcal{O}_B -réseau de \mathfrak{V} autodual. Le fait que \mathcal{V} soit autodual implique en particulier que la forme bilinéaire induite sur \mathcal{V} est non dégénérée.

Soit C l'anneau des endomorphismes B -linéaires de \mathfrak{V} .

On définit le groupe G par $G(R) = \{g \in (C \otimes R)^*, \exists \mu \in R^*, \forall v, w \in \mathfrak{V} \otimes R, (gv, gw) = \mu(v, w)\}$, pour toute $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre R .

On se donne un \mathbb{R} -homomorphisme d'algèbres $h : \mathbb{C} \rightarrow C_\infty = C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ tel que $h(z)^* = h(\bar{z})$, et la forme $(v, h(i)w)$ soit définie positive sur $\mathfrak{V}_\infty = \mathfrak{V} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. On associe à h le morphisme $\mu_h : \mathbb{C}^* \rightarrow G_{\mathbb{C}}$, qui définit la filtration de Hodge sur $\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire la décomposition $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_z \oplus \mathfrak{V}_1$, où $\mu_h(z)$ agit par z sur \mathfrak{V}_z et par 1 sur \mathfrak{V}_1 .

Le corps dual associé à ces données est le corps $E(G, h)$ qui est le corps de définition de la classe d'isomorphisme de \mathfrak{V}_z comme B -représentation. C'est le sous-corps de \mathbb{C} engendré par les $\mathrm{tr}(b)$, $b \in B$ agissant sur \mathfrak{V}_z .

2.1.2. Deux cas particuliers. — Dans la suite nous nous intéresserons uniquement à deux cas particuliers : le cas Siegel et le cas unitaire. Le cas Siegel correspond à la situation où B est réduit à \mathbb{Q} . La variété de Shimura associée est alors la variété modulaire de Siegel. Le cas unitaire correspond au cas où B est une extension quadratique imaginaire de \mathbb{Q} . La forme alternée $(,)$ est alors la partie imaginaire d'une forme hermitienne sur \mathfrak{V} , qu'on peut voir comme un B -espace vectoriel de dimension moitié.

2.1.3. Le problème de modules. — On peut associer aux données de Shimura précédentes un problème de modules, tel que décrit dans [10], dont on rappelle ici l'essentiel.

Fixons \mathcal{K}^p un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f^p)$. On considère le foncteur des $\mathcal{O}_{E(G, h)} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas dans les ensembles, qui à S associe l'ensemble à équivalence près des quadruplets (A, λ, i, η) , où A est un schéma abélien A sur S , muni d'une polarisation λ première à p , et d'une flèche $i : \mathcal{O}_B \rightarrow \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ qui est un morphisme d'algèbres à involution, l'involutin sur $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ étant l'involution de Rosati donnée par λ , et η est une structure de niveau. Enfin on suppose que \mathcal{O}_B agit sur $\mathrm{Lie}(A)$ comme sur \mathfrak{V}_z , c'est-à-dire que $\det(b, \mathrm{Lie}(A)) = \det(b, \mathfrak{V}_z)$ pour tout $b \in \mathcal{O}_B$. La structure de niveau consiste en ce qui suit : on considère le \mathbb{A}_f^p -module de Tate de A , c'est un \mathbb{A}_f^p -faisceau lisse sur S . Soit s un point géométrique de S , une structure de niveau consiste en une \mathcal{K}^p -orbite η d'isomorphismes $\mathfrak{V}_{\mathbb{A}_f^p} \rightarrow H_1(A_s, \mathbb{A}_f^p)$ de B -modules munis d'une forme alternée, et qui soit fixée par $\pi_1(S, s)$.

Deux quadruplets (A, λ, i, η) et $(A', \lambda', i', \eta')$ sont dit équivalents s'il existe une isogénie première à p de A vers A' , commutant à l'action de \mathcal{O}_B , transformant η en η' , et λ en un multiple scalaire (dans $\mathbb{Z}_{(p)}^*$) de λ' .

Ce foncteur est représentable, par un schéma quasi-projectif et lisse \mathcal{M} sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ pourvu que l'on choisisse \mathcal{K}^p suffisamment petit.

Notons \mathcal{A} le schéma abélien universel sur \mathcal{M} .

Pour les cas Siegel et unitaire, on a le résultat suivant (lemme 7.2 de [10]) :

Lemme 2.1. — $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{V}$ et $\mathcal{H}^1(\mathcal{A}/\mathcal{M})^\vee$ sont localement isomorphes comme \mathcal{O}_B -modules munis d'une forme alternée.

2.1.4. La situation géométrique considérée. — On obtient alors la situation suivante : Notons K le complété en une place $v|p$ de $E(G, h)$, et \mathcal{O} son anneau des entiers. Notons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}/\varpi^{n+1}$, où ϖ est une uniformisante de \mathcal{O} . C'est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n sur le corps résiduel de \mathcal{O} puisque p est non ramifié dans $E(G, h)$. Posons $S = \text{Spec } \mathcal{O}$, et $S_n = \text{Spec } \mathcal{O}_n$. D'une façon générale, on notera avec un indice n la réduction d'un \mathcal{O} -schéma modulo ϖ^{n+1} .

On notera $X = \mathcal{M}_{\mathcal{O}}$, c'est donc un schéma lisse sur S , muni d'un schéma abélien \mathcal{A} , provenant du schéma abélien universel sur la variété de Shimura. De plus, on a un morphisme $\mathcal{O}_B \rightarrow \text{End}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$. On note $f : \mathcal{A} \rightarrow X$, et $f_s : \mathcal{A}^s \rightarrow X$ les morphismes structuraux.

2.2. Existence de compactifications. — Nous aurons besoin d'utiliser aussi des compactifications de X , ainsi que du schéma abélien universel \mathcal{A} et de ses puissances. Ces compactifications ont été décrites en détail dans le cas Siegel ([3]), pour le cas unitaire la construction détaillée n'est écrite que pour $GU(2, 1)$, c'est-à-dire les surfaces modulaires de Picard (voir [11] pour la compactification de la base et [14] pour celle du schéma abélien universel), même si leur existence dans le cas unitaire général ne pose pas de problèmes. Nous résumons dans ce paragraphe les seules propriétés de ces compactifications que nous utilisons.

2.2.1. Compactifications de la base. — Nous avons besoin tout d'abord de compactification du modèle entier de la variété de Shimura. En considérant des compactifications toroïdales (décrites dans [3], chapitre IV pour le cas Siegel, et dans [11] pour le cas de $GU(2, 1)$), on obtient l'existence d'un schéma \overline{X} vérifiant la propriété suivante :

Propriété 1. — il existe un schéma \overline{X} propre et lisse sur S , contenant X comme ouvert dense, tel que le complémentaire de X dans \overline{X} est un diviseur à croisements normaux relatifs.

On fixera dans la suite une fois pour toute une telle compactification \overline{X} . On peut remarquer que les résultats ne dépendent en fait pas du choix de \overline{X} parmi l'ensemble des compactifications toroïdales : deux compactifications toroïdales sont toujours comparables, au sens où il existe une troisième qui les domine toutes les deux, ce qui permet de voir que les groupes de cohomologie décrits en 5.2.5 ne dépendent pas de ce choix de compactification.

2.2.2. Compactifications du schéma abélien universel. — On se donne \overline{X} propre lisse sur S , muni d'un diviseur à croisements normaux relatifs D , et on note X l'ouvert complémentaire. Pour chaque s , on appelle bonne compactification de \mathcal{A}^s une compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$ de \mathcal{A}^s , telle que $f_s^{-1}(\overline{X} \setminus X)$ est un diviseur à croisements normaux relatifs.

Considérons la des compactifications toroïdales « lisses » des \mathcal{A}^s (voir [3] dans le cas Siegel, [14] dans le cas de $GU(2, 1)$), on obtient pour tout $s \geq 1$, une famille de bonnes compactifications $\overline{\mathcal{A}}^s$ de \mathcal{A}^s , vérifiant les deux propriétés suivantes :

Propriété 2. — 1. Pour toute isogénie u de \mathcal{A}^s , il existe deux bonnes compactifications $\overline{\mathcal{A}}^{s_1}$ et $\overline{\mathcal{A}}^{s_2}$, et un morphisme $\overline{\mathcal{A}}^{s_1} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{s_2}$ prolongeant u .
2. Étant donné deux bonnes compactifications $\overline{\mathcal{A}}^{s_1}$ et $\overline{\mathcal{A}}^{s_2}$, il en existe une troisième $\overline{\mathcal{A}}^{s_3}$ et des \overline{X} -morphisms $\overline{\mathcal{A}}^{s_3} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{s_1}$ et $\overline{\mathcal{A}}^{s_3} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{s_2}$ induisant l'identité sur \mathcal{A}^s .

Dans le cas Siegel, nous utiliserons encore une propriété supplémentaire de la famille des compactifications toroïdales :

Propriété 3. — Si \mathcal{L} est un faisceau symétrique sur \mathcal{A}^s , il existe des entiers a et b , et une compactification de la famille $\overline{\mathcal{A}}^s$ tels que le faisceau $(\mathcal{O}(2)^{\otimes a} \otimes \mathcal{L})^{\otimes b}$ se prolonge en un faisceau sur $\overline{\mathcal{A}}^s$. De plus, on peut choisir a et b premiers à p .

Cette construction fait l'objet du chapitre VI du livre [3]. Elle n'est détaillée que pour le cas où le faisceau symétrique ample considéré est $\mathcal{O}(2)$, mais cela s'adapte au cas d'un faisceau symétrique ample quelconque, pour lequel on prendra donc $\mathcal{O}(2)^{\otimes a} \otimes \mathcal{L}$, avec a assez grand pour que le faisceau soit ample.

3. Représentations de G

3.1. $\mathbb{Z}_{(p)}$ -représentations. — On note $\text{Rep}(G)$ la catégorie des représentations de G sur un $\mathbb{Z}_{(p)}$ -module libre de type fini, et $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}(G)$ celles des représentations de G sur un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie.

Notons $\mathcal{V}_0 \in \text{Rep}(G)$ la duale de la représentation standard de G , c'est-à-dire la duale du réseau \mathcal{V} défini au paragraphe 2.1.1.

3.2. L'algèbre des endomorphismes. — Les représentations de G de la forme $\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$, pour $s \geq 1$, jouent un rôle particulier : les faisceaux que nous allons leur associer dans la section 4 ont une interprétation géométrique. Nous définissons une sous-algèbre de l'algèbre $\text{End}(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$ des endomorphismes G -linéaires de $\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$, formé de morphismes ayant aussi une interprétation géométrique qui sera décrite dans le paragraphe 4.2.1. L'objectif est de pouvoir découper dans les $\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$ des représentations irréductibles de G à l'aide de cette algèbre d'endomorphismes, en s'inspirant des constructions de Weyl.

Dans le cas unitaire, on définit pour tout $s \geq 1$ une sous- $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre $E(A)_s$ de $\text{End}(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$. C'est l'algèbre engendrée par l'action de $M_s(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{V}_0^s , muni de la multiplication opposée, et par l'action de \mathcal{O}_B sur \mathcal{V}_0 .

Dans le cas Siegel, on note $E(C)_s$ la sous- $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre de $\text{End}(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$ engendrée par l'action de $M_s(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{V}_0^s , et par les opérations suivantes. On note $\mathbb{Z}_{(p)}(1)$ la représentation du groupe symplectique correspondant à l'action du groupe sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ par le multiplicateur. Observons que $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(-1)$.

On note $u \in \wedge^2 \mathcal{V}_0^2(1)$ l'élément provenant de la forme bilinéaire sur \mathfrak{V} , et pour tous $1 \leq i < j \leq s$, on note $u_{i,j}$ l'image de u par l'application $\wedge^2 \mathcal{V}_0^2(1) \rightarrow \wedge^2 \mathcal{V}_0^s(1)$ induite par l'application $\mathcal{V}_0^2 \rightarrow \mathcal{V}_0^s$ consistant à placer les deux facteurs \mathcal{V}_0 aux places i et j .

Le cup-produit par $u_{i,j}$ définit une application $\varphi_{i,j} : \wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s(-1) \rightarrow \wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$ qui envoie chaque $\wedge^k \mathcal{V}_0^s(-1)$ dans $\wedge^{k+2} \mathcal{V}_0^s$.

L'application duale de $\varphi_{i,j}$ permet de définir une application $\psi_{i,j} : \wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s \rightarrow \wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s(-1)$.

Enfin on note $\theta_{i,j} = \varphi_{i,j} \circ \psi_{i,j}$, qui est donc un endomorphisme de $\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$.

On définit alors $E(C)_s$ comme l'algèbre engendrée par l'action de $M_s(\mathbb{Z})$ et les $\theta_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq s$.

On notera E_s pour désigner indifféremment $E(A)_s$ et $E(C)_s$. On dira que $u \in E_s$ est un projecteur homogène (de degré t) si son image est contenue dans $\wedge^t \mathcal{V}_0^s \subset \wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$.

On donne des définitions similaires pour les éléments de $E_s \otimes \mathbb{Q}$ agissant sur $\wedge^\bullet (\mathcal{V}_0 \otimes \mathbb{Q})^s$.

3.3. Représentations atteignables. — On note $\text{Rep}^a(G)$ la sous-catégorie de $\text{Rep}(G)$ formée des représentations isomorphes à une somme directe de représentations de G de la forme $\text{im } q$, où q est un projecteur homogène de E_s agissant sur un $\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s$. Si $V \in \text{Rep}^a(G)$, on note $t(V)$ le plus grand degré des projecteurs homogènes qui apparaissent dans la définition de V .

On définit de façon similaire $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}^a(G)$.

Comme nous n'obtenons des résultats que pour les représentations de G qui sont dans $\text{Rep}^a(G)$, il va s'agir de voir que cette sous-catégorie n'est pas trop petite, et qu'il n'est donc pas trop restrictif de s'y limiter. C'est l'objet des paragraphes suivants.

3.4. Poids p -petits. — Supposons notre groupe réductif G déployé sur un certain corps E . Les représentations irréductibles de G sur E sont paramétrées par l'ensemble des poids dominants, une fois fixé un tore maximal et un système de racines positives. Si a est un poids dominant, on note $V_E(a)$ la représentation irréductible de G sur E de plus haut poids a .

On définit comme dans [9], II.3.15 ce qu'est un poids dominant p -petit. La propriété qui nous intéresse ici est la propriété suivante (voir [13], 1.9) : si le poids a est p -petit, alors il existe à homothétie près un unique réseau dans $V_E(a)$ qui est stable sous l'action de $\text{Dist}(G)$, l'algèbre des distributions de G sur $\mathcal{O}_{E,(v)}$, pour v une place de E divisant p . Cela a donc un sens de définir $V(a)$ comme la représentation irréductible de G sur $\mathcal{O}_{E,(v)}$ de plus haut poids a .

3.5. Description de $\text{Rep}^a(G)$ dans le cas unitaire. — On se place ici dans le cas unitaire. Le groupe G est alors un groupe unitaire relatif à un corps E quadratique imaginaire, qui correspond à l'algèbre B du paragraphe 2.1.1, donc G est de la forme $GU(g)$, et il est déployé sur E . On a donc $G_E \xrightarrow{\sim} GL(g)_E \otimes \mathbb{G}_{m,E}$.

L'ensemble des représentations sur E irréductibles de G est paramétré par les $g+1$ -uplets $(a_1, \dots, a_g; c)$ d'entiers, avec $a_1 \geq \dots \geq a_g$ et $\sum a_i = c \pmod{2}$, une fois choisi un isomorphisme entre G_E et $GL(g)_E \times \mathbb{G}_{m,E}$. Notons i et j les deux morphismes de E dans E , le choix de l'isomorphisme revient à en privilégier un des deux.

La représentation $\mathcal{V}_0 \otimes E$ correspond à la somme de deux représentations irréductibles V_1 et V_2 , V_1 de plus haut poids $(1, 0, \dots, 0; 1)$ et V_2 de plus haut poids $(0, \dots, 0, -1; 1)$. V_1 est l'espace propre associé à la valeur propre $i(x)$ de l'endomorphisme $u(x)$, pour tout x dans E , et V_2 est l'espace propre associé à la valeur propre $j(x)$.

3.5.1. Description de $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}^a(G)$. — Notons $\text{Rep}_E^a(G)$ l'ensemble des $V \otimes_{\mathbb{Q}} E$, où $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}}^a(G)$, et $V_0 = \mathcal{V}_0 \otimes E$.

Proposition 3.1. — *$\text{Rep}_E^a(G)$ contient toutes les représentations qui sont de la forme $V(a) \oplus V(a^*)$, où $V(a)$ est la représentation irréductible de plus haut poids $(a_1, \dots, a_g; c)$ avec $a_g \geq 0$ et $c = \sum a_i = s$, et a^* est le poids $(-a_g, \dots, -a_1; c)$.*

Lemme 3.2. — *Soit $a = (a_1, \dots, a_g; c)$ un poids dominant de G , tel que $a_g \geq 0$ et $c = \sum a_i$, et $V(a)$ la représentation irréductible associée. Alors il existe un élément C_a de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_s$ (où $s = \sum a_i$) tel que $V(a) = C_a V_1^{\otimes s}$ et $V(a^*) = C_a V_2^{\otimes s}$.*

Démonstration. — Regardons d'abord $V(a)$ comme une représentation de GL_g , en oubliant l'action du multiplicateur. Comme expliqué dans [6], 15.5, il existe un $C_a \in \mathbb{Q}\mathfrak{S}_s$ idempotent tel que $V(a) = C_a V_1^{\otimes s}$, $V(a)$ et V_1 étant vues toutes deux comme des représentations de GL_g . Il faut voir ensuite que l'égalité tient aussi comme représentations de $GL(g)_E \times \mathbb{G}_{m,E}$, donc que le multiplicateur agit de la même façon sur les deux. Or il agit par $x \mapsto x^c$ sur $V(a)$, et par $x \mapsto x^s$ sur $V_1^{\otimes s}$, et on a $s = c$. \square

Lemme 3.3. — *Soit $s \geq 0$. Il existe un projecteur q dans $E(A)_s \otimes \mathbb{Q}$ commutant à l'action du groupe des permutations \mathfrak{S}_s tel que l'image de q agissant sur $\wedge^\bullet V_0^s$ est $V_0^{\otimes s}$.*

Démonstration. — $\wedge^\bullet V_0^s = \bigoplus_{0 \leq i_1 \leq 2g, \dots, 0 \leq i_s \leq 2g} \wedge^{i_1} V_0 \otimes \dots \otimes \wedge^{i_s} V_0$.

Considérons un entier m non nul, v_j la matrice diagonale $[(1, \dots, 1, m, 1, \dots)]$ avec un m en j -ème position. L'espace propre correspondant à la valeur propre m est la somme des termes pour lesquels $i_j = 1$. Soit p_j le projecteur sur cet espace propre. Les p_j commutent, leur produit est donc un projecteur q sur l'intersection des images, c'est-à-dire les termes pour lesquels chaque i_j est égal à 1, c'est-à-dire $V_0^{\otimes s}$. De plus, q commute bien à l'action de \mathfrak{S}_s . \square

Enfin on utilise que $V_0 = V_1 \oplus V_2$, $V_0^{\otimes s}$ est donc égal à une somme de termes de la forme $V_1^{\otimes x} \otimes V_2^{\otimes y}$ avec $x + y = s$.

Lemme 3.4. — *Il existe un élément q' dans le centre de $E(A)_s \otimes \mathbb{Q}$ dont la restriction de l'action à $V_0^{\otimes s}$ est un projecteur sur $V_1^{\otimes s} \oplus V_2^{\otimes s}$.*

Démonstration. — Fixons $z \in \mathcal{O}_E$. z agit par $i(z)$ sur V_1 et par $j(z)$ sur V_2 . Notons $i(z) = a$ et $j(z) = b$. Choisissons z de sorte que les $a^x b^y$ soient tous distincts. Alors $V_1^{\otimes x} \otimes V_2^{\otimes y}$ est (dans $V_0^{\otimes s}$) l'espace propre associé à la valeur propre $a^x b^y$.

Soit P le polynôme $\Pi_{r+t=s}(X - a^r b^t)$. Il est à coefficients entiers, et c'est le polynôme minimal de l'action de $u(z)$ sur $V_0^{\otimes s}$. Soit $Q = \Pi_{r+t=s, r \neq 0, t \neq 0}(X - a^r b^t)$. Alors $P = QT$ où $T = (X - a^s)(X - b^s)$, et Q et T sont premiers entre eux. Il existe donc des polynômes U et V (à coefficients rationnels), tels que $UQ + VT = 1$. Alors l'action de $u(1 - UQ)(z)$ sur $V_0^{\otimes s}$ est un projecteur sur $V_1^{\otimes s} \oplus V_2^{\otimes s}$, qu'on note q' . \square

On peut maintenant prouver la proposition : soit a comme dans l'énoncé, et $s = c = \sum a_i$. Posons $P = C_a q' q$, alors $P \wedge^\bullet V_0^s$ est la représentation $V(a) \oplus V(a^*)$. En effet, notons que C_a , q' et q commutent par construction, donc P est un projecteur. On a $q \wedge^\bullet V_0^s = V_0^{\otimes s}$, $q' q \wedge^\bullet V_0^s = V_1^{\otimes s} \oplus V_2^{\otimes s}$, $C_a q' q \wedge^\bullet V_0^s = C_a V_1^{\otimes s} \oplus C_a V_2^{\otimes s}$. Or $C_a V_1^{\otimes s} = V(a)$, et $C_a V_2^{\otimes s} = V(a^*)$.

Une fois décrites les représentations qui sont dans $\text{Rep}_E^a(G)$, il faut maintenant retrouver quelle est la \mathbb{Q} -forme de ces représentations qui est dans $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}^a(G)$. V_1 et V_2 sont naturellement isomorphes, et $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ agit sur $V_0 = V_1 \oplus V_2$ par $(x, y) \mapsto (\bar{y}, \bar{x})$. Son action sur $V(a) \oplus V(a^*)$ peut être décrite par la même formule, ce qui nous permet d'obtenir les représentations qui sont dans $\text{Rep}_{\mathbb{Q}}^a(G)$.

3.5.2. Description de $\text{Rep}^a(G)$. —

Proposition 3.5. — *$\text{Rep}^a(G)$ contient toutes les représentations qui sont de la forme $(V(a) \oplus V(a^*))^{Gal(E/\mathbb{Q})}$, où $V(a)$ est la représentation irréductible de plus haut poids $(a_1, \dots, a_g; c)$ avec $a_g \geq 0$ et $c = \sum a_i = s$, et a^* est le poids $(-a_g, \dots, -a_1; c)$, a et a^* sont p -petits, et $2g < p$, et $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ agit sur $(V(a) \oplus V(a^*))$ comme décrit au paragraphe précédent.*

Il suffit de voir que si les conditions données sont vérifiées, on peut prendre des dénominateurs premiers à p dans les lemmes du paragraphe 3.5.1.

Lemme 3.6. — *On se place comme dans le lemme 3.2. Alors si $\sum a_i < p$, C_a est dans $\mathbb{Z}_{(p)} \mathfrak{S}_s$.*

Démonstration. — C_a est de la forme $(1/n)C'_a$, où C'_a est dans $\mathbb{Z} \mathfrak{S}_s$, et n est l'entier tel que $C'_a{}^2 = nC'_a$. Or n divise $s!$ (voir [6], 4.2), donc $1/n \in \mathbb{Z}_{(p)}$ si $s < p$. \square

Lemme 3.7. — *Dans le cadre du lemme 3.3, on peut choisir q dans $E(A)_s$ dès que $p > 2g$.*

Démonstration. — Lorsque on écrit p_j comme un polynôme en v_j , les dénominateurs qui apparaissent sont les différences entre les valeurs propres de v_j , qui sont les m^i pour $0 \leq i \leq 2g$. Si $2g < p$, on peut prendre un m dont l'image dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, de sorte que les $m^i - m^{i'}$ sont tous premiers à p . \square

Lemme 3.8. — *Dans le lemme 3.4, on peut prendre q' dans $E(A)_s$ dès que $p > s$.*

Démonstration. — Écrivons donc $UQ + VT = c$, avec U et V à coefficients entiers et c entiers, et étudions les facteurs premiers de c . On obtient $c = Q(a^s)Q(b^s)$. Il s'agit donc de trouver $z \in \mathcal{O}_E$ tel que c soit premier à p (et que aucun des $a^r b^t$, $r > 0, t > 0, r + t = s$ ne soit égal à a^s ou à b^s).

On a $Q(a^s) = a^{s(s-1)/2} \prod_{1 \leq t \leq s-1} (a^t - b^t)$, et $Q(b^s) = b^{s(s-1)/2} \prod_{1 \leq t \leq s-1} (b^t - a^t)$. Supposons d'abord que p est inerte dans E . Alors \mathcal{O}_E/p est isomorphe à \mathbb{F}_{p^2} . La conjugaison dans \mathcal{O}_E se traduit par $x \mapsto x^p$ dans \mathcal{O}_E/p . Choisissons donc x un générateur de $\mathbb{F}_{p^2}^*$, alors un z relevant x convient.

Supposons maintenant p décomposé dans E . Alors \mathcal{O}_E/p est égal à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, et la conjugaison dans \mathcal{O}_E échange les deux facteurs dans \mathcal{O}_E/p . Choisissons un x dans \mathbb{F}_p^* tel que $x^i \neq 1$ pour tout i entre 1 et s , et prenons u et v dans \mathbb{F}_p^* tels que $u/v = x$. Alors si z est un relèvement de (u, v) , il convient. \square

3.6. Description de $\text{Rep}^a(G)$ dans le cas Siegel. — Dans le cas Siegel, la description de $\text{Rep}^a(G)$ est faite dans l'article [12], 5.1. On obtient toutes les représentations de plus haut poids p -petit, à l'action du centre près.

4. Les faisceaux

4.1. Constructions fonctorielles. —

4.1.1. Cas étale. — Soit x un point géométrique de X_K . À chaque représentation du groupe fondamental de la variété $\pi_1(X_K, x)$ correspond un système local sur X_K . Considérons le faisceau constant \mathbb{Z}_p sur \mathcal{A} , et $F = R^1 f_{K*} \mathbb{Z}_p(1)$, où $f_K : \mathcal{A}_K \rightarrow X_K$ est le morphisme structural. F correspond à la représentation standard de G sur \mathbb{Z}_p , autrement dit à un morphisme $\pi_1(X_K, x) \rightarrow G(\mathbb{Z}_p)$. On peut donc associer par composition un système local à toute représentation sur \mathbb{Z}_p de G , et ceci de façon fonctorielle. On note $\mathbb{F}(V)$ le système local associé à la représentation V . On définit de même le foncteur $\mathbb{F}_n(V)$, qui à V associe un fibré en $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ -modules, vérifiant $\mathbb{F}(V) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} = \mathbb{F}_n(V)$.

On observe que $\mathbb{F}(\mathcal{V}_0) = R^1 f_* \mathbb{Z}_p$, et plus généralement $\mathbb{F}(\wedge^t \mathcal{V}_0^s) = R^t f_{s,K*} \mathbb{Z}_p$, où $f_{s,K}$ est le morphisme structural $\mathcal{A}_K^s \rightarrow X_K$.

4.1.2. Cas des fibrés à connexion. —

Proposition 4.1. — *Il existe un foncteur \mathcal{F} de $\text{Rep}(G)$ dans l'ensemble des \mathcal{O}_X -modules à connexion intégrable sur X , et pour tout n un foncteur \mathcal{F}_n de $\text{Rep}(G)$ dans l'ensemble des \mathcal{O}_{X_n} -modules à connexion intégrable sur X_n , ces deux foncteurs étant compatibles.*

Ici compatible, signifie que $\mathcal{F}_n(V/\varpi^{n+1}) = \mathcal{F}(V)/\varpi^{n+1}$. On ne va faire la construction que sur \mathcal{O}_X , la construction sur \mathcal{O}_{X_n} s'obtenant par des méthodes similaires.

Notons $\mathcal{H}_1(\mathcal{A}) = (R^1 f_* \Omega_{\mathcal{A}/X}^\bullet)^\vee$. Introduisons $\mathcal{T} = \text{Isom}(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{V}, \mathcal{H}_1(\mathcal{A}))$, les isomorphismes devant respecter la structure de B -module et la forme alternée à une constante près. C'est un torseur sur X sous l'action (à droite) de G , en effet les deux faisceaux en question sont localement isomorphes, comme expliqué dans le lemme 2.1.

Soit $V \in \text{Rep}(G)$, on note $\mathcal{F}(V)$ le faisceau des sections du fibré $\mathcal{T} \times^G V$. C'est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérent. De même un morphisme entre représentations se transforme en morphisme entre faisceaux.

Ce fibré est muni d'une connexion qui provient de la connexion de Gauss-Manin sur $\mathcal{H}_1(\mathcal{A})$.

Notons $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^s) = R^i f_{s*} \Omega_{\mathcal{A}^s/X}^\bullet$, on a alors $\mathcal{F}(\wedge^t \mathcal{V}_0^s) = \mathcal{H}^t(\mathcal{A}^s)$. De même on notera $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}_n^s) = R^i f_{s*} \Omega_{\mathcal{A}_n^s/X_n}^\bullet$.

4.2. Action de E_s . —

4.2.1. Traduction géométrique. — Comme E_s est une sous-algèbre de $\text{End}(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$, par fonctorialité de \mathbb{F} et \mathcal{F} , on a donc aussi des morphismes de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres $E_s \xrightarrow{a_{\text{ét}}} \text{End}(R^\bullet f_{s*} \mathbb{Z}_p)$ et $E_s \xrightarrow{a_{\text{cris}}} \text{End}(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s))$. On va donner une interprétation géométrique de ces deux morphismes.

Soit $\mathcal{G} \subset E_s$ la partie formée des éléments suivants : les matrices de déterminant non nul, dans le cas unitaire les éléments non nuls de \mathcal{O}_B , dans le cas Siegel les opérations $\theta_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq s$ définies au paragraphe 3.2. L'ensemble \mathcal{G} , qu'on appellera ensemble des éléments géométriques de E_s , engendre E_s comme $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre.

Soit $u \in \mathcal{G}$ qui provient d'une matrice ou, dans le cas unitaire, d'un élément de \mathcal{O}_B . Alors u provient d'un élément de $\text{End}(\mathcal{V}_0^s)$, qui agit naturellement sur \mathcal{A}^s/X , donc sur $R^\bullet f_{s*} \mathbb{Z}_p$ et $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$ par $a_{\text{ét}}(u)$ et $a_{\text{cris}}(u)$ respectivement.

Soit \mathcal{P} le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, pour $1 \leq i < j \leq s$ on note $\mathcal{P}_{i,j}$ le faisceau sur \mathcal{A}^s obtenu en tirant \mathcal{P} par le morphisme de projection sur les i -ièmes et j -ièmes facteurs $\mathcal{A}^s \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Alors l'opération consistant à faire le cup-produit par la première classe de Chern de $\mathcal{P}_{i,j}$ correspond à $a_{\text{ét}}(\psi_{i,j})$ et $a_{\text{cris}}(\psi_{i,j})$, l'opération duale correspond à $a_{\text{ét}}(\varphi_{i,j})$ et $a_{\text{cris}}(\varphi_{i,j})$, comme expliqué dans [12].

Par fonctorialité des constructions précédentes, on a, pour une représentation V de la forme $V = q(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$, q étant un projecteur de $E_s : \mathbb{F}(V) = a_{\text{ét}}(q) R^\bullet f_{s,K*} \mathbb{Z}_p$, et $\mathcal{F}(V) = a_{\text{cris}}(q) \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$.

On notera encore a_{cris} et $a_{\text{ét}}$ les morphismes naturels de E_s vers $\text{End}(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}_n^s))$ et $\text{End}(R^\bullet f_{s*} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$ respectivement.

4.2.2. Conséquence sur les faisceaux à connexion. —

Lemme 4.2. — *Pour tout $V \in \text{Rep}^a(G)$ la connexion sur $\mathcal{F}(V)$ et sur $\mathcal{F}_n(V)$ est quasi-nilpotente.*

Démonstration. — Notons que les opérations élémentaires commutent à la connexion sur $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$ induite par la connexion de Gauss-Manin, de sorte que, en reprenant les notations précédentes, $\mathcal{F}(V)$ est stable par la connexion de $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$. Comme la connexion de Gauss-Manin sur $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$ est quasi-nilpotente, c'est aussi le cas pour la connexion sur $\mathcal{F}(V)$. \square

Comme X est lisse sur S , chaque X_n est un relèvement de X_0 qui est lisse sur S_n . Les faisceaux $\mathcal{F}_n(V)$, qui sont des \mathcal{O}_{X_n} -modules cohérents munis d'une connexion intégrable et quasi-nilpotente, définissent donc des cristaux sur $(X_0/S_n)_{\text{cris}}$, ainsi que dans $(X_m/S_n)_{\text{cris}}$ pour tout $m \leq n$. On peut donc voir \mathcal{F}_n comme un foncteur de $\text{Rep}^a(G)$ vers la catégorie des cristaux sur $(X_0/S_n)_{\text{cris}}$. Avec cette interprétation les $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}_n^s)$ s'identifient aux $R^i f_{s,\text{cris}*} \mathcal{O}_{\mathcal{A}_0^s/S_n}$.

Lemme 4.3. — *Pour tout $V \in \text{Rep}^a(G)$, les faisceaux $\mathcal{F}(V)$ et $\mathcal{F}_n(V)$ sont localement libres sur X et X_n respectivement.*

En effet c'est le cas pour les $\mathcal{H}^n(\mathcal{A}^s)$.

4.3. Prolongement des cristaux. — L'objectif est de construire un foncteur $\overline{\mathcal{F}}$ de $\text{Rep}^a(G)$ vers l'ensemble des fibrés localement libres munis d'une connexion à pôles logarithmiques le long de $\overline{X} \setminus X$ intégrable et quasi-nilpotente, qui prolonge \mathcal{F} .

4.3.1. *Unicité du prolongement.* —

Lemme 4.4. — *Soit \mathcal{E} un fibré localement libre sur X muni d'une connexion intégrable et quasi-nilpotente.*

S'il existe un prolongement de \mathcal{E} en un fibré localement libre sur \overline{X} muni d'une connexion à pôles logarithmiques le long de $\overline{X} \setminus X$ intégrable et quasi-nilpotente, alors il est unique, et de plus tout prolongement de \mathcal{E} en un fibré cohérent sur \overline{X} muni d'une connexion ayant les mêmes propriétés est aussi localement libre (et donc égal au prolongement précédent).

De plus, si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux tels faisceaux admettant des prolongements, et $u : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ est un morphisme horizontal, u admet un unique prolongement horizontal entre les prolongements des faisceaux.

Démonstration. — Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un tel prolongement cohérent. Regardons tout d'abord \mathcal{E}_K . D'après [4], il existe au plus un prolongement de \mathcal{E}_K en un fibré muni d'une connexion à pôles logarithmiques, qui est l'extension canonique de Deligne, ce prolongement est donc nécessairement $\overline{\mathcal{E}}_K$.

Le faisceau $\overline{\mathcal{E}}$ est alors uniquement déterminé. En effet, notons X' la réunion de X et \overline{X}_K dans \overline{X} , j l'inclusion de X' dans \overline{X} , et \mathcal{E}' le faisceau qui coïncide avec \mathcal{E} sur X et avec $\overline{\mathcal{E}}_K$ sur \overline{X}_K . Alors pour des raisons de codimension, et le faisceau $\overline{\mathcal{E}}$ étant cohérent, $\overline{\mathcal{E}} = j_*(\mathcal{E}')$. En particulier, tous les prolongements cohérents munis de connexion sont égaux en tant que faisceaux, donc si l'un est localement libre, tous le sont.

Enfin, $\overline{\mathcal{E}}$ étant localement libre, sa connexion est entièrement déterminée par sa restriction à $\overline{\mathcal{E}}_K$.

Pour l'existence du prolongement des morphismes, cela provient de la fonctorialité de l'extension canonique de Deligne. \square

Corollaire 4.5. — *Le fibré $\mathcal{H}^i(\overline{\mathcal{A}}^s)$, muni de la connexion de Gauss-Manin, ne dépend pas du choix de la compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$. De plus, étant données deux compactifications $\overline{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} et $\overline{\mathcal{A}}^s$ de \mathcal{A}^s , pour tout i , $\mathcal{H}^i(\overline{\mathcal{A}}^s)$ et $\wedge^i \mathcal{H}^1(\overline{\mathcal{A}})^s$ sont égaux comme sous-faisceaux de $(X \rightarrow \overline{X})_* \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^s)$ munis d'une connexion à pôles logarithmiques.*

Démonstration. — En effet, il suffit pour pouvoir appliquer le lemme précédent de vérifier que les $\wedge^i \mathcal{H}^1(\overline{\mathcal{A}})^s$ sont localement libres, il suffit donc de voir que $\mathcal{H}^1(\overline{\mathcal{A}})$ est localement libre. Cela se déduit des résultats de [8], qu'on peut appliquer car on a supposé que $\dim_X \mathcal{A} < p$. Le cas général se déduit de l'identité précédente. \square

On notera $\overline{\mathcal{H}}^i(\mathcal{A}^s)$ ce faisceau à connexion.

Lemme 4.6. — *$\mathcal{H}^i(\overline{\mathcal{A}}^s_n)$ est localement libre sur \overline{X}_n , et ne dépend pas de la compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$.*

Démonstration. — En effet, le faisceau $\overline{\mathcal{H}}^i(\mathcal{A}_n^s)$ est obtenu à partir de $\overline{\mathcal{H}}^i(\mathcal{A}^s)$ par changement de base. \square

On notera dans la suite $\overline{\mathcal{H}}^i(\mathcal{A}_n^s)$ pour ce faisceau.

4.3.2. Prolongement de l'action de E_s . — Il s'agit maintenant de prolonger le morphisme $E_s \xrightarrow{a_{\text{cris}}} \text{End}(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s))$ en un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres $E_s \xrightarrow{a_{\text{log-cris}}} \text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s))$.

La restriction $\text{res} : \text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s)) \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s))$ est injective. Pour construire $a_{\text{log-cris}}$, il suffit donc de vérifier que l'image de a_{cris} est contenue dans l'image de res . Comme a_{cris} est un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres, il suffit de vérifier que l'image par a_{cris} d'une partie génératrice de E_s est contenue dans l'image de res . Il s'agit donc de vérifier que l'action des éléments de \mathcal{G} sur les $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{A}^s)$ se prolonge en une action sur les $\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s)$.

Soit $u \in \mathcal{G}$. Supposons d'abord que u soit une matrice, ou (dans le cas unitaire) un élément de \mathcal{O}_B . Alors u agit sur \mathcal{A}^s par une isogénie. D'après la propriété 2, il existe donc deux compactifications $\overline{\mathcal{A}}_1^s$ et $\overline{\mathcal{A}}_2^s$, et un morphisme $u' : \overline{\mathcal{A}}_1^s \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_2^s$ prolongeant l'action de u . Alors u' fournit l'élément de $\text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s))$ voulu. Supposons maintenant qu'on est dans le cas Siegel et que u est de la forme $\theta_{i,j}$. Il suffit de montrer que les morphismes $a_{\text{cris}}(\varphi_{i,j})$ et $a_{\text{cris}}(\psi_{i,j})$ se prolongent en éléments de $\text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s))$. Il existe, d'après la propriété 3, une compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$ telle que le faisceau $(\mathcal{O}(2)^{\otimes a} \otimes \mathcal{P}_{i,j})^{\otimes b}$ se prolonge en un faisceau \mathcal{L} sur $\overline{\mathcal{A}}^s$, avec a et b premiers à p . Il existe aussi une compactification $\overline{\mathcal{A}}^{s'}$ telle que le faisceau $\mathcal{O}(2)^{\otimes c}$ se prolonge en un faisceau \mathcal{L}' sur $\overline{\mathcal{A}}^{s'}$, avec c premier à p . Alors l'action de $\frac{1}{b}(c_{\mathcal{L}})$ est dans $\text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s))$, l'action de $-\frac{a}{bc}(c_1(\mathcal{L}'))$ aussi, et l'action de $\frac{1}{b}(c_1(\mathcal{L})) - \frac{a}{bc}(c_1(\mathcal{L}'))$ prolonge celle de $a_{\text{cris}}(\varphi_{i,j})$. Pour $a_{\text{cris}}(\psi_{i,j})$, on fait le même raisonnement, en utilisant la dualité de Poincaré.

On note encore $a_{\text{log-cris}}$ pour le morphisme $E_s \rightarrow \text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}_n^s))$ obtenu par réduction.

4.3.3. Définition de $\overline{\mathcal{F}}$. — Si $V \in \text{Rep}^a(G)$, on veut définir $\overline{\mathcal{F}}(V)$ comme le faisceau localement libre muni d'une connexion à pôles logarithmiques intégrable et quasi-nilpotente sur \overline{X} prolongeant $\mathcal{F}(V)$.

Au vu du paragraphe 4.3.1, il suffit de montrer l'existence de ce prolongement, son unicité et le fait que la construction est fonctorielle étant alors automatiques. Soit $V = q(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$, où q est un projecteur de E_s . Il suffit de poser $\overline{\mathcal{F}}(V) = a_{\text{log-cris}}(q)(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s))$.

On note $\overline{\mathcal{F}}_n(V)$ la réduction modulo ϖ^{n+1} de $\overline{\mathcal{F}}(V)$. Munissons S_n de la log-structure triviale, et \overline{X}_n de la log-structure provenant du diviseur à croisements normaux $(\overline{X} \setminus X)_n$. Alors $\overline{\mathcal{F}}_n$ définit un foncteur de $\text{Rep}^a(G)$ vers la catégorie des cristaux sur $(\overline{X}_0/S_n)_{\text{cris}}^{\text{log}}$, en effet cette catégorie est équivalente à celle des $\mathcal{O}_{\overline{X}_n}$ -modules munis d'une connexion à pôles logarithmiques intégrable et quasi-nilpotente, \overline{X}_n étant un relèvement de \overline{X}_0 log-lisse sur S_n .

5. Structures sur les groupes de cohomologie

5.1. Cas étale. — Notons \overline{K} la clôture algébrique de K , et $\Gamma = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. Le groupe $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))$ est naturellement muni d'une action de Γ car le faisceau $\mathbb{F}_n(V)$ est défini sur X_K .

On aura besoin du lemme suivant pour comparer l'action de Galois sur $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))$ et sur la cohomologie de $\mathcal{A}_{\overline{K}}^s$:

Lemme 5.1. — *Soit $f : Z \rightarrow T$ un morphisme de schémas, F un faisceau constant sur Z ($\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Z}_p). Soit q agissant sur $\mathcal{H}^\bullet(Z) = R^\bullet f_* F$ et sur $H^\bullet(Z, F)$ de facon compatible avec la suite spectrale de Leray. On suppose que q agit comme un projecteur, dont l'image est entièrement contenue dans $\mathcal{H}^s(Z)$. Notons $V = q\mathcal{H}^\bullet(Z)$, alors pour tout m on a $H^m(T, V) = qH^{m+s}(Z, F)$.*

Démonstration. — En effet considérons la suite spectrale de Leray pour calculer la cohomologie de F sur Z . On lui applique q , on obtient toujours une suite spectrale convergente car q est un projecteur. D'autre part $qH^m(T, \mathcal{H}^i(Z)) = H^m(T, q\mathcal{H}^i(Z))$, toujours parce que q est un projecteur. La suite spectrale obtenue a une seule colonne non nulle, dont les termes sont les $H^m(T, q\mathcal{H}^s(Z))$, et aboutit à $qH^{m+s}(Z, F)$, d'où le résultat. \square

Notons encore $a_{\text{ét}}$ les morphismes $E_s \rightarrow \text{End}(H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}_p))$ et $E_s \rightarrow \text{End}(H_{\text{ét}}^\bullet(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$. Supposons que $V = q(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$, q étant un projecteur homogène de degré t , alors on a $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V)) = a_{\text{ét}}(q)H_{\text{ét}}^{m+t}(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Comme E_s agit par des correspondances algébriques définies sur K sur la cohomologie de \mathcal{A}^s , l'action de Γ commute à l'action de E_s , et la structure galoisienne obtenue sur $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))$ est compatible à celle sur la cohomologie de $\mathcal{A}_{\overline{K}}^s$.

5.2. Cas cristallin. —

5.2.1. Les modules de Fontaine-Laffaille. — On note $\underline{MF}_{\text{tor}}^f$ la catégorie suivante. Les objets sont les \mathcal{O} -modules M de longueur finie, muni d'une filtration $\text{Fil}^i M$ décroissante, telle que $\text{Fil}^0 M = M$ et $\text{Fil}^{p-1} M = 0$, et pour tout i , un $\phi_i : \text{Fil}^i M \rightarrow M$ \mathcal{O} -semi-linéaire, vérifiant $\phi_i|_{\text{Fil}^{i+1} M} = p\phi_{i+1}$, et $\sum_i \text{im } \phi_i = M$. Les morphismes respectent la filtration et commutent aux ϕ_i .

5.2.2. La catégorie $MF(\phi)$. — On introduit la catégorie $MF(\phi)$ des K -espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante et d'un Frobenius. Les objets sont les K -espaces vectoriels de dimension finie M , muni d'une filtration décroissante $\text{Fil}^i M$, et de l'action d'un Frobenius ϕ semi-linéaire par rapport au Frobenius σ de K . Les morphismes doivent commuter au Frobenius, et respecter la filtration.

5.2.3. Calculs dans un cas particulier. — On se place dans le cas suivant : on a un log-schéma Z qui est propre, et lisse sur S muni de la log-structure triviale.

Soit n un entier positif. On note $S_n = \text{Spec } \mathcal{O}_n$, muni de la log-structure triviale.

Si (Z, M) est un schéma sur $\text{Spec } \mathcal{O}$, on note (Z_n, M_n) le changement de base à S_n . Si \mathcal{E} est un cristal sur le site $((Z_m, M_m)/S_n)^{\log}_{\text{cris}}$, on notera $H_{\text{cris}}^i((Z_m, M_m)/S_n, \mathcal{E})$ pour $H^i(((Z_m, M_m)/S_n)^{\log}_{\text{cris}}, \mathcal{E})$, et $H_{\text{cris}}^i((Z_m, M_m)/S_n)$ pour $H_{\text{cris}}^i((Z_m, M_m)/S_n, \mathcal{O}_{Z_m/S_n})$.

On omettra la mention de la log-structure si cela ne cause pas de confusion. Remarquons que pour tout $m \leq n$, les $H_{\text{cris}}^i((Z_m, M_m)/S_n)$ ne dépendent pas de m , on notera $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S_n)$ leur valeur commune. Enfin on note $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S) = \varprojlim_n H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S_n)$.

On a les deux résultats suivants :

Proposition 5.2. — *Pour tout $0 \leq i \leq p-2$, $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S_n)$ est un module de Fontaine-Laffaille. Pour tout $i \geq 0$, $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S) \otimes K$ est un élément de $MF(\phi)$.*

Démonstration. — La preuve de la première partie de la proposition est identique à celle de l'article [5], qui traite le cas où Z est muni de la log-structure triviale.

Notons S'_n le log-schéma dont le schéma sous-jacent est le même que S_n , et dont la log-structure provient de $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_n, 1 \mapsto 0$. Il s'agit de la même log-structure que celle définie dans [7], paragraphe 3.4. Notons (Z', M') le log-schéma déduit de (Z, M) par le changement de base $S'_n \rightarrow S_n$. Alors $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S_n)$ et $H_{\text{cris}}^i((Z', M')/S'_n)$ sont canoniquement isomorphes pour tout i . Les $H_{\text{cris}}^i((Z', M')/S'_n)$ sont munis d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie, définis dans [7], paragraphe 3. L'opérateur de monodromie est ici nul, (Z', M') provenant par changement de base de (Z, M) qui est log-lisse sur S_n . $H_{\text{cris}}^i((Z', M')/S') \otimes K$, et donc aussi $H_{\text{cris}}^i((Z, M)/S) \otimes K$ est ainsi naturellement muni d'une structure d'élément de $MF(\phi)$. \square

5.2.4. *Action des endomorphismes sur le prolongement des cristaux.* — Notons $\overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n)$ la limite des $H_{\text{cris}}^i(\overline{\mathcal{A}}^s_n/S_n)$, pour les $\overline{\mathcal{A}}^s$ de notre famille de compactifications. Alors :

Proposition 5.3. — *Le morphisme $H_{\text{cris}}^i(\overline{\mathcal{A}}^s_n/S_n) \rightarrow \overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n)$ est un isomorphisme pour toute compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$ et pour tout n .*

Démonstration. — Il suffit pour cela de voir que tout morphisme entre compactifications qui est l'identité sur \mathcal{A}^s induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie.

Considérons la suite spectrale de Leray : $E_2^{i,j} = H^i(\overline{X}_n/S_n, R^j f_{\text{scris}*} \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}^s_n/S_n}) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{\mathcal{A}}^s_n/S_n)$

Un morphisme entre deux compactifications induit un morphisme de suites spectrales, qui est un isomorphisme sur les $E_2^{i,j}$, donc aussi sur l'aboutissement. \square

On cherche à définir un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres $E_s \rightarrow \text{End}(\overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n))$.

On a la suite spectrale suivante, qu'on appellera encore suite spectrale de Leray, qui provient de n'importe quelle compactification $\overline{\mathcal{A}}^s$ de \mathcal{A}^s :

$$E_2^{i,j} = H^i(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{H}}^j(\mathcal{A}_n^s)) \Rightarrow \overline{H}^{i+j}(\mathcal{A}^s/S_n)$$

Proposition 5.4. — *Il existe un unique morphisme $a_{\log\text{-cris}}$ de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres $E_s \rightarrow \text{End}(\overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n))$ tel que l'action de E_s sur les $\overline{\mathcal{H}}^j(\mathcal{A}_n^s)$ et sur les $\overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n)$ donnée par $a_{\log\text{-cris}}$ soit compatible à la suite spectrale de Leray.*

Démonstration. — On commence par définir l'image de l'ensemble \mathcal{G} des éléments géométriques de E_s , et on montre ensuite que l'on peut prolonger en un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres.

Pour définir l'image d'un élément de \mathcal{G} , on fait exactement comme dans le paragraphe 4.3.2. Il faut voir que le choix fait est unique. Cela provient du fait que l'action de $u \in \mathcal{G}$ sur les termes $E_2^{i,j}$ de la suite spectrale ne dépend pas des choix faits, comme expliqué en 4.3.2, et de la compatibilité de l'action du prolongement à la suite spectrale de Leray.

Il reste à voir que l'action des éléments de \mathcal{G} se prolonge en un morphisme d'algèbres $E_s \rightarrow \text{End}(\overline{H}^i(\mathcal{A}^s/S_n))$. Cela provient encore une fois de la compatibilité avec la suite spectrale de Leray, et du fait que $E_s \rightarrow \text{End}(\overline{\mathcal{H}}^\bullet(\mathcal{A}^s/S_n))$ est un morphisme d'algèbres. \square

5.2.5. *La cohomologie des cristaux.* — Posons $H_{\text{cris}}^i(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{F}}(V)) = \varprojlim_n H_{\text{cris}}^i(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V))$.

On a le résultat suivant :

Proposition 5.5. — *Pour tout $V \in \text{Rep}^a(G)$, pour tout i , $H_{\text{cris}}^i(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{F}}(V)) \otimes K$ est un élément de $MF(\phi)$.*

Pour tout $V \in \text{Rep}^a(G)$ homogène de degré t , pour tout i tel que $i+t \leq p-2$, pour tout n , $H_{\text{cris}}^i(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V))$ est un élément de $\underline{MF}_{\text{tor}}^f$.

Démonstration. — En effet, soit $V = q(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$, avec q homogène de degré t , on a alors de fa con similaire au lemme 5.1 les égalités $H_{\text{cris}}^i(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{F}}(V)) \otimes K = a_{\text{cris}}(q) \overline{H}_{\log\text{-cris}}^{i+t}(\mathcal{A}^s/S) \otimes K$ et $H_{\text{cris}}^i(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V)) = a_{\text{cris}}(q) \overline{H}_{\text{cris}}^{i+t}(\mathcal{A}_n^s/S_n)$. Il reste à voir que l'action de E_s par $a_{\log\text{-cris}}$ respecte les structures d'élément de $MF(\phi)$, et que l'action de $E(A)_s$ respecte les structures de module de Fontaine-Laffaille, ce qui se voit sur les éléments géométriques. \square

6. Théorème de comparaison

6.1. Le cas des faisceaux constants. — Notons $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)$ la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de type fini de $\Gamma = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. Nous avons un foncteur contravariant et pleinement fidèle : $V_{\text{cris}} : \underline{MF}_{\text{tor}}^f \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)$ qui est défini par $V_{\text{cris}}(M) = \text{Hom}(M, A_{\text{cris}, \infty})$. L'anneau A_{cris} est défini dans [1], 6.3, et $A_{\text{cris}, \infty} = A_{\text{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. L'anneau A_{cris} est muni d'une filtration décroissante et d'un Frobenius, et les homomorphismes que l'on considère doivent être compatibles à la filtration et à l'action du Frobenius.

Soit Z un schéma propre et lisse sur $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, et D un diviseur à croisements normaux relatifs de Z , U l'ouvert complémentaire de D . On munit Z de la log-structure M définie par le diviseur D , et $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ de la log-structure triviale.

Proposition 6.1. — *Pour $0 \leq m \leq p-2$, on a un isomorphisme canonique compatible à l'action de Galois :*

$$V_{\text{cris}}(H_{\text{cris}}^m((Z, M)/S_n)) = H_{\text{ét}}^m(U_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\vee$$

Proposition 6.2. — *Pour tout m , il existe un isomorphisme canonique qui respecte l'action de Γ , la filtration et le Frobenius :*

$$\gamma_m : B_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}} H_{\text{cris}}^m((Z, M)/S) \xrightarrow{\sim} B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^m(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$$

Démonstration. — Le résultat de la proposition 6.1 provient de travaux de Breuil ([2]) et Tsuji ([16]). Ces résultats s'appliquent dans un cadre beaucoup plus général que celui considéré ici, et décrivent une comparaison entre la cohomologie étale de $U_{\overline{K}}$ et la cohomologie de $(Z', M')/E_n$. Ici (Z', M') est obtenu comme dans le paragraphe 5.2.3 par changement de base de (Z, M) de S_n à S'_n . E_n est le log-schéma dont le schéma sous-jacent est $\text{Spec } \mathcal{O}_n\langle u \rangle$, l'enveloppe à puissances divisées de l'algèbre $\mathcal{O}_n[u]$ des polynômes en l'indéterminée u , muni de la log-structure associée à $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_n\langle u \rangle$, $1 \mapsto u$. Dans notre cas particulier, on a une relation simple entre la cohomologie de $(Z', M')/E_n$ et celle de $(Z', M')/S'_n$, donnée par $H_{\text{cris}}^m((Z', M')/E_n) = \mathcal{O}_n\langle u \rangle \otimes H_{\text{cris}}^m((Z', M')/S'_n)$, qui nous permet d'obtenir le résultat de la proposition 6.1.

Pour la version rationnelle 6.2, le résultat provient de résultats de Tsuji ([15], voir aussi [17]). Comme dans le cas de torsion, la situation se simplifie par rapport au cas général, du fait qu'ici la monodromie agissant sur $H_{\text{cris}}^m((Z, M)/S) \otimes K$ est nulle. \square

6.2. Les théorèmes. —

Théorème 6.3. — *Dans le cas unitaire, soit $V \in \text{Rep}^a(G)$, et m tel que $m + t(V) \leq p - 2$. $H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))$ est muni d'une action du groupe de Galois Γ , $H_{\text{cris}}^m(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V))$ est muni d'une structure de module de Fontaine-Laffaille, et on a un isomorphisme :*

$$V_{\text{cris}}(H_{\text{cris}}^m(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V))) = H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))^\vee$$

Notons qu'on peut déduire de ce théorème comme dans l'article [2], paragraphe 4.2, une comparaison entre les parties de torsion de $\varprojlim_n H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))$ et de $\varprojlim_n H_{\text{cris}}^m(\overline{X}_n/S_n, \overline{\mathcal{F}}_n(V))$, ainsi qu'une comparaison entre leurs parties libres.

Théorème 6.4. — *Dans le cas unitaire et Siegel, soit $V \in \text{Rep}^a(G)$, il existe un isomorphisme*

$$\gamma : B_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}} H_{\log\text{-cris}}^m(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{F}}(V)) \xrightarrow{\sim} B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}(V))$$

Le point essentiel de la preuve dans les deux cas est le résultat suivant :

Lemme 6.5. — *Soit $u \in E(A)_s$. u agit sur $\overline{H}^m(\mathcal{A}^s/S_n)$ et sur $H_{\text{ét}}^m(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ($m \leq p - 2$) de facon compatible avec l'isomorphisme V_{cris} . Soit $u \in E_s$, u agit sur $\overline{H}^m(\mathcal{A}^s/S) \otimes \mathbb{Q}$ et sur $H_{\text{ét}}^m(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Q}_p)$ de facon compatible avec l'isomorphisme γ_m du théorème 6.2.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la compatibilité des actions pour l'ensemble des éléments géométriques \mathcal{G} de E_s , puisqu'ils engendrent E_s comme $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre.

Soit u un élément de E_s provenant d'une matrice de déterminant non nul, ou d'un élément non nul de \mathcal{O}_B . Son action sur la cohomologie provient d'une isogénie de \mathcal{A}^s , qu'on notera encore u . D'après la propriété 2 u se prolonge en un morphisme entre deux compactifications $u : \overline{\mathcal{A}}^s_1 \rightarrow \overline{\mathcal{A}}^s_2$. D'où par fonctorialité de

$V_{\text{cris}}, V_{\text{cris}}(u : H_{\text{cris}}^m((\overline{\mathcal{A}}^s_2)_n/S_n) \rightarrow H_{\text{cris}}^m((\overline{\mathcal{A}}^s_1)_n/S_n) = (u^\vee : H_{\text{ét}}^m(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee \rightarrow H_{\text{ét}}^m(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee)$, ce qui est bien la compatibilité voulue. De même, on a aussi la compatibilité pour l'action sur $H_{\text{ét}}^m(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ et $H_{\text{cris}}^m((X, M)/S) \otimes K$.

Dans le cas Siegel, il faut aussi considérer les éléments de la forme $\theta_{i,j}$. Il s'agit donc de voir que l'action des $\varphi_{i,j}$ et des $\psi_{i,j}$ sur $H_{\text{ét}}^m(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ et $H_{\text{cris}}^m((X, M)/S) \otimes K$ est compatible. Cela provient du fait que l'isomorphisme de comparaison 6.2 fait correspondre les classes de Chern ([15]) et est compatible aux structures produit sur les groupes de cohomologie et à la dualité de Poincaré ([17]). \square

Démonstration des théorèmes 6.3 et 6.4. — Montrons le théorème 6.3. Soit $V \in \text{Rep}^a(G)$, on peut supposer qu'il existe un entier s , et un projecteur q dans $E(A)_s$ de degré t , tels que $V = q(\wedge^\bullet \mathcal{V}_0^s)$. Le théorème de comparaison s'applique car $m+t \leq p-2$, et nous donne un isomorphisme $V_{\text{cris}}(\overline{H}^{m+t}(\mathcal{A}^s/S_n)) = H_{\text{ét}}^{m+t}(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee$.

Appliquons q : comme l'action de $E(A)_s$ commute à V_{cris} on a donc un isomorphisme : $V_{\text{cris}}(a_{\log\text{-cris}}(q)\overline{H}^{m+t}(\mathcal{A}^s/S_n)) = (a_{\text{ét}}(q)H_{\text{ét}}^{m+t}(\mathcal{A}_{\overline{K}}^s, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee)^\vee$.

D'après le lemme 5.1, cela donne : $V_{\text{cris}}(H_{\log\text{-cris}}^m(\overline{X}, \overline{\mathcal{F}}_n(V))) = H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{F}_n(V))^\vee$.

La preuve du théorème 6.4 est identique. \square

Remarque 6.6. — On voit apparaître dans le lemme 6.5 le point qui explique pourquoi on n'a pas de résultats de comparaison prenant en compte la torsion pour le cas Siegel : la compatibilité de l'isomorphisme de comparaison à coefficients constants avec la dualité de Poincaré et les structures produits n'est actuellement montrée que dans le cas rationnel (même s'il est vraisemblable qu'elle soit vraie aussi dans le cas de torsion, en introduisant des limitations sur le degré des groupes de cohomologie considérés). Enfin on peut remarquer que si on se limite aux représentations qui peuvent être obtenues à l'aide uniquement des éléments de E_s provenant de $M_s(\mathbb{Z})$, on peut prendre en compte la torsion pour le cas Siegel.

Références

- [1] C. BREUIL – « Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech », *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), p. 587–647.
- [2] ———, « Cohomologie étale de p -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable », *Duke Math. J.* **95** (1998), p. 523–620.
- [3] C.-L. CHAI & G. FALTINGS – *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer-Verlag, 1990.
- [4] P. DELIGNE – « Équations différentielles à points singuliers réguliers », *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [5] J.-M. FONTAINE & W. MESSING – « p -adic periods and p -adic étale cohomology », *Contemporary mathematics* **67** (1987), p. 179–207.
- [6] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory*, Springer-Verlag, 1991.
- [7] O. HYODO & K. KATO – « Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles », *Astérisque* **223** (1994), p. 221–268.
- [8] L. ILLUSIE – « Réduction semi-stable et décomposition de complexes de De Rham à coefficients », *Duke Math. J.* **60** (1990), p. 139–185.

- [9] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1987.
- [10] R. KOTTWITZ – « Points on some Shimura varieties over finite fields », *Journal of the American Mathematical Society* **3** (1992), p. 373–444.
- [11] M. LARSEN – « Arithmetic compactification of some Shimura surfaces », *The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces*, CRM, 1992, p. 31–45.
- [12] A. MOKRANE & J. TILOUINE – « Cohomology of Siegel Varieties », *Astérisque* **280** (2002), p. 1–95.
- [13] P. POLO & J. TILOUINE – « Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over $\mathbb{Z}_{(p)}$ for representations with p -small weights », *Astérisque* **280** (2002), p. 97–135.
- [14] S. ROZENSZTAJN – « Compactifications de schémas abéliens dégénérant le long d’un diviseur régulier », *Documenta mathematica* (2006), p. 57–71.
- [15] T. TSUJI – « p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case », *Inventiones math.* **137** (1999), p. 233–411.
- [16] ———, « On p -adic nearby cycles of log smooth families », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), p. 529–576.
- [17] G. YAMASHITA – « p -adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semi-stable reduction I », preprint.