Faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ et conjecture de Gersten sur un corps imparfait

Alexandre Lourdeaux

On revoit explicitement la construction ainsi que certaines propriétés des complexes de faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ sur certains schémas. Plus précisément on considère les k-variétés lisses et leurs anneaux locaux. Le but est d'avoir une référence précise pour la conjecture de Gersten pour les faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ sur un corps imparfait ainsi que pour la comparaison entre les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^2(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ et $\mathrm{H}^2(*, \mathbb{G}_m)$.

On ne fait que présenter en détail des choses connues des spécialistes.

On note p la caractéristique du corps de base k et on la suppose non nulle. Pour un corps K, une *K-variété* est un K-schéma séparé de type fini sur K.

1. Les "faisceaux" étales $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$

1.1. Complexes de de Rham-Witt logarithmiques

Pro-complexe de de Rham-Witt. Dans [Ill79], Illusie construit le *pro-complexe de de Rham-Witt* pour tout topos annelé en $\mathbb{F}_p$-algèbres. Les topos qui nous intéressent seront les petits et grands sites étales de k-schémas X munis des faisceaux $O_X = \mathbb{G}_{a,X}$. On note $X_{\text{Ét}}$ le grand site étale du schéma X et $X_{\text{ét}}$ son petit site étale.

Pour synthétiser, un *V-pro-complexe de de Rham-Witt* $M_\bullet^\bullet$ sur un site C correspond à la donnée

- d'une famille d'algèbres différentielles graduées (strictement anticommutatives) $M_n^\bullet$ sur C pour $n \in \mathbb{Z}$, avec
  - $M_n^\bullet = 0$ pour tout $n \leqslant 0$,
  - M_1^0 une $\mathbb{F}_p$-algèbre,

— et $\forall n \geqslant 1$, $M_n^0 = \mathrm{W}_n(M_1^0)$ (l'anneau des n-vecteurs de Witt de M_1^0) ;

— de morphismes d'algèbres différentielles graduées $\mathrm{R} = \mathrm{R}_n^\bullet : M_{n+1}^\bullet \to M_n^\bullet$;

— d'applications additives $\mathrm{V} = \mathrm{V}_n^i : M_n^i \to M_{n+1}^i$;

ces données vérifiant certains axiomes (voir [Ill79, Déf. I.1.1 p. 543]).

Il est possible d'étendre naturellement toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur un site C en un V-prop-complexe de De Rham-Witt :

Théorème 1.1 ([Ill79, Th. I.1.3, page 544])**.** *Soit C un site. Le foncteur de la catégorie des V-pro-complexes de de Rham-Witt sur C dans la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres sur C, qui à $M_\bullet^\bullet$ associe M_1^0, admet un adjoint à gauche $A \mapsto \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$.*

De plus, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur C, on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_A^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_1\Omega^\bullet_{(C,A)},$$

l'algèbre des différentielles de A relativement au faisceau constant $\mathbb{F}_p$.

Définition 1.2. — Pour A une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur le site C, on appelle *pro-complexe de De Rham-Witt de A (sur C)* le V-pro-complexe de De Rham Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$.

— Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma. Le *pro-complexe de De Rham-Witt de $\mathcal{F}$ (sur X)* d'un faisceau de $\mathbb{F}_p$-algèbres $\mathcal{F}$ sur $X_{\text{Ét}}$ (resp. sur $X_{\text{ét}}$) est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},\mathcal{F})}$ (resp. $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},\mathcal{F})}$).
Le *grand pro-complexe de De Rham-Witt de X* est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},O_X)}$, noté $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{X_{\text{Ét}}}$. Le *(petit) pro-complexe de De Rham-Witt de X* est le pro-complexe de De Rham-Witt $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$, noté $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{X_{\text{ét}}}$.

Sur un site C, un morphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $u : A \to B$ induit un morphisme de pro-complexes de De Rham-Witt

$$\mathrm{W}_\bullet\Omega_u^\bullet : \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,B)}.$$

Et si $f : D \to C$ est un morphisme de sites [1] et si A est un faisceau sur C et B un faisceau sur D, alors $f_*\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,B)}$ et $f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}$ sont des V-pro-complexes de De Rham-Witt (sur C et D respectivement) et on a des morphismes canoniques

$$\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,f_*B)} \to f_*\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,B)},$$
$$f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,f^{-1}A)}.$$

Remarque 1.3. Soit C un site et soit c_0 un objet de C. On considère le site C' de catégorie sous-jacente C/c_0 des objets au-dessus de c_0 et dont la topologie est issue de

1. pour rappel, f est donné par un foncteur $C \to D$

C. On a un foncteur continu

$$\left\{\begin{array}{ccc} C' & \to & C \\ (c \to c_0) & \mapsto & c \end{array}\right.$$

Alors pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A sur C, en appelant A' sa restriction $A \circ u$, on a une identification $\left(\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)}\right)_{|C'} = \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C',A')}$.

En particulier, si X est un $\mathbb{F}_p$-schémas, la restriction de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},O_X)}$ au petit site étale $X_{\text{ét}}$ de X est $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$. Et si $X \to Y$ est un morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas, on a $\left(\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(Y_{\text{Ét}},O_Y)}\right)_{|X_{\text{Ét}}} = \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{Ét}},O_X)}$.

Proposition 1.4. 1. *([Ill79, §I.1.10]) Soit C un site et A une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur C définie comme limite* inductive filtrante *de $\mathbb{F}_p$-algèbres A_i. Alors $\varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{A_i}$ existe dans la catégorie des V-pro-complexes de De Rham-Witt et le morphisme canonique*

$$\varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{A_i} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_A$$

(induit par les $A_i \to \varinjlim A_i = A$) est un isomorphisme.

2. *([Ill79, §I.1.12]) Si $f : D \to C$ est un morphisme de sites, et si A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur C, alors le morphisme canonique*

$$f^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(C,A)} \to \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(D,f^{-1}A)}$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.5. Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma qui est une limite projective de $\mathbb{F}_p$-schéma X_λ pour λ décrivant un ensemble préordonné filtrant Λ. Appelons $f_\lambda : X \to X_\lambda$ les morphismes de $\mathbb{F}_p$-schémas correspondant à la limite projective. Désignons par τ le grand site étale Ét ou le petit site étale ét, et soit $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système inductif de faisceaux en $\mathbb{F}_p$-algèbres avec $\mathcal{F}_\lambda$ défini sur $X_{\lambda,\tau}$ pour chaque indice λ. On note $\mathcal{F}$ la limite des $f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda$; c'est une $\mathbb{F}_p$-algèbre sur X_τ.

Le point 2 de la proposition implique qu'on a des isomorphismes

$$f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda)}$$

de V-pro-complexes sur X_τ. On en déduit un isomorphisme

$$\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda)}.$$

Le point 1 assure alors qu'on a un isomorphisme

$$\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\lambda,\tau},\mathcal{F}_\lambda)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_\tau,\mathcal{F})}$$

car $\varinjlim f_\lambda^{-1}\mathcal{F}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ comme faisceaux sur X_τ.

Cela s'applique au cas particulier où $(A_\lambda)_\lambda$ une famille directe filtrante de $\mathbb{F}_p$-algèbres avec

$$\begin{gathered} X_\lambda = \mathrm{Spec}(A_\lambda), \\ X = \varprojlim \mathrm{Spec}(A_\lambda) = \mathrm{Spec}(\varinjlim A_\lambda), \\ \mathcal{F}_\lambda = O_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \text{ et } \mathcal{F} = O_X. \end{gathered}$$

▷ **Pro-complexe de De Rham-Witt logarithmique.**

Définition locale. Soit X un schéma sur $\mathbb{F}_p$. Par définition des V-pro-complexes de De Rham-Witt, $\mathrm{W}_n\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ est une algèbre différentielle graduée sur $X_{\text{ét}}$ pour tout entier n, et $\mathrm{W}_n\Omega^0_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ est le faisceau des n-vecteurs de Witt de O_X pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi,

— tout $x \in O_X$ a son *représentant multiplicatif* $\underline{x} \in W_n(O_X)$,

— tout $y \in W_n(O_X)$ a une image $\mathrm{d}y \in \mathrm{W}_n\Omega^1_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ par la différentielle d,

— et pour toute famille $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ avec $\alpha_i \in \mathrm{W}_n\Omega^{j_i}_{(X_{\text{ét}},O_X)}$, on peut regarder le produit $\alpha_1 \cdots \alpha_r \in \mathrm{W}_n\Omega^{j_1+\cdots+j_r}_{(X_{\text{ét}},O_X)}$.

On considère alors les morphismes de faisceaux en groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$, pour $j \geqslant 1$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (O_X^\times)^{\otimes j} & \to & \mathrm{W}_n\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)} \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_j & \mapsto & \mathrm{d}\underline{x_1}/\underline{x_1} \cdots \mathrm{d}\underline{x_j}/\underline{x_j} \end{array} \right. ,$$

et on note $\nu_n^j(X)$ le faisceau image. En particulier on dispose du morphisme

$$\mathrm{d}\log : O_X^\times \to \mathrm{W}_n\Omega^1_{X_{\text{ét}}}$$

En voyant $\nu_n^j(X)$ comme le complexe $\cdots \to 0 \to \nu_n^j(X) \to 0 \to \cdots$ concentré en degré 0, on définit les complexes

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(j)_X := \nu_n^j(X)[-j] \text{ et } \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_X := \varinjlim_n \nu_n^j(X)[-j]$$

la limite étant définie via les restrictions des morphismes $V_n^j : \mathrm{W}_n\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)} \to \mathrm{W}_{n+1}\Omega^j_{(X_{\text{ét}},O_X)}$ qui font partie de la définition de V-pro-complexe de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{(X_{\text{ét}},O_X)}$.

Proposition 1.6. *Si X est un schéma régulier sur $\mathbb{F}_p$ avec p premier, alors pour tout $n \geqslant 1$ on a une suite exacte*

$$0 \to O_X^\times \stackrel{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times \stackrel{\mathrm{d}\log}{\to} \nu_n^1(X) \to 0. \tag{1}$$

de faisceaux sur $X_{ét}$, le petit *site étale de* X.

Démonstration. $\diamond$ La surjectivité de $O_X^\times \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \nu_n^1(X)$ vient de la définition de ν_n^1.

$\diamond$ L'injectivité de $O_X^\times \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times$ provient du fait que X est réduit. En effet, pour tout morphisme étale $Y \to Z$, Y est réduit si, et seulement si, Z est réduit ([BLR90, §2.3, Prop. 9]). Ainsi, tout X-schéma étale Y est réduit, donc $O_Y(Y)^\times \overset{(\cdot)^p}{\to} O_Y(Y)^\times$ est un morphisme de groupes injectif ($O_Y(Y)$ étant une $\mathbb{F}_p$-algèbre).

Si X est *lisse* sur $\mathbb{F}_p$, l'exactitude de

$$O_X^\times \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O_X^\times \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \mathrm{W}_n\Omega^1_{X_{\text{ét}}}$$

est exactement [Ill79, Prop I.3.23.2, p. 580]. Sinon, on se ramène au cas lisse grâce au théorème de Popescu [Pop86, Th. 2.5] comme suit. Déjà, on peut supposer X affine noethérien[2], $X = \mathrm{Spec}(A)$ pour une $\mathbb{F}_p$-algèbre régulière A qui est aussi un anneau noethérien. Alors $\mathbb{F}_p \to A$ est un morphisme régulier d'anneaux noethériens, donc d'après le théorème de Popescu, A est une limite inductive filtrante de $\mathbb{F}_p$-algèbres lisses de type fini A_λ. Selon l'exactitude dans le cas lisse sur $\mathbb{F}_p$, les suites de faisceaux

$$O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\mathrm{d}\log}{\to} \mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}}$$

sont exactes. En notant f_λ les morphismes $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ tels que $\mathrm{Spec}(A) \to \varprojlim_\lambda \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ est un isomorphisme, il vient que les suites de faisceaux (sur $\mathrm{Spec}(A)$)

$$f_\lambda^{-1}O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{(\cdot)^{p^n}}{\to} f_\lambda^{-1}O^\times_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\mathrm{d}\log}{\to} f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}}$$

sont exactes. Or $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}O_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\sim}{\to} O_{spec(A)}$, donc $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}O^*_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)} \overset{\sim}{\to} O^*_{spec(A)}$ et d'après la remarque 1.5, on a $\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}\mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A_\lambda)_{\text{ét}}} = \mathrm{W}_n\Omega^1_{\mathrm{Spec}(A)_{\text{ét}}}$. □

Définition globale. Pour $j \geqslant 1$, on peut également définir de la même façon le faisceau ν_n^j et les complexes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)$, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)$ sur le grand site étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ à

2. Par définition d'un $\mathbb{F}_p$-schéma régulier, les fibres du morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont localement noethériennes.

partir de $\mathrm{W}_\bullet\Omega^\bullet_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)_{\text{Ét}}}$. On a alors, pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma X,

$$\begin{aligned}\left(\nu_n^j\right)_{|X_{\text{ét}}} &= \nu_n^j(X),\\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)_{|X_{\text{ét}}} &= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(j)_X,\\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_{|X_{\text{ét}}} &= \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)_X\end{aligned}$$

les restrictions étant induites par rapport au foncteur

$$\left\{\begin{array}{ccc} X_{\text{ét}} & \to & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)_{\text{Ét}} \\ (U \to X) & \mapsto & U \end{array}\right. .$$

▷ **Faisceaux à la Kato.** On définit pour $j \geqslant 1$ les faisceaux sur le *grand* site étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$:

$$\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j) := \varinjlim_n \mu_{q^n}^{\otimes j} \text{ pour } q \text{ premier } \neq p$$

où μ_{q^n} est le groupe des racines q^n-ièmes de l'unité ; et on définit le complexe de faisceaux

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j) := \left(\bigoplus_{q \neq p \text{ premier}} \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j)\right) \oplus \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j).$$

Pour le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on définit de même $\mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j) := \varinjlim_n \mu_{q^n}^{\otimes j}$ pour tout nombre premier q et on pose

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j) := \bigoplus_{q \text{ premier}} \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(j).$$

On définit enfin $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(0)$ comme le faisceau constant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur le grand site étale de $\mathbb{F}_p$ ou de $\mathbb{Q}$.

Introduisons la notation utile suivante qu'on rencontrera par la suite. Si d et j sont des entiers positifs, pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma X (ou tout schéma X sur un corps de caractéristique p) on note $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ le faisceau sur le petit site de Zariski de X associé au préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^d(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$.

Lemme 1.7. *Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma qui est une limite projective de $\mathbb{F}_p$-schémas X_λ pour λ décrivant un ensemble préordonné filtrant Λ. On suppose que les morphismes de transitions entre les X_λ sont affines et on note $f_\lambda : X \to X_\lambda$ les morphismes canoniques. Alors pour tout $n \geqslant 0$ et $j \geqslant 1$, on a canoniquement des isomorphismes*

$$\varinjlim_\lambda f_\lambda^{-1}(\nu_n^j(X_\lambda)) \xrightarrow{\sim} \nu_n^j(X)$$

et

$$\varinjlim_{\lambda} f_\lambda^{-1}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)_{X_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)_X.$$

Démonstration. L'isomorphisme du lemme pour ν_n^j vaut en raison de la remarque 1.5.

Pour $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ on distingue les parties de torsions q-primaires pour les différents nombres premiers q. Le cas de la torsion p-primaire se ramène au cas de ν_n^j. La q-torsion pour q premier $\neq p$ résulte du fait que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\varinjlim f_\lambda^{-1}(\mu_{q^n}^{\otimes j})_{|(X_\lambda)_{\text{ét}}} \xrightarrow{\sim} (\mu_{q^n}^{\otimes j})_{|X_{\text{ét}}}$. □

1.2. Conjecture de Gersten

On fixe un entier positif d.

Notation 1.8. 1. Pour tout faisceau étale $\mathcal{F}$ sur un k-schéma U et tout fermé Z de U, $\mathrm{H}^d_Z(U,\mathcal{F})$ désigne le groupe de cohomologie de U à coefficients dans $\mathcal{F}$ et à support dans Z.

2. Pour $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur un k-schéma X, on note, pour tout $x \in X$ (point ensembliste), $\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F})$ la limite inductive $\varinjlim \mathrm{H}^d_{U\cap\overline{\{x\}}}(U,\mathcal{F}_{|U})$ portant sur les ouverts U de X (pour la topologie de Zariski) contenant x.

3. Enfin, pour un point x d'un schéma X, on note i_x le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ et $(i_x)_*$ est le morphisme qui transporte les faisceaux sur $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ vers X.

Comme expliqué dans [CHK97, §1.1], pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur le petit site étale d'un schéma X équidimensionnel[3] et noethérien, on a la suite spectrale convergente de coniveau

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \mathrm{H}^{p+q}_x(X,\mathcal{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X,\mathcal{F}), \tag{2}$$

dont on tire le complexe de Cousin de faisceaux zariskiens sur X :

$$0 \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} (i_x)_*\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_*\mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d+r)}} (i_x)_*\mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F}) \to \cdots. \tag{3}$$

On dit que l*a conjecture de Gersten vaut (en degré d) pour X et $\mathcal{F}$* lorsque le complexe (3) est une résolution (flasque) du faisceau $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})$ sur X pour la topologie de Zariski obtenu en faisceautisant le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^d(U,\mathcal{F})$. Cela signifie que la suite exacte

3. implicitement de dimension de Krull finie

de faisceaux zariskiens suivante est exacte :

$$(4)\quad 0 \to \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} (i_x)_*\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_*\mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d+r)}} (i_x)_*\mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F}) \to \cdots .$$

On note ce complexe $G^d(X,\mathcal{F})$ qu'il soit exact ou non.

Remarquons que lorsque X est de plus intègre, le faisceau $\bigoplus_{x\in X^{(0)}}(i_x)_*\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F})$ est plus simplement le faisceau $(i_\eta)_*\mathrm{H}^d(K(X),\mathcal{F})$ où η désigne le point générique de X et $K(X)$ son corps de fonctions.

Remarque 1.9. Au vu de la construction de [CHK97, §1.1], la suite spectrale (2) ci-dessus (et donc aussi les complexes (3) et (4)) est fonctorielle contravariante pour les morphismes plats ; tout morphisme plat $f : Y \to X$ induit un morphisme de complexes $f^{-1}G(X,\mathcal{F}) \to G(Y, f^{-1}\mathcal{F})$ naturel en le faisceau $\mathcal{F}$ sur X. Dans la suite on s'intéresse aux immersions ouvertes $U \hookrightarrow X$ et aux anneaux locaux $\mathrm{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$ pour $x_0 \in X$.

Lemme 1.10. *Soit X un schéma équidimensionnel noethérien et soit $x_0 \in X$ (on note $Y = \mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$ et i le morphisme $\mathrm{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X. On a un morphisme de complexes $\phi : G^d(X,\mathcal{F}) \to G^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ (rem. 1.9). Alors ϕ induit un isomorphisme*

$$G^d(X,\mathcal{F})_{x_0} \xrightarrow{\sim} G^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})(Y).$$

C'est-à-dire que la fibre de $G(X,\mathcal{F})$ en x_0 s'identifie aux sections globales de $G(Y, i^{-1}\mathcal{F})$.

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout $x \in X$ et tout ouvert U de X contenant x, le morphisme canonique $\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d_x(U,\mathcal{F}_{|U})$ est un isomorphisme, et que pour tout $x \in Y$, le morphisme canonique $\mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d_x(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ est aussi un isomorphisme.

Pour tout ouvert U de X contenant x_0, on a un morphisme de complexes $G(U,\mathcal{F}) \to G(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ dont on tire, en prenant les sections globales, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(U)}(\mathcal{F})(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(Y)}(i^{-1}\mathcal{F})(Y) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(Y, i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(Y, i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui se récrit, compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, et en constatant que $\mathcal{H}^d_{(Y)}(i^{-1}\mathcal{F})(Y) =$

$\mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ (car Y est le spectre d'un anneau local) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})(U) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in U^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales $\bigoplus_{x\in U^{(r)}} \mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{x\in Y^{(r)}} \mathrm{H}^{d+r}_x(X,\mathcal{F})$ sont les projections induites par les inclusions $\{x \in Y^{(r)}\} \subseteq \{x \in U^{(r)}\}$.

En passant à la limite pour $U \ni x_0$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\substack{x\in X^{(0)} \\ x_0\in\overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{\substack{x\in X^{(1)} \\ x_0\in\overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots . \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \bigoplus_{x\in Y^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Or $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \to \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$ est un isomorphisme (d'après le lemme 1.7 ci-dessous), et les autres flèches verticales aussi car l'inclusion d'espaces topologiques $Y \subseteq X$ est exactement l'ensemble des $x \in X$ tels que $x_0 \in \overline{\{x\}}$. □

Lemme 1.11. *Soit X un schéma et soit $x_0 \in X$ (point ensembliste). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X. Notons $Y = \mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$ et i le morphisme $\mathrm{Spec}(O_{X,x_0}) \to X$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})_{x_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$$

où le membre de gauche est la fibre de $\mathcal{H}^d_{(X)}(\mathcal{F})$ en x_0.

Démonstration. Il suffit de constater que les morphismes

$$\varphi_U : \mathrm{H}^d(U,\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F})$$

pour U ouvert de X contenant x_0 induisent un isomorphisme

$$\varinjlim_{x\in U\subseteq X} \mathrm{H}^d(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d(Y, i^{-1}\mathcal{F}).$$

Se restreignant aux ouverts U qui sont affines, le schéma $Y = \mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$ s'interprète comme la limite projective des U, les morphismes de transitions étant des morphismes affines. De plus on a une identification $i^{-1}\mathcal{F} = f_U^{-1}\mathcal{F}_{|U}$. Dans cette situation, [AGV77, Exp. VII, Th. 5.7.] nous assure que les φ_U induisent l'isomorphisme voulu. □

Intéressons-nous maintenant plus spécifiquement aux complexes de faisceaux $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$. Soit $0 \leqslant j \leqslant d$ un entier. On a

Théorème 1.12 (Globalisation de [Shi07, Th. 4.1.]). *Soit X une k-variété lisse équidimensionnelle ou le spectre d'un anneau local en un point d'une k-variété lisse équidimensionnelle. Alors la conjecture de Gersten vaut pour X et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte de faisceaux zariskiens sur X :*

(5)

$$0 \to \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} (i_x)_* \mathrm{H}^d_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_* \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \cdots.$$

Démonstration. Pour $j \geqslant 1$, on décompose $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ en somme directe de la limite inductive des $\mu_{q^n}^{\otimes j}$ pour $q \neq p$ premier, et de la limite inductive des $\nu_n^j[-j]$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x_0 \in X$, on note Y_{x_0} le k-schéma $\mathrm{Spec}(O_{X,x_0})$.

$\diamond$ Pour tout $x_0 \in X$, le fait que le complexe des sections globales de $G^d(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j})$ soit exact est justifié par [CHK97, Prop. 2.1.2. & Th. 2.2.1.] : on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^d(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(0)}} \mathrm{H}^d_x(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(Y_{x_0}, \mu_{q^n}^{\otimes j}) \to \cdots.$$

Dès lors, grâce au lemme 1.10, on conclut que $G^d(X, \mu_{q^n}^{\otimes j})$ est une suite exacte de faisceaux.

$\diamond$ On procède de même pour le cas avec les ν_n^j. Pour tout $x_0 \in X$, le théorème [Shi07, Th. 4.1.] établit que la suite de groupes suivante est exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^{d-j}(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(0)}} \mathrm{H}^{d-j}_x(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \bigoplus_{x \in Y_{x_0}^{(1)}} \mathrm{H}^{d-j+1}_x(Y_{x_0}, \nu_n^j) \to \cdots.$$

D'après le lemme 1.10, cela signifie que les fibres en tout $x_0 \in X$ du complexe $G^{d-j}(X, \nu_n^j)$ sont exactes. On en déduit que le complexe global est exact lui-aussi. $\square$

Remarque 1.13. Kahn montre que la conjecture de Gersten vaut pour les schémas réguliers de type fini sur un corps ([Kah12, Prop. A.4.]). On pourrait donc justifier le théorème 1.12 pour les anneaux locaux à partir du cas global.

Conséquence 1.14. *Soit X une k-variété lisse et irréductible ou le spectre d'un anneau local d'une k-variété lisse et irréductible. On a une suite exacte de groupes*

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) \to \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$$

avec $K(X)$ le corps de fonctions de X et une suite exacte pour tout $x_0 \in X$,

$$0 \to \mathrm{H}^d(O_{X,x_0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x_0 \in \overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

La première suite s'obtient en prenant les sections globales dans le théorème 1.12, et la deuxième suite est [Shi07, Th. 4.1.].

Dans les hypothèses de 1.14, on a un diagramme commutatif à lignes exactes, naturel en (X, x_0), avec $x_0 \in X$:

(6)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[d, "\text{projection}"] , \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^d(O_{X,x_0}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] & \mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \arrow[r] & \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x_0 \in \overline{\{x\}}}} \mathrm{H}^{d+1}_x(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))
\end{tikzcd}$$

duquel on déduit :

Corollaire 1.15. *Dans le groupe $\mathrm{H}^d(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, on a l'égalité entre sous-groupes*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^d_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))\right) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^d(O_{X,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)).$$

2. Groupe de Brauer (cohomologique)

Ici on veut établir clairement un isomorphisme naturel $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$ pour certains schémas X. La notation $\mathrm{Br}'(X)$ désigne le groupe de Brauer cohomologique de X, c'est-à-dire le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$, qui est $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$ tout entier lorsque X est irréductible et régulier noethérien ([Gro68, Cor. 1.8.]).

Soit X un $\mathbb{F}_p$-schéma régulier avec p un nombre premier. Les suites exactes (1) fournissent des suites exactes en cohomologie étale

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p^n} \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, \nu^1_n) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{p^n} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$$

pour tout entier $n \geqslant 1$, d'où des suites exactes

$$0 \to \mathrm{Pic}(X)/p^n\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)) \to {}_{p^n}\mathrm{Br}'(X) \to 0$$

où ${}_{p^n}\mathrm{Br}'(X)$ désigne les élements de $\mathrm{Br}(X)$ qui s'annulent à la puissance p^n. Ces suites fournissent des morphismes naturels

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)) \to {}_{p^n}\mathrm{Br}'(X)$$

qui sont des isomorphismes quand X est le spectre d'un anneau local, ou encore un morphisme naturel

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathrm{Br}'(X)\{p\} \tag{7}$$

qui est un isomorphisme quand X est le spectre d'un anneau local. Précisons que $\mathrm{Br}'(X)\{p\}$ est le sous-groupe de $\mathrm{Br}'(X)$ constitué des éléments d'ordre une puissance de p. On complète 7 avec les parties de torsion première à p :

(8)

$$\begin{tikzcd} \left(\bigoplus_{q\neq p \text{ premier}} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_q/\mathbb{Z}_q(1))\right) \oplus \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \left(\bigoplus_{q\neq p \text{ premier}} \mathrm{Br}'(X)\{q\}\right) \oplus \mathrm{Br}'(X)\{p\} \arrow[d, "="] \\ \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, dashed] & \mathrm{Br}'(X) \end{tikzcd}$$

pour obtenir un morphisme *naturel*, qui est un isomorphisme sur la partie de torsion première à p, et qui est un isomorphisme pour le spectre d'un anneau local.

Théorème 2.1. *On a un isomorphisme naturel en tout $\mathbb{F}_p$-schéma irréductible X qui est une variété lisse sur un corps de caractéristique p ou le spectre d'un anneau local d'une telle variété :*

$$\mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(X).$$

On montre d'abord le lemme suivant avant de prouver le théorème 2.1.

Lemme 2.2. *Soit X un schéma noethérien, irréductible et régulier. Alors le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Br}'(U)(= \mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m))$ sur X pour la topologie de Zariski est un faisceau.*

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de X et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U. On veut montrer l'exactitude de la suite

$$0 \to \mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \prod_{i\in I} \mathrm{H}^2(U_i, \mathbb{G}_m) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathrm{H}^2(U_i \cap U_j, \mathbb{G}_m). \tag{9}$$

L'ouvert U étant non vide, I est non vide et il existe $i_0 \in I$. D'après [Gro68, 1.6.], les morphismes $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(k(U), \mathbb{G}_m)$ et $\mathrm{H}^2(U_{i_0}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(k(U), \mathbb{G}_m)$ sont injectifs. Il faut donc que $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_{i_0}, \mathbb{G}_m)$ soit injectif, montrant par là qu'on a bien l'injectivité dans la suite (9). Ensuite, soit $(\alpha_i)_i \in \prod_{i\in I} \mathrm{H}^2(U_i, \mathbb{G}_m)$ tel que

$$\forall i,\, j \in I,\ (\alpha_i)_{|U_i\cap U_j} = (\alpha_j)_{|U_i\cap U_j} \in \mathrm{H}^2(U_i \cap U_j, \mathbb{G}_m).$$

On considère un sous-ensemble fini $I' \subseteq I$ pour lequel $(U_i)_{i \in I'}$ reste un recouvrement de U. Cela est possible puisque X, donc U, est noethérien. On veut montrer que les α_i, $i \in I'$, proviennent d'une même classe de $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m)$. Exprimons $I' = \{1, \cdots, r\}$ pour un entier $r \geqslant 1$. Pour $U_{1,2} := U_1 \cup U_2$, on a la suite exacte de Mayers-Vietoris ([Mil13, Th. 10.8.])) :

$$\mathrm{H}^2(U_{1,2}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_1, \mathbb{G}_m) \oplus \mathrm{H}^2(U_2, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(U_1 \cap U_2, \mathbb{G}_m).$$

Par hypothèse sur les α_i, $i \in I$, les éléments α_1 et α_2 ont même image dans $\mathrm{H}^2(U_1 \cap U_2, \mathbb{G}_m)$, donc proviennent d'une classe $\alpha_{1,2} \in \mathrm{H}^2(U_{1,2}, \mathbb{G}_m)$. En procédant de même avec $\alpha_{1,2}$ et α_3 à la place de α_1 et α_2, et ainsi de suite, on trouve qu'effectivement $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ proviennent d'un même élément de $\mathrm{H}^2(U, \mathbb{G}_m)$. □

Démonstration du théorème 2.1. Appelons φ_Y le morphisme 8 pour un schéma $Y/\mathbb{F}_p$ régulier irréductible.

Soit X comme dans le théorème. Du fait que le groupe de Brauer est un faisceau sur X pour la topologie de Zariski (lemme 2.2), les φ_U, pour U ouverts de X, induisent un morphisme de faisceaux zariskiens $\phi : \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \mathrm{Br}'$.

Pour tout $x \in X$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0_{\mathrm{Zar}}\left(X, \mathcal{H}^2_{(X)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))\right) \arrow[r, "\phi(X)"] \arrow[d] & \mathrm{Br}'(X) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^2(O_{X,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\varphi_{O_{X,x}}", "\simeq"'] \arrow[d] & \mathrm{Br}'(O_{X,x}) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^2(K(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\varphi_{K(X)}", "\simeq"'] & \mathrm{Br}'(K(X)) \end{tikzcd} \quad . \tag{10}$$

De ce diagramme, grâce au corollaire 1.15 et du fait que

$$\mathrm{Br}'(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathrm{Br}'(O_{X,x}) \subset \mathrm{Br}'(K(X))$$

(d'après [Č18, Th. 1.2]), on tire que $\phi(X)$ est un isomorphisme, qui est naturel en X. □

Références

[AGV77] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269, 270, 305 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud : *Néron models*, volume 21 de *A series of modern surveys of mathematics.* Springer-Verlag, 1990.

[CHK97] J. L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn : The Bloch-Ogus-Gabber theorem. *In* AMS, éditeur : *Algebraic K-theory*, volume 16 de *Field Institute Communication*, pages pp 31–94, 1997.

[Gro68] A. Grothendieck : Le groupe de Brauer : II. théories cohomologiques. *In Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, chapitre V, pages pp 66–87. Amsterdam : North-Holland ; Paris : Masson et Cie, 1968.

[Ill79] Luc Illusie : Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 12(4): pp 501–661, 1979.

[Kah12] B. Kahn : Classes de cycles motiviques étales. *Algebra and Number Theory*, 6(7): pp 1369–1407, 2012.

[Mil13] James S. Milne : Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/LEC.pdf.

[Pop86] D. Popescu : General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math. J.*, 104: pp 85–115, 1986.

[Shi07] A. Shiho : On logarithmic Hodge-Witt cohomology of regular schemes. *Journal of Mathematical Sciences (University of Tokyo)*, 14: pp 567–635, 2007.

[Č18] K. Česnavičius : Purity for the Brauer group. 2018. pré-publication, arXiv :1711.06456, https://arxiv.org/abs/1711.06456.