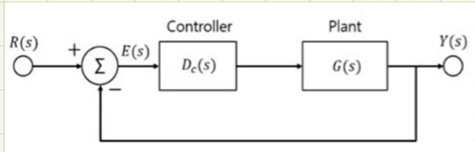
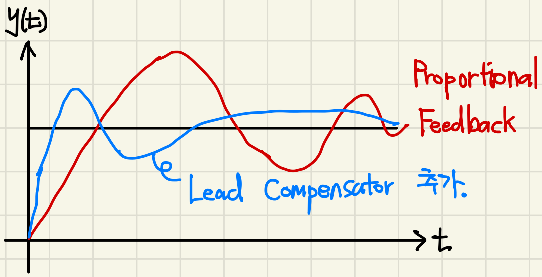
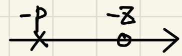
1. Lead Compensation (앞섬 보상)

■ PD 제어기 기능과 유사
- P: 상승시간 감소. (= y축에 가까워진다.)
- D: 오버슈트 감소, 응답속도 증가.





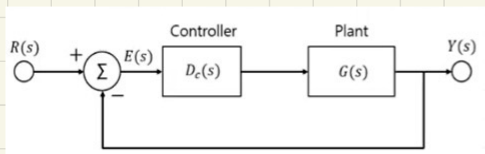
■ Lead Compensator
- $D_c(s) = K\frac{s+z}{s+p}$

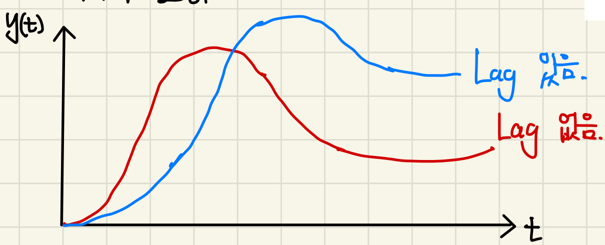


- $-p < -z$; $p > z$
- 해석: 극점이 영점보다 왼쪽에 있다.
  → $p > z$ 이므로 위상 앞섬. (Lead)

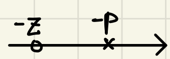
2. Lag Compensation (뒤짐 보상)

■ PI 제어기 기능과 유사.
- 정상 상태에서 제어 기능을 향상시켜줌.
- 저주파 보상.





■ Lag Compensator
- $D_c(s) = K\frac{s+z}{s+p}$



- $-p > -z$
- 해석: 극점이 영점보다 오른쪽에 있음.
  → $p < z$ 이므로 위상 지연 (lag)

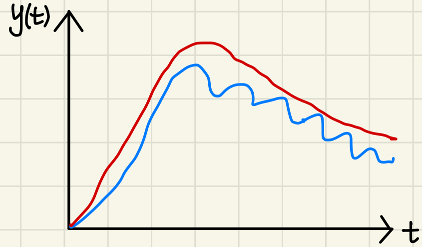
■ 결론: 속도는 극점이 판별짓는다.

극점이 오른쪽에 있으면 위상 지연, 왼쪽에 있으면 위상 앞섬.

3. Notch Compensation

■ Filter 기능과 유사

- 불필요한 주파수에서 감쇠 특성을 높여준다.



■ Notch Compensator

- $D_{notch}(s) = \dfrac{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2}$
- 제어시스템이 공진주파수(ω_0) 근방에서 진동.

  → 노치보상기 추가

  → 위상 안정화.

■ 노치 보상기 세부 원리

- 공진하는 극점 근처에 $D_{notch}(s)$의 영점 추가.
- 극점으로부터 이탈각이 변경되면서, 근궤적이 LHP(좌반평면) 상에 놓임.
- 공진 주파수 근처에서 시스템이 안정화된다.

64 ~ 66강

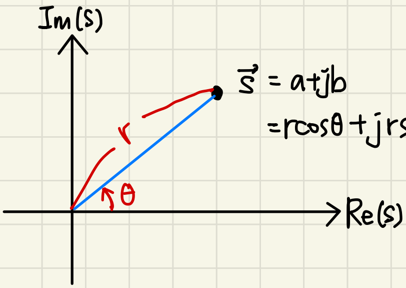
1. 주파수 응답 (Frequency Response)

■ 주파수 응답

- 시스템 특성이 주파수에 따라 변화가 일어난다.
- 자동제어 시스템 : 전달함수 $G(s)$ 가 중요!
- 방법 : $s = j\omega$ 대입. → 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 의 "Magnitude", "Phase" 변화 관찰.
- $\underbrace{G(j\omega)}_{\substack{a+jb \\ =r\angle\theta}} = \underbrace{|G(j\omega)|}_{크기} \underbrace{\angle G(j\omega)}_{위상}$

■ $\omega = \begin{cases} |G(j\omega)| : \text{주파수 전달함수 크기.} \to \text{Magnitude} \begin{cases} |G(j\omega)| : \text{무차원. 단위 X.} \\ 20\log_{10}|G(j\omega)| : [dB] = \text{데시벨.} \end{cases} \\ \angle G(j\omega) : \text{주파수 전달함수 위상.} \to \text{Phase} : \angle G(j\omega) : [^\circ] = \text{degree} \end{cases}$

2. 복소수의 극형식



$\vec{s} = a + jb$
$= r\cos\theta + jr\sin\theta$
→
$\begin{cases} |\vec{s}| = \sqrt{\underbrace{(r\cos\theta)^2}_{\{Re(s)\}^2} + \underbrace{(r\sin\theta)^2}_{\{Im(s)\}^2}} = r \\ \angle\vec{s} = \tan^{-1}\dfrac{Im(s)}{Re(s)} = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$

■ 극형식의 표현 및 연산

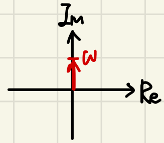
- $\vec{s} = r\angle\theta = re^{j\theta}$
- $\dfrac{r_1\angle\theta_1 \times r_2\angle\theta_2}{r_3\angle\theta_3 \times r_4\angle\theta_4} = \dfrac{r_1e^{j\theta_1} \times r_2e^{j\theta_2}}{r_3e^{j\theta_3} \times r_4e^{j\theta_4}} = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} e^{j(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)} = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_3 \cdot r_4} \angle(\theta_1+\theta_2) - (\theta_3-\theta_4)$

3. 복소수 극형식 예제

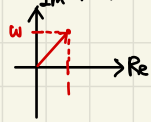
Q. $G(s) = \dfrac{6}{s(s+1)(s+3)}$

sol) $s = j\omega$ 대입.

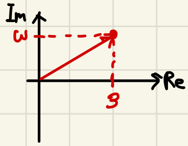
① $j\omega = \omega\angle 90^\circ$



② $j\omega+1 = \sqrt{\omega^2+1}\angle\tan^{-1}\omega$



③ $j\omega+3 = \sqrt{\omega^2+9}\angle\tan^{-1}\frac{\omega}{3}$



$$G(j\omega) = \frac{6}{(j\omega)(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$= \frac{6\angle 0^\circ}{(\omega\angle 90^\circ)(\sqrt{\omega^2+1}\angle\tan^{-1}\omega)(\sqrt{\omega^2+9}\angle\tan^{-1}\frac{\omega}{3})}$$

$$= \frac{6}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+9}}\angle 0^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{3}$$

- Magnitude : $\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{6}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+9}} \\ 20\log_{10}|G(j\omega)| = \sim\sim \text{[dB]} \end{cases}$

- Phase : $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{3}$ [°]

67 ~ 72 강

1. Bode Plot & Bode Form

Bode Plot

- 주파수(ω) 에 따른 주파수 전달함수 $G(j\omega)$의 크기와 위상을 나타낸 선도.

Bode Form

- $G(s) = \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\cdots} = \dfrac{z_1\left(1+\frac{s}{z_1}\right)\times z_2\left(1+\frac{s}{z_2}\right)\times z_3\left(1+\frac{s}{z_3}\right)\cdots}{p_1\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\times p_2\left(1+\frac{s}{p_2}\right)\times p_3\left(1+\frac{s}{p_3}\right)\cdots}$

$$= \frac{Z_c}{P_c} \cdot \frac{\left(1+\frac{s}{z_1}\right)\left(1+\frac{s}{z_2}\right)\left(1+\frac{s}{z_3}\right)\cdots}{\left(1+\frac{s}{p_1}\right)\left(1+\frac{s}{p_2}\right)\left(1+\frac{s}{p_3}\right)\cdots}$$

$KG(j\omega) = \underbrace{K_0}_{K\cdot\frac{Z_c}{P_c}} \cdot \dfrac{\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{z_2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{z_3}\right)\cdots}{\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{p_2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{p_3}\right)\cdots}$

$$= K_0 \cdot \frac{(1+j\omega\tau_1')(1+j\omega\tau_2')(1+j\omega\tau_3')\cdots}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)\cdots}$$

(Bode Form : 1차식의 실수부를 1로 맞춘다)

Breaking Point

- (실수부) = 1 일 때, (허수부) = 1 이 되게끔 하는 주파수.
- $\omega\tau = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \frac{1}{\tau_3}, \cdots, \frac{1}{\tau_1'}, \frac{1}{\tau_2'}, \frac{1}{\tau_3'}, \cdots$

2. 1차 시스템의 Bode Plot : 분모가 1차식.

Transfer function

- $G(s) = \dfrac{1}{1+s\tau}$
- $G(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega\tau} = \dfrac{1\angle 0^\circ}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\,\angle \tan^{-1}(\omega\tau)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega\tau)$

ω 범위 나누기

① $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ (Breaking Point 지나기 전 : $\omega\tau \ll 1$) :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+\underbrace{j\omega\tau}_{\to 0}} \approx 1 \rightarrow 20\log_{10}|G(j\omega)| = 0\ (dB)$$

$$\angle G(j\omega) = 0^\circ$$

② $\omega = \frac{1}{\tau}$ ($\omega\tau = 1$) :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} = \frac{1}{1+j} = \frac{1\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \rightarrow 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \simeq -3\,[dB]$$

$$\angle G(j\omega) = -45^\circ$$

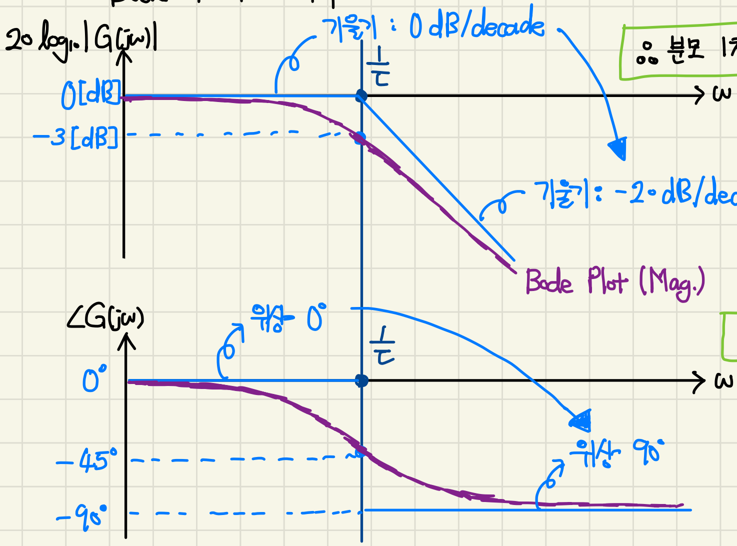
③ $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ (Breaking Point 지난 후 : $\omega\tau \gg 1$) :

$$G(j\omega) = \frac{1}{\underbrace{1}_{\to 0}+j\omega\tau} = \frac{1}{\omega\tau\angle 90^\circ} = \frac{1}{\omega\tau}\angle -90^\circ$$

$$20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\omega\tau} = -20\log_{10}(\omega\tau) = -20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\tau$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ$$

Bode Plot 그리기



∴ 분모 1차식 : Breaking Point 지날 때마다 Mag. 점근선 기울기 : 이전에 비해 20 dB/decade 감소!

— : 점근선

— : 진짜 Bode Plot

∴ 분모 1차식 : Breaking Point 지날 때마다 Phase 점근선 : 이전에 비해 90° 감소!

3. 1차 시스템의 Bode Plot : 분자가 1차식.

Transfer function

- $G(s) = 1 + \tau s$
- $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau = \sqrt{1+\omega^2\tau^2}\angle \tan^{-1}(\omega\tau)$
- Breaking Point : $\omega = \frac{1}{\tau}$

ω 범위 나누기

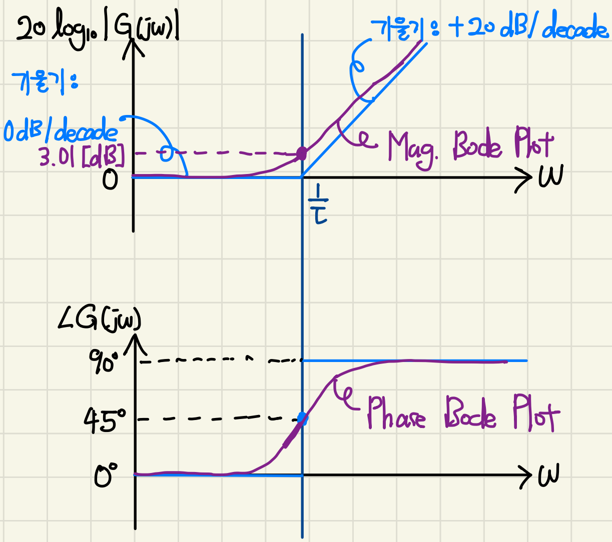
① $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $(\omega\tau \ll 1)$: $G(j\omega) = 1 + \overset{\text{무시}}{\cancel{j\omega\tau}} = 1$ $\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = 0\ [dB] \\ \angle G(j\omega) = 0^\circ \end{cases}$

② $\omega = \frac{1}{\tau}$ $(\omega\tau = 1)$: $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau = \sqrt{2}\angle 45^\circ$ $\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = 3.01\ [dB] \\ \angle G(j\omega) = 45^\circ \end{cases}$

③ $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $(\omega\tau \gg 1)$: $G(j\omega) = \overset{\text{무시}}{\cancel{1}} + j\omega\tau = j\omega\tau = \omega\tau\angle 90^\circ$ $\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = \underline{20\log_{10}\omega + 20\log_{10}\tau} \\ \angle G(j\omega) = 90^\circ \end{cases}$

ω-dB 선도에서 기울기 +20dB/dec 인 직선 접근선.

Bode Plot 그리기



- 분자 1차식 : Breaking Point 지날 때마다
  - Mag. 접근선 : 기울기 +20 dB/dec
  - Phase 접근선 : +90°

4. 2차 시스템의 Bode Plot : 분모 2차식

■ Transfer Function

- $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}$

- $G(j\omega) = \dfrac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + 1}$

☆☆ ∴ Breaking Point : $\omega = \omega_n$

■ ω 구간 나누기

① $\omega \ll \omega_n$ $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1\right)$: $G(j\omega) = \dfrac{1}{\cancel{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} + j2\zeta\cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} + 1} = 1\angle 0°$ $\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = 0\,dB \\ \angle G(j\omega) = 0° \end{cases}$

② $\omega = \omega_n$ $\left(\frac{\omega}{\omega_n} = 1\right)$: $G(j\omega) = \dfrac{1}{-1 + j2\zeta + 1} = \dfrac{1}{2\zeta}\angle -90°$ $\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = -20\log(2\zeta)\ [dB] \\ \angle G(j\omega) = -90° \end{cases}$

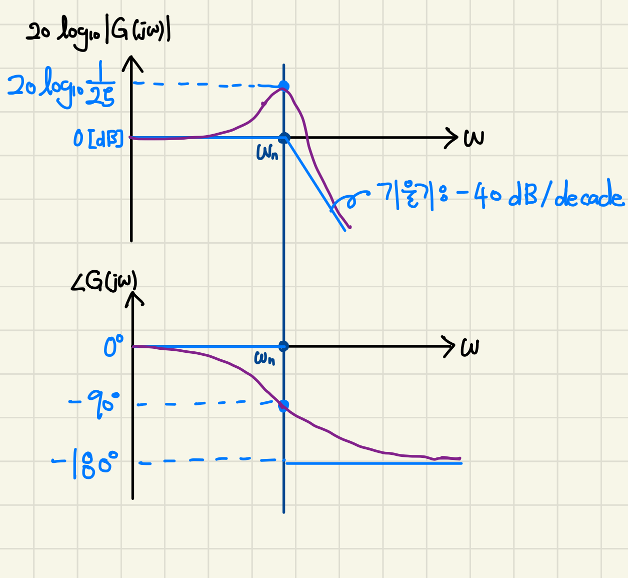
③ $\omega \gg \omega_n$ $\left(\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1\right)$: $G(j\omega) = \dfrac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \cancel{j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} + \cancel{1}} = -\dfrac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \dfrac{1\angle 0°}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\angle 180°} = \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\angle -180°$

∵ $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \gg \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

$\begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = \underline{40\log_{10}\omega_n - 40\log_{10}\omega} \\ \angle G(j\omega) = -180° \end{cases}$

ω-dB 선도에서 기울기 : -40 dB/decade 인 직선 접근선

■ Bode Plot



5. Bode Plot 그리기

1. 정리

① 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 를 구한 후, Bode Form 형태로 만든다.

② Breaking Point 들을 구한 후, 그것들을 크기 순(오름차순)으로 배열한다.

③ 주파수가 Breaking Point 의 최솟값보다 매우 작을 때, 주파수 전달함수를 구한다. (= 근사화)

④ ③ 에서 구한 주파수 전달함수의 크기와 위상을 식으로 구한다.

⑤ ① 에서 구한 Bode form 에서 각각 Breaking Point 에 대응하는 인수 (1, 2차식) 가 분모인지 분자인지 찾는다.

⑥ 분모 1차식 : (Mag. 점근선 기울기) − 20 dB/decade

(Phase 점근선) − 90°

⑦ 분자 1차식 : (Mag. 점근선 기울기) + 20 dB/decade

(Phase 점근선) + 90°

⑧ 분모 2차식 : (Mag. 점근선 기울기) − 40 dB/decade

(Phase 점근선) − 180°

⑨ Breaking Point : 점근선이 꺾이는 지점.

2. 예제 1

• Q. $G(j\omega) = \dfrac{30(10+j\omega)}{j\omega(3+j\omega)(5+j\omega)}$

• sol) ① $G(j\omega) = \dfrac{30(10+j\omega)}{j\omega(3+j\omega)(5+j\omega)} = \dfrac{300\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}{j\omega \times 3\left(1+\frac{j\omega}{3}\right)\times 5\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)} = \underline{\dfrac{20\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)}{j\omega\left(1+j\frac{\omega}{3}\right)\left(1+j\frac{\omega}{5}\right)}}$

Breaking Point :
$\omega = 3,\ 5,\ 10$

② ω 범위 나누기

• $\omega \ll 3$: $G(j\omega) = \dfrac{20\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)}{j\omega\left(1+j\frac{\omega}{3}\right)\left(1+j\frac{\omega}{5}\right)} \fallingdotseq \dfrac{20}{j\omega}$

$= \dfrac{20\angle 0^\circ}{\omega\angle 90^\circ} = \dfrac{20}{\omega}\angle -90^\circ$

$\rightarrow \begin{cases} 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\dfrac{20}{\omega} = \underline{20\log_{10}20 - 20\log_{10}\omega} \\ \angle G(j\omega) = -90^\circ \end{cases}$ 기 : -20 dB/decade

③ Bode Plot 그리기