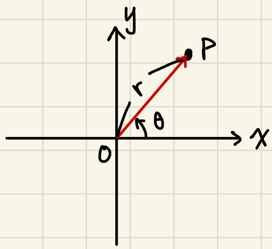
1. 벡터궤적

1. 벡터궤적 - 기본

■ 벡터궤적 : 주파수 전달함수를 복소평면에 벡터로 나타낸 것.

• Nyquist 선도 : 주파수 전달함수를 복소평면에 벡터궤적으로 나타낸 선도.

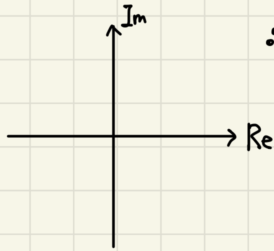


$\therefore x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\Downarrow$

$P : r\angle\theta$



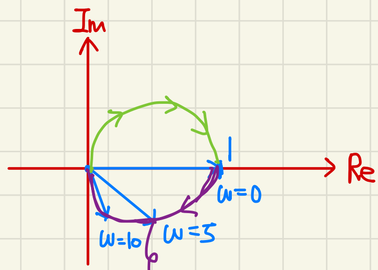
$\therefore G(j\omega) = a + jb$

$= Re\{G(j\omega)\} + Im\{G(j\omega)\}$

■ 주파수 전달함수 $G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$

ex) $G(s) = \dfrac{5}{s+5} \rightarrow G(j\omega) = \dfrac{5}{j\omega+5} = \dfrac{5\angle 0^\circ}{\sqrt{\omega^2+25}\,\angle \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)} = \dfrac{5}{\sqrt{\omega^2+25}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$

	크기	위상
$\omega = 0$	1	0°
$\omega = 5$	0.707	$-\tan^{-1}1^\circ = -45^\circ$
$\omega = 10$	0.4472	-63.43°
$\omega = \infty$	0	$-\tan^{-1}\infty = -90^\circ$



벡터 궤적 : $\frac{1}{2}$원 형태 ⊕ 실수축 대칭.

※주의 : Nyquist 선도는 실수축 대칭이나, 경로는 오직 1개 방향이다.

2. 벡터궤적 - 2차 시스템

■ 2차 시스템

- $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$

- $G(j\omega) = \dfrac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1} = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)}$

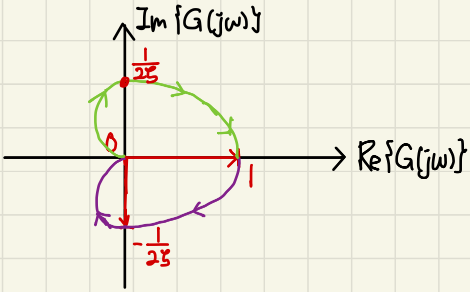
$$= \frac{1\angle 0^\circ}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\ \angle \tan^{-1}\left\{\dfrac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\left\{\dfrac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\}$$

[ω 분할에 따른 크기 & 위상]

	크기	위상
$\omega = 0$	1	0°
$\omega = \omega_n$	$\frac{1}{2\zeta}$	-90°
$\omega = \infty$	0	-180°

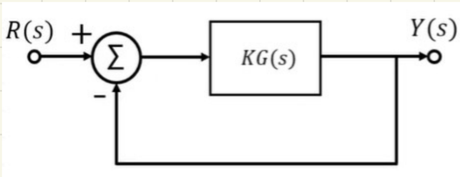
■ 벡터궤적 그리기



- 실수축 대칭
- 방향 : 단방향

3. 특성식의 영점

①

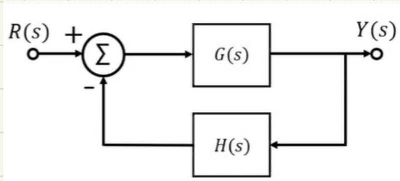


sol) $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$

∴ 특성방정식 : $1+KG(s)=0$

특성식 : $1+KG(s)$

②



sol) $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

∴ 특성방정식 : $1+G(s)H(s)=0$

특성식 : $1+G(s)H(s)$

∴ $G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$, $H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ 라 하면

$$\Rightarrow 1+G(s)H(s) = 1+\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$= \frac{D_1(s) \cdot D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = 0$$

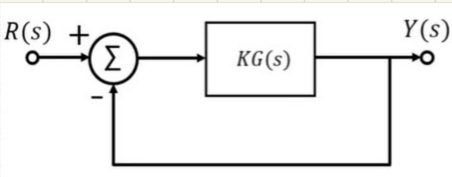
$$; \frac{D_1(s) \cdot D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{a_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{b_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = 0$$

☆ 결론 : (특성방정식의 근) = (특성식의 영점)

→ 특성식의 영점(특성방정식의 근)들 중 하나라도 복소평면 우반면(RHP)이나 허수축(Im)에 있으면 불안정하다.

76~81강

1. Nyquist 선도 : 용어정리



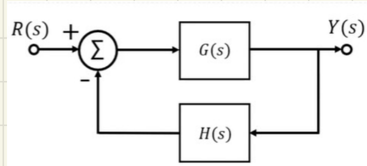
• 전달함수 : $H(s) = \dfrac{KG(s)}{1+KG(s)}$

• 특성방정식 : $1+KG(s)=0$

• 특성식 : $1+KG(s)$ → -1 평행이동 $\left\{\begin{array}{l} \boxed{KG(s)} \text{ Open-loop 전달함수} \\ (-1, j0) \end{array}\right.$

  • 영점 : $(0, j0)$: 왼쪽으로 1만큼 평행이동

동일!



• 전달함수 : $H(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

• 특성방정식 : $1+G(s)H(s)=0$

• 특성식 : $1+G(s)H(s)$ → -1 평행이동 $\left\{\begin{array}{l} G(s)H(s) \\ (-1, j0) \end{array}\right.$

  • 영점 : $(0, j0)$: 왼쪽으로 1만큼 평행이동

동일!

☆의미: Open-loop 전달함수의 벡터궤적을 그린 후, 기준점 $(-1, j0)$을 기준으로 안정도 판별

2. Nyquist 안정도 판별법 : 방법

■ $Z = N + P$ & $Z = 0$ 동시 만족 → 시스템은 안정!

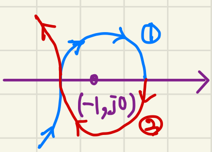
필요충분조건은 아니야!

• Z : RHP에 있는 특성식 $1+KG(s)$ or $1+H(s)G(s)$의 영점들.
(또는) RHP에 있는 특성방정식 $1+KG(s)=0$ or $1+H(s)G(s)=0$ 의 영점들.

• N : $(-1, j0)$을 안으로 감싸면서 시계 방향으로 도는 횟수.

• P : Open-loop 전달함수 $KG(s)$, $G(s)H(s)$의 우반평면(RHP)에 있는 극점 개수.

※ N 구하기



• $\omega = 0 \to \infty$ / $-\infty \to 0$ 각각 개별로 카운트할 것!

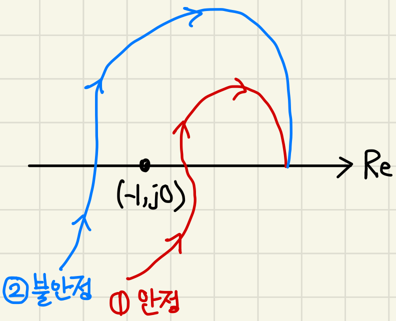
∴ ① 에서 1회, ② 에서 1회 → 총 2회 ; $N=2$

3. Nyquist 안정도 판별법 : Simplified version

■ 알고리즘

- 핵심 요소 : { Open loop 전달함수 : $KG(s)$, $H(s)G(s)$
  (-1, j0)

- 알고리즘
  - 경로사상(벡터궤적)이 (-1, j0)을 "왼쪽"으로 보면서 진행하면 안정(stable).
  - 경로사상(벡터궤적)이 (-1, j0)을 "오른쪽"으로 보면서 진행하면 불안정(stable).



4. Nyquist 안정도 판별법 : 가이드라인

① Open-loop 전달함수 $KG(s)$ or $H(s)G(s)$ 를 구한다.

② $s=j\omega$ 대입 : 주파수 전달함수 $KG(j\omega)$, $H(j\omega)G(j\omega)$ 를 구한다.

③ 주파수 전달함수를 기반으로 Bode Plot 을 그린다.

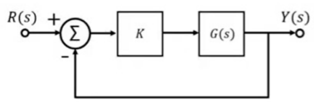
④ Bode plot 의 크기 & 위상 선도를 이용하여 Nyquist 선도를 그린다. (한쪽만)

⑤ Nyquist 선도 → 실수축 대칭시킨다.

5. Nyquist 안정도 판별 : 예제

① [예제1 (Nyquist 안정도 판별법)]

다음 제어시스템에서 $K=1$, $G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$일 때 물음에 답하여라.



(1) 이 제어시스템의 개루프 전달함수를 구하여라.
(2) 주파수 전달함수를 구하여라.
(3) Bode 선도를 그려라.
(4) Bode 선도를 기반으로 Nyquist 선도를 그려라.
(5) Nyquist 안정도 판별법을 이용하여 안정한지 불안정한지 판단하여라.

(1) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$

- 특.방 : $1+KG(s)=0$
- 특성식: $1+KG(s)$

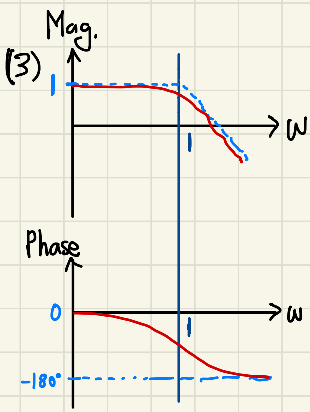
→ 개루프 전달함수 : $KG(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

(2) $KG(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^2} = \frac{1}{1-\omega^2+j2\omega} = \frac{1\angle 0^\circ}{\left(\sqrt{\omega^2+1}\angle\tan^{-1}\omega\right)^2} = \frac{1\angle 0^\circ}{(\omega^2+1)\angle 2\tan^{-1}\omega}$

$= \frac{1}{\omega^2+1}\angle -2\tan^{-1}\omega$

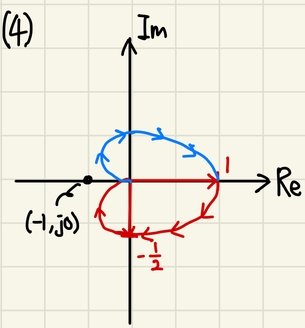
1차식 2개
→ 굳이 전개 ×

(3)



- $\omega \ll 1$: $KG(j\omega)=1\angle 0^\circ$
- $\omega > 1$: $KG(j\omega) =$
- $\omega = 1$: $KG(j\omega) = \frac{1}{(1+j)^2} = \frac{1}{2}\angle -90^\circ$

(4)



- $\omega=0$: $G(j\omega)=1\angle 0^\circ$
- $\omega=1$: $G(j\omega)=\frac{1}{2}\angle -90^\circ$
- $\omega=\infty$: $G(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)^2}$

$= \frac{1}{\omega^2+1}\angle -2\tan^{-1}\omega$

$= 0\angle -180^\circ$

(5) $Z=N+P$ & $Z=0$: 만족 → Stable!

(i) $Z=0$

∴ $1+KG(s) = 1+\frac{1}{(s+1)^2}=0$; $s=-1\pm j$

모두 LHP에 존재.
→ $Z=0$

(ii) $N=0$

∴ Nyquist 선도가 (-1, j0)를 감싸지 않으므로!

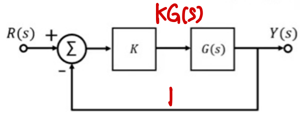
(iii) $P=0$

∴ $KG(s)=\frac{1}{(1+s)^2}$; $s=-1$ (LHP)

②

[예제2 (Nyquist 안정도 판별법)]

다음 제어시스템에서 $K=300$, $G(s)=\dfrac{1}{s(s+4)(s+6)}$ 일 때 물음에 답하여라.



(1) 이 제어시스템의 개루프 전달함수를 구하여라.
(2) 주파수 전달함수를 구하여라.
(3) Bode 선도를 그려라.
(4) Bode 선도를 기반으로 Nyquist 선도를 그려라.
(5) Nyquist 안정도 판별법을 이용하여 안정한지 불안정한지 판단하여라.

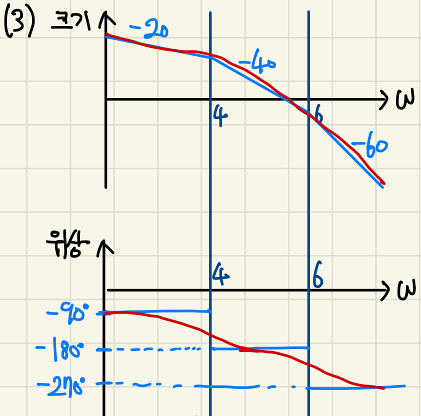
(1) $H(s)=\dfrac{KG(s)}{1+KG(s)}$ $\begin{cases}\cdot \text{특·방}: 1+KG(s)=0 \\ \cdot \text{특성식}: 1+KG(s)\end{cases}$

∴ "개루프 전달함수": $KG(s)=\dfrac{300}{s(s+4)(s+6)}$

(2) $KG(j\omega)=\dfrac{300}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+6)}=\dfrac{300}{j\omega\cdot 4(1+\frac{j\omega}{4})\cdot 6(1+\frac{j\omega}{6})}$

$=\dfrac{300}{\omega\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{\omega^2+36}}\angle -90^\circ-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{6}\right)$

(3)

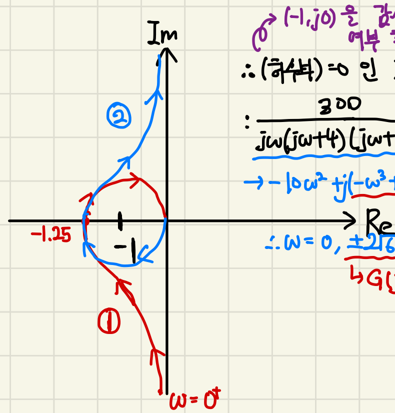


• $\omega \ll 4$: $KG(j\omega)=\dfrac{12.5}{j\omega}=\dfrac{12.5}{\omega}\angle -90^\circ$

• $20\log_{10}|KG(j\omega)| = \underline{-20\log_{10}\omega} + 20\log_{10}(12.5)$

기: -20 dB/dec
$=-1$

(4)



→ (-1, j0)을 감싸는지 여부 확인.

∴ (허수부)=0 인 지점

: $\dfrac{300}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+6)}$

→ $-10\omega^2+j(-\omega^3+24\omega)$ → 0

∴ $\omega=0, \pm 2\sqrt{6}$

↳ $G(j\omega)=-1.25$

	크기	위상
$\omega=0$	∞	-90°
$\omega=2\sqrt{6}$	1.25	-180°
$\omega=\infty$	0	$-270^\circ(=90^\circ)$

(5) $\underset{O}{\underline{Z=N+P}}$ & $\underset{F}{\underline{Z=0}}$ → 불안정.

• Z : $1+KG(s)=1+\dfrac{300}{s(s+4)(s+6)}=0$

; $s(s+4)(s+6)+300=0$; → RHP 상 극점 2개 ∴ $Z=2$

• N : ①:1, ②:1 → $N=2$

• P : $KG(s)=\dfrac{300}{s(s+4)(s+6)}$; poles: $s=\underset{\text{허수축}}{0}, \underset{\text{LHP}}{-4, -6}$ ∴ $P=0$ (RHP 상 극점 없음)