# 51 ~ 60 강

# 1. 근궤적 (Root Locus)

(Review)

■ 동적 시스템 모델링, 폐루프 전달함수, 안정도, PID 제어

→ 시스템 변수 (시스템 파라미터) 일정하다.

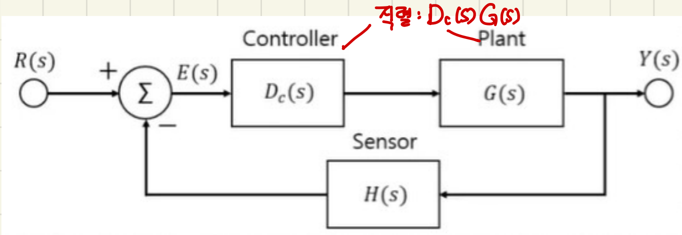
■ 근궤적

• 개념: 시스템 파라미터가 변화할 때, 극점의 위치를 파악.

• 양의 실수 K에 따른 특성방정식의 근의 집합.

• K의 변화에 따른 폐루프 시스템의 동적 특성 추론.

직렬: $D_c(s)G(s)$




☆ 양의 실수 K의 의미

: 전체 폐루프 시스템 안에서 어떠한 요소 안에 들어가는 변수!

■ Closed-loop system 전달함수: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D_c(s)G(s)}{1+D_c(s)G(s)H(s)}$

■ 특성방정식: $1 + \underbrace{D_c(s)G(s)H(s)}_{K\cdot L(s)} = 0$ ; $1+K\cdot L(s)=0$

∴ 여기서 $L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \rightarrow 1+K\cdot L(s) = 0$

$\Leftrightarrow a(s) + K b(s) = 0$ 

$\Leftrightarrow L(s) = -\frac{1}{K}$ 

} 근궤적

■ 앞으로 할 일: 근궤적 찾기

① 전달함수 구하기

② 특성방정식 구하기

③ L(s)의 극점 & 영점 찾기

④ 근의 위치를 복소평면에 표시.

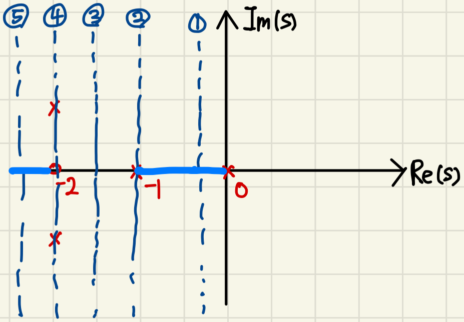
# 2. 근궤적 Rule (1~5)

## 1. Rule 1

- 특성 방정식 : $1+K\cdot L(s)=0$ & $L(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}$
- 극점 : $a(s)=0$ → 극점 개수 n개
  영점 : $b(s)=0$ → 영점 개수 m개
- Rule 1 : 근궤적은 n개의 극점에서 출발, m개의 영점에 도착하거나 ∞로 간다.

## 2. Rule 2

- Rule 2 : 실수축 상에서 임의의 위치를 잡았을 때, 이 위치보다 우측에 있는 (극점)+(영점) 개수가 '홀수'인 경우, 그 위치는 근궤적 상에 존재한다.
- 실수축 상 궤적은, (극점)+(영점) 개수의 합이 홀수인 부분의 왼쪽에 위치한다.



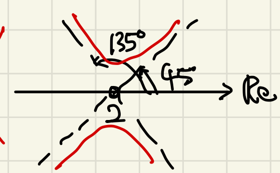

① : 근궤적 O ∵ (극점)+(영점) = 1 (odd)
② : 근궤적 O ∵ (극점)+(영점) = 1 (odd)
③ : 근궤적 X ∵ (극점)+(영점) = 2 (even)
④ : 근궤적 X ∵ (극점)+(영점) = 2 (even)
⑤ : 근궤적 O ∵ (극점)+(영점) = 5 (odd)

## 3. Rule 3

- Rule 3 : s와 K가 무한대에 가까워지면, (극점 개수)-(영점 개수) 개의 가지들이 실수축 상 중심점 $s=\alpha$ 로부터 각도 $\phi_l$로 뻗어 나오는 직선에 점차 접근한다.
- 즉, 근궤적이 점근선에 점차 가까워진다.
- 근궤적의 점근선 : 각도 $\phi_l$, 중심 $\alpha$
  - 점근선 각도 : $\phi_l = \dfrac{\pi + 2\pi(l-1)}{(\text{극점 개수})-(\text{영점 개수})} = \dfrac{\pi+2\pi(l-1)}{n-m}$ $(l=1, 2, \cdots, n-m)$
  - 점근선 중심 : $\alpha = \dfrac{(\text{극점의 합})-(\text{영점의 합})}{(\text{극점 개수})-(\text{영점 개수})} = \dfrac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m}$

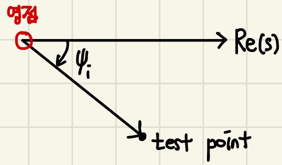
예: $\phi_l = 45°, 135°$ / $\alpha=2$

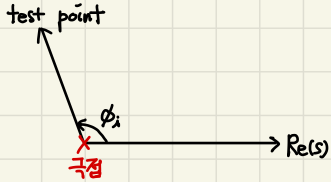
근궤적은 실수축 대칭.



## 4. Rule 4 : 여러가지 각도 표현

- $\psi_i$ : s-평면에서, 영점(zero)으로부터 test point에 이르는 벡터와 실수축 양의 방향 벡터 사이의 각도.
  출발점 도착점
- $\phi_i$ : s-평면에서, 극점(pole)으로부터 test point에 이르는 벡터와 실수축 양의 방향 벡터 사이의 각도.
  출발점 도착점




■ 각도 : 호도법 적용
- 반시계 방향 : (+)
- 시계 방향 : (-)

- 극점 이탈각 : $\phi_{dep} = \sum \psi_i - \sum_{i \neq dep} \phi_i - \pi$ (test point가 출발 지점)
  출발 지점
  자기자신 제외
- 다중극점 이탈각 : $\phi_{l,dep} = \dfrac{\sum \psi_i - \sum_{i \neq dep} \phi_i - \pi - 2\pi(l-1)}{q}$

- 영점 도착각 : $\psi_{arr} = \sum \phi_i - \sum_{i \neq dep} \psi_i + \pi$ (test point가 도착 지점)
  도착 지점
  자기자신 제외.
- 다중영점 도착각 : $\psi_{l,arr} = \dfrac{\sum \phi_i - \sum_{i \neq dep} \psi_i + \pi + 2\pi(l-1)}{q}$

- $q$ : 다중 극점/영점의 경우, 중복된 횟수
- $l = 1, 2, \cdots, q$

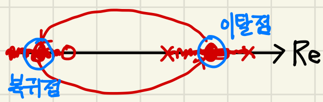
# 5. Rule 5

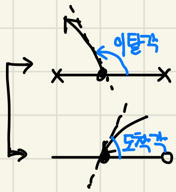
• Rule 5 : 근궤적의 복귀점 / 이탈점 찾는 방법 → 특성 방정식의 중근을 이용한다.

■ 과정

• 근궤적 상 '중근'에서 상황에 따른 이탈각 / 도착각 : $\frac{\pi + 2\pi(l-1)}{q}$ $(l = 1, 2, \cdots, q)$

$q$ : 중복되는 근의 개수.




∴ 근궤적은 극점 → 영점 or ∞ 방향으로 진행한다.

• 이탈점 : Break-away point
• 복귀점 : Break-in point

→ 근궤적 상 중근

특성 방정식 $1 + KL(s) = 1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0$ 의 근들의 자취.

∴ $a(s) + Kb(s) = (s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n) = 0$

여기서 중근 $s = r_1 = r_2 = \alpha$ 라 잡자. 그러면

→ 중근 : 복귀점 or 이탈점

$a(s) + Kb(s) = (s-\alpha)^2(s-r_3)\cdots(s-r_n) = 0$

⇓ 미분

$$a'(s) + Kb'(s) = 2(s-\alpha)(s-r_3)\cdots(s-r_n) + (s-\alpha)^2(s-r_4)\cdots(s-r_n) + \cdots + (s-\alpha)^2(s-r_3)\cdots(s-r_{n-1}) = 0$$

$s = \alpha \rightarrow a'(\alpha) + Kb'(\alpha) = 0$ 만족!

즉, $a'(s) + Kb'(s) = 0$ 의 근 $s = \alpha$

⇒ • $K = -\frac{a'(s)}{b'(s)}$ ⊕ $a(s) + Kb(s) = 0$ 의 근 $\alpha$.

근 : $s = \alpha$

⇓

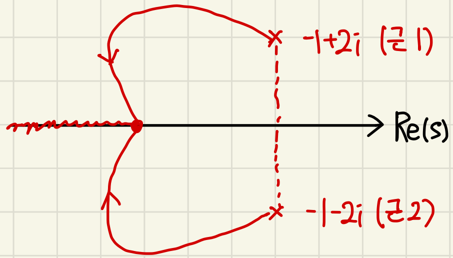
• $a(s) - \frac{a'(s)}{b'(s)}b(s) = 0$

★★★

; $a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$ //

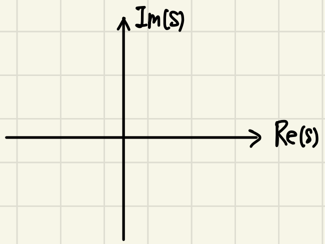
# 6. 근궤적 그릴 때의 추가 고려사항

① 근궤적은 "실수축 대칭" 이다.




∴ $s=-6\pm j\omega_d$

② 근궤적과 허수축과의 교점




- 근궤적 : $1+KL(s)=0$
- 허수축 : $s=j\omega$

연립 → 근궤적의 허수축과의 교점.

- 실수축 : (허수부)=0 ∴ $s=-6$
- 허수축 : (실수부)=0 ∴ $s=j\omega$

# 7. 근궤적 예제

1

[근궤적 예제1]

특성방정식 $1+KL(s)=1+K\frac{s+2}{s(s+1)}=0$에 대하여 폐루프 시스템 파라미터 K에 대한 근궤적을 그리세요.

※ 근궤적의 정의 : $k>0$

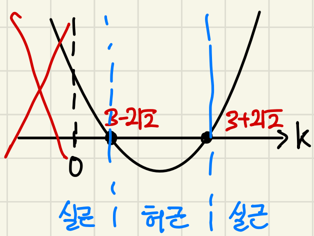
- Tip : L(s)의 분모가 2차식이고, 분자가 1차 이하라면, 근궤적 Rule 1~5를 전부 다 적용할 필요 없다.
  - 이유 : 특성 방정식이 이차방정식으로 되기 때문에 다루기 쉽다.
  - 만약 특성방정식이 3차 이상이면, 근궤적 Rule 1~5를 전부 다 적용하는 것이 편하다.

sol) ① 식 변형

∴ $1+k\frac{s+2}{s(s+1)}=0$ ; $s(s+1)+k(s+2)=0$

; $s^2+(k+1)s+2k=0$ $\xrightarrow{\text{근의 공식}}$ $s=\frac{-(k+1)\pm\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$

② $k^2-6k+1$ 의 관찰




∴ $k=3\pm2\sqrt{2}$ 일 때, 특성방정식은 중근 $s=-\frac{k+1}{2}$을 갖는다.

→ 복귀점 or 이탈점을 갖는다.

■ 복귀점 도착각

- $\frac{180°+360°(l-1)}{q}=\frac{180°+360°(l-1)}{2}$

$=\begin{cases}90° & (l=1)\\ 270° & (l=2)\end{cases}$

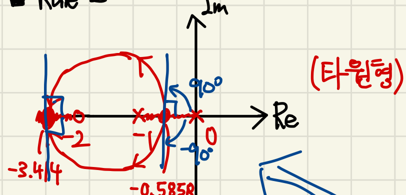
③ $L(s)=\frac{s+2}{s(s+1)}$ 관찰 & Rule 1~5 적용.

■ Rule 1

→ 극점 : $s=0, -1$ (2개)

영점 : $s=-2$ (1개)

■ Rule 2




■ Rule 4

∴ $s=\frac{-(k+1)\pm\sqrt{k^2-6k+1}}{2}$

① $K=0$ → $s=0$ or $-1$

② $0<K<3-2\sqrt{2}$ → $s$ = 실근 (실수축 상)

③ $K=3-2\sqrt{2}$ → $s=-2+\sqrt{2}=-0.5858$ (중근)

④ $3-2\sqrt{2}<K<3+2\sqrt{2}$ → $s$ = 허근 (실수축 상 X)

⑤ $K=3+2\sqrt{2}$ → $s=-2-\sqrt{2}=-3.414$ (중근)

⑥ $K>3+2\sqrt{2}$ → $s$ = 실근 (실수축 상)

■ 이탈점 이탈각

- $\frac{180°+360°(l-1)}{q(=2)}=\frac{180°+360°(l-1)}{2}$ $(l=1,2)$

$=\begin{cases}90° & (l=1)\\ \cancel{270°}\ -90° & (l=2)\end{cases}$

2

**[근궤적 예제2]**

근궤적 $L(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+12)}$을 그리시오.

■ 근궤적 표준식

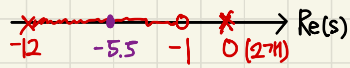
- $1+K\cdot L(s)=0$ $(K>0)$
- 위 식을 만족하는 L(s)의 궤적 그리기.

sol) ① Rule 1~5 적용

■ Rule 1

- 극점 : $s=0,0,-12$ (3개)
- 영점 : $s=-1$ (1개)

■ Rule 2

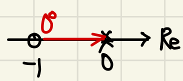



■ Rule 3

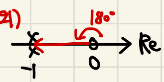
- $\phi_l=\dfrac{180°-360°(l-1)}{3-1}=\begin{cases}90°\\270°=-90°\end{cases}$
- $\alpha=\dfrac{(0+0-12)-(-1)}{3-1}=-5.5$

■ Rule 4

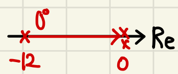
- $\sum\psi_i=$ (영점 → 다중극점 도달 경로의 각도) $=0°$




(범위)




- $\sum_{i\neq dep}\phi_i=0°$




- $s=0$ (2개) → 다중극점 이탈각

도착점

$\therefore \phi_{dep}=\dfrac{\cancel{\sum\psi_i}^{\,0°}-\cancel{\sum_{i\neq dep}\phi_i}^{\,0°}-180°-360°(l-1)}{\cancel{q}\,2}=\dfrac{-180°-360°(l-1)}{2}=\begin{cases}-90°\\-270°=90°\end{cases}$

■ Rule 5

- 복귀점 도착각

$\therefore \dfrac{180°+360°(l-1)}{q}=\dfrac{180°+360°(l-1)}{2}=\begin{cases}90°\ (l=1)\\270°\ (l=2)=-90°\end{cases}$

- 이탈점 이탈각

$\therefore \dfrac{180°+360°(l-1)}{q}=\dfrac{180°+360°(l-1)}{2}=\begin{cases}90°\ (l=1)\\270°\ (l=2)=-90°\end{cases}$

■ 복귀점/이탈점 찾기

- 특성방정식의 중근 이용.
- $(3s^2+24s)(s+1)-(s^3+12s^2)=0$

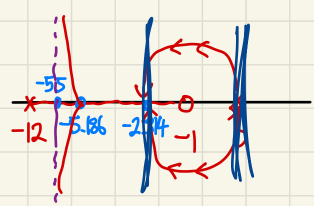
$;\ 2s^3+15s^2+24s=0$

→ $s=0$ or $s=-2.314$ 복귀점 (중근)

0≤s≤1 에는 어떠한 근궤적 없음.

or $s=-5.186$ 이탈점 (중근)

답



3 [근궤적 예제3]

근궤적 $L(s)=\frac{1}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$ 을 그리시오.

sol) Rule 적용

■ Rule 1

• $a(s)=s^4+4s^3+9s^2+10s$

• $b(s)=1$

• 극점 : $s=0,-2,-1\pm j2$ (4개)

• 영점 : (0개)

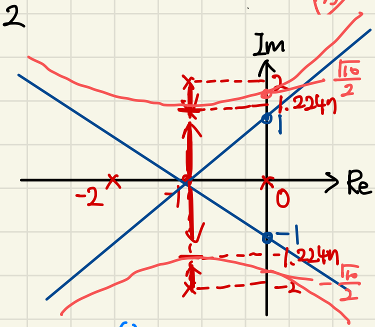
■ 근궤적 & 허수축 교점

• $1+K\cdot L(s)=1+K\frac{1}{s^4+4s^3+9s^2+10s}=0$

• $\begin{cases} s^4+4s^3+9s^2+10s+K=0 & \text{(근궤적)} \\ s=j\omega & \text{(허수축)} \end{cases}$

→ $\omega=0$ or $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

■ Rule 2




■ Rule 3 : 점근선

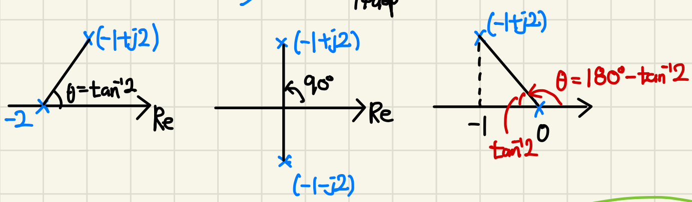
• $\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{4-0}=\begin{cases}45° & (l=1)\\ 135° & (l=2)\\ 225° & (l=3)\\ 315° & (l=4)\end{cases}$

• $\alpha=\frac{-4-0}{4-0}=-1$

■ Rule 4

• $(-1+j2)$ 극점이탈각 : $\cancel{\sum\psi_i}$ (영점) 0° $-\sum_{i\neq dep}\phi_i$ (극점) $-180°$ $=-\{\tan^{-1}2+90°+180°-\tan^{-1}2\}-180°$

$=-90°$




■ 중근 (이탈점/복귀점)

• $a'(s)b(s)-a(s)b'(s)=0$

; $4s^3+12s^2+18s+10=0$

∴ $s=-1$ or $s=-1\pm j1.2247$

중근 (q=2)

└ $s=-1+j1.2247$ (중근 : q=2)

$s=-1-j1.2247$ (중근 : q=2)

(여담) 중근 중복 → 삼중근

① $s=-1$ 이탈각

• $\frac{180°+360°(l-1)}{q\ (q=2)}=\begin{cases}90° & (l=1)\\ -90° & (l=2)\end{cases}$

② $s=-1+j1.2247$ 이탈각

• $\frac{180°+360°(l-1)}{q\ (q=2)}=\begin{cases}90° & (l=1)\\ 270°=-90° & (l=2)\end{cases}$