|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **[EEC3600-001] 수치해석** | | |
| 소속: 전기전자공학부 | 학번: 12191529 | 이름: 장준영 |
| **Term Project** | | **Prob #5** |

1. **Problem**
2. 문제

|  |
| --- |
|  |

본 문제에서는 선형 시스템 이론에서 중요한 역할을 하는 Lyapunov 방정식을 다룬다. 주어진 행렬 에 대해 미지수 행렬 를 만족시키는 식

을 수치적으로 해결하는 것이 핵심 과제이다. 이 방정식은 제어 이론, 시스템 안정성 해석, 상태 피드백 설계 등 다양한 분야에서 활용된다.

1. **Solution (a)**

|  |
| --- |
| ■ **입력 및 기본정보 설정**    • 을 총 개의 스칼라 미지수로 간주.  • 를 벡터화하여 로 변환하기 위한 선형 시스템의 행렬 과 벡터 를 준비한다.  ■ **행렬 구성**    • X의 각 항목 에 대해, 를 직접 계산한 항등식을 행별로 설정.  • Kronecker product를 쓰지 않고, 수동으로 각 항에 대한 계수를 직접 할당해 방정식을 구성한다.  ■ **선형 시스템 풀기**    • 선형 시스템을 풀어 벡터를 얻고, 이를 다시 행렬 형태로 복원.  ■ **Test Case 검증 (문제 5-(c)에서 확인 예정.)**    • 실제 결과가 와 거의 일치하는지 확인하여 정확성을 검증한다. |

1. **Solution (b)**

|  |
| --- |
| ■ **Lyapunov 방정식 해법 함수 정의**    • 를 벡터화하여 의 선형 시스템으로 구성.  • 고급 함수 없이 반복문과 행렬 indexing으로 방정식을 풀고 결과 반환  ■ **시스템 정의**    • 테스트에 사용할 상태방정식의 시스템 행렬 , 입력 행렬 .  ■ **목표 폐루프 pole 정의**    • 고유값 -2, -5를 갖는 시스템으로 만들기 위한 목표 폐루프 행렬 .  ■ **상태 피드백 Gain (K) 설정**    • 조건을 만족하는 feedback gain F를 수동으로 설정.  ■ **Lyapunov 방정식 구성 및 풀이**    • Lyapunov 방정식 를 로 바꿔서 계산.  ■ **결과 출력 및 검증**     * 계산된 T가 실제로 를 만족하는지 검증한다. |

**[결과 분석]**

**텍스트, 스크린샷, 폰트, 디자인이(가) 표시된 사진

AI가 생성한 콘텐츠는 부정확할 수 있습니다.**

본 실험에서는 상태 피드백을 통해 지정된 고유값을 갖도록 시스템을 설계하고, 이에 따라 유도되는 Lyapunov 방정식 AT−TF=BK를 수치적으로 해결하였다. 주어진 시스템 행렬 A, 입력 행렬 B, 그리고 목표 폐루프 행렬 F에 대해 수동으로 피드백 게인 K를 설계하였다. 이후 C=BK로 정의하고, 직접 작성한 solve\_lyapunov\_manual 함수를 이용해 행렬 TTT를 계산하였다.

결과로 얻은 T 행렬은 수치적으로 매우 큰 값을 가지는 비정상적인 형태를 보였으며, AT−TF의 결과는 BK와 명확히 일치하지 않았다. 이는 M 행렬이 수치적으로 매우 ill-conditioned하거나 역행렬 계산 과정에서 정밀도 손실이 있었음을 의미한다. 실제로 이 문제에서는 M이 정칙이어도 수치적으로 매우 불안정할 수 있으며, 이 경우에는 np.linalg.inv() 대신 np.linalg.pinv() 또는 SVD 기반 해법을 사용하는 것이 권장된다.

결론적으로, 이 코드는 구조적으로는 정확하지만, 특정 데이터에서는 수치적인 안정성을 확보하기 위해 정규화 기법이나 다른 수치해석적 방법을 병행하는 것이 필요하다는 점을 확인하였다.

1. **Solution (c): 시뮬레이션 결과 및 그래프 해석**

|  |
| --- |
|  |

문제 5-(c)

에 대해 Lyapunov 방정식

를 수치적으로 해결하였다.

직접 작성한 함수 solve\_lyapunov\_manual()을 이용해 계산된 해는 다음과 같다:

이 결과를 에 대입하여 다시 계산한 결과는 정확히 와 일치하였다:

이를 통해, 수동으로 구성한 선형 시스템 해법이 정확히 동작했으며, 구현된 Lyapunov 해법의 수치적 정확성이 충분히 검증되었음을 확인할 수 있었다. 특히, 이 문제는 행렬 차원이 작고, 계수의 크기가 크지 않아 수치적 불안정성 없이 잘 해결된 사례로 볼 수 있다.