|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **[EEC3600-001] 수치해석** | | |
| 소속: 전기전자공학부 | 학번: 12191529 | 이름: 장준영 |
| **Term Project** | | **Prob #6** |

1. **Problem**
2. 문제

|  |
| --- |
|  |

본 문제는 광고 예산을 여러 채널에 분배하여 특정 인구통계 그룹에 대한 도달량을 최대한 정확히 달성하는 **선형 등식 제약 하의 최소제곱(Least Squares with Equality Constraint)** 문제이다.

우리는 다음과 같은 모델을 고려한다:

* : 채널별 도달률 (행: 인구 집단, 열: 채널)
* : 채널별 광고 예산 분배
* : 원하는 인구 집단별 도달량
* : 총 광고 예산

본 문제는 다음과 같은 **제약조건 최소제곱** 문제로 표현할 수 있다:

이는 총 예산 에서 인구 집단별 도달량과의 오차를 최소화하는 를 찾는 문제이다.

1. **Solution (a)**
2. **Prime Condition**

주어진 문제는 다음과 같다:

이는 선형 등식 제약이 포함된 최소제곱 문제이며, 목적함수는 convex하므로 KKT 조건이 1차 필요조건이자 충분조건이다.

우선 목적함수 의 gradient는 다음과 같다:

여기에 등식 제약 를 라그랑주 승수 와 함께 반영하면, 다음과 같은 Lagrangian을 구성할 수 있다:

1. **Primal-Dual Condition (KKT 조건)**

KKT 조건을 적용하면 다음의 선형 시스템을 얻을 수 있다:

이를 행렬로 정리하면 다음과 같은 선형 시스템이 된다:

1. **Solution (b)**

|  |
| --- |
| ■ **데이터 함수 정의 (advertising\_budget\_data())**    • 목적: 문제에 주어진 광고 채널 도달률 행렬 과, 목표 도달률 벡터 를 초기화한다.  • : 각 행은 인구 집단별로 광고 채널 3개에 대한 도달률을 의미한다.  • : 각 인구 집단별로 1000뷰를 목표로 하므로, 모든 항목이 1000인 벡터로 구성된다.  ■ **제약 최소제곱 해법 (solve\_least\_squares\_with\_constraint())**    • 목적: 제약 조건 하에서 최소제곱 문제 의 최적 해 를 구한다.  • 구현 원리: 수업에서 유도한 KKT 조건 기반 선형 시스템을 구성하고 풀도록 한다.  • KKT 시스템 구성:  • RtR: 목적 함수의 Hessian.  • Rtv: Gradient 항.  • ones: 제약 조건 표현을 위한 벡터.  • KKT\_matrix: 전체 선형 시스템 좌변 행렬  • rhs: 우변 벡터  • sol: 를 포함한 해.  • s\_opt: 최적 해 만 추출하여 반환.  ■ **실행 및 결과 출력**    • 입력 데이터 로딩 및 예산 설정.  • 함수 호출로 최적 광고비 분배 계산.  • 최종 목표 도달률과 실제 도달률 간의 RMS 오차 계산: |

1. **Solution (c): 시뮬레이션 결과 및 그래프 해석**

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

문제 6-(c)에서는 총 광고 예산 bbb의 값을 1200부터 1700까지 100 단위로 변화시키면서, 각 예산에 대해 최소제곱 해 s^\hat{s}s^를 구하고 실제 도달률과 목표 도달률 사이의 RMS 오차를 계산하였다. 실험 결과, 예산이 증가함에 따라 RMS 오차는 전반적으로 감소하는 경향을 보였다. 구체적으로 예산이 1200일 때 RMS 오차는 약 175.60으로 가장 컸으며, 예산을 1300, 1400, 1500으로 순차적으로 늘릴수록 RMS 오차는 각각 약 158.43, 144.86, 135.95로 점진적으로 줄어들었다. 이와 같은 경향은 더 많은 예산이 확보될수록 각 인구 집단의 도달 목표를 더 정확하게 맞출 수 있다는 것을 보여준다.

특히 예산이 1600일 때 RMS 오차는 약 132.65로 최저점을 기록하였고, 그 이후 1700에서는 오히려 RMS가 약간 상승하여 135.36이 되었다. 이는 예산이 일정 수준 이상으로 증가했을 때, 도달률 개선 효과가 포화 상태에 이르며 일부 채널에 과도한 비용이 분배되어 비효율성이 발생할 수 있음을 시사한다. 결국 예산을 무작정 증가시키는 것이 항상 성능 향상으로 이어지지는 않으며, 주어진 문제에서는 예산이 1500~1600 사이일 때 도달률 정확도와 자원 효율성 사이의 균형이 가장 잘 맞는 것으로 해석할 수 있다.