

闭合三角网格的优化切割与保角映射

付妍 宋本聪 周秉锋

(北京大学计算机科学技术研究所 北京 100871)

(fuyan@icst.pku.edu.cn)

摘要 提出一种自动地将任意闭合三角网格切开并保角映射到二维平面域的算法。通过对自动提取的模型初始切割线逐步优化得到模型切割线,优化过程由一个与保角映射扭曲度和合法性相关的成本函数控制。为了减小映射扭曲,算法中不预先固定参数域边界,而在参数化过程中自动地确定网格的自然边界。实验结果表明,该算法通过优化切割线和参数域边界有效地降低了三角形形状扭曲,并保证了参数化结果的合法性。

关键词 网格切割;网格参数化;自然边界

中图法分类号 TP391

Optimized Cutting and Conformal Mapping for Closed Triangular Meshes

Fu Yan Song Bencong Zhou Bingfeng

(Institute of Computer Science and Technology, Peking University, Beijing 100871)

Abstract We propose a method to cut and map a closed triangular mesh onto a 2D planar domain automatically. The initial cut is optimized iteratively controlled by a cost function related to the distortion and validity of conformal mapping of the mesh. During parametrization, Rather than fixing the boundary of the parametric domain a priori as most current methods did, we allow the boundary to be generated naturally. Experimental results show that our algorithm reduces the geometric distortion effectively and ensures the validity of the conformal mapping.

Key words mesh segmentation; mesh parameterization; natural boundary

在计算机图形学领域中所使用的很多模型都是流形三角网格。在诸如纹理映射、交互绘图、网格重建等应用中为了方便处理,通常需要将原始网格转换到平面中。然而,一个任意的封闭网格模型不能被参数化到平面域中,为了进行任意封闭网格的平面参数化,通常需要先寻找合适的切线集将模型切割成一个或若干个与圆盘同胚的区域。在进行参数化时,研究者通常致力于减小参数化引入的扭曲。给定一个面片,扭曲度由参数化方法的性质决定。为了将三角网格映射到平面中,仅仅将它切分

成与圆盘同胚的区域是不够的,复杂的面片还需要通过优化切割线来减小网格参数化后的整体扭曲。若网格上的切割线将模型切分成过多的区域,容易导致各个参数域之间的不连续性,在应用中需要进行特殊的处理;并且在映射回三维空间时可能会出现明显的缝合痕迹,为了便于后续处理,应尽量减少切割后所得面片的个数。

此外,参数域边界的选择也对整体扭曲有很大的影响,很多平面参数化方法都要求参数域的边界被预先固定,较常用的选择是正方形边界、圆形边界

收稿日期:2007-05-23;修回日期:2007-08-07。基金项目:国家自然科学基金(60573149)。付妍,女,1982年生,博士研究生,主要研究方向为几何建模和数字几何处理。宋本聪,男,1984年生,硕士研究生,主要研究方向为网格参数化、纹理映射等(songbencong@icst.pku.edu.cn)。周秉锋,男,1963年生,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为几何造型和CAD/CAM、彩色图像处理、数字图像半色调、基于图像的绘制与建模和虚拟现实等(cczbf@pku.edu.cn)。

或凸多边形边界,在大部分情况下,这些选择都能满足要求.但是选择凸边形和圆的问题在于,当表面 S 的展开面与一个凸多边形或圆的形状并不相似时,将产生很大的扭曲.为了避免这种扭曲,研究者提出可以建立一个“虚拟边界”^[1],即在边界的周围添加一些三角形从而构成一个具有较好边界的扩展网格,之后再以凸多边形为边界进行参数化;更自然的方法是采用自然边界,即在参数化时并不预先固定边界点的位置,也不要求边界一定为凸,而是在参数化的过程中产生一个自然边界,这样产生的扭曲相对于固定边界参数化方法产生的扭曲通常会较小^[2-4].

本文提出一种任意封闭三角网格的切割与保角映射的算法,网格模型被切开后仅形成一个面片以减少多区域参数化的不连续性和缝合的复杂性.切割所得的面片被保角映射到具有自然边界的参数域中,以减小参数化带来的扭曲.

1 相关工作

研究者已经提出了很多任意闭合网格的切分方法. Bennis 等^[5]通过不断地交互选择模型切割线,迭代地将模型中与切割线相邻的面展开到平面中,直到达到指定的扭曲率. Sorkine 等^[6]方法与文献^[5]方法的思想类似,但是定义了新的扭曲度量,而且切割线可以在算法中通过加入模型展平停止条件自动地产生;但这 2 种方法都可能将模型切分成多个子面片. Maillot 等^[7]根据模型的属性(如法线和曲率等信息),将具有相似属性的区域聚集成一块区域,从而形成对整个模型的切割;然后再通过最小化所定义的扭曲度量将每个区域展开到平面中.但此类方法往往不能保证切割后的面片具有良好的拓扑结构. Sander 等^[8]先用一个贪心法的面片合并算法将模型切分成若干较平的区域,然后通过松弛法将面片参数化到平面中;但这种方法产生的面片过多,不利于后续处理.为了降低参数化扭曲度, Sheffer^[4]提出了一种网格切割方法,她认为扭曲度主要依赖于表面的高斯曲率,因此可以在模型表面高斯曲率较大的地方选择切点,并通过构造切点之间的最小生成树得到切割线.

在参数化方面^[9],很多研究者都假定模型已经被切割开,仅研究如何将单个面片参数化到平面中,使参数化引入的扭曲尽量小,或者研究如何将亏格为零的模型参数化到球面^[10]. Floater^[11]首先提出

了通过凸组合的重心坐标法可以将模型嵌入到平面中的方法;但该方法要求参数域的边界被预先固定,而且边界必须为凸多边形的,若边界选择不当,可能引入较大的扭曲. Eck 等^[12]采用的调和映射方法对边界也有同样的要求. Hormann 等^[2]提出的最等长参数化方法虽然不需要预先固定边界,但需要通过最小化一个非线性能量函数来得到映射结果,速度较慢. Sheffer 等^[13]定义了一系列仅与角度相关的非线性限制条件以保证映射后的角度不变形,但该算法最后可能会产生自折叠,需要进行一些后处理以消除折叠,且算法速度较慢. Desbrun 等^[3]提出了可用的扭曲度量集合,并分别定义了离散保角映射和 χ 能量以达到参数化保角和保积的目的,这 2 种能量最小化方法最后都可以归结为解一组线性方程,并可以被推广到自然边界的参数化. Lévy 等^[14]基于对 Cauchy-Riemann 等式的最小平方逼近,定义了一个目标函数以最小化角度扭曲,边界也可以在最小化的过程中被自然地确定,该方法在理论上与文献^[3]方法是等价的. Gu 等^[15]则基于模型参数化引入的扭曲逐步地对切割线进行优化,并最终将模型参数化到一个正方形中;但由于其必须强制参数域边界为正方形边界,所以在实际展开结果与正方形差距较大的情况下扭曲较大.本文的思想与文献^[15]类似,但是采用了不同的参数化方法将模型最终参数化到一个平面中的自然区域,并定义了一个新的成本函数以控制切线的优化和模型参数化结果的合法性.

2 具有自然边界的保角映射

Eck 等^[12]指出调和映射在保证平面嵌入的性质下能试图保持原始网格三角形的形状,使角度扭曲最小化.在离散情况下,调和映射的最小化问题可以转化为解如下线性方程组的问题,在边界点固定的情况下,对于每个内部点有

$$\sum_{j \in N_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(v_i - v_j) = 0 \quad (1)$$

其中 α_{ij} 和 β_{ij} 如图 1 所示.

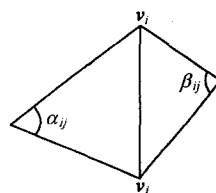


图 1 α 和 β 的定义

为了将拓扑结构与圆盘相同的网格参数化到自然边界的平面域中,我们采用具有自然边界的保角映射方法^[3],通过解一个线性方程组来找到最优边界.文献^[3]中证明了一个三角形的 Dirichlet 能量对它其中的一个顶点 v 的导数等于该顶点对应的边旋转 90° . 因此,对于网格中的每个点的邻域都有

$$\sum_{\Delta_{ijk}} \cot \alpha(u_i - u_j) + \cot \beta(u_i - u_k) = \sum_{\Delta_{ijk}} R^{90}(u_k - u_j) \quad (2)$$

其中, α 和 β 为顶点 k 和 j 所对应的角度, $R^{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 对于内部顶点,等式右边为 0,与式(1)一致,因此内部顶点依然为它周围顶点的凸组合,保证了内部顶点 1-邻域局部的合法性.该方法不能保证在任何时候都得到合法的平面嵌入,但是我们将通过成本函数控制参数化过程以阻止不合法情况的产生.

由于整个参数化过程可以归结为解一个线性方程组,因此该算法速度较快.在实现时,为了固定参数域的位置和方向,需要先任意固定 2 个顶点,固定的边界顶点位置不同将导致不同的参数化结果.

3 成本函数定义

为了控制模型的切割与参数化过程,我们定义了与模型切割和参数化过程相关的成本函数.与每个三角网格相关的成本函数定义为

$$C(M) = L(M) + P(M);$$

其中, $C(M)$ 为由当前切线切割后所得模型被参数化到平面之后的成本函数, $L(M)$ 用来衡量网格被参数化到平面后所引入的扭曲度, $P(M)$ 用于保证平面参数化的合法性.

定义 1. $L(M)$. 参数化 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 相当于在参数化前后的三角形之间建立仿射变换^[2], 网格中的每个三维三角形到一个二维三角形的映射 $f_i(\cdot): T_i \rightarrow t_i$ 可以表示为 $f(x) = A(x) + b$. 若在 ΔT_i 处引入一个局部坐标系, 则矩阵 A 为 2×2 的, 可对 A 进行奇异值分解

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2$, 即该仿射变换的扭曲可以通过其雅可比矩阵的奇异值来近似衡量. Sander 等^[8]在此基础上定义了用于纹理映射的几何拉伸度量. 这个度量越小, 可以认为纹理映射的效果越好. 该扭曲度量可以被用作本文中的 $L(M)$.

在除了纹理映射以外的一些其他应用中, 如有限元分析, 扭曲度量仅需要考虑三角形形状的扭曲, 而忽略三角形大小尺度的变化. 在这种情况下, 每个三角形的形状扭曲的量度可以定义为

$$L(T) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

即通过每个三角形在 2 个主方向上的拉伸和压缩比来表征三角形的扭曲程度. 扭曲度越大, 说明三角形被扭曲得越厉害. 定义整个三角网格的扭曲度为各 ΔT_i 扭曲度量平方和的平均值

$$L(M) = \sum_{T_i \in M} (L(T_i))^2 / n \quad (3)$$

其中 n 为三角网格中三角形的数目. 当该扭曲度量越接近 1 时, 说明三角形的扭曲越小.

定义 2. $P(M)$. 本文采用的参数化方法仅对内部点能保证其合法性, 而计算所得的边界可能会重叠, 由此导致了三角形的重叠, 如图 2 所示. 为了避免产生不合法的平面嵌入, 在成本函数中加入 $P(M)$. 每次参数化之后, 检查平面参数化之后的结果中是否有重叠情况出现, 如果有重叠情况出现, 则 $P(M)$ 的值为 $+\infty$; 否则为 0. 由于在合法嵌入的情况下每个顶点仅仅为它周围邻点的加权线性组合, 且权值为正, 因此它一定落在它的 1-邻域的内部. 本文算法中, 通过判断是否存在一个顶点落在其邻域之外的三角形内部来判断是否发生了折叠现象, 若存在这种顶点, 则说明有重叠情况出现.

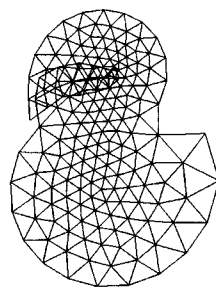


图 2 折叠情况示意图

根据定义 1, 2 可知, 当参数化结果出现不合法的折叠时, 优化过程将停止; 否则, 优化过程将一直朝着使扭曲度减小的方向前进.

4 算法流程

闭合三角网格切割与参数化的整个步骤如下:

Step1. 寻找初始切割线 $\{Cut_0\}$, 初始化成本函数 C_{min} 为无穷大.

Step2. 将切割线展开成一个环, 并将环上距离最远的 2 个点分别固定在平面域中.

Step3. 利用式(2)将网格参数化到平面域中,计算此时的成本函数 C .

Step4. 如果 $C \leq C_{min}$, 寻找参数域中扭曲最大的 $\triangle T$, 并在模型边集中搜索从当前切线到 T 中的一个顶点的最短路径,将该段路径添加到切线集合中,得到新的切线集合 $\{Cut_{new}\}$,转 Step2;否则,优化过程结束.

本文采用文献[15]中寻找初始切割线的方法. 一个亏格为 g 的模型,最少用 $2g$ 个环可以将模型切开成一个与圆盘拓扑结构相同的面片. 获得初始切线之后,需要将切割线展开成一个环,将这个环作为网格切开后的边界. 在这个环中,边界切线出现 1 次,其他切线各出现 2 次,即一条切线 l 将被拆分成 $\{l, l'\}$. 例如,对于如图 3 所示的切线边集,展开后的环为(以节点顺序排列) $a-b-c-b-d-e-f-e-g-e-d-h-d-b-i-b-a$. 假定模型的法线方向都朝里或朝外,算法的基本思想是对于每一个结点(连接多于 2 条切线的点)都按一个固定方向(顺时针或逆时针)遍历与之连接的切线顶点,并由此深入遍历子切线边集直到到达端点,类似于树遍历中的深度优先法. 在寻找当前切割线到这个三角形中某一个点的最短路径时,需要以切割线上的每个点为起点都进行尝试,以

找到最短路径,且最短路径中的边仅限于三角网格上的边.

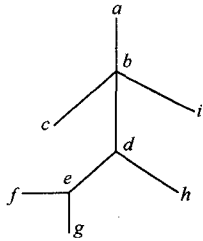


图 3 切割线展开示意图

5 实验及结果分析

图 4 所示为本文算法对不同的闭合网格模型进行切割再参数化之后得到的效果. 从图 4 可以看出,本文算法较好地保持了原始模型的角度,而且保证了参数化的合法性. 为了进一步验证保角映射的效果,我们将一个棋盘格图像纹理映射到模型表面,结果如图 4c 所示,可以看出映射后的棋盘格角度变化很小. 我们还实现了将网格模型参数化到正方形域和圆形域的情况,结果如图 5 所示. 由于文献[4]

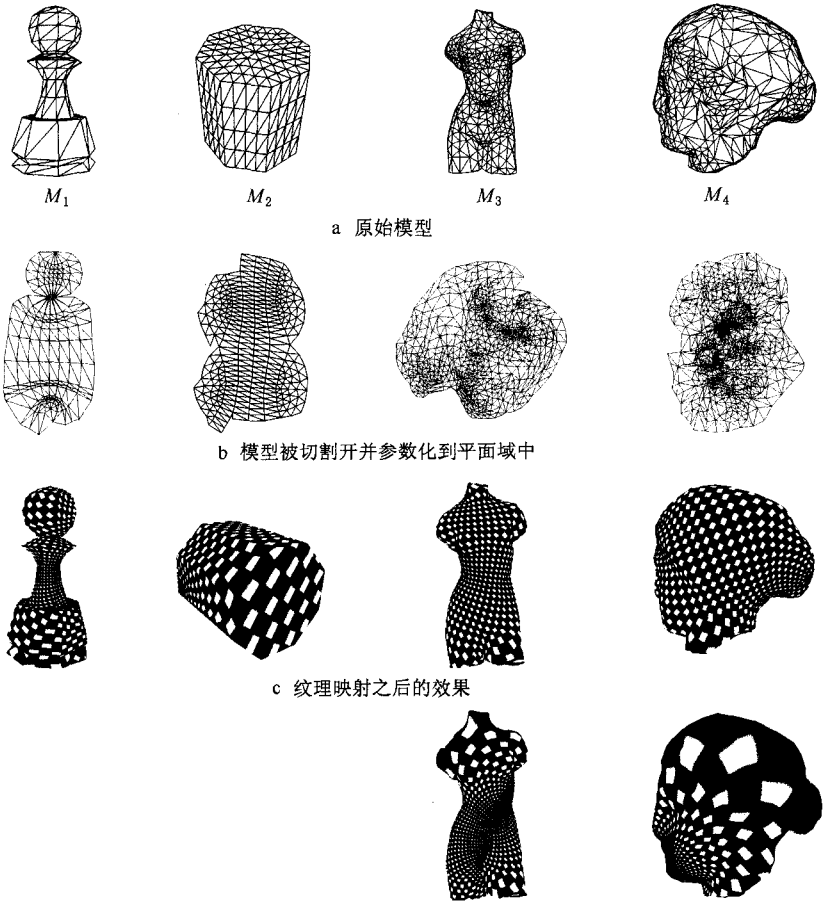


图 4 模型切割和参数化结果示例

算法也是通过对网格引入切割线来减小模型扭曲的,因此我们也实现了文献[4]中提取网格切割线的算法.但是由于文献[4]在参数化时采用了文献[13]中的参数化方法,该方法速度较慢(对于一个面片数 380 的网格切片需要花费 108 s),而且不利于比较参数化的结果,因此我们在实现时采用保角映射方法对用文献[4]中获取的切割后的网格进行参数化,并同样对图 4 中的模型进行了实验.文献[4]算法是基于角度近似的曲率来选择切割点的,其切

割点的选择结果不能对 CAD 模型 M_1 和 M_2 进行正确的全局参数化.用文献[4]算法对模型 M_3 和 M_4 参数化后的结果进行纹理映射的效果如图 4 d 所示.可以看出,其纹理扭曲大于本文算法的结果.图 6 所示为几个模型参数化的扭曲度数值的对比,可以看出,本文算法的扭曲度(式(3))优于其他几种算法的情况.而且由式(3)可知,扭曲度越接近 1,说明扭曲越小,而本文实验中的几个模型扭曲度都接近于 1.

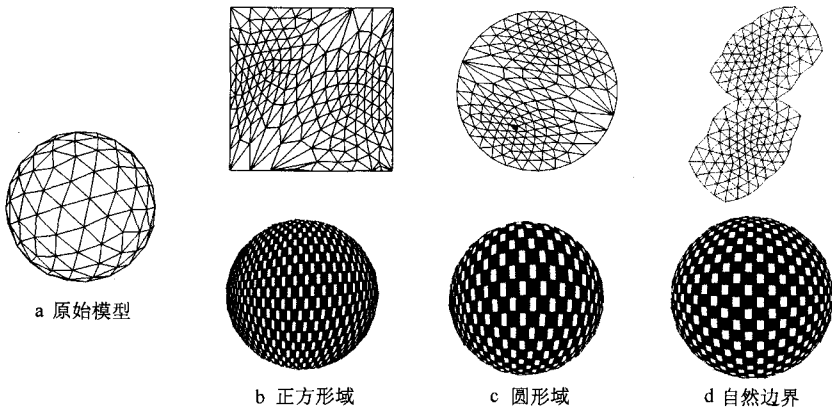


图 5 将模型参数化到不同参数域的扭曲度及纹理映射效果比较

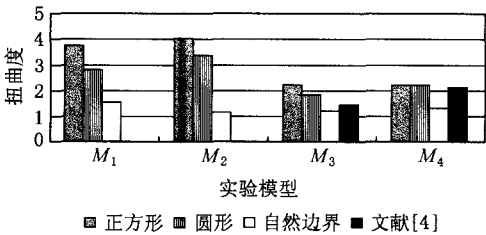


图 6 几个模型的扭曲度对比

本文算法的主要时间是耗费在网格的保角映射计算上.由于自然边界的保角映射问题可以归结为一个线性方程组的求解,且每个顶点对应的方程中的非零系数个数为该顶点的连通度,因此该方程组所对应的矩阵是一个稀疏矩阵.本文采用 GSP (GRUS Sparse Package) 软件包以加速方程组求解速度.对于图 4 中所示的实验模型,各模型被切割和参数化所用时间如表 1 所示,运行时间在一台 PIV 2.8 GHz CPU, 512 MB 内存的机器上测得.

表 1 对图 4 中所示模型进行切割和参数化所需运行时间

模型	面片数	运行时间/s
M_1	304	0.141
M_2	512	1.828
M_3	1 418	2.281
M_4	1 960	3.531

6 结 论

为了将一个闭合三角网格模型参数化到二维平面并同时降低参数化引入的角度扭曲,本文提出了一种对闭合三角网格模型进行切割和保角映射的算法.模型被切割后形成完整的一片,使得网格模型可以被全局参数化到二维参数域中,参数域的边界根据模型的形状由算法自然选择;切割线通过对模型的初始切线进行不断优化得到,优化过程主要由一个与参数化的几何扭曲度和合法性相关的成本函数来控制.根据具体应用的不同,可以选择相应的几何扭曲度量.在每次优化循环中,都以模型的切割线为边界将整个模型参数化到具有自然边界的参数域中,并用参数化的结果引导模型切割线的优化.该算法与固定边界的参数化相比,减小了参数化带来的扭曲,保证了全局保角映射的合法性.但是对于复杂模型,要将整个物体切割开并展开到一个面片中可能会带来较大的扭曲.

参 考 文 献

[1] Lee Y, Kim H S, Lee S. Mesh parameterization with a virtual boundary [J]. Computers & Graphics, 2002, 26(5): 677-686

- [2] Hormann K, Greiner G. MIPS: an efficient global parametrization method [M] //Laurent P J, Sablonnière P, Schumaker L L, eds. Curve and Surface Design. Nashville, Tennessee: Vanderbilt University Press, 1999: 153-162
- [3] Desbrun M, Meyer M, Alliez P. Intrinsic parameterizations of surface meshes [J]. Computer Graphics Forum, 2002, 21 (3): 209-218
- [4] Sheffer A. Spanning tree seams for reducing parameterization distortion of triangulated surfaces[C] //Proceedings of the Shape Modeling International, Banff, Alberta, 2002: 61-66
- [5] Bennis C, Vezien J-M, Iglesias G. Piecewise surface flattening for non-distorted texture mapping [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Las Vegas, Nevada, 1991: 237-246
- [6] Sorkine O, Cohen-Or D, Goldenthal R. Bounded-distortion piecewise mesh parameterization[C] //Proceedings of the 12th IEEE Visualization Conference, Boston, Massachusetts, 2002: 355-362
- [7] Maillot J, Yahia H, Verroust A. Interactive texture mapping [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Anaheim, California 1993: 27-34
- [8] Sander P, Snyder J, Gortler S, *et al.* Texture mapping progressive meshes [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 2001: 409-416
- [9] Peng Qunsheng, Hu Guofei. Survey on parametrization of triangular meshes [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(6): 731-739 (in Chinese)
- (彭群生, 胡国飞. 三角网格的参数化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6): 731-739)
- [10] Tan Jiawan, Jin Yicheng, Shi Jiaoying. Global parametrization of arbitrary topology triangular meshes [J]. Journal of Image and Graphics: A, 2003, 8(6): 686-691 (in Chinese)
- (谭家万, 金一丞, 石教英. 任意拓扑三角形网格的全局参数化[J]. 中国图象图形学报: A 版, 2003, 8(6): 686-691)
- [11] Floater M S. Parameterization and smooth approximation of surface triangulations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(3): 231-250
- [12] Eck M, Deroose T, Duchamp T. Multiresolution analysis of arbitrary meshes[C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 1995: 173-182
- [13] Sheffer A, Sturler E. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle based flattening [J]. Engineering with Computers, 2001, 17(3): 326-337
- [14] Lévy B, Petitjean S, Ray N, *et al.* Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, Texas, 2002: 362-371
- [15] Gu X F, Gortler S, Hoppe H. Geometry images[C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, Texas, 2002: 355-361