

三角网格的参数化

彭群生^{1,3)} 胡国飞^{1,2)}

¹⁾(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室 杭州 310027)

²⁾(浙江大学计算机科学与技术学院 杭州 310027)

³⁾(浙江大学数学系 杭州 310027)

摘 要 参数化变形的大小是衡量参数化好坏的标准. 基于这个标准, 分别从平面参数域和球面参数域对各种参数化方法的保面积性、保角性和等距性进行深入的讨论, 并从算法的理论基础、运算时间复杂度、适用范围和数值实现方法等方面作了详细的比较和论述. 最后, 结合作者在本领域的研究工作, 对参数化方法的研究趋势作了一个展望.

关键词 三角网格; 参数化; 变形; 综述
中图法分类号 TP391

Survey on Parameterization of Triangular Meshes

Peng Qunsheng^{1,3)} Hu Guofei^{1,2)}

¹⁾(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

²⁾(College of Computer Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

³⁾(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Aiming at low-distortion of parameterization of triangular meshes, this paper investigates the latest theoretical and practical results on authalic, conformal and isometric mappings for parameterizations in planar and spherical domains. Detailed comparisons of various algorithms on their theoretical basis, time and space complexity, applied environments and numerical implementations are presented, also the future research directions are highlighted.

Key words triangular meshes; parameterization; distortion; survey

1 前 言

随着现代网络技术的不断发展, 三维几何数据成为继声音、图像和视频之后的第 4 代多媒体数据类型. 而三角网格表示成为现在主流的复杂形状表面三维模型表示方法之一. 三角网格通常是由 3D 扫描仪获取复杂表面采样点的几何信息, 并通过拓扑重建得到. 三角网格的参数化是对这些三角网格几何和拓扑信息作进一步处理的基础, 它在计算机图形学、计算机辅助几何设计和数字几何处理等方面有着广泛的应用. 比如, 纹理映射利用表面网格参数化信息, 把一幅纹理图像映射到三维网格上, 使得表面网格看上去更加生动逼真^[1-3]; 曲面拟合通过参数化把离散的 3D 数据点用一个光顺的参数曲面来拟合^[4-7]; 重网格化(Remeshing)则利用参数化把三角化曲面转化成具有细分连通性的规则网格^[8-11], 并且在此基础上进一步作多分辨率分析^[12-13]; 还有很多数字几何处理, 如交互式三维绘画^[14]、三维网格编辑^[15]、网格 Morphing 等^[16-19]都需要事先把网格参数化到一个容易交互式处理的参数域.

面有着广泛的应用. 比如, 纹理映射利用表面网格参数化信息, 把一幅纹理图像映射到三维网格上, 使得表面网格看上去更加生动逼真^[1-3]; 曲面拟合通过参数化把离散的 3D 数据点用一个光顺的参数曲面来拟合^[4-7]; 重网格化(Remeshing)则利用参数化把三角化曲面转化成具有细分连通性的规则网格^[8-11], 并且在此基础上进一步作多分辨率分析^[12-13]; 还有很多数字几何处理, 如交互式三维绘画^[14]、三维网格编辑^[15]、网格 Morphing 等^[16-19]都需要事先把网格参数化到一个容易交互式处理的参数域.

原稿收到日期: 2003-06-20; 修改稿收到日期: 2003-07-30. 本课题得到国家自然科学基金(60103017)和国家重点基础研究发展规划项目(2002CB312101)资助. 彭群生, 男, 1947 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为真实感图形、虚拟现实、科学计算可视化、红外仿真. 胡国飞, 男, 1977 年生, 博士研究生, 主要研究方向为真实感图形、数字几何处理.

实际上,三角网格参数化可归结为这样一个问题:给定一个由空间点集 $P_i \in R^3$ 组成的二维流形三角网格 $M = \{T_j\}$ 和一个二维流形参数域 Ω_p , 寻求一个在参数域上的点 $P_i^* \in \Omega_p$ 到 $P_i \in M$ 的一一映射 ϕ , 使得参数域上的网格与原始网格拓扑同构, 并在保证参数域上三角形不重叠的同时, 谋求某种与原始网格之间的几何度量的变形最小化. 从数学角度来看, 满足这种参数化有效性的函数是很多的. 寻找这样的函数并不是一件很难的事情, 问题在于如何在这么多映射中找到一个相对比较“好”的映射? 人们通常使用一些几何的内在属性(如长度、角度和面积等)的变形程度来衡量参数化的好坏. 事实上, 由于二维流形曲面的复杂性, 人们对是否存在最优的参数化方法的答案还是未知的. 早在 20 世纪 60 年代研究人员就开始研究三角网格参数化问题, 直到 90 年代, 该问题才得到深入而广泛的研究, 并发表了很多关于参数化的文献. 这些技术都是为了解决一个内在几何变量的变形最小化问题 (Distortion Minimization). 通常, 可利用微分几何、弹性理论、等积映射、调和映射、保角映射和等测度映射等理论来对变形最小化问题建模, 并应用有限元分析以及数值分析等物理数学工具来求解变形最小化问题.

根据审视问题的角度不同, 三角网格参数化方法基本上有以下几种分类: (1) 根据参数域的不同可以分为平面参数化和球面参数化; (2) 根据网格的拓扑信息可以分为带边界网格参数化和封闭网格参数化, 甚至是任意拓扑的三角网格参数化; (3) 考察不同的内在几何变量的变形, 可以分为保面积参数化、保角参数化和等距参数化; (4) 根据计算复杂度不同可以分为线性方法和非线性方法; (5) 局部参数化和整体参数化方法等.

因为参数域的不同和所处理网格的拓扑信息不同, 参数化的方法具有很大的差异, 本文主要以参数域和网格的拓扑信息作为主线来分析各种三角网格参数化方法, 并把它们进行归类比较; 介绍各种参数化方法在各个领域中应用, 并展望三角网格参数化今后的发展.

2 基本概念

(1) 参数化的有效性. 通常所指的三角网格是一个可定向的二维流形三角网格, 所以三角网格参数化的有效性充分必要条件是: a. 原始网格顶点和

参数域网格顶点在参数化映射下是一一对应的(双射); b. 参数域上的三角网格不互相重叠. 如图 1 所示, P_1^* 是 P 的有效参数点, 而 P_2^* 是无效的

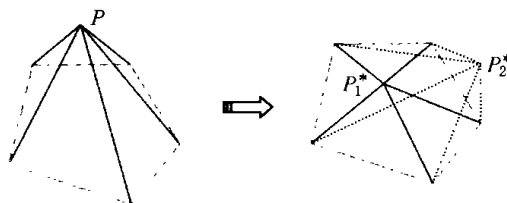


图 1 参数化的有效性

(2) 参数化的度量. 视觉上的平滑效果好坏是衡量参数化变形的一个直观标准, 参数化的变形有以下两种最常用的定量标准:

a. 用参数域网格与原始网格之间的面积相对误差和角度相对误差等误差测度来衡量变形程度^[20]

$$\begin{cases} Dist_{area} = \sum_j \left(\frac{S(T_j)}{\sum_{T_i \in M} S(T_i)} - \frac{S(T_j^*)}{\sum_{T_i^* \in M^*} S(T_i^*)} \right)^2 \\ Dist_{angle} = \sum_j \left(\sum_{i=1,2,3} \left[\frac{A_i}{2\pi} - \frac{A_i^*}{2\pi + e} \right]^2 \right) \end{cases} \quad (1)$$

其中, j 为网格的三角形个数指标; $S(\cdot)$ 和 $A \cdot$ 分别是三角形面积和角度; e 表示三角形的角盈(球面域). 该误差测度是一个整体变形度量, 不体现网格的局部三角形变形.

b. 基于几何变形(Geometric stretch)度量空间的方法^[21]. 首先定义三角形之间仿射变换的特征值度量空间

$$L^2(T) = \sqrt{\frac{1}{2}(\Gamma^2 + \gamma^2)}, L^\infty(T) = \Gamma,$$

其中 Γ 和 γ 分别为仿射变换的 Jacobi 矩阵的最大特征值和最小特征值. 然后在这个度量空间的基础上定义整体网格的参数化变形

$$\begin{cases} L^2(M) = \sqrt{\sum_{T_i \in M} (L^2(T))^2 S(T_i)} \sqrt{\sum_{T_i \in M} S(T_i)} \\ L^\infty(M) = \max_{T_i \in M} L^\infty(T_i) \end{cases} \quad (2)$$

这种基于纹理扭曲程度的度量既可以反映局部三角形变形又可以衡量整体网格参数化的变形, 是一种更为普遍的度量方法. Sander 等把它拓展到信号的变形(Signal stretch)度量^[22]. 值得注意的是, 这些度量首先在平面参数域里被应用, 后来被推广到球面参数域上. 我们曾用式(1)来度量凸组合球面参数化的变形^[20], 周昆^[15]和 Praun 等^[11]分别在

球面参数化上引用并发展了式(2).

3 平面参数化方法

直观上讲, 平面参数化就是把一个空间三角网格平摊成平面三角网格, 在保证平面三角网格有效性的同时最小化变形. 参数化方法的研究对象主要集中在带单条边界的二维流形网格上, 因为封闭网格甚至是任意拓扑的网格都可以通过分而治之(Divide and Conquer)的方法转化为带边界网格.

3.1 凸边界方法

凸边界方法的基本思想是把网格的边界映射到一个平面凸集的边界, 把网格的内点映射到这个凸集的内点. 这类方法主要有凸组合方法和能量最小化方法

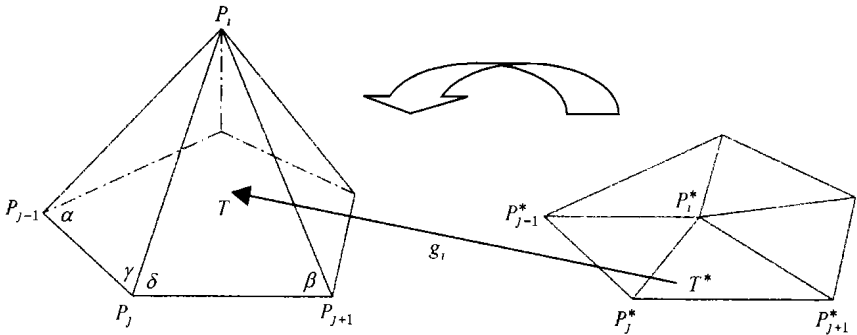


图2 3D三角网格和2D三角网格的对应

虽然该方法产生较大的角度变形, 但是由于其具有保持 1-ring 形状不变性, 而称之为保形(Shape Preserving)参数化; 另外, 由于将该方法求解问题转化为一个大型的稀疏线性方程组, 而整个参数化过程只需要求解线性系统, 因此是相当快速的, 现在它已成为一个应用非常广的参数化方法. Floater 将保形凸组合网格参数化方法扩展到非网格(Meshless)的点集参数化上, 进行三维离散数据点重建及曲面拟合^[5, 26]. Praun 等利用保形参数化进行数字几何处理^[27]. Lee 等结合虚拟边界把凸组合方法拓展到非凸边界的平面参数化处理^[28]. 我们把该方法拓展到球面上, 同样快速地得到一个保形球面参数化^[20].

3.1.2 能量方程最小化方法

该类方法关键在于寻找一个能量方程, 称为目标函数, 并且适当地给出该目标函数的边界条件, 然后求解目标函数的极值得到一个参数化. 一个最典型的方法就是引入弹性理论的 Hooke 法则, 把网格的各条边视为具有弹性的弹簧, 定义整个网格的能量

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in Edges} \lambda_{ij} \|P_i^* - P_j^*\|^2,$$

3.1.1 凸组方法

凸组方法是由 Tutte 在 1960 年提出的^[23], 其基本思想是把网格的边界映射到一个平面上的凸多边形, 而内点取以它为中心点的 1-ring 的平均值. Tutte 证明了该方法所得到的三角形不会相互重叠, 如图 1 所示. 但基于图论给出的这个嵌入图(Graph Embedding)方法^[24]没有充分考虑到原始网格的几何信息, 使得参数化结果的变形较大. 在 Tutte 的基础上, Floater 通过给每条边附加一个与边长相关的权值改进了凸组方法^[25]. 它的基本思想是固定边界点, 内点由它的相邻点的加权凸组合给出(如图 2 所示).

$$P_i^* = \sum_{\{j: \{i,j\} \in Edges\}} \lambda_{ij} P_j^*,$$

其中, $\sum_{\{j: \{i,j\} \in Edges\}} \lambda_{ij} = 1$, $\lambda_{ij} = 1/L_{ij}$. 同时证明了该凸组方法解的存在性和惟一性.

置梯度为 0, 诱导出一个线性方程组

$$\frac{\partial E}{\partial P_i} = \sum_{1\text{-ring}} \lambda_{ij} (P_i^* - P_j^*) = 0.$$

这类方法的区别在于能量系数 λ_{ij} 的选取. 简单地, 推广空间曲线参数化的方法^[29], 取 $\lambda_{ij} = \|P_i - P_j\|^{-1}$ 时就是弦长参数化; 取 $\lambda_{ij} = \|P_i - P_j\|^{-1/2}$ 时就是向心参数化; 取 $\lambda_{ij} = 1$ 时就是一致参数化. 然而, 系数的简单取法往往使参数化不具有很好的保角特性. Eck 等提出调和能量方程, 给出另一个系数^[12]

$$\lambda_{ij} = (L_{i,j-1}^2 + L_{j,j-1}^2 - L_{i,j}^2) \langle P_i, P_j, P_{j-1} \rangle + (L_{i,j+1}^2 + L_{j,j+1}^2 - L_{i,j}^2) \langle P_i, P_j, P_{j+1} \rangle.$$

其中, L 表示边长, $\langle \cdot \rangle$ 表示三个顶点的面积. 调和映射是一个离散的准保角映射, 它是连续保角映射的一个线性逼近, 在局部区域保角性(Conformality)导致它具有很小的角度变形. 另外, Pinkall 等从另一个角度

$$E_D(f) = \frac{1}{2} \int_M \|\nabla f\|^2 dA,$$

在连续 Dirichlet 积分基础上定义离散能量函数, 从

数学上证明最小化这个能量函数得到一个离散的最小化曲面和曲面卷积, 并且得到和 Eck 同样的结果^[30]

$$\lambda_{ij} = (\cot \alpha + \cot \beta) \setminus 2.$$

同样, 该方法具有局部保角的性质. 进一步, Desbrun 等给出基于表示曲面 Gauss 曲率积分的欧拉示性函数, 引进二次能量^[31]

$$E_x = \sum_{j \in N(i)} \frac{\cot \gamma + \cot \delta}{L_j^2} \|P_i^* - P_j^*\|^2,$$

最小化二次能量, 得到系数为

$$\lambda_{ij} = \frac{\cot \gamma + \cot \delta}{L_j^2}.$$

虽然调和映射具有很好的性质, 但上述方法只是对调和映射的一个线性逼近, 并且在那些网格的尖端处的 λ_{ij} 可能为负值. λ_{ij} 非正和边界非凸都可能产生三角形重叠, 这意味着该方法的解不总是存在的. 即便如此, 它仍比凸组合方法变形要小. 对于负值情况, Eck 用一致参数化来代替. 而最新的一种方法是中值(Mean Value)方法^[32]

$$\lambda_{ij} = \left[\tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\delta}{2} \right] \setminus L_{ij}.$$

该方法不仅避免了负值情况, 并且与调和映射的参数化结果相差无几. 能量最小化方法的关键问题在于能量系数的选择, 其最大的优点就是只需求解一个线性系统, 具有很小的时间和运算复杂度, 并且很容易实现, 使得它成为应用最广的参数化算法. 另外, Maillot 等基于弹性理论, 通过最小化 Greer Larrange 变形张量范数来实现^[33]. Levy 等则基于正交性和齐次空间理论来最小化能量方程得到参数化^[33].

3.2 非凸边界方法

现有的非凸边界方法大多数不需要事先把网格的边界映射到一个凸集的边界, 边界点的参数值在参数化过程中求得, 但是这类方法往往需要额外的计算量

3.2.1 虚拟边界法

该类方法主要通过改变参数域的边界来减少参数化变形. Floater 直接把弦长比例映射到正方形作为边界^[51]; Eck 等则用单位圆来作边界^[12]; 而 Greiner 等用最小二乘意义上的逼近边界点的曲线作为边界^[34], 生成一个尽可能保持边界形状不变的参数域边界; Lee 等^[28]甚至引进 Edgetweaking 方法^[35]生成更逼近原始网格的边界. 它们共同的特点是这些边界围成的区域必须是凸区域, 否则参数化

无效. 虚拟边界的主要思想是通过原始网格增加一条或者多条虚拟的边界生成一个新的网格, 然后利用凸边界方法对新的网格进行参数化. 原始网格的边界点在新网格下被视为内点, 参数域上的原始网格的边界不再是一个凸边界^[28]. 如图 3 所示, 每个顶点拓展出 4 个三角形, 形成了虚拟边界. 我们把该方法进一步拓展到球面上, 同样取得很好的效果^[20].

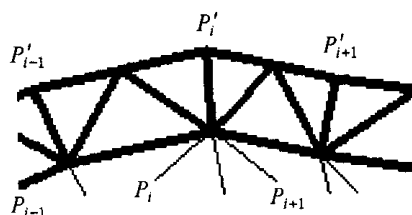


图 3 虚拟边界的生成

3.2.2 MIPS 方法

能量最小化方法在不固定边界的情况下, 能量最小将使得所有点收缩为一点, 形成一种病态收敛. Hormann 等提出了一个全局的非线性不定边界的方法(Most Isometric Parameterization, MIPS)^[36], 该方法无需事先给出边界, 只需对原始网格三角形和对应的参数域三角形之间引进原子线性映射 $g_i = Ax + b$, 如图 2 所示, 然后求解一个带约束的非线性系统

$$K = \sum_{T_i \in M} K_F(g_i),$$

$$K_F(g_i) = \frac{\cot \alpha |a|^2 + \cot \beta |b|^2 + \cot \gamma |c|^2}{2S(T_i^*)}.$$

得到包括内部点和边界点在内的所有点的参数值. 虽然原子线性映射具有三角形的平移、正交变换和变比不变性, 然而该方法需要求解一个非线性系统, 而且未从理论上证明其选取的特征值相关的 Frobenius 范数是最优的, 但 MIPS 无需固定边界的整体性质得到大家的关注, Labsik 等把该方法应用到多边形曲面的重网格化^[37].

3.2.3 分割展平法

分割展平法的主要思想是把复杂的三角网格分割成多个可展(Developable)面片, 然后展平. 由于可展曲面可以毫无变形地平摊到平面, 因此分割过程自动完成三角网格的平面参数化. 具有代表性的是 Sorkine 等提出的局部分割展平法^[38]和 Sheffer 等提出的基于 ABF(Angle Based Flattening)的整体展平方法^[39]. 前者首先选取一个种子三角形, 把它安置到平面; 然后从该三角形出发, 依据第 2 节中给出的特征值度量, 每次选取一个变形最小的相邻三角

形展平, 展平时保证所有三角形不会重叠, 直到没有可展平的三角形; 最后重新选取种子三角形进行新一轮的展平, 每一次展平操作就生成一个新的可展面片。局部分割展平法算法相当简单, 具有很高的运算效率, 适用于任意拓扑。后者则是一个整体求解带约束的非线性的方法, 与 Sorkine 一样, Sheffer 等给出一系列防止展平重叠的约束条件, 并且证明了这些条件是保证参数化有效性的充分必要条件。虽然 ABF 方法无需设定边界, 并且在纹理映射时都取得了比凸组合和调和能量更好的结果, 但是用 Lagrange 乘子法求解非线性系统代价是很高的, 且 ABF 方法不能解决多边界问题。

3.3 封闭网格参数化方法

对封闭网格通常是采用分而治之的方法, 即切割封闭网格成多个与圆盘同胚的面片。它实质上是一种分段参数化 (Piecewise Parameterization), 其与分割展平法的区别在于, 它的面片不是平面可展曲面, 因此必须应用带边界的参数化方法来进一步处理每一个面片。封闭网格参数化的变形大小的关键在于切割方法的好坏。除了用交互式手工切割之外^[40-41], Eck 等用 Voronoi 图和 Delaunay 三角化的技术来分割三角网格^[12]; Maillot 等把一些法向相似的三角面片聚集成一个大面片^[3], 另外也有通过网格简化后的基复型面片 (Base Complex) 来归类^[33, 42]; 而 Sander 等利用三角面片的平坦性 (Planarity) 和紧致性 (Compactness) 标准来分割三角网格, 并用几何变形来度量这种分割的好坏^[21]。Gu 等用迭代的方法得到一个最小变形的切割生成几何图像^[43]。但是在封闭网格的切割线上, 同一个物理点被切割线分离成两个甚至多个参数点, 即同一个 (x, y, z) 对应多个 (u, v) , 必将导致各个面片之间参数化的不连续性, 直接引起纹理映射视觉上的非真实性。因此, 从拓扑结构上来看, 对封闭的网格是不存在连续的平面参数化的。如何最优地把三角网格切割成与圆盘同胚的面片, 见文献[44]。

3.4 其他平面参数化方法

多分辨率方法, 也称为累进参数化方法, 该方法建立在网格简化和多分辨率表示的基础上, 在各个层次对网格进行参数化。例如, Hormann 等通过半边折叠方法建立累进网格^[45], 给出了一个层次参数化的表示和实现^[46]。另外, Bennis 等提出基于微分几何的方法^[11], 通过把曲面的等参数曲线映射到参数域完成参数化, 并保持测地曲率不变。

4 球面参数化方法

由于平面参数化的分而治之的作法本身就增加了参数化的变形, 对于很多数字几何处理的应用来讲 (如三维 Morphing), 把封闭网格分割成面片进行平面参数化方法不仅困难而且不合理, 为此, 近几年出现了很多球面参数化方法, 避免这种不必要的拓扑分割。球面参数化方法是最近几年计算机图形学领域的研究热点之一, 特别是 SIGGRAPH' 03 上有两篇文章^[11, 47]讨论这个问题。

4.1 基于松弛的球面参数化方法

Kent 等提出了一个简单的球面参数化方法^[48], 类似于平面域情况的能量方程, 他们模拟气球的膨胀将三角网格黏附在球面上, 但是该方法在理论上并不严谨, 也不能保证参数化的有效性; Alex a 提出了基于弹性理论的松弛参数化方法^[16-17], 该方法把网格的所有顶点投影到模型的最小包围球面上, 然后保持球面上 6 个顶点的位置不动, 用离散 Laplace 平均算子来松弛球面的其他顶点, 达到球面参数化的目的; Kobbelt 等也提出了类似局部松弛的方法^[49]; 但是这些方法都不是强壮的球面参数化方法, 它们都需要有很强的前提假设, 并且没有从理论上考虑参数化角度变形的问题, 甚至对很多网格产生非有效参数化结果。我们提出了基于凸组合的球面参数化方法^[20], 把平面向量的凸组合概念拓展到球面向量上, 通过高效地求解一个线性系统完成参数化过程, 具有很好的保形 (Shape preserving) 性质。Gotsman 等^[47]把平面 Laplace 算子推广到 Laplace Beltrami 算子, 然后通过解一个非线性系统来求解球面参数化, 从理论上证明了该方法的可靠性, 但该方法参数化求解非常耗时。

4.2 保角参数化方法

可展曲面 (高斯曲率为 0) 可以找到它到平面的等距变换使得参数化变形为 0, 这是最理想的, 而一般的网格总是存在变形的问题。由于保角性质使得参数化在理论上保证局部不变形 (如图 4 所示), 保角映射理论在三角网格参数化的应用成为当前参数化研究的热点之一。Gu 等证明了对于零亏格的封闭曲面, 调和映射和保角映射是等价的。因此, 调和映射能量和 Dirichlet 能量是一种准保角映射^[50], Levy 等提出基于 Cauchy-Riemann 等式的最小二乘逼近准保角映射的参数化方法^[33], 可以处理复杂边界的三角网格, 这些都是针对平面域情况的。其他

学者也提出了很多关于球面域的方法. Wang 等扩展调和映射到球面上, 通过最小化调和能量得到球面参数化, 并应用到医学大脑核磁共振 (MRI) 处理上^[51]. Hurdal 等^[52] 和 Stephenson^[53] 用圆填充 (Circle Packing) 方法来逼近包括保角映射在内的常规解析函数, 同样给出一个准保角的参数化映射. Argenet 等通过线性逼近 Laplace-Beltrami 算子把与球面同胚拓扑的三角网格参数化到球面, 则是一个整体保角映射方法^[54]. Haker 等也提出了一种类似的球面上保角逼近映射^[55], 理论上通过删除曲面上的一点可以调和映射到一个无限伸展的平面上, 最后把无限平面用立体投影的方法映射到球面. 由微分几何理论可知, 任何 R^3 上 C^1 曲面都存在保角映射可将它映射到 R^2 的固定区域, 这个定理对于离散的网格 (分段的 C^1 曲面) 基本上成立, 但不完全成立. 网格实际上是一种分段的 C^1 曲面, 而在 C^1 上的双射不一定保证分段 C^1 上的性质. 另外, Gu 等通过用单纯形上同调逼近 De Rham 上同调以及用线性系统表示 Laplace-Beltrami 和 Hodge 星算子, 给出了一个快速求解球面保角参数化的结构表示^[56], 进一步分析了保角映射的性质, 提出网格的整体保角映射方法, 用非线性优化方法来求解整体保角映射, 并把它应用到非零亏格的拓扑上^[50, 57].

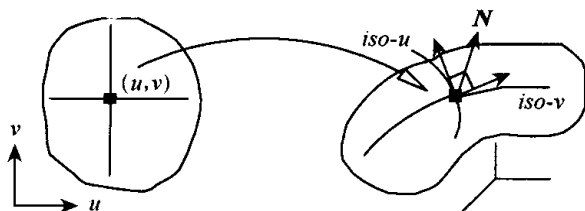


图 4 保角映射

4.3 累进球面参数化方法

Shapiro 等提出了一个基于网格简化的球面参数化方法^[19], 该方法通过删除 1-ring 阶数小于 6 的中心点, 重新三角化由删除操作形成的空洞, 直到原始网格简化为四面体为止; 然后将这个四面体映射为球面, 并通过逆操作把被删除的顶点添加至球面上. 这类贪婪算法虽然处理很方便, 但是很难进一步对参数化进行优化. 与这种顶点删除方法类似, Quicken 等利用半边折叠的方法简化网格^[58] 并引进球面调和映射. 在此基础上, 周昆等也提出了基于二次误差^[59] 的边折叠累进球面参数化算法^[60, 61], 并且把 Sander 的几何变形度量从平面域推广到了球面域, 用它来作全局优化. Praun 等^[11] 系统地总结了累进球面参数化, 并将该技术应用到重网格化

Morphing 压缩等领域. 这类算法都是基于网格简化的思想, 简化时选择顶点删除或者边折叠是次要的, 关键在于从粗网格到精细网格 (Coarse to Fine) 过程中如何附加在简化过程中被删除的顶点. Shapiro 等采用枚举方法设计了阶数小于 6 的 1-ring 顶点附加方案, 虽然保证了可靠性, 但是不够灵活, 并且没有从参数化变形上考虑问题^[19]. Quicken 等采用重心坐标的方法^[58], 而周昆等则是用局部保角映射来保证附加的顶点落在 1-ring 内部, 然后用几何变形度量作全局优化^[61]. Praun 等^[11] 基于几何和信号变形度量最小化的原则, 既有效地达到参数化在度量意义下最优, 又保证算法收敛, 是目前比较先进的球面参数化技术. 累进参数化的方法与其他参数化方法相比的最大优点就是可以快速处理复杂网格.

4.4 其他球面参数化方法

除此之外, Sheffer 等提出了一个强壮球面参数化方法^[62], 它实质上是平面 ABF 方法在球面的拓展. 由于需要求解一个带约束的非线性系统, 对于复杂网格和大型网格的运算时间都是很长的, 因此该方法比较适合对简单网格的球面参数化. Grimm^[63] 把网格分割成 6 个面片, 首先分别映射到正方体的 6 个面, 接着把正方体映射到球面, 关键在于如何分割原始的三角网格. 上述方法对复杂网格的参数化都不如累进球面参数化方法运算快.

5 参数化方法的实现和比较

求解参数化问题基本上可分为线性系统和非线性系统, 带约束的或者无约束的. 通常用 LU 分解^[6] 或者 Gauss-Seidel 迭代求解线性系统^[50]; 对于大型稀疏线性系统, 则采用超松弛迭代 (SOR) 更有效. 另外, 在文献[64]中也提到了很多其他方法, 如 Jacobi 迭代, 共轭梯度法 (CG) 等. 对于保形参数化, 双共轭梯度法 (BCG) 最有效, 其他的则是预条件共轭梯度法 (PCG) 最优. 对于非线性系统, 可以用 Lagrange 乘子法求解极值问题^[28], 也可以使用多变量共轭梯度法和类 Gauss-Seidel 方法^[36]. 而集成 MATLAB 的 fmincon 和 fsolve 等接口到 VC++ 环境下求解带约束的非线性系统^[47, 62] 也是非常高效的.

图 5 所示为典型参数化的实验结果. 其中, 图 5a, 5h, 5k 所示分别为原始三角网格; 图 5b~5g, 5i 所示为我们在 VC++ 下结合 MATLAB 函数接口实现的参数化方法, 包括 Tutte 的重心坐标, Floater 的凸组合, Eck 的调和映射, Lee 的虚拟边

界, 以及我们的球面凸组合等; 图 5 j 所示为 Praun 的保留法向量信息的累进球面参数化结果; 图 5 l~

5 n 所示为基于 Gotsman 的球面参数化理论框架的各种算子的参数化结果。

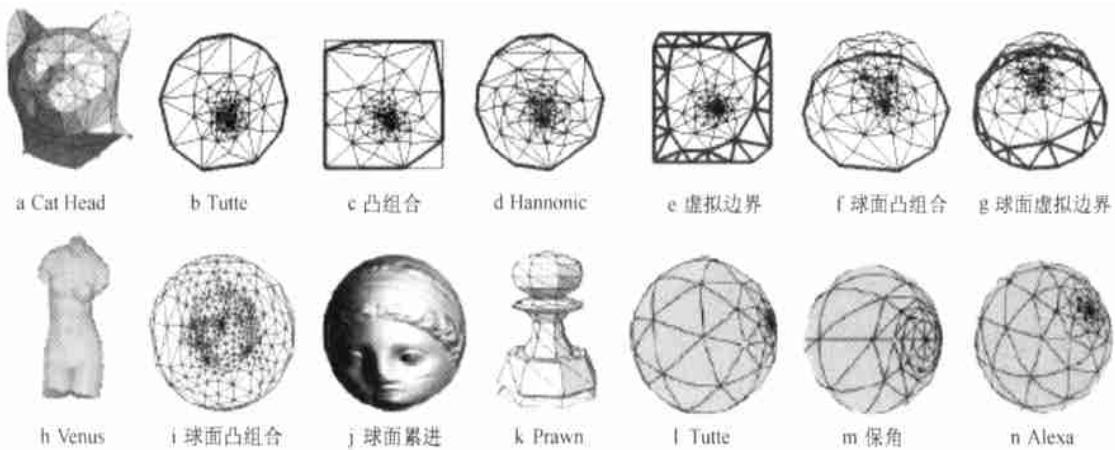


图 5 典型参数化方法的实现结果可视化

6 参数化的现状分析、评价以及展望

三角网格参数化是图论、微分几何、计算机图形学、计算机辅助几何设计、数字几何处理、算法设计以及程序设计等学科的交叉研究领域。目前, 有很多研究机构在做这方面的工作, 其中包括微软亚洲研究院(MSRA)、浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室、美国的哈佛大学及以色列科技大学等。

参数化本身是一个很古老的问题, 人们最早把这种技术应用在测地学、绘图学等领域, 随着计算机的飞速发展和多媒体娱乐应用的推动, 它在计算机图形学领域已占据举足轻重的地位, 并且成为近几年来国际学术界一个前沿研究领域, 处于迅速发展阶段。因此, 掌握其发展方向对数字几何处理的研究有着重要的指导意义。我们认为, 今后参数化方法的研究应该侧重于完善理论, 最小化参数化的变形和降低参数化算法的复杂度等。

参 考 文 献

[1] Bennis C, V'ezien J-M, Iglesias G. Piecewise surface flattening for non-distorted texture mapping [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Las Vegas, 1991. 237~ 246

[2] Levy B. Constrained texture mapping for polygonal meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 2001. 417~ 424

[3] Mailhot J, Yahia H, Verroust A. Interactive texture mapping [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Anaheim, 1993. 27~ 34

[4] Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, 1996. 325~ 334

[5] Floater M S. Parametric tilings and scattered data approximation [J]. International Journal of Shape Modeling, 1998, 4(1): 165 ~ 182

[6] Fasshauer G E, Schumaker L L. Minimal energy surfaces using parametric splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(1): 45~ 79

[7] Krishnamurthy V, Levoy M. Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, 1996. 313~ 324

[8] Alliez P, Meyer M, Desbrun M. Interactive geometry remeshing [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, 2002. 347~ 354

[9] Gu X, Gortler S, Hoppe H. Geometry images [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, 2002. 355~ 361

[10] Surazhsky V, Alliez P, Gotsman C. Isotropic remeshing of surfaces: A local parameterization approach [A]. In: Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable, Sandia, 2003. 215~ 224

[11] Praun E, Hoppe H. Spherical parametrization and remeshing [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Diego, 2003. 340~ 349

[12] Eck M, DeRose T, Duchamp T, et al. Multiresolution analysis of arbitrary meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 1995. 173~ 182

[13] Lee A W F, Sweldens W, Schröder P, et al. MAPS: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Orlando, 1998. 95~ 104

- [14] Pat Hanrahan, Paul E Haeberli. Direct WYSIWYG painting and texturing on 3D shapes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Dallas, 1990. 215~ 223
- [15] Zhou Kun. Digital geometry processing: Theory and applications [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2002 (in Chinese)
(周 昆 数字几何处理: 理论和应用[博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2002)
- [16] Alexa M. Merging polyhedron shapes with scattered features [J]. The Visual Computer, 2000, 16(1): 26~ 37
- [17] Alexa M. Recent advances in mesh morphing [J]. Computer Graphics Forum, 2002, 21(2): 173~ 196
- [18] Kanai T, Suzuki H, Kimura F. Metamorphosis of arbitrary triangular meshes [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2000, 20(2): 62~ 75
- [19] Shapiro A, Ayellet T. Polyhedron realization for shape transformation [J]. The Visual Computer, 1999, 14(8/9): 429~ 444
- [20] Hu Guofei, Fang Xing, Peng Qunsheng. Convex combination spherical parameterization [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 16(5): 632~ 637 (in Chinese)
(胡国飞, 方 兴, 彭群生 凸组合球面参数化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 16(5): 632~ 637)
- [21] Sander P, Snyder J, Gortler S, *et al.* Texture mapping progressive meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 2001. 409~ 416
- [22] Sander P, Gortler S, Snyder J, *et al.* Signal specialized parametrization [A]. In: Proceedings of Eurographics Workshop on Rendering, Pisa, Italy, 2002. 87~ 100
- [23] Tutte W T. Convex representations of graphs [A]. In: Proceedings of the London Mathematical Society, London, 1960. 304~ 320
- [24] Tutte W T. How to draw a graph [A]. In: Proceedings of the London Mathematical Society, London, 1963. 743~ 768
- [25] Floater M S. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(3): 231~ 250
- [26] Floater M S, Reimers M. Meshless parameterization and surface reconstruction [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(2): 77~ 92
- [27] Praun E, Sweldens W, Schröder P. Consistent mesh parameterizations [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 2001. 179~ 184
- [28] Lee Y, Kim H S, Lee S. Mesh parameterization with a virtual boundary [J]. Computers & Graphics, 2002, 26(5): 677~ 686
- [29] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design [M]. 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1993
- [30] Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates [J]. Experimental Mathematics, 1993, 2(1): 15~ 36
- [31] Desbrun M, Meyer M, Alliez P. Intrinsic parameterizations of surface meshes [J]. Computer Graphics Forum, 2002, 21(3): 209~ 218
- [32] Floater M S. Mean value coordinates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 19~ 27
- [33] Levy B, Mallet J-L. Non distorted texture mapping for sheared triangulated meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Orlando, 1998. 343~ 352
- [34] Greiner G, Hormann K. Interpolating and Approximating Scattered 3D Data with Hierarchical Tensor Product B Splines [M]. In: Meheute A L, Rabut C, Schumaker L L, eds. Surface Fitting and Multiresolution Methods. Nashville, Tennessee: Vanderbilt University Press, 1997. 163~ 172
- [35] Sederberg T W, Gao P, Wang G, *et al.* 2D shape blending: An intrinsic solution to the vertex path problem [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Anaheim, 1993. 15~ 18
- [36] Hormann K, Greiner G. MIPS: An Efficient Global Parametrization Method [M]. In: Laurent P J, Sablonnière P, Schumaker L L, eds. Curve and Surface Design. Nashville, Tennessee: Vanderbilt University Press, 1999. 153~ 162
- [37] Labsik U, Hormann K, Greiner G. Using most isometric parametrizations for remeshing polygonal surfaces [A]. In: Proceedings of Geometric Modeling and Processing, Hong Kong, 2000. 220~ 228
- [38] Sorkine O D, Cohen-Or D, Goldenthal R, *et al.* Bounded distortion piecewise mesh parameterization [A]. In: Proceedings of the 12th IEEE Visualization Conference, Boston, 2002. 355~ 362
- [39] Sheffer A, Sturler E. Surface parameterization for meshing by triangulation flattening [A]. In: Proceedings of the International Meshing Roundtable Conference, New Orleans, Louisiana, 2000. 161~ 172
- [40] Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, 1996. 325~ 334
- [41] Pedersen H. Decorating implicit surfaces [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 1995. 291~ 300
- [42] Guskov I, Vlimce K, Sweldens W, *et al.* Normal meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, 2000. 95~ 102
- [43] Gu X, Gortler S, Hoppe H. Geometry images [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, 2002. 355~ 361
- [44] Erickson J, Har-Peled S. Optimally cutting a surface into a disk [A]. In: Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, Barcelona, Spain, 2002. 244~ 253
- [45] Hoppe H. Progressive meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, 1996. 99~ 108

- [46] Hormann K, Greiner G, Campagna S. Hierarchical parametrization of triangulated surfaces [A]. In: Proceedings of Vision, Modeling, and Visualization, Erlangen, Germany, 1999. 219 ~ 226
- [47] Gotsman C, Gu X, Sheffer A. Fundamentals of spherical parameterization for 3D meshes [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Diego, 2003. 358~ 363
- [48] Kent J R, Wayne E Carlson, Richard E Parent. Shape transformation for polyhedral objects [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Chicago, 1992. 47~ 54
- [49] Kobbelt L P, Vorsatz J, Labisk U, *et al.* A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces [J]. Computer Graphics Forum, 1999, 18(3): 119~ 129
- [50] Gu X, Yau S-T. Global conformal surface parameterization [A]. In: Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing, Aachen, Germany, 2003. 127~ 137
- [51] Wang Y, Gu X, Chan Tony F, *et al.* Intrinsic brain surface conformal mapping using a variational method [OL]. <http://abel.math.harvard.edu/~ylwang/resume.htm>
- [52] Hurdal M, Bowers P, Stephenson K, *et al.* Quasi-conformally flat mapping the human cerebellum [A]. In: Proceedings of Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention, Cambridge, UK, 1999. 279~ 286
- [53] Stephenson K. Approximation of conformal structures via circle packing [A]. In: Proceedings of Computational Methods and Function Theory, Nicosia, Cyprus, 1997. 551~ 582
- [54] Angenent S, Haker S, Tannenbaum A, *et al.* Conformal geometry and brain flattening [A]. In: Proceedings of Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention, Cambridge, UK, 1999. 271~ 278
- [55] Haker S, Angenent S, Tannenbaum A, *et al.* Conformal surface parameterization for texture mapping [J]. IEEE Transactions on Visualizations and Computer Graphics, 2000, 6(2): 181~ 189
- [56] Gu X, Yau S-T. Computing conformal structures of surfaces [J]. Communications in Information and Systems, 2002, 2(2): 121~ 146
- [57] Gu X. Parametrization for surfaces with arbitrary topologies [D]. Cambridge: Harvard University, 2003
- [58] Quicken G, Brechbuhler M, Hug C, *et al.* Parametrization of closed surfaces for parametric surface description [A]. In: Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, South Carolina, 2000. 354~ 360
- [59] Garland M, Heckbert P. Surface simplification using quadric error metric [A]. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, 1997. 209 ~ 216
- [60] Zhou Kun, Bao Hujun, Shi Jiaoying, *et al.* A framework for digital signal processing over arbitrary meshes [R]. Hangzhou: Zhejiang University, 2002
- [61] Zhou Kun, Bao Hujun, Shi Jiaoying. A unified framework for digital geometry processing [J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(9): 904~ 909 (in Chinese)
(周 昆, 鲍虎军, 石教英. 统一的数字几何处理框架 [J]. 计算机学报, 2002, 25(9): 904~ 909)
- [62] Sheffer A, Gotsman C, Dyn N. Robust spherical parameterization of triangular meshes [A]. In: Proceedings of the 4th Israel-Korea Bi-National Conference on Geometric Modeling and Computer Graphics, Tel Aviv, Israel, 2003. 94~ 99
- [63] Grimm C. Simple manifolds for surface modeling and parametrization [A]. In: Proceedings of Shape Modeling International, Banff, Canada, 2002. 237~ 244
- [64] Hormann K. Theory and applications of parameterizing triangulations [D]. Erlangen: University of Erlangen, 2001