

工学硕士学位论文

真实感流体模拟算法的研究

李娜

哈尔滨工业大学

2007 年 7 月

国内图书分类号: TP391.9

国际图书分类号: 621.31

工学硕士学位论文

真实感流体模拟算法的研究

硕 士 研 究 生: 李娜

导 师: 唐好选副教授

申请学位级别: 工学硕士

学 科 、 专 业: 计算机科学与技术

所 在 单 位: 计算机科学与技术学院

答 辩 日 期: 2007 年 7 月

授予学位单位: 哈尔滨工业大学

Classified Index: TP391.9

U.D.C.: 621.31

Dissertation for the Master Degree in Engineering

THE RESEARCH OF REAL FLUID SIMULATION METHODS

Candidate:	Li Na
Supervisor:	Associate Prof. Tang Haoxuan
Academic Degree Applied for:	Master of Engineering
Specialty:	Computer Science and Technology
Affiliation:	School of Computer Science and Technology
Date of Oral Examination:	July, 2007
Degree-Conferring-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘要

通过图形学的方法描述自然界的各类现象一直以来都是计算机图形学研究者所关注的重点，而对动态流体的模拟问题更是其中的难点研究问题。从流体模拟方法的发展进程来看，经典几何中诸如直线、平滑曲线、平面以及边界整齐的平滑曲面等主要描述工具在描述流体这种复杂现象时已经显得无能为力，于是人们逐渐将研究的眼光投向基于过程或基于物理学的方法。本文研究的粒子系统方法和基于物理过程的方法均以流体的运动规律为基础，能够刻画不规则物体，捕捉流体运动细节，因此越来越多地被应用于流体的计算机模拟方法研究。

本文首先深入分析了喷泉和瀑布这两种流体运动的特点，遵循粒子系统的基本原理和方法，建立了喷泉和瀑布模型。喷泉模拟中采用多种粒子基本图元进行绘制，体现了粒子系统的灵活性。在进行瀑布模拟时，为了使模拟效果更加真实，采用由一小段粒子运动轨迹形成的线段作为瀑布基本绘制单元，同时结合静态检测和包围盒方法模拟了瀑布飞流直下时与周围环境发生碰撞、引起水花飞溅的情形，并且运用混合操作使瀑布粒子产生一种半透明效果。实验结果表明，粒子系统方法在体现不规则模糊物体的动态性和随机性上具有很大优势，碰撞检测理论的应用更进一步增强了模拟效果的真实性。

在描述一般流体运动时，基于物理过程的方法能很好地体现出流体在精细尺度上的变形、解决自由表面问题。SPH 方法就是一种以流体运动 N-S 方程为基础的方法，可以更方便、更全面地捕捉流体运动细节。文中采用 SPH 方法将 N-S 方程进行离散，并给出了一种模拟溃坝流动的方法。实验结果表明，SPH 方法可以方便地确定运动流体自由表面，同时体现出流体在精细尺度上的动态变化，模拟出了水花飞溅、溶合、自由表面变形等复杂现象。

从实验结果来看，本文中采用的两种流体模拟方法在体现流体运动细节上均达到了令人满意的结果，证明了以物体运动规律为基础建模的优越性。

关键词 流体模拟；粒子系统；N-S 方程；SPH 方法

Abstract

The simulation of nature phenomenon with graphics methods is always an emphasis which is concerned by researchers of the computer graphics field. According to the development process of fluid simulation methods in computer graphics field, the tools of classical geometry such as lines, smooth curves, planes and smooth curving planes, are no longer competent for the description of this complicate phenomenon. Therefore, the researchers turn to new technologies based on physical process. The particle system method and the method based on physical process are two modeling methods which can describe irregular objects, and capture the details of fluid movement. So, they are used in fluid simulation field increasingly.

In this dissertation, according to the theory of particle system, we develop the models of fountains and waterfalls after the analysis of their movement traits. In the simulation of fountains, a variety of particle elements are used to produce different effects of fountains, which demonstrate the flexibility of the particle-based method. In order to gain more vivid effect of waterfalls, a small section of waterfall's trajectories is used as the basic particle element. And in the simulating process, the static detection method and the bounding box method are applied to test whether the waterfall has collided with surroundings, which will bring spray splash. Besides, in this dissertation, blend operations are introduced to make the scene look translucent. The results demonstrate that the particle system method is prior in the course of irregular fluid simulating, and the collision theory can add reality to the visual scene.

When dealing with general flows, the method based on physical process can reflect more details of fluid movement, and can solve free surface problems. Smoothed particles hydrodynamics is a theory based on N-S equations, which can capture more complex phenomena of fluid movement more expediently and more comprehensively. In the dissertation, the SPH rules discrete the N-S equations, and then a simulation procedure to build a dam-break model is presented. The results demonstrate that this method can identify the free surface, and represent the changes in fine scale, such as spray splashing and integration,

free surface deformation , and so on.

As is shown in the results, the two methods shown in this dissertation have produced satisfying results, which proved the superiority of methods based-on physical moving rules.

Keywords Fluid simulation; Particle system; N-S equations; SPH

目录

摘要	I
Abstract	II
第 1 章 绪论	1
1.1 研究的目的和意义	1
1.2 流体模拟方法综述	1
1.2.1 流体模拟方法发展概况	1
1.2.2 流体模拟研究专题分类	3
1.2.3 流体建模方法介绍	3
1.3 本文的研究内容和结构安排	6
第 2 章 流体特性及物理学描述	8
2.1 流体特性分析	8
2.1.1 流体的密度	8
2.1.2 流体的压缩性和膨胀性	8
2.1.3 流体的黏性	9
2.1.4 流体的表面张力	9
2.1.5 作用在流体上的力	9
2.2 流体运动描述	9
2.2.1 运动描述的基本方法	10
2.2.2 流体力学基本方程	10
2.2.3 纳维-斯托克斯方程	11
2.3 流体场关键量的计算	13
2.3.1 梯度	13
2.3.2 散度	14
2.4 本章小结	15
第 3 章 基于粒子系统的流体模拟	16
3.1 粒子系统介绍	16
3.1.1 粒子系统方法的基本思想	16
3.1.2 粒子系统的实现步骤	17
3.2 基于粒子系统的喷泉模拟	18

3.2.1 喷泉粒子运动分析	19
3.2.2 喷泉粒子属性设置	19
3.2.3 喷泉粒子属性的更新	19
3.2.4 喷泉粒子的显示	21
3.2.5 实验结果	22
3.3 基于粒子系统的瀑布模拟	23
3.3.1 瀑布粒子运动分析	24
3.3.2 瀑布粒子属性设置及更新	24
3.3.3 瀑布粒子的选取及实验结果	25
3.4 碰撞理论在粒子仿真中的应用	26
3.4.1 碰撞检测算法	26
3.4.2 粒子聚类检测方法	27
3.4.3 碰撞响应	28
3.4.4 碰撞效果的实现	29
3.5 混合技术在粒子仿真中的应用	31
3.6 本章小结	34
第 4 章 基于SPH方法的流体模拟	35
4.1 SPH方法的基本原理	35
4.2 SPH方法下的流体控制方程	36
4.3 基于SPH的流体模拟算法	37
4.4 SPH方法的核函数	38
4.4.1 核函数的主要形式	38
4.4.2 平滑半径的选取	39
4.5 SPH方法的应用	39
4.5.1 无边界粒子运动模型	39
4.5.2 实验结果	40
4.6 溃坝流动模型	41
4.6.1 溃坝流动控制方程	41
4.6.2 边界处理	43
4.6.3 自由表面粒子的确定	44
4.6.4 溃坝流动实验结果	45
4.7 本章小结	47
结论	48

参考文献.....	50
攻读学位期间发表的学术论文	54
哈尔滨工业大学硕士学位论文原创性声明	55
哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书	55
哈尔滨工业大学硕士学位涉密论文管理	55
致谢	56

第1章 绪论

1.1 研究的目的是和意义

自然景物和自然现象的模拟是计算机图形学中最具挑战性的问题之一，这主要是因为自然景物或现象的表面包含丰富的细节或具有随机变化的形状，造型相对困难。而在自然景物、自然现象中，与山、植物等相比，水、烟、雾等流体的模拟则更显困难，于是更加真实的体现流体运动成为计算机工作者长久以来的一个研究方向。

流体运动具有不确定性、不规则性以及运动变化性，而且其运动方式复杂多变，会不断因周围环境的影响而改变，要真实的对其动态变化进行模拟更加困难。此外，近年来在虚拟现实系统中动态仿真流体（液体或气体）运动的需求逐渐增加，例如：虚拟海洋场景中的海浪、船尾的水流、爆炸中烟雾的效果、不同颜色液体混合、互不相溶液体混合等产生的运动效果^[1-7]，这些模拟效果在军事模拟和训练系统、生态研究系统、计算机游戏、影视、广告等艺术领域以及网络虚拟环境中都是非常有用的，而其效果的真实感直接决定了整个虚拟系统的真实感。正是由于动态流体模拟的复杂性以及水在日常生活中扮演的重要角色及其运动时承载的丰富信息，使得对自然场景中水的模拟以及特殊应用环境中水的模拟成为计算机图形学和虚拟现实领域中的研究热点之一。

1.2 流体模拟方法综述

1.2.1 流体模拟方法发展概况

流体力学一直以来都是一个经典学科，对流体的研究已经相当成熟，但是专门的流体仿真技术在计算机图形领域的发展才有二十几年的历史。由于流体所固有的复杂性以及在渲染方面的趣味性，为计算机图形学领域带来了不可抗拒的挑战，正因为如此，二十多年来图形学领域不断研究流体的模拟与仿真方法，使得对流体的模拟更加富有真实感和交互性。

早期的流体模拟由于计算能力有限，主要采用参数建模的方法。如采用

波动理论中的函数来模拟波浪效果，用基于统计的FFT（Fast Fourier Transform）方法描述波幅较小的海平面等。对于以上模型人们觉得控制起来很困难，而且不能模拟一些复杂的、细节更为丰富的效果，于是很多研究者转向基于物理的方法^[8]。基于物理的方法顾名思义就是以考虑流体的物理属性，根据力学原理等确定流体物理属性的变化以确定流体运动状态参数。

从时间上来看，计算机图形学对于水的专门研究主要经历了如下几个阶段^[9]：20 世纪 80 年代前期，20 世纪 80 年代后期，90 年代初期，90 年代中后期，以及近年。

上个世纪 80 年代前期是对自然现象进行计算机建模和渲染的起点，在当时只有相对较少的时间用在水的行为建模上，这个主题相关的研究基本上集中在体现大质量无边界水体上，比如说海洋。另一方面，那时对水的研究是将水看作压缩流体而不是由独立水滴构成。到 80 年代后期，水的模拟在几个方面得到了改进。人们花费了大量的经历在模拟液体与固体的交互作用上，此外，一些海洋波浪效果也集合到了原来的模型中。大体来说，那个阶段波浪的折射（波浪冲到海岸，然后改变方向回落）效果开始应用到虚拟系统中^[9]。

90 年代早期，人们开始对与水有关的一些物理现象产生浓厚兴趣，比如融化冰冻等状态变化，干湿变化，独立水滴的行为，水与静态或者动态漂浮物的交互作用等。在渲染方面，诸如波浪的反射，光与水的交互等也开始纳入研究。总的来说，可以将这一阶段的研究工作总结为两个方面，即粒子化以及微分方程的引入。90 年代中后期的主要工作是对前期工作基础上进行扩展与改进，主要研究了不同表面水滴的行为以及在真实性方面的一些渲染、动画技术。

到了本世纪，研究人员一直致力于动态流体更加精确数学描述的研究上。现阶段对水复杂多变的动态现象的模拟越来越多的基于物理过程，需要大量的数值计算，因此也需要更多计算机资源，更好的计算机性能。基于以上几点，目前的研究还要在降低资源消耗，改进算法，提高运算速度上投入很大的努力，也因为如此，现在还没有找到一种可以捕捉到并且模拟所有精细现象的方法。

从流体模拟方法的发展过程可以看出，对流体模拟的真实性、实时性、交互性的追求是研究者强大的动力。目前人们关注的目标不同，需求也就不同，主要体现在三个方面：对于细节的加强是出于人们对真实感的要求；对速度的要求促使人们寻求大时间步长模拟方法或者减少每一步的计算量；为

了达到更加有表现力的结果，就要改善流体模拟的控制策略^[8]。

1.2.2 流体模拟研究专题分类

在虚拟现实系统中与流体相关的内容很多，但由于目前人们所关注的是人眼可以感知的现象，因此主要的研究集中在低速流，低速流可以给人足够的响应时间，观赏性比较强。已有的流体模拟方面的专题主要有烟雾与云彩、燃烧与爆炸、自由运动界面、混合流和多相流、流固耦合等现象的模拟^[8]。各专题并不孤立存在，更多情况下是互相涉及，互相渗透^[8]。

烟雾问题与云彩运动的模拟比较类似，是流体现象模拟中比较简单的一类，不存在自由运动界面问题，为了达到逼真效果，需要考虑其生成的物理机理以及热力学作用。

燃烧与爆炸是另一类较类似的问题。最常见的燃烧现象是火焰，是一种低速流动燃烧过程，目前最精确的模拟方法可以用纳维—斯托克斯方程（Navier-Stokes equation，简称 N-S 方程）求解。爆炸最主要的效果是冲击波，会推动或者撕裂物体，改变光线折射，而后是火球、烟尘等现象。

自由表面主要是液体流动中需要考虑的问题，通过求解液体流动的自由表面才能将其与周围环境分开，从而施加对应的光照效果。关于自由表面问题以水的模拟为例，可以分为三种尺度：精细尺度为飞溅和泡沫；中间尺度为水面的波纹；大尺度可以为波浪的翻转和破碎。尺度越精细，所要体现的信息就越丰富，相应模拟起来也就越困难。

混合流是指在流动系统中存在多种不互溶的流体，而若相态多于一个，且各相态之间不互相渗透或者发生化学反应，则称为多相流。不同密度不互溶的液体混合现象、气泡在水中的运动等都属于这一类问题。

流固耦合就是考虑流体与固体之间的相互作用，如固体在水中漂浮。这类问题或者利用固体来改变流体的运动状态，固体本身运动不受影响；或者固体在流体的作用下发生运动，但固体的运动却不影响流体。

除了以上主要研究专题，还有非牛顿流体以及非真实感流体的研究^[8]。

1.2.3 流体建模方法介绍

目前，对流体建模的方法主要有基于过程纹理函数的建模、基于统计模型的建模、基于细胞自动机的建模、基于分形几何的建模、基于粒子系统的建模、基于物理过程的建模以及水平集等方法^[7]。

基于过程纹理函数的建模：用解析表达的数学函数来控制，直接在物体模型中生成纹理。比如采用波动理论中的函数来模拟波浪效果，先选取简单的函数（如正弦函数）来描述水波自然纹理的基本特征，然后使用湍流函数来扰动基本函数中的某些参数以产生纹理细节。基于波动理论的水波模型表示的水粒子只是在其初始位置附近运动。

基于统计模型的建模：此模型是建立在海洋学中对海洋的长期观测上的统计模型，适合对海洋等大型流体域进行建模。1986 年，Fournier^[5]等提出了一种简单海洋波浪模型，此模型认为波浪中水面的质点总是独立地作圆周运动。假设水面平静时某质点处于 (x, y) 处，则该质点的运动轨迹在以 (x, y) 为圆心，以 r 为半径的圆周上，在某个时刻计算出所有点在各自运动圆周上的坐标就可以得到所有采样点的位置，以此为基础模拟出卷曲的波浪，同时模拟了在海岸附近具有海岸线形状的弯曲波浪。2001 年，鄢来斌^[10]等提出了海浪模型，该模型认为海浪由多个具有不同相位、振幅和频率的波叠加而成，从而避免求解复杂的流体力学微分方程。杨怀平等也给出了基于海浪谱的波浪模拟方法^[11]。

基于细胞自动机的建模：细胞自动机是一个离散的自动机系统，它将流体现象看作由简单的组元构成，不用复杂方程描述系统，而以系统组元的动态变化为研究基点，通过简单组元以及简单规则产生复杂的现象。离散是指细胞自动机在有限的时空范围内具有有限状态。2002 年，杨怀平^[12]等建立了基于小振幅波动理论和细胞自动机的模型，采用邻域传播的思想对水波进行动态造型，根据在小振幅波理论中水波近似成正弦分布这一规律构造出不同邻域下水波演变的细胞自动机模型。

基于分形几何的建模：20 世纪 70 年代，Manderbrot等在前人的基础上，第一次系统地阐述了分形几何的思想，即自然界的海岸线、山、树等自然景象都具有细节无穷回归的自相似性（自然自相似和统计自相似）。1994 年，K. Musgrave^[13]使用随机分形方法（Stochastic Fractal）产生水面高度域，先采用随机方式产生较大的水面网格中各点的高度域，然后通过分形产生细分网格，直到网格点间隔小于某个阈值。

基于粒子系统的建模：1983 年 W. T. Reeves^[14]提出的粒子系统方法不同于传统的图形学方法，可以充分体现不规则模糊物体的动态性和随机性，可以很好的模拟火焰、烟雾、喷泉、瀑布等自然景象。文献[15-20]中采用粒子系统方法成功地实现了喷泉、瀑布、雨雪等自然景观和现象的模拟。

基于物理过程的建模：考虑物体在现实世界中的属性，采用动力学原理

来产生物体的运动，当场景中的物体所受外力发生变化时，根据动力学方程来改变物体的运动状态以及相应的形态信息。这种方法不用关心物体运动过程的细节，只需要确定物体运动所需要的一些物理属性以及一些约束条件，如外力等，然后根据数学方程计算得到物体在各个时间的运动状态参数。

水平集方法 (Level Set): 水平集方法在流体模拟中也得到广泛应用，其基本思想是将两种流体的界面看作高维空间中的某一函数 ϕ 的零水平集，且将界面的速度也扩充到高维的水平集函数上，然后写出水平集函数所满足的发展方程，求解此方程，得到界面的形状，进而可以由函数的偏导数求得界面的法向、曲率等，该方法的关键是写出流体界面的发展方程。

除了以上所描述的主要流体建模方法外，还有一些其它的方法，比如 Front Tracking, Ghost Fluid, Volume of Fluid 等，这些方法中很多也是流体力学研究中的著名方法。

以上概要介绍了流体模拟领域主要的研究方法以及研究专题，针对不同的专题可以采用更加适合的模拟方法。目前使用较多的流体建模方法是基于物理过程、粒子系统以及统计模型的方法。对小范围的流体建模时多采用基于物理过程的建模；对大范围的流体，如海浪等建模时，多采用基于统计模型的建模；当物理过程容易理解，但是需要模拟更加模糊、不规则的动态物体时就要用到粒子系统，如泡沫、水花、飞溅等效果。而又由于各个专题之间互相联系，各种方法又都有各自的优缺点，在模拟过程中为了达到更加真实的效果往往是几种方法相结合。

近年来国内外研究人员在动态流体模拟这个复杂领域取得了显著成就，其中大部分建模方式是以物理过程为基础，同时结合粒子、网格等具体处理形式，得到了更加细致的模拟效果。

从国内来看，徐迎庆^[21]等通过直接求解N-S方程和连续性方程组得到流水形态，通过直观地调整方程的初始条件，比较真实地模拟水流及波浪的不同状态，如激流、瀑布、潮汐、涟漪、清泉等，另外还可以模拟溃坝及涌潮的流态。其中为了模拟溅起的飞沫以及流水与石头撞击产生的水花效果也使用了粒子系统。柳有权^[22]等根据N-S方程实现了在复杂环境中烟雾运动状态的真实模拟，其中烟雾颗粒也是由粒子系统生成。

国外的处理技术更加先进成熟，模拟的流体现象更加复杂。比如，Jos Stam^[23]提出一种基于N-S方程稳定解的稳定流体模型，这种模型可以模拟流体的交互作用（比如不同颜色液体的混合效果），允许使用大的时间步长，取得了更快的模拟效果。D. Enright、N. Foster等人应用纹理和粒子系统以及

水平集相结合的方法，实现了液体倾倒问题的模拟^[24,25]。特别地，他们也将快速偏微分方程求解与标记粒子法结合起来进行液面跟踪。Matthias Muller^[27] 等人用光滑粒子流体动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics，简称SPH）原理将流体运动方程进行变形，得到了非常真实的流体交互结果。Mark Carlson等人实现了流体和固体交互作用的真实性模拟^[26-28]。韩国的OH-YOUNG SONG等提出了一种稳定无耗散的方法来进行水的仿真，改善了前人在取得稳定流体模拟结果的同时带来的质量丢失问题^[29]。S. T. Greenwood^[30] 等细致的分析并模拟了动态水流中的气泡，以及气泡转化成的泡沫，给模拟效果增添了真实感。Peter Kipfer^[28]等在他们实现的真实可交互河流模拟中成功渲染了水流撞击障碍物后的运动以及产生的飞溅效果。

1.3 本文的研究内容和结构安排

本文的主要研究内容是通过需要对模拟的流体动态变化进行分析，找到不同环境不同应用中的运动模型，进而根据各运动模型的特点用相应比较适合的方法进行建模，以得到更加真实的模拟效果。

论文共分四部分，其具体内容组织结构如下：

第一章绪论部分简单介绍了流体模拟方法的发展过程，综合描述了各种主要建模方法的原理以及各自的适用问题，并将目前已有的研究专题进行了简单分类，列举了近年来国内外比较显著的研究成果，在本章的最后给出了本文主要的研究内容和结构安排。

第二章主要介绍了流体的特性、流体运动描述以及一些相关的场量计算。流体力学是一门经典学科，在本章中介绍的流体力学相关知识仅仅是流体力学中的一部分，是根据后继章节研究需要对流体力学一些基础进行的概括和提取。这一部分分别介绍了流体静力学以及动力学部分内容，包括一些流体特性以及流体受力情况，并给出了流体描述方法、流体动力学方程。由于在三维空间中进行流体运动研究，涉及到很多流体场关键量的计算以及流体力学概念，故在本章将容易混淆的概念和相应计算公式进行了简单介绍，以保证在模拟过程中概念清晰，计算数据准确。

第三章内容是基于粒子系统的流体模拟方法。首先介绍了粒子系统的基本原理，并详细分析粒子系统建立的步骤；然后给出了两种利用粒子系统方法模拟的流体模型：喷泉和瀑布，并且针对现实中可能会发生的碰撞现象对碰撞检测以及碰撞响应等理论进行了研究；最后给出了模拟实验结果。

第四章主要内容是基于 SPH 方法的流体模拟研究。先介绍了 SPH 方法的基本原理，分析其应用范围；然后根据 SPH 方法的基本理论对流体运动方程 N-S 方程进行分析，通过无边界的少量粒子运动情况验证了原理的可用性；而后分析流体运动的边界条件，根据离散后的 N-S 方程得到实际中一种流动模型——溃坝流动，并且给出了溃坝流动的模拟效果。

最后，论文的结论部分对文中研究的各种流体模拟方法做了总结，并提出了进行流体模拟研究的意义及今后工作的努力方向。

第2章 流体特性及物理学描述

各种流体模拟方法中，基于物理过程的建模越来越多地得到应用，主要是因为这样建立起来的物理模型更加精确，可以增强流体的真实感，另外因为存在有效的物理模型，对流体的行为建模变得简单。为了更加准确的建立物理模型，需要在建模之前对所研究的流体进行分析，考虑在建模过程中会对结果造成影响的流体特性。由于在三维空间中描述流体运动以及在利用流体运动方程解决流动问题时会用到大量流体场中的计算。基于以上考虑，本章主要介绍一些在后继章节研究中涉及到的流体力学知识以及用到的流体场关键量的计算。

2.1 流体特性分析

从力学角度讲，流体是一种受任何微小剪切力的作用都会连续变形的物体，只要这种力存在，变形就不会停止。以下主要介绍与流体运动及变形密切相关的几项属性。

2.1.1 流体的密度

单位体积的流体所具有的质量称为流体的密度，它表征的是流体在空间某点质量的密集程度。对于均匀流体，密度表示为： $\rho = m/V$ ；对于非均匀流体则要通过求极限而得到： $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \Delta m / \Delta V$ 。一般来说流体的密度随压强和温度而变化，尤其是气体的密度，变化较大。

2.1.2 流体的压缩性和膨胀性

(1) 压缩性，流体的体积随压强的增大而缩小的特性称为流体的压缩性，通常用体积压缩系数 β_p 来表示。它指的是温度不变的情况下，增加单位压强所引起的流体体积的相对变化量，即 $\beta_p = -(dV/V)/dp$ 。

(2) 膨胀性，流体的体积随温度的升高而增大的特性称为流体的膨胀性，通常用体积膨胀系数 β_T 来表示。它指的是在压强不变的情况下，升高单位温度所引起流体体积的相对变化量，即 $\beta_T = (dV/V)/dT$ 。当温度低于

50 度时，水的体积膨胀系数随压强增加而增大，温度高于 50 度时正好相反。

流体的压缩性和膨胀性都属于流体的基本属性，只是不同流体的压缩或膨胀程度不同。水的压缩性比较小，所以在工程实际中把液体视为不可压缩流体，忽略体积变化。

2.1.3 流体的黏性

黏性是流体的重要属性，与流体的运动规律密切相关，是流体运动中产生阻力和能量损失的原因。流体的动力黏度 μ 与流体种类以及流体的压强和温度有关，在一定的压强和温度下为一个常数。动力黏度与流体密度的比值称为运动黏度，用 ν 表示，关系式为 $\nu = \mu / \rho$ 。普通的压强对流体的黏度影响很小，一般可以忽略不计，而只考虑温度的影响。

2.1.4 流体的表面张力

表面张力是液体的一种特有属性，是液体表面上相邻部分之间的相互牵引力，其方向与液面相切，并与两相邻部分的分界线垂直。表面张力是液体分子力在液体表面层中的一种宏观表现，液面上的分子受液体内部分子吸引力的作用，吸引力的方向与液面垂直并指向内部。在这种力的作用下，液体表面层中的分子有尽量挤入液体内部的趋势，因而液体表面趋向收缩成最小面积。表面张力的大小和液体性质、纯度、温度和与其接触的介质有关。

2.1.5 作用在流体上的力

作用在流体上的力，按照其作用形式不同，可分为表面力和质量力。外界作用在某个流体团分离体表面上的力称为表面力，如压力、摩擦力等都是表面力，这种力通过表面接触起作用，又称为接触力。作用在分离体内每一质量单元上的力称为质量力，如地球引力、电磁力、惯性力均属于质量力，质量力是一种非接触力。表面力和质量力均为分布力，前者分布于表面上，后者分布于体积上。

2.2 流体运动描述

流体是一种连续介质，流体的运动可视作充满一定空间的无数个流体质

点运动的集合。在理论力学中，质点作为一种理想模型，其平移运动具有三个自由度，容易直接由动量守恒定律描述其运动要素随时间变化的情况。然而，当有无数个质点同时运动时，按照求解质点变化过程的方法来描述无穷多自由度质点系的运动是困难的、不现实的，因此要考虑能方便描述流体运动特征的新方法。

2.2.1 运动描述的基本方法

描述流体运动的方法有两种：欧拉法和拉格朗日法。有时也会看到所谓的欧拉—拉格朗日混合方法。这些方法主要描述流体微团集合的运动状态，即流动参数的变化^[31]。

欧拉法，是在任意指定时刻描述流动参数的空间分布。以时空坐标为自变量，将流动参数（主要有速度、密度、压力和温度以及它们的组合）表示为时空坐标的函数（流动参数分布；也称参数场，如速度场和温度场）。也就是说，欧拉法从研究流体所占据的空间中各个固定点处的运动着手，分析由运动流体所充满的空间中每一个固定点上的流体速度、压强、密度等参数随时间的变化，以及研究由某一空间点转到另一空间点时这些参数的变化。该方法是一种基于网格的方法。

拉格朗日法，是从某时刻开始跟踪每一流体质点，记录对应质点流动参数的变化。亦即从分析流体各个微团的运动着手，研究流体中某一指定微团的速度、压强、密度等描述流体运动的参数随时间变化的情况，以及研究由一个流体微团转到其它流体微团时参数的变化，以此来研究整个流体的运动。该方法是一种基于粒子的方法。

2.2.2 流体力学基本方程

流体力学主要有三个基本方程：

（1）质量守恒方程

它反映的是物质不生不灭这一最自然的物理定律，用以描述流体密度的变化规律，不需要补充任何其他关系式。也就是说，质量守恒方程是物质不生不灭的最直观的体现。质量守恒方程也称连续性方程。

（2）动量守恒方程

它反映的是牛顿定律，即物体在力的作用下做加速运动。具体说，物质体所受的合力等于其质量与加速度的积，也可以理解为流体微团所受的力等

于其动量变化率。因此只要能求出合力，就能得到动量守恒方程。

(3) 能量守恒方程

能量守恒属于经典的热力学定律。流体微团单位质量的能量即总能包括内能与动能。合力所做的功、热传导（由化学反应等引起的）生成热都引起总能的变化。

通过某种线性或非线性组合，还可以导出一些组合量的方程。这些组合量所满足的方程虽然不属于最基本的方程，但可以更直观地揭示一些特殊的物理现象。

2.2.3 纳维-斯托克斯方程

N-S 方程是全面描述牛顿流体运动的方程。这一方程于 1821 年由法国力学家纳维提出，1845 年斯托克斯完成最终的形式。

微分形式的 N-S 方程如下所示：

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2-1)$$

如果 μ 为常数，

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_i}{dt} &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \right) \end{aligned} \quad (2-2)$$

对于不可压缩流动， $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ，有

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2-3)$$

向量形式为：

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (2-4)$$

式中 $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$ 称为拉普拉斯算子。对于不可压缩的理想流体，

$\nabla \bullet \vec{u} = 0$, $\mu = 0$, 即可得到欧拉方程:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p \quad (2-5)$$

拉格朗日方程是在满足连续性方程的同时, 将动量方程变形如下:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \mu \nabla^2 \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} \quad (2-6)$$

将方程等式右边整合成一个力的形式, 则拉格朗日方程就具有了牛顿第二定律加速度计算公式的形式:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{f}}{\rho} \quad (2-7)$$

以上给出的是 N-S 方程的微分形式, 在处理某些特定问题时, 比如圆直管中的流体平稳流动问题, 采用流体运动圆柱极坐标方程更加方便。非压缩牛顿流体运动的完整数学描述以公式(2-8)至公式(2-11)组成的圆柱极坐标方程组给出, 其中 ρ 、 μ 分别是流体的密度和黏性系数, p 是压力, v_r 、 v_θ 、 v_y 分别是在半径、旋转方向、长度方向的速度, g_r 、 g_θ 、 g_y 则为三个方向的重力加速度分量。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_y \frac{\partial v_r}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (2-9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_y}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right] \quad (2-10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2-11)$$

上述方程组中含有 v_r 、 v_θ 、 v_y 及 p 四个未知变量，与方程组个数一致，

故此方程组理论上可精确求解。然而由于对流加速项的非线性属性，求其解析解的难度非常大，目前只能针对一些简单特例求其精确数学解^[32]。

2.3 流体场关键量的计算

流体本身具有一些属性，并且流体时刻处在某种环境中，流体的某些属性以及环境参数在流体力学中称之为“场”，这些量或者为标量或者为矢量，比如流体的压力场，流体的高度场、流体的速度场等。在对流体进行模拟的过程中不可避免地用到场量计算，尤其使用基于物理过程的方法对动态流体进行建模时更是如此，本小节就主要列举一些在后继章节中会用到主要计算公式及概念。

有关矢量的基本运算，如向量的加减、点乘、叉乘、向量的单位化等是很基础的数学知识，在此不作介绍，以下主要将对流体各种场量进行求梯度和求散度计算时要注意的问题作概括说明。

2.3.1 梯度

(1) 梯度表示物理量在一点邻域内的变化，以下是梯度表达式。

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \varphi = \text{grad} \varphi \quad (2-12)$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-13)$$

标量场的梯度是一个向量，是空间坐标点的函数。梯度大小为该点标量函数的最大变化率，即该点最大方向导数。梯度的方向为该点最大方向导数的方向，即与等值线（面）相垂直的方向，指向函数的增加方向。

算子 ∇ 称为 Hamilton 算子，具有微分和向量双重运算性质，适用于任意正交坐标系，推导或证明公式时直角坐标系简便。

(2) 梯度运算的基本公式

$$\nabla c = 0 \quad (2-14)$$

$$\nabla(c\varphi) = c\nabla\varphi \quad (2-15)$$

$$\nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla\varphi \pm \nabla\psi \quad (2-16)$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \quad (2-17)$$

$$\nabla f(\varphi) = f'(\varphi)\nabla\varphi \quad (2-18)$$

以上公式中 c 为常数。

(3) 向量的梯度 $\nabla\vec{v}$ 是一个二阶张量。

2.3.2 散度

(1) 散度的表达式

$$\text{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (2-19)$$

向量的散度是一个标量，是空间点的函数，它表示单位体积内向量通过其表面的通量。

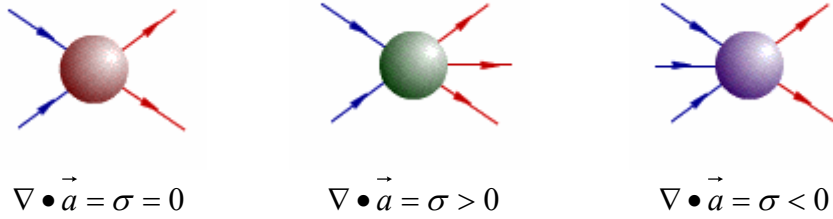


图 2-1 散度示意图

Fig. 2-1 The Divergence

(2) 散度的基本运算公式

$$\nabla \cdot (c\vec{a}) = c\nabla \cdot \vec{a} \quad (2-20)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \pm \vec{b}) = \nabla \cdot \vec{a} \pm \nabla \cdot \vec{b} \quad (2-21)$$

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \varphi\nabla \cdot \vec{a} + \nabla\varphi \cdot \vec{a} \quad (2-22)$$

以上公式中 c 为常数, ϕ 为标量。

2.4 本章小结

本章主要讲述了流体力学的一些基础知识以及有关向量计算的概念和公式。其中流体力学基础部分针对在后继章节中进行流体模拟涉及到的有关流体特性进行了介绍,这主要包括流体静力学的简单介绍以及流体动力学中流动方程的介绍。由于在三维空间中描述流体运动以及在利用流体运动方程解决流动问题时会用到大量在流体场中进行的计算,比如压力场、高度场等,因此在本章后半部分列出了在模拟过程中会用到的计算公式以及一些容易混淆的概念。正确地运用公式以及理清概念在理论确定阶段以及得到正确数据是非常重要的。

第3章 基于粒子系统的流体模拟

计算机图形学中有一类问题是构造复杂物体模型，所谓的复杂是指物体形状很难或者无法用经典几何来描述。经典几何诸如直线、平滑曲线、平面以及边界整齐的平滑曲面等主要描述工具在描述某些抽象图形时是非常有力的，但是对一些如雨、雪、云彩、火焰、浪花等自然景物描述问题就显得无能为力了。对于这些形状不规则，又不断动态变化的物体或场景，就要探索新方法。

计算机图形学中，对形态复杂并且不断变化的场景的描述可以使用一些能够反映物体几何特征或者运动特征数据的函数，计算出这些数据，得到动态参数，就可以完成对一个自然景物动态场景的描述。在这方面，粒子系统是一种很成功的建模方法。

3.1 粒子系统介绍

构造可视化系统的建模技术大致可以分为两类：几何建模和行为建模。几何建模处理物体的几何和形状的表达，研究图形数据结构等基本问题；行为建模处理物体运动和行为的描述。

过程建模的主要优点有：采用精确物理模型，增强了物体的真实感；模型包含了几何和行为，几何反映了行为；若存在有效的物理或生理模型，则物体的行为建模变得十分简单，只要实现当前的几何模型即可。

粒子系统是 1983 年 W. T. Reeves 提出的一种图形生成算法。这种方法不同于传统的图形学方法，可以充分体现不规则模糊物体的动态性和随机性。粒子系统也是一种过程建模，是一种利用各种计算过程生成模型中各个体素的建模技术，以物理行为为基础，并将几何建模与行为建模统一起来。

3.1.1 粒子系统方法的基本思想

粒子系统不是一个简单的静态模型，其基本原理是：采用许多形状简单的微小粒子（例如球体、椭球、立方体、点、线等）作为基本图元，以这些粒子充满物体，使其呈现各式各样的形状。每一个粒子具有特定的属性，如大小、位置、颜色、运动速度、生命值等，随着时间的推移，粒子属性动态变化。也就是说，粒子系统是一个动态过程，系统中可以不断有新粒子的加

入，旧粒子的死亡，系统中“存活”粒子的位置及生命值也随时间变化而变化，即用粒子系统表示的物体是不稳定的。

粒子系统具有如下主要优点：

(1) 简单体素和复杂物体行为有机结合。

粒子系统比较灵活，其组成粒子既可以是最简单的点，也可以具有一定的结构，可根据描述对象随意调整，且粒子系统的模型是过程化的，在其中可加入随机过程，因此获得精细的模型不需要大量的设计时间。

(2) 易于实现。

只要提供用于粒子属性随机过程的一些参数即可定义一个粒子系统。根据场景的特点，对粒子数量、时间以及硬件平台的要求不苛刻。

主要缺点是：

(1) 每一个时间步长内均需要计算粒子的动态属性，增加计算开销。

(2) 粒子的几何特征过于简单，可以构造的物体范围有限。

如上所述，在应用中选择粒子系统时要仔细分析，制定出合理的物理模型，充分利用粒子系统的优点，尽量降低在模拟过程中粒子系统的缺点带来的影响。

3.1.2 粒子系统的实现步骤

用粒子系统描述物体，首先要对描述对象的形态、运动规律等方面的特征作深入分析研究，确定用粒子系统要描述的基本目标。通常用粒子系统模拟物体需要以下步骤：

(1) 分析物体的静态特性，定义粒子所具有的属性；

(2) 建立粒子属性变化规律；

(3) 在系统中生成新粒子并给每个粒子属性赋初值；

(4) 根据粒子属性变化的动态特性改变其属性值；

(5) 删除系统中已经死亡的粒子；

(6) 按照当前粒子属性绘制所有粒子。

其中，步骤 3、4、5、6 反复循环就形成了系统的动态变化过程。

(1) 粒子的产生

粒子由位于三维空间中某个特定位置的粒子源产生，粒子的产生一般受随机过程控制，以更好地体现物体的不规则性。任何一个新粒子在生成时都具有一组属性，而一个粒子究竟有什么样的属性主要取决于具体的应用。每

个粒子都必然有一个生命值，如果某些粒子在系统运行过程中不应删除，则可以赋予它无限长的生命值。

(2) 粒子属性的更新

粒子系统中，粒子的动态变化是由随时间变化的属性来体现的，即要在不同的时间步长内对粒子属性进行更新，更新的依据为相应系统中物体的变化规律。

如果粒子在三维空间中运动，则粒子必然具有位置和速度属性，粒子的连续运动通过在粒子位置变化表现，在计算中遵循的是牛顿力学中物体速度和位移方程。假定时间步长为 Δt ，根据以下物理公式由上一时刻粒子属性计算出下一时刻粒子的位置、速度值：

$$v_{t+1} = v_t + a_t \cdot \Delta t \quad (3-1)$$

$$s_{t+1} = s_t + v_t \cdot \Delta t \quad (3-2)$$

如果粒子处于重力场中，粒子的加速度为重力加速度，如果还存在其它外力，则要进行力的合成后（力的合成可以按照向量加减公式进行求解）再按照牛顿第二定律求出合力效果下的加速度。

(3) 粒子的消亡

生成新粒子时，都要以某种方式指定粒子的生命期，这个属性随着时间的推移不断衰减，当粒子的生命期为零时，则称此粒子为“死亡粒子”，需要在系统中删除，即在绘制时不再显示已经消亡的粒子，以减轻系统绘制负担。除了可以以粒子生命期为度量判定粒子是否“死亡”外，还可以对粒子某些属性定义一个阈值，当粒子属性超过或者低于这个阈值，也认为粒子“死亡”，不应在系统中再次出现。

(4) 粒子的显示

根据具体应用选定粒子基本图元，按照现存粒子当前属性进行绘制。因为粒子的显示是一帧一帧的，帧与帧间隔适当的时间，所以看到的就是粒子连续运动的画面。

3.2 基于粒子系统的喷泉模拟

现实中普通喷泉是由某个源头喷射出一股或者多股水柱，而后水柱受周围环境的影响做着运动。在水柱下落过程中，伴有水花效果。喷泉水柱的变化属于一种不规则物体，在做着符合某种规律的运动，再加上喷泉水柱给人的水花效果，很自然地，可以将这类运动用粒子系统方法来实现。

3.2.1 喷泉粒子运动分析

从喷泉运动过程可以看出，喷泉的水柱由源头喷出后会根据速度大小上升至最高点后回落，回落过程轨迹是一条曲线。根据对喷泉运动轨迹的分析，我们得到一个近似物理模型：喷泉水柱初始在竖直方向做向上的减速运动，而后会在合力作用下做抛物线运动。粒子运动轨迹简单表示如下：

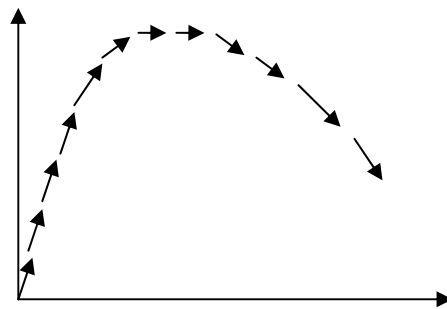


图 3-1 喷泉粒子运动轨迹

Fig.3-1 The track of fountain particle

3.2.2 喷泉粒子属性设置

根据上述粒子运动情况简单分析，可知喷泉粒子必须具有以下属性：粒子速度，粒子生命期，粒子位置，粒子类型（判断是否应该消亡）。以上几个基本属性可以刻画出粒子的运动情况，但是现实中的喷泉还给人一种朦胧的雾化效果，为了体现这一点，喷泉粒子还需要具有淡化值这个属性。在运动过程中随着时间推移，粒子不断淡化，直至消失。这样，判断粒子是否应该消亡不仅仅由其生命期决定，在未到达其生命期极限时，还要时刻检测粒子当前状态是否达到淡化阈值，如果满足了淡化阈值的限制，同样将粒子从系统中删除。

3.2.3 喷泉粒子属性的更新

假设喷泉水柱由系统中坐标原点发出，那么粒子的发射源也定义在坐标原点，每一时刻粒子从粒子源不断发射。设定新发射的粒子具有水平方向的速度，当喷泉发射多股水柱时，其俯看示意图如下：

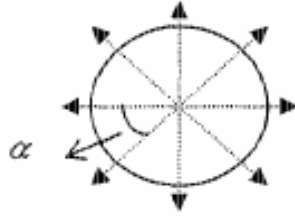


图 3-2 喷泉发射方向示意图

Fig.3-2 Direction of fountain spraying

其中角度 α 是每股喷泉间隔角度，在计算喷泉速度和方向变化时要用到。在这里 α 可取平均值，即如果喷泉柱数为 N ，则 $\alpha = 2\pi / N$ 。

在本文描述的喷泉模型，粒子在重力场中运动，一直受重力及空气阻力作用，在合力作用下粒子上升到最高点，速度为零，而后作类自由落体运动。但是因为在初始化时设定了水平方向的速度，合成后粒子运动轨迹类似于抛物线。具体的速度及位置计算可以遵循牛顿运动定律得出。

粒子速度计算公式如下：

$$\begin{cases} v_x = v_x + \Delta t \cdot \frac{f}{m} \\ v_y = v_y + \left(g + \frac{f}{m}\right) \cdot \Delta t \\ v_z = v_z + \Delta t \cdot \frac{f}{m} \end{cases} \quad (3-3)$$

其中重力方向向下，阻力与粒子速度方向相反。粒子在上升过程中竖直方向合加速度取负值，大小为 $9.8 + \frac{f}{m}$ （ f 阻力在这里代表数值，为正值，即阻力与重力方向相同）；在下降过程中粒子速度增加，加速度大小为 $9.8 - \frac{f}{m}$ （ f 阻力在这里代表数值，为负值，即阻力与重力方向相反）。

粒子位置坐标计算公式为：

$$\begin{cases} P_x = P_x + v_x \cdot \Delta t \\ P_y = P_y + v_y \cdot \Delta t \\ P_z = P_z + v_z \cdot \Delta t \end{cases} \quad (3-4)$$

如果不考虑阻力，粒子在 x 和 z 方向作匀速直线运动，在竖直方向做加

速运动，加速度仅仅是重力加速度时，速度和位置坐标计算公式如下：

$$\begin{cases} v_x = v_x \\ v_y = v_y + g \cdot \Delta t \\ v_z = v_z \end{cases} \quad (3-5)$$

$$\begin{cases} P_x = v_x \cdot t \\ P_y = v_{0y} + \frac{1}{2} g t^2 \\ P_z = v_z \cdot t \end{cases} \quad (3-6)$$

3.2.4 喷泉粒子的显示

经过以上几个小节对喷泉粒子属性的分析以及计算，最后是将系统中满足显示条件的粒子绘制出来，即如果当前喷泉粒子生命期大于零，则此粒子可能需要显示，否则直接从粒子链表中删除，以节省系统资源；如果当前粒子生命期大于零，但是淡化值达到了规定的阈值，那么说明此粒子已经淡化到不可见，同样可以省略不进行绘制，也认为已经从系统中删除；对于还具有生命期并且淡化值仍能保证其可见的粒子，系统进行绘制。

一般粒子系统的基本图元是比较简单的几何形体，比如球体、立方体、多边形、点、线等，但是比较适合渲染喷泉水滴情况的以球体为佳，也可以选择多面体以及点、线等基本图元。在本文中所采用的图元粒子主要有点元、线元、多边形纹理以及球体这四种，具体绘制方法表述如下。

（1）点元粒子

根据当前时刻粒子的位置，然后在粒子位置处以一定的颜色绘制出一个点，粒子位置不断变化，点的显示位置不断变化，体现出粒子运动轨迹，而点的颜色就代表了粒子属性显示淡化值。

（2）多边形粒子

以当前时刻粒子位置作为中心绘制多边形，并将能够体现水花效果的纹理映射到多边形上，粒子位置变化，多边形位置也跟随变化，体现出粒子运动轨迹。

（3）球体粒子

同样，以粒子位置作为球心，以最接近水珠的颜色，如青色，进行小球体的绘制，粒子淡化效果在颜色中体现。

(4) 线元粒子

计算出当前粒子的位置，然后根据粒子运动公式得到下一时刻粒子的位置，两点之间连线得到的线段作为粒子轨迹图元，线元长度为两位置之间的距离，线元会沿着粒子运动轨迹进行移动。用线元来表示喷泉粒子其实是将喷泉粒子小距离的运动轨迹变化来体现全部的运动，这样进行渲染的粒子运动看起来更加具有连续性。

3.2.5 实验结果

根据喷泉模拟过程，给出喷泉粒子运动原理流程图，如图 3-3 所示：

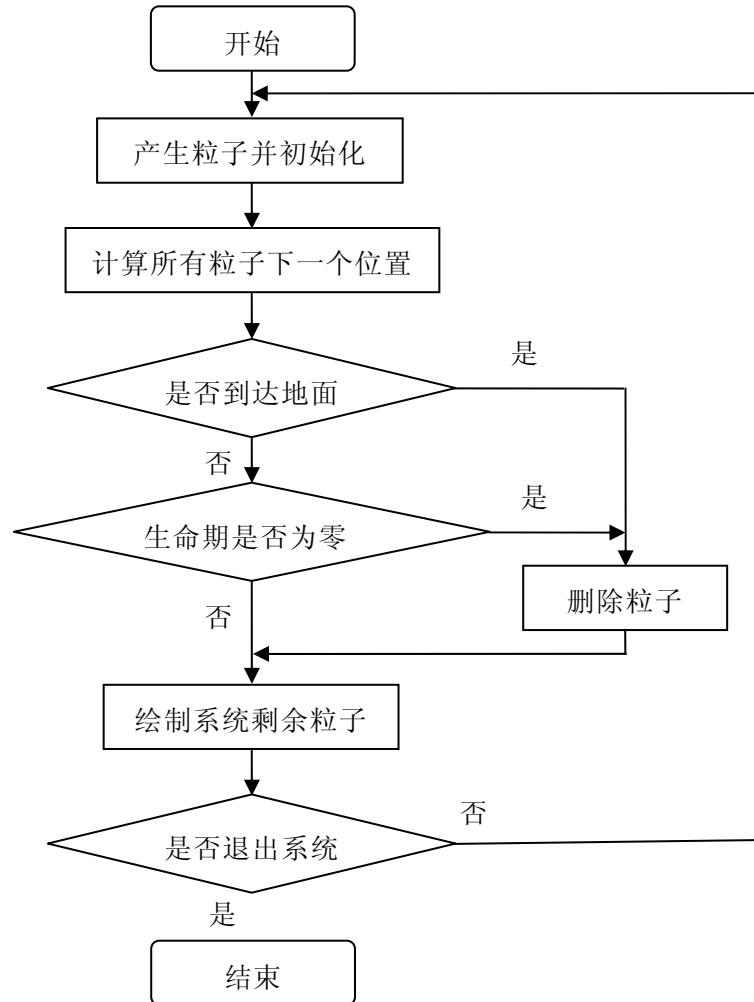


图 3-3 喷泉粒子处理流程图

Fig.3-3 Flow chart of fountain particles

喷泉模拟试验结果如图 3-4 所示，其中 a)为采用多边形纹理的绘制结果，b)为采用小球体作为喷泉粒子，c)中粒子基本图元是小线段，d)中是以点元作为粒子图元的绘制结果。可以看出，后面三幅实验结果图中喷泉水柱数发生变化，是在第一幅图的基础上增加了水柱后的效果，而且从图中给出的效果来看，喷泉粒子采用点元来表示结果并不理想，采用小球体作为基本绘制图元能得到最好效果。

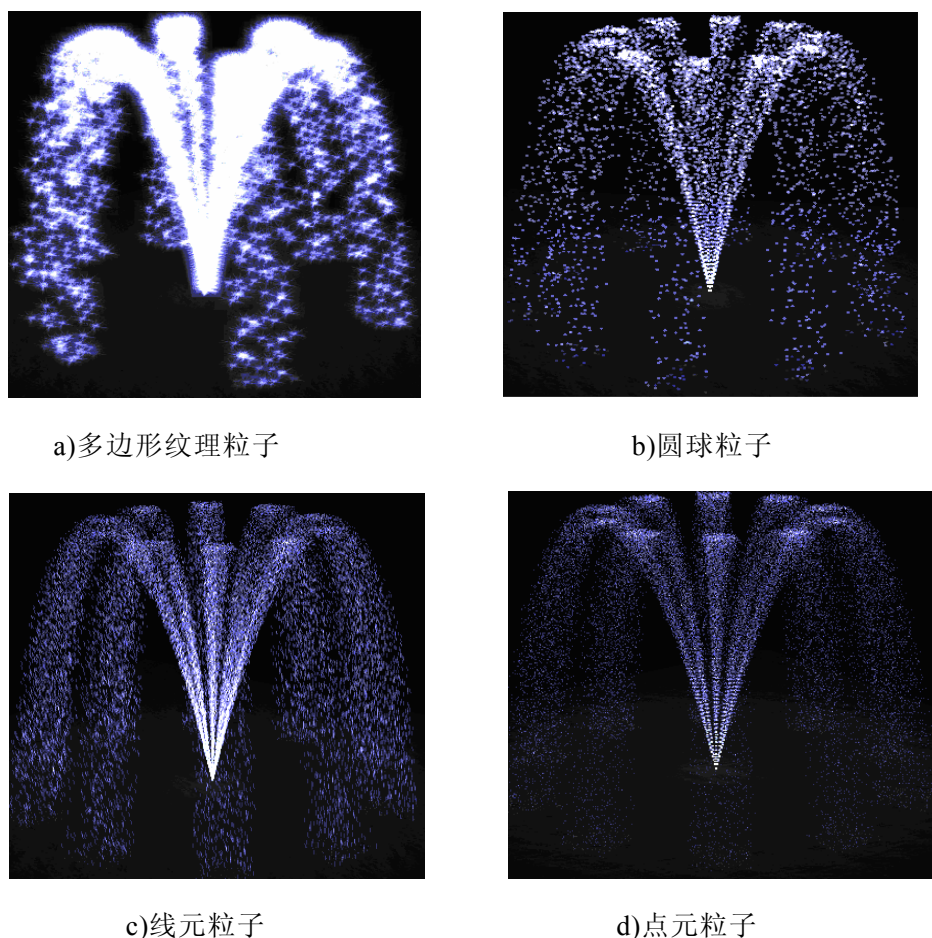


图 3-4 不同粒子的喷泉绘制

Fig.3-4 Fountains of different particles

3.3 基于粒子系统的瀑布模拟

同模拟喷泉过程相似，在进行瀑布模拟之前也先分析一下瀑布水流的运动：瀑布从源头倾泻出一道或者多道水流，而后水流受重力作用飞流而下。

在水流下落过程中，同样伴有水花飞溅等效果，而且在水流飞速下落的过程中，可能会与岩石等障碍物发生碰撞而改变运动方向。瀑布水流运动和喷泉运动一样可以看作不规则物体运动，其运动同喷泉从最高点再向下回落时情况相似，也是做着抛物线运动，故可以将这类运动用粒子系统方法来实现。

3.3.1 瀑布粒子运动分析

瀑布水流从高处以一定初速度在重力等外力的作用下开始向下做抛物线运动，根据对其运动轨迹的分析，可以得到一个近似物理模型，即水流以随机确定的初速度从瀑布源头开始做着向下的抛物线运动。粒子在下落过程中，或者因障碍物的撞击改变运动方向，或者因生命期及淡化值达到规定阈值而消亡。粒子运动轨迹简单表示见图 3-5。

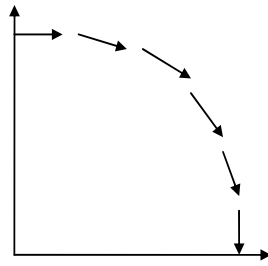


图3-5 瀑布粒子运动轨迹

Fig.3-5 Track of the particle of waterfall

3.3.2 瀑布粒子属性设置及更新

根据上述粒子运动情况简单分析，可知瀑布粒子具有同喷泉粒子几乎相同的属性：粒子速度，粒子生命期，粒子位置，粒子类型（判断是否应该消亡）以及粒子淡化值。以上这些基本属性可以刻画出粒子的运动情况，具体实现时瀑布粒子的结构体与喷泉粒子也很相似，只是由于规模不同，在粒子结构设计上略有不同。

本文在粒子结构定义中设置了一个指向“child”的指针，这在实现中有特别的作用：瀑布源头在同一时刻生成大量粒子，这些粒子组成一个链表。链表中的每一个粒子又是另一个链表的头，在下一时刻，粒子在重力场的作用下发生位移，与此同时粒子源又在生成新的粒子，新粒子插入为链表头，前一时刻的粒子即定义为头的“child”，不断循环，直到某粒子因生命周期结束被删除。这样，瀑布粒子就随着时间的推移形成了一个二维网

格，图3-6可以形象地说明。

对于瀑布粒子属性的更新，可以采用公式(3-3)、(3-4)或公式(3-5)、(3-6)给出的速度及位移变化方程进行求解，在此不做过多说明。

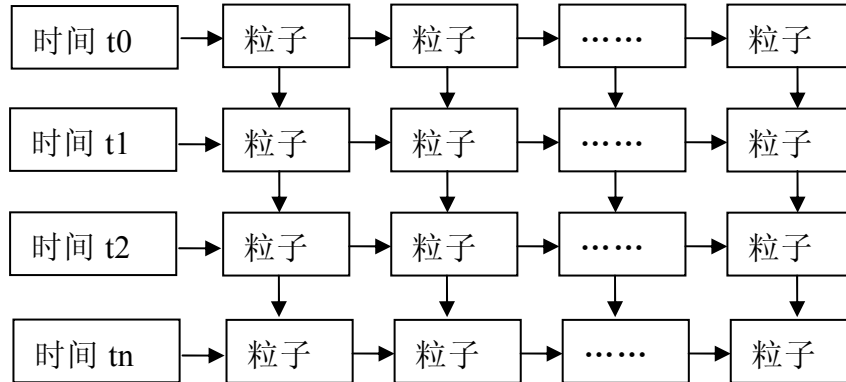


图3-6 粒子关系框图

Fig.3-6 Architecture of Particles

3.3.3 瀑布粒子的选取及实验结果

喷泉模型中进行粒子绘制时选用了多种几何体作为粒子基本图元，在进行瀑布绘制时，为了达到瀑布飞流直下的效果，只选取了线元作为粒子图元，线元长度即为粒子在一个时间步长内的位移。由于线元长度由粒子在两个时间点的位置决定，沿着粒子的运动轨迹前进，而粒子位置在更新时已经计算过，无需额外计算，这样就可以减少部分计算开销。

瀑布模拟效果如图 3-7 所示：

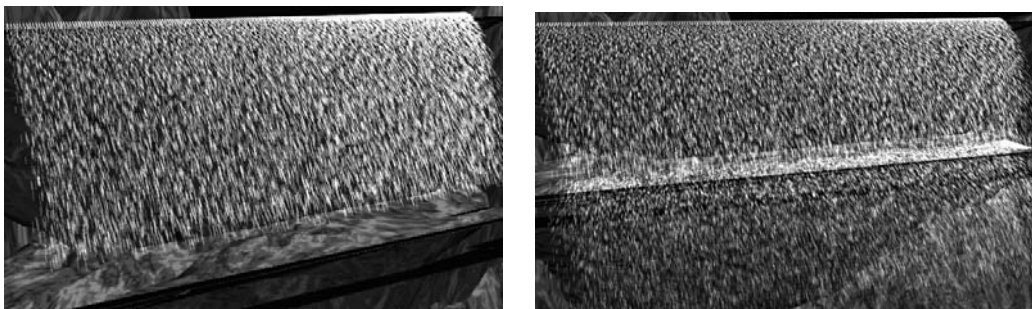


图 3-7 瀑布效果图

Fig.3-7 Waterfall

3.4 碰撞理论在粒子仿真中的应用

碰撞理论是构造可视化系统的一个重要部分，它可以使用户以更自然的方式与可视化系统中的场景对象进行交互。如果没有碰撞检测，当一个对象碰到另一个对象时，往往会“穿墙而过”，这在现实中是不存在的。因此，必须能够实时判断场景中物体之间是否发生碰撞。

考虑到现实中瀑布落下的过程中可能与一些岩石等障碍物发生碰撞，碰撞后粒子运动方向发生变化，因此在瀑布的模拟中应用了碰撞理论。

3.4.1 碰撞检测算法

可视化系统中的碰撞问题分为两种，即动态物体与静态物体之间以及动态物体与动态物体之间的碰撞。碰撞检测问题按运动物体所处的空间可分为二维平面碰撞检测和三维空间碰撞检测。由于平面物体的构造都可用多边形来表示，故其检测算法相对要简单一些；而三维物体的构造比较复杂，所以其检测算法也比较困难。

三维空间中碰撞检测方法的研究也是一个热点问题^[33-39]，常用方法主要有以下几种：

（1）矩形包围盒或球形包围盒

包围盒是包裹着物体对象的一个边界，是包围虚拟物体的最小长方体或者球体。采用包围盒进行碰撞检测的最大好处是可以实现快速碰撞检测，但是在很多实际应用的可视化系统中，要想做到自然交互光靠包围盒进行碰撞检测是不够的。

当要证明两个物体并不相交时，利用包围盒是非常有效的，但是当两个物体包围盒相交时，并不能保证这两个物体一定相交，因为包围盒仅仅是物体边界的一个简单粗略表示。

（2）多边形集合

多边形集合是对包围盒精确性改进的一种方法，是在采用包围盒表示虚拟物体边界的同时，还采用多个多边形来表示包围盒，即创造更加贴近虚拟物体表面的包围盒。显然，多边形划分得越细，边界就越精确。

当判断两个物体是否相交时，只要判断两个多边形集合是否相交即可。只有确定两个物体包围盒相交之后，才有必要判断相应的多边形集合是否相交。

（3）静态方法

静态方法是一种直接检测算法，首先计算出环境中所有物体在下一个时间点上的位置、方向等运动状态但是并不立刻对物体状态进行更新，而是先检测是否有物体在新的状态下与其他物体重叠，从而判定是否发生了碰撞。这些判断操作是在确定的时间片内发生，是在一系列离散的时间点上考虑问题，因此也称为离散方法。这种方法的问题是，只能检测离散时间点上可能发生的碰撞，若物体运动速度相当快或者时间步长过大，则可能会有一个物体完全穿越另一个物体的情况出现。这样一类高速运动问题，可以采用下面的动态方法进行检测。

（4）动态方法

对于一类高速问题可以采用减小时间步长的方法解决，但是这样会增加计算量，而且也并不能保证碰撞检测的及时。这种情况下就可以使用连续碰撞检测算法，也称为动态方法，检测物体从当前状态运动到下一状态滑过的四维空间（包括时间轴）与其他物体同时滑过的四维空间是否发生了重叠，也就是检测物体的运动轨迹。

3.4.2 粒子聚类检测方法

在进行瀑布模拟时考虑了瀑布粒子与静态障碍物之间的碰撞效果，这种碰撞属于大量物体碰撞问题。解决大量粒子与障碍物之间的碰撞检测，直接的方法是将每个粒子都与障碍物进行检测，只是这种做法计算量过大，算法效率非常低下。有人曾提出将具有相同属性的粒子看作一个大的粒子，小粒子的数据增量作为大粒子的数据增量，将整个大粒子与障碍物进行求交计算，这样可以提高因为粒子过多时对单独粒子进行检测计算的效率，但是会发生大量粒子与障碍物提前相撞的情况。在本文中采用的是另外一种方法，其本质是包围盒与静态方法相结合进行碰撞检测，在计算上做了适当地处理，以提高计算效率，称之为粒子聚类检测方法^[15]。

由前面小节介绍已知，在同一时刻会产生大量的瀑布粒子，这些粒子具有相同的初始高度、初速度以及在某段时间内具有相似的运动轨迹，将这些属性相似的粒子作为一个集合进行碰撞检测。当先计算到集合中某个粒子与障碍物相撞，则认为这个集合中的所有粒子均发生碰撞，不必进行单独计算。这种做法会大大减少计算量，提高运行效率。在具体应用时即可采用包围盒与直接静态检测方法相结合的方式进行。由直接静态检测方法得到粒子

的当前状态，判断粒子是否与障碍物包围盒边界相交，如果不相交则更新粒子状态，否则置此新状态无效，进行碰撞计算，得到相应的响应结果。

3.4.3 碰撞响应

碰撞响应是指物体之间相互碰撞后对物体运动状态做出的相应处理，在粒子瀑布模拟中指的是粒子与障碍物岩石发生碰撞后改变运动轨迹的处理，碰撞响应的处理必须符合力学规律。

物体之间的碰撞主要分为两种：弹性碰撞与非弹性碰撞。弹性碰撞是一种理想碰撞，碰撞过程中不考虑能量损失，而非弹性碰撞则伴随能量损失。

如果系统中的物体间碰撞属于弹性碰撞，则要根据牛顿运动定律建立与速度、质量和受力相关的物理模型，根据动量守恒方程得到碰撞后应有的响应。动量守恒方程表示为： $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ ，根据此方程得到物体后继的速度和运动方向。当然速度是个矢量，在计算时加入角度，分解为几个方向，与标量计算方式相同。但是大多数时候发生的碰撞为非弹性碰撞，有摩擦力的存在产生能量损失。

理想情况下，我们把物体的运动方向作为入射方向，类似于光的反射原理，将出射角与入射角相等进行计算。对于非弹性碰撞，入射角要小于出射角度。

在瀑布模拟过程中应用理想情况下的弹性碰撞，以下为理想碰撞发生时物体运动轨迹示意图。图 3-8 中中间向量为接触面法向量，两侧的射线分别表示入射方向与出射方向。

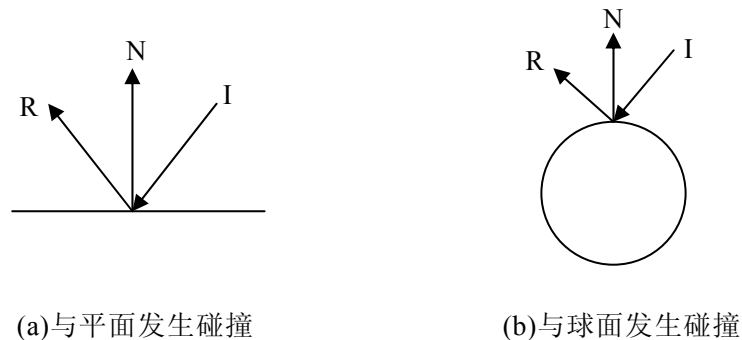


图 3-8 理想碰撞示意图

Fig.3-8 Collision in ideal condition

3.4.4 碰撞效果的实现

利用本节内阐述的碰撞检测以及碰撞响应理论，实现粒子与障碍物的碰撞效果。因为瀑布粒子采用线元进行绘制，则在进行碰撞检测时，判断线段的头与球面或者平面是否相交。

(1) 与平面发生碰撞

粒子与平面之间的碰撞检测主要计算平面法线与粒子运动直线是否平行或相交，如果运动直线与平面法线平行，则相交不可能发生，否则，则需要进一步判断是否在平面范围内与法线方向相交。

运动直线与平面法线是否相交可以通过求解两个向量的点乘来判断，即如果两向量垂直，则根据向量点乘运算公式得到数值为零，运动直线与平面平行，如若不然，则直线与平面会相交。由图 3-8 中 a)与平面发生碰撞示意图可知，首先需要计算入射方向向量与法线的点乘，即判断 $\vec{I} \cdot \vec{N}$ 的值是否为零。

在进行直线与平面法线是否相交的判断后，接下来就是要确定碰撞发生的具体位置。此操作实现比较直接，即在时间步长内求解粒子位置，判断此时粒子位置是否在平面上或者已经穿越平面：如果粒子位置在平面上，则根据射线反射原理得到粒子碰撞后的速度方向和大小；如果粒子位于平面之下，则说明在此时间步长后粒子会发生穿越平面的现象，需要在时间步长内采取分步计算，判断出较准确的碰撞时刻，然后再求解新的速度向量。

(2) 与球面发生碰撞

判断粒子与球面是否发生碰撞可以直接计算，无需提前判断运动方向与法线是否相交，这是由球的几何性质决定地。具体实现图示如下：

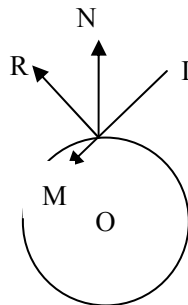


图 3-9 粒子与球面碰撞

Fig.3-9 Collision between particle and sphere

图 3-9 中所示，粒子在一个时间步长内运动到了一点 M，如果 M 与球面中心距离 $|\vec{M} - \vec{O}| > r$ ，显然 M 位于球内，说明已经发生了碰撞，当前状态不可用，需要划分时间步长确定碰撞发生时刻。当 $|\vec{M} - \vec{O}| = r$ 时，粒子刚好到达球面，需要改变运动方向，同样根据射线反射方式求解出新速度方向以及大小。

在瀑布模拟中应用碰撞理论，水流运动的粒子系统处理流程如图 3-10 所示，其中粒子消亡条件包括淡化值、生命期、是否到达水面的判断。

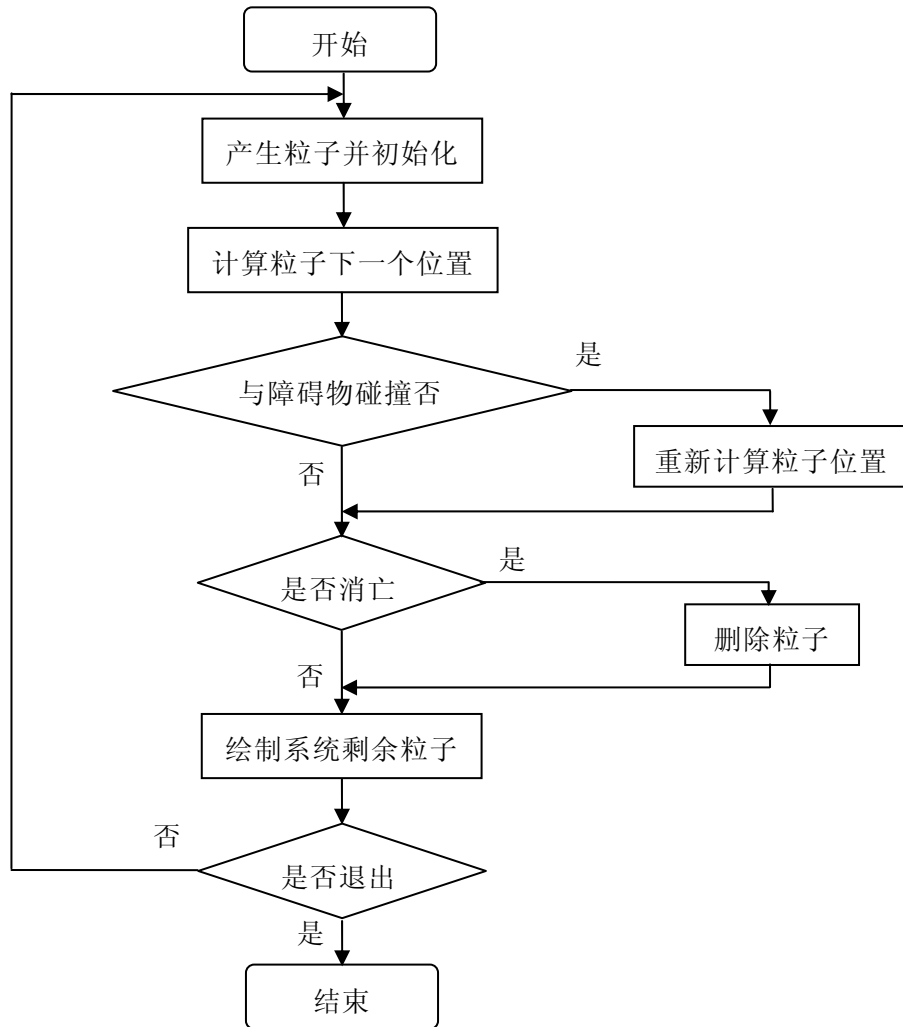


图 3-10 瀑布粒子处理流程图

Fig.3-10 Flow chart of waterfall particles

瀑布水流与球面障碍物及平面障碍物的碰撞效果如图 3-11 所示：

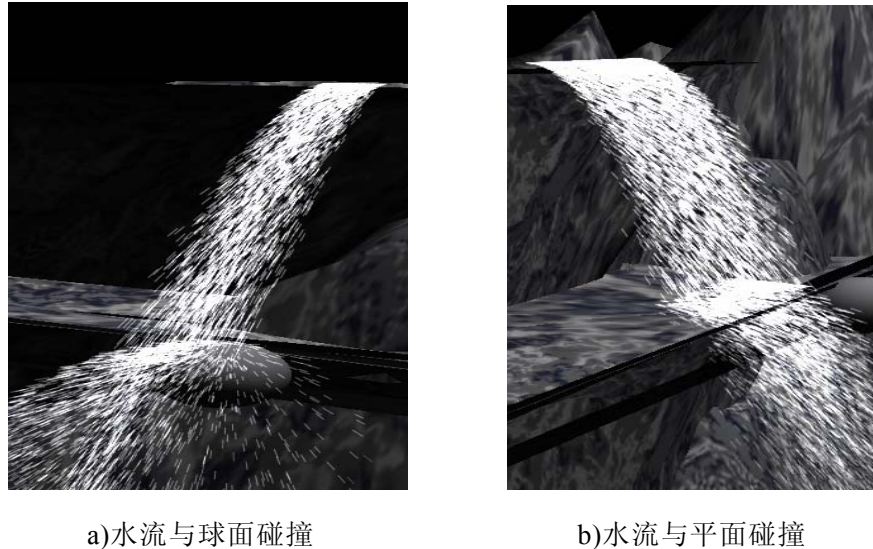


图 3-11 瀑布粒子与障碍物碰撞图

Fig.3-11 Collision between waterfall and obstacles

3.5 混合技术在粒子仿真中的应用

现实中经常会有这样的场景：透过玻璃窗看到窗外的景物；透过有色玻璃看到的物体会有几分玻璃的颜色，又有积分物体的本色；观察一辆汽车，汽车内部和视点之间有一层玻璃，透过两片车窗玻璃，又可以看到汽车后的某些物体等。在进行可视化系统设计时，为了使创建的场景具有更加接近真实的半透明效果，就要采用混合技术。

混合技术通过指定一个混合函数，使物体原始颜色与目标颜色结合起来，最终使场景中某些物体产生半透明效果。除了需要激活混合操作函数，主要的还是准确计算混合因子值。

在混合过程中，输入片原（即“源”）的颜色值将分两个阶段进行处理，与对应的当前所存储像素（目标）颜色值进行合成。首先，要指定如何计算源因子和目标因子，这些因子是分别乘以源和目标中 R、G、B、A 各分量后的 RGBA 四元组。然后，将两个 RGBA 四元组中各对应分量相加。从数学上说明即假定源和目标混合因子分别为 (S_r, S_g, S_b, S_a) 和 (D_r, D_g, D_b, D_a) ，下标 s 和 d 表示源和目标的 RGBA 值，那么混合后的 RGBA 值由下式给出：

$$(RsSr + RdDr, GsSg + GdDg, BsSb + BdDb, AsSa + AdDa) \quad (3-7)$$

该四元组各分量值最终截取在区间 $[0,1]$ 内。

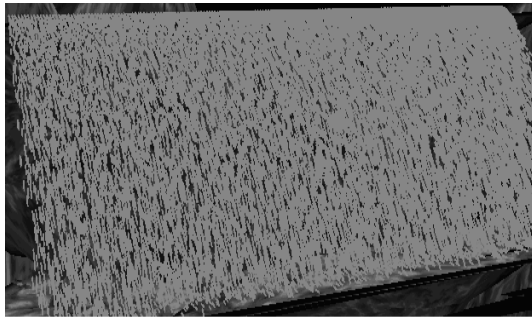
主要的源和目标混合因子在表 3-1 中列举出来，在应用时可以参考，其中 RGBA 值分别以下标 s 和 d 表示。

Table3-1 The source and destined blend factor

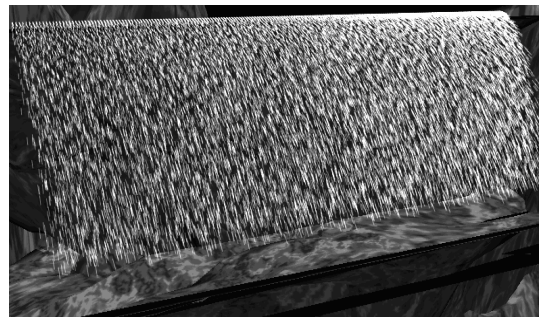
表 3-1 源和目标混合因子

常数	相关因子	计算得到的混合因子
GL_ZERO	源或目标	$(0,0,0,0)$
GL_ONE	源或目标	$(1,1,1,1)$
GL_DST_COLOR	源	(Rd, Gd, Bd, Ad)
GL_SRC_COLOR	目标	(Rs, Gs, Bs, As)
GL_ONE_MINUS_DST_COLOR	源	$(1,1,1,1) - (Rd, Gd, Bd, Ad)$
GL_ONE_MINUS_SRC_COLOR	目标	$(1,1,1,1) - (Rs, Gs, Bs, As)$
GL_SRC_ALPHA	源或目标	(As, As, As, As)
GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA	源或目标	$(1,1,1,1) - (As, As, As, As)$
GL_DST_ALPHA	源或目标	(Ad, Ad, Ad, Ad)
GL_ONE_MINUS_DST_ALPHA	源或目标	$(1,1,1,1) - (Ad, Ad, Ad, Ad)$
GL_SRC_ALPHA_SATURATE	源	$(f, f, f, 1); f = \min(As, 1 - As)$

图 3-12 给出了采用混合操作与关闭混合操作结果对比。a)为未采用混合操作的效果，b)为采用混合操作后的效果，可以明显看出，前者无法透过水流看到背后场景，后者因为有一种半透明效果显得更加真实。



(a)未采用混合操作效果图



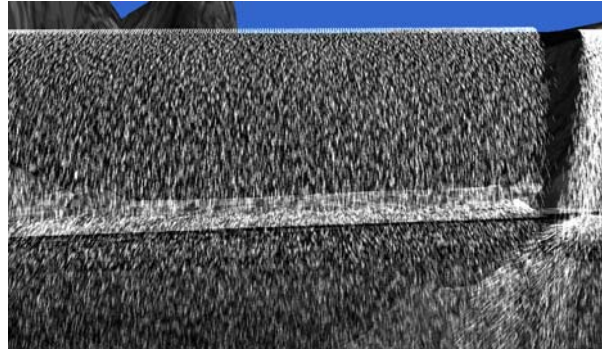
(b)激活混合操作效果图

图 3-12 效果对比图

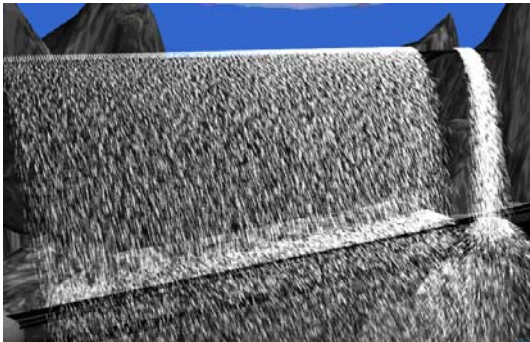
Fig.3-12 Comparison between result with and without blend operation

在介绍完碰撞检测理论、碰撞响应和混合技术后，将这些处理应用到瀑布模拟中，并且加入了光照和天空纹理，得到了以下的效果，如图 3-13 所

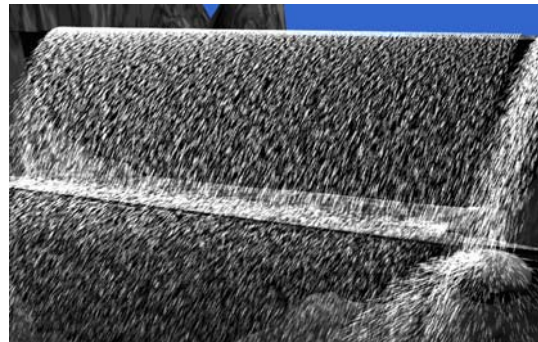
示。为了清楚地看到粒子运动方向的改变，在实验中特意进行了视角转换，从多个方位观察瀑布水流运动。



a)视点在正前方



b)视点在左侧



c)视点在右侧

图 3-13 不同视点下的瀑布场景

Fig.3-13 Waterfalls in different view points

从喷泉和瀑布的模拟结果可以看出，粒子系统用来对不规则物体或运动进行建模比较简单，因为其基本粒子的多样性和灵活性，使得在应用中可以根据需要选择粒子图元，以达到更加真实的效果。但是当系统中粒子数增多，也会增加计算量，使系统运行速度变慢。以下表格 3-2 是在瀑布模拟中当粒子源在每个时间点产生的粒子数不同时，程序刚开始运行时（即系统内粒子数很少时）与程序稳定后每秒绘制的帧数比较，从表格可以看出，随着粒子数的增多，绘制效率下降。粒子规模会影响可视化系统的性能，这是粒子系统方法最大的不足。

表 3-2 粒子绘制效率对比

Table3-2 Efficiency of system with different particle number

新生粒子数	初运行时每秒绘制帧数	稳定后每秒绘制帧数
50	43	19
100	32	13.7~14.1
150	25	12.9~13.2
200	20	12~12.5
300	16.5	11.5

3.6 本章小结

本章主要讨论了粒子系统方法的基本原理，并使用粒子系统实现了喷泉模型以及瀑布模型。喷泉绘制时采用多种图元作为粒子，体现了粒子系统的灵活性；瀑布模拟过程中运用了碰撞理论对瀑布粒子在运动过程中可能与周围环境发生的碰撞进行检测与模拟。绘制时应用了混合技术，生成半透明场景，同时为了增加模拟效果的真实感，

从实验结果可以看出，用粒子系统来模拟类似喷泉、瀑布等不规则物体可以取得满意的效果。粒子系统对于绘制不规则的对象，尤其是流体研究中的一些现象，具有独特的优点。

第4章 基于 SPH 方法的流体模拟

SPH方法是近三十年来发展起来的一种拉格朗日方法，是一种对粒子进行计算的插值方法。SPH方法适用于天体物理问题的计算，现在已发展成为解决高维天体物理问题的一种有效方法^[40]。但是当Monaghan^[41]首次将SPH方法应用与流体领域时，这种方法的优越性就体现了出来，于是越来越多的流体动力学研究人员开始关注这种“无网格”的粒子方法^[42-48]。本章主要内容是对SPH方法进行分析，通过初步应用来探索SPH方法在流体模拟研究中处理特定问题的优越性。

4.1 SPH 方法的基本原理

SPH 方法，顾名思义，是一种无网格的粒子方法。其特点表现在计算空间导数时不需要使用网格离散，而是被插值核函数中的解析微分式代替，从而可以壁面高维网格差分法中的网格缠结和扭曲等令人头疼的问题。这种方法的优点在于保证同其他方法相当的准确性时，使计算更加简便。以下将对 SPH 方法的基本原理进行介绍。

SPH 方法是將流体划分成一个个离散的粒子，流体的流动通过流动的粒子来描述，将任一宏观变量 $A_s(r)$ 借助于一组无序点（粒子）上的值表示成积分插值计算得到，其形式为：

$$A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(r - r_j, h) \quad (4-1)$$

其中 j 对所有的粒子进行迭代， m_j 是粒子 j 的质量， r_j 是位置， ρ_j 是密度，

A_j 是粒子 j 在位置 r_j 处对应的宏观变量值。 $W(r, h)$ 是插值核， h 是核光滑长度，一般应用中可以取为定常数。插值核函数具有如下性质：

$$\int W(r) dr = 1 \quad (4-2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r, h) = \delta(r) \quad (4-3)$$

显然，公式(4-3)是一个归一化条件。

利用核函数的可微性，可以计算 ∇A ，其中 ∇ 为哈密顿算子，具体有：

$$\nabla A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(r - r_j, h) \quad (4-4)$$

同样地，可以得到拉普拉斯算子计算形式：

$$\nabla^2 A_s(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r - r_j, h) \quad (4-5)$$

由以上公式(4-4)、(4-5)可以看出，对某一宏观物理量的空间求导计算转化成为对插值核函数的求导计算，使计算更加简便。

4.2 SPH 方法下的流体控制方程

拉格朗日形式的 N-S 方程如下：

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \quad (4-6)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (4-7)$$

其中，方程(4-6)为流体连续性方程，方程(4-7)为动量方程。由于拉格朗日方法是一种粒子方法，粒子质点质量相同，而且在流动过程中粒子数保持不变，这样也保证了质量守恒条件。在方程(4-6)中， $\nabla \cdot \vec{u}$ 是对速度求散度，不是速度的梯度；方程(4-7)中 ν 表示流体的运动黏性，可以通过流体黏性系数与密度相除得到，即

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4-8)$$

根据 SPH 离散化规则，可以得到流体控制方程的 SPH 形式，连续性方程表示如下：

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-9)$$

流体运动动量控制方程经 SPH 规则转化后为如下形式：

$$\rho_s(r) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(r - r_j, h) = \sum_j m_j W(r_i - r_j, h) \quad (4-10)$$

$$-\nabla p(r_i) = -\sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j} \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-11)$$

$$\nu \cdot \nabla^2 u(r_i) = \nu \sum_j m_j \frac{\nu_j}{\rho_j} \nabla_i^2 W(r_i - r_j, h) \quad (4-12)$$

因为在模拟过程中设定各个粒子质量相等，而且认为流体不可压缩，由公式(4-10)可以计算出粒子质量，所以质量方程为：

$$M = \frac{\rho}{\sum_j W(r - r_j, h)} \quad (4-13)$$

公式(4-9)至(4-13)将流体运动方程中各个组成项物理量分别以 SPH 规则的形式进行了改写。对于压力项中流体粒子位置压强的计算，可以使用状态方程求解，也可以通过求解压力泊松方程得到需要的压强值。

4.3 基于 SPH 的流体模拟算法

通过对流体运动方程进行离散化，并且针对不同的物理量选定适当的插值函数，即得到了清晰的算法步骤：

- (1) 根据粒子初始坐标计算粒子当前密度；
- (2) 根据当前压强计算压力项产生的加速度；
- (3) 根据密度、位置、压强、未更新的速度，计算出黏性力产生的加速度；
- (4) 根据粒子所受外力情况，计算出外力作用下的加速度；
- (5) 将各个加速度进行向量合成，更新粒子的速度；
- (6) 根据位移公式，由新速度计算出粒子新的位置。

在不同的时刻进行所有属性的更新，根据更新后的位置显示粒子，即可

得到粒子连续的运动情况。

4.4 SPH 方法的核函数

核函数的选取是 SPH 方法中关键的步骤，选定了核函数的形式还要确定平滑半径的大小才能运用离散化后的控制方程进行计算。

4.4.1 核函数的主要形式

常用核函数的主要形式，大致有以下几种^[40]：

(1) Gaussian

$$W(r, h) = \left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-s^2} \quad (4-14)$$

其中 d 是空间维数， $s = \frac{r}{h}$ 。

(2) Supper-Gaussian

$$W(r, h) = \left(\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right)^d \left(\frac{5}{2} - s^2 \right) e^{-s^2} \quad (4-15)$$

当 $s > \sqrt{\frac{5}{2}}$ 时，核函数值为负，将会导致非物理解。

(3) 指数核

$$W(r, h) = \frac{1}{8\pi h^3} e^{-s} \quad (4-16)$$

(4) 样条函数

$$W(r, h) = \frac{C}{h^d} \begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}s - 1 \right) s^2 + 1, & 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{1}{4} (2-s)^3, & 1 \leq s \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4-17)$$

其中 C 为归一化常数。

(5) B-样条函数

$$W(r, h) = \frac{3}{4\pi h^3} \begin{cases} \frac{10}{3} - 7s^2 + 4s^3, & 0 \leq s \leq 1 \\ (2-s)^2 \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}s \right), & 1 \leq s \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4-18)$$

4.4.2 平滑半径的选取

平滑半径的不同会导致与当前质点相互作用的周围质点数量不同，也就是说，在当前质点为中心，以平滑半径为半径的领域内的质点才会对当前质点的物理量值有影响。一般应用中，平滑半径取常数，平滑半径越大，插值粒子就越多，得到的计算结果就越精确，同时计算量也会增大，所以说平滑半径并不是越大越好，而是选取在保证计算准确性的前提下，可以尽量地减少计算量的数值。

4.5 SPH 方法的应用

经过以上各个小节对 SPH 基本原理以及应用细节的讨论，接下来是将 SPH 方法应用在流体模拟中。

4.5.1 无边界粒子运动模型

SPH 方法最初就是应用于无边界的天体物理问题中，因此在这一小节中将 SPH 方法应用在无边界的少量粒子间相互作用问题，目的是想将粒子间的相互作用比较形象地展示出来，同时对 SPH 方法有更进一步的认识。

在进行运动模拟之前，首先要确定平滑核函数。本文中针对不同的物理量在计算时采用了如下不同的平滑函数^[49]：

$$W(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq h \\ 0, & r > h \end{cases} \quad (4-19)$$

此函数在进行密度计算时使用。函数中均为距离的平方值，不需进行求解平方根的运算，使计算简便。但是当此平滑函数用于计算压力项时，会因为两质点距离很近时质点中心的平滑核梯度值为零，而出现质点在压力作用下聚

簇的情况，所以在计算压力是使用如下另一个平滑函数^[49]：

$$W(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h-r)^3, & 0 \leq r \leq h \\ 0, & r > h \end{cases} \quad (4-20)$$

我们知道，不同速度的流体在运动时会发生相互阻滞的作用，这种现象是流体黏性体现出来的阻力，为了计算黏性阻力，应用第三个核函数^[49]：

$$W(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1, & 0 \leq r \leq h \\ 0, & r > h \end{cases} \quad (4-21)$$

这个函数的拉普拉斯算子值处处为正，并且具有以下一些可以使计算更加稳定的性质：

$$\nabla^2 W(r, h) = \frac{45}{\pi h^6} (h-r) \quad (4-22)$$

$$W(|r| = h, h) = 0 \quad (4-23)$$

$$\nabla W(|r| = h, h) = 0 \quad (4-24)$$

在确定了核函数以后，本文中选定平滑半径为比粒子直径大小稍大的值，这样做的目的是为了减少插值粒子数，降低计算开销，而且考虑到了计算过程中数值精度的误差。粒子所处位置压强的计算，精确的做法是根据压力泊松方程就解，即求解一个由粒子个数相等数量的线性方程组成的方程组，其计算量是很可观地，故在本文应用中采用了简单的状态方程进行压力计算。状态方程如下：

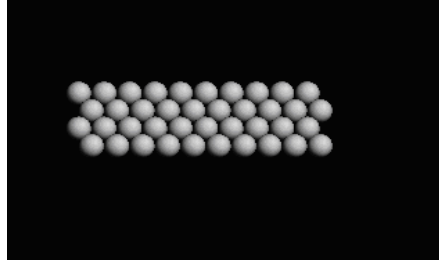
$$p = k(\rho - \rho_0) \quad (4-25)$$

其中 k 是声音在流体中的速度， $\rho - \rho_0$ 为密度变化量。

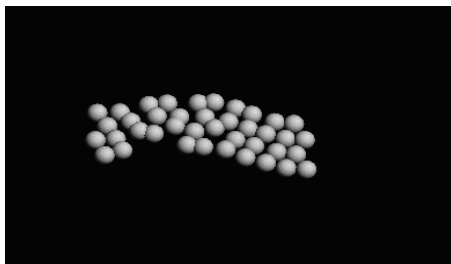
4.5.2 实验结果

以下是用 40 个粒子简单模拟 SPH 方法的实验。粒子的初始状态为静止，在运行中给其中某个或者某些粒子一个瞬时冲量，粒子产生速度，开始

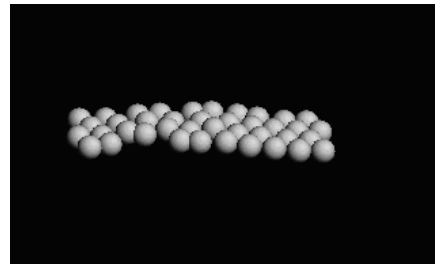
运动，进而因为黏性的影响带动周围粒子运动。



a) 静止状态



b) 给某个粒子施加瞬时外力后



c) 转换角度观察结果

图 4-1 SPH 方法初步应用图示

Fig.4-1 Simple application of SPH

4.6 溃坝流动模型

溃坝流动是一种典型的自由表面流动，包含了水体与壁面的物理作用产生的水花飞溅、融合、自由表面变形等多种复杂现象，完整的模拟这些复杂现象是非常困难的，鉴于以往 SPH 方法在追踪自由表面问题上已经取得了很大的进步，故在本文中采用 SPH 方法对溃坝流动各种现象进行模拟。

4.6.1 溃坝流动控制方程

由于溃坝流动模型是一种比较精确的流体流动，而在用 SPH 方法对流体控制方程进行变形时是一种近似变形，应用中需要特别考虑一些能量守恒方面的问题。

流体运动方程中 $-\frac{\nabla p_i}{\rho_i}$ 一项，有以下几种近似变形^[40]：

(1) 直接套用 SPH 规则，有

$$-\frac{\nabla p(r_i)}{\rho_i} = -\sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j \rho_i} \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-26)$$

(2) 利用 $\rho \nabla p = \nabla(\rho p) - p \nabla \rho$, 则有

$$-\frac{\nabla p(r_i)}{\rho_i} = -\sum_j m_j \frac{p_j - p_i}{\rho_i} \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-27)$$

(3) 利用 $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho$, 有

$$-\frac{\nabla p(r_i)}{\rho_i} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-28)$$

以上三种形式的变形, 只有公式(4-28)所示的变形中具有对称形式, 能够体现粒子间的作用与反作用, 可以保证线性和角动量守恒, 加上平滑核函数的偶函数性质, 在计算过程中采用公式(4-28)能够保证总动量守恒。

同样, 为了体现作用的对称性, 对连续性方程进行变形时也不采用直接变形, 而是采用公式(4-9)的形式。

对于黏性力对流体运动的影响, 采用Songdong Shao^[50]等人提出的变形公式, 即:

$$\left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u}_i \right) = \sum_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \frac{4m_j (\mu_i + \mu_j) (r_i - r_j) \bullet \nabla W_i(r_i - r_j, h)}{(\rho_i + \rho_j)^2 (|r_i - r_j|^2 + \eta^2)} \quad (4-29)$$

其中 η 为一个修正因子, 一般情况下取 $0.1h$ 。

至此, 得到了流体运动的连续性方程的 SPH 形式以及动量方程的 SPH 形式, 如下所示:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \bullet \nabla_i W(r_i - r_j, h) \quad (4-30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} = & -\sum_j m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W(r_i - r_j, h) + \vec{f} \\ & + \sum_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \frac{4m_j (\mu_i + \mu_j) (r_i - r_j) \bullet \nabla W_i(r_i - r_j, h)}{(\rho_i + \rho_j)^2 (|r_i - r_j|^2 + \eta^2)} \end{aligned} \quad (4-31)$$

在控制方程中的平滑核函数本文采用 4.3.1 小节中公式(4-17)形式的样

条函数，归一化常数在一维、二维、三维的情况下可以分别取值 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{10}{7\pi}$ 及 $\frac{1}{\pi}$ ，在利用离散化的控制方程计算时需要注意梯度、散度计算及隐函数求导法则。

虽然在模拟中将水看作是不可压缩的，但是在实际计算中其密度会随着压强、深度等因素的变化而稍有增加。根据 Monaghan^[48] 提出的拟压缩原理，相应的密度计算公式以及压强状态方程如下：

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0 g (H - y)}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4-32)$$

$$p = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right) \quad (4-33)$$

其中， $B = \frac{\rho_0 C^2}{\gamma}$ ， $C = \sqrt{200gH}$ ，对于水来说， γ 一般取 7。

最后还有粒子位移变化方程：

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i \quad (4-34)$$

4.6.2 边界处理

水的流动环境离不开固体壁面，固体壁面的表示方法主要有壁面粒子法、镜面粒子法以及边界力方法^[43,45,51]。

(1) 边界力方法

边界力方法是 Monaghan 引入的一种处理流体与固壁边界作用的一种方法，根据分子间作用力的原理，采用 Lennard-Jones 排斥力的形式进行定量计算。固壁边界用虚粒子表示，对靠近边界的流体粒子施加短距离辐射排斥力。理论上来讲，边界力方法是处理固体壁面与流体粒子相互作用比较形象的方法，而且只要确定了壁面边界的数学表达式以及力的具体形式，任何形状边界的作用都可以模拟出来，但是其守恒性很差。

尽管从边界力方法的基本原理上看这是一种模拟固壁作用比较形象的方法，但是由于有关边界力具体参数如何确定的参考依据过少，相关流体力学

专业文献中即使用到也是一带而过，故本文中未采用边界力方法确定壁面。

(2) 镜面粒子

镜面粒子法顾名思义就是生成某些粒子的镜像。具体实现是以壁面为对称镜面，在壁面“内部”设置几排虚元粒子作为流体粒子的镜像，镜面粒子的属性以对应的流体粒子为依据。镜面粒子的密度与真实粒子密度相同，速度与真实粒子速度方向相反，在每个时间步长内即时生成。这种方法中的镜面粒子对流体粒子施加压力，保证无渗透条件。

镜面粒子法是一种很精确的方法，而且可以保证守恒性，但是从实施过程也可以看出，在进行镜面粒子属性赋值时需要时刻查找与其处于对称位置的流体粒子，过程过于复杂。

(3) 壁面粒子

壁面粒子法是处理边界时经常采用的一种方法，具体实现是将固体壁面离散化成一个个粒子，粒子间距、大小与流体粒子相同。同时为了保证无渗透条件，给壁面处流体粒子施加足够的压力，在固体壁面的内部又设置几排虚元粒子。壁面粒子和虚元粒子都参与流动的压力和密度计算，只是壁面粒子的属性同流体粒子一样由控制方程求解，虚元粒子的属性与它相对应的法线方向壁面密度、压力值一致。壁面粒子采用无滑移条件，即粒子具有速度，但是不做位移计算。虚元粒子的属性直接赋值，壁面粒子与虚元粒子无需进行位移计算，这两点可以降低部分计算量，提高系统效率。

由于壁面粒子法易于理解，便于实现，故本文采用此方法作为模拟溃坝流动中的边壁处理方法。

壁面粒子法中对虚元粒子数量的设定，可以依照实际操作中的平滑半径及粒子间距确定。比如，当平滑半径为 r 时，如果采用的是公式(4-17)所示的样条函数，则给某壁面粒子或者流体粒子带来影响的虚元粒子最多只是分布在此粒子周围 2 倍于平滑半径临域内。如果平滑半径与粒子间距相等，则虚元粒子只需设置 2 层。

4.6.3 自由表面粒子的确定

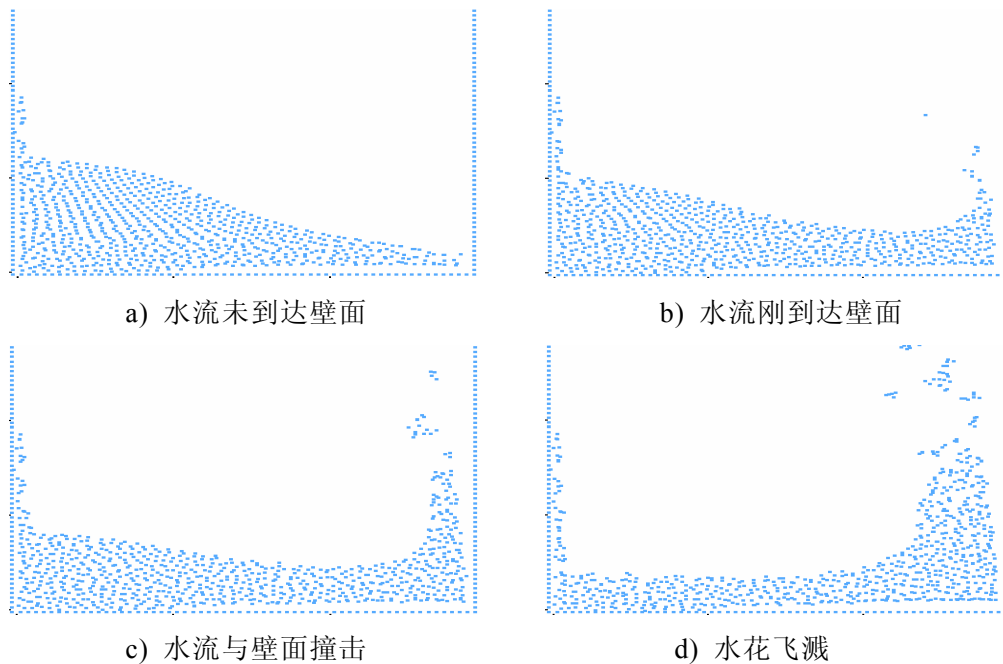
对于自由表面流动问题，关键的一点是判定出处于自由表面的粒子。由于在本文中进行压力及密度计算时采用了拟压缩条件，即认定内部的流体粒子处于一种弱压缩状态，其密度会比初始密度稍大。如果 $\rho_r^i < \beta\rho_0$ ，即如果

处于位置 r 处的粒子 i 其密度小于某个阈值，则认为此粒子为自由表面粒子。 β 为小于 1 的参数，通常情况下可以取 0.8~0.99 之间的数值。

4.6.4 溃坝流动实验结果

在进行了初始条件分析以及运动控制方程变形、壁面条件设置等几步工作后，即可应用控制方程进行程序设计。程序运行时，水流由原来的静力平衡状态在重力作用下开始运动，而后流体粒子各个参量属性的变化，全部依靠 SPH 方法离散化后的运动控制方程，直至动量为零时静止下来。

图 4-2 是溃坝模型的流动结果，其中壁面也以粒子的形式画出。a) 是水流未到达另一侧壁面时的状态，从图中可以看出，水流平稳；b) 是水流刚刚到达另一侧边界时的状态，水流与壁面发生撞击；c)、d) 中是水流与另一侧壁面继续冲击的效果，水花飞溅；e) 图中的水流已经开始回落，冲击起来的水花也逐渐重新回落到主流中；最后的两图 f) 和 g) 体现的是水流回落冲向左侧壁面，而后趋于静止。



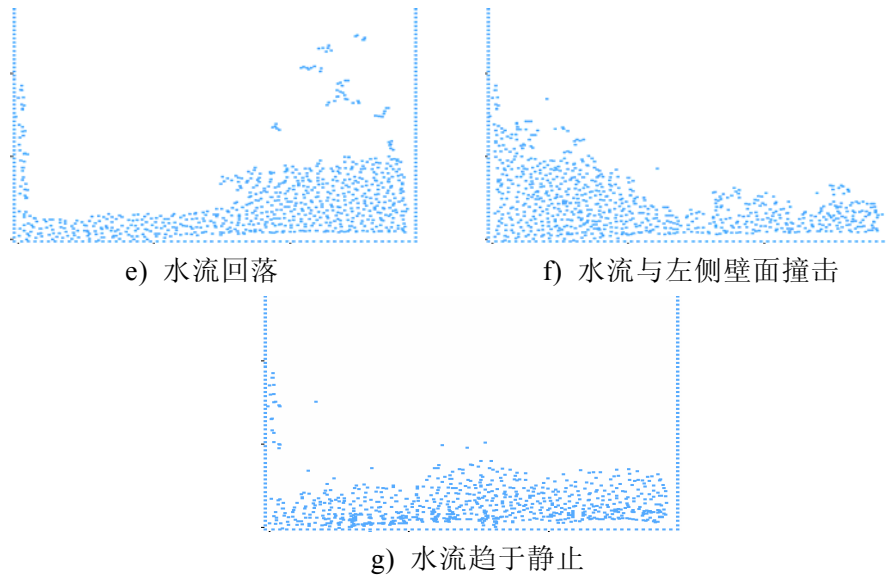


图 4-2 溃坝流动模拟

Fig.4-2 The simulation of flows in a dam-break

为了使效果更加清晰，本文通过数值模拟软件进行了溃坝流动模拟，图 4-3 给出了模拟结果。实验结果展示了水流与壁面碰撞，然后回落，逐渐趋于静止的动态效果，与现实中水流冲击固体壁面的现象相近。模拟中用不同颜色的粒子表示流体压强，蓝色粒子代表压强最小，可近似用于判断自由表面粒子。

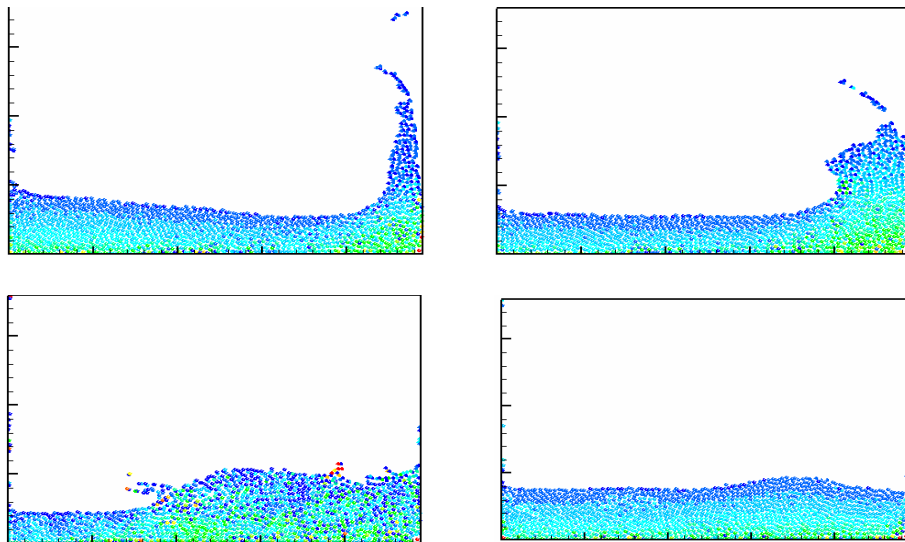


图 4-3 溃坝流动模拟几帧图像

Fig.4-3 Several frames in the video of the dam-break

从以上的实验结果可以看出，SPH 方法在捕捉流动细节上取得了令人满意的结果。SPH 方法在根本上是一种基于粒子的方法，模拟效果的真实性受到粒子细化程度的影响，当同样规模的流体划分为不同数量的粒子时，粒子数越多，粒子之间的交互作用就体现得越全面，流体的运动细节就刻画得越精确，同时，自由运动表面就越平滑。但是归根到底，基于粒子的算法其效率都会受粒子规模的影响，这主要是由 SPH 方法的插值规则决定：平滑半径越大，确定每个粒子物理量的变化所需要的粒子数就越多，计算量就越大；更新每个粒子的物理量时，都要进行粒子间距判断，这无疑也增加了系统的计算量。

4.7 本章小结

本章首先对 SPH 方法进行了深入的分析研究，阐述了 SPH 方法的基本原理，然后根据 SPH 的插值规则将流体运动方程离散化，给出了具体的算法步骤，并将其应用到流体模拟中：运用 SPH 方法模拟了三维粒子运动，实验结果清晰地体现出黏性流体运动时的特点，即速度不同的流体运动时互相阻滞；通过分析固体壁面边界条件以及自由表面条件，运用 SPH 方法模拟了溃坝流动，实验结果表明 SPH 方法更加全面地捕捉了流动细节，方便地确定了自由表面粒子，再一次证实了 SPH 方法解决自由表面问题的优越性。

结论

近三十年来, 计算机图形学领域在流体模拟研究这个方向取得了显著成就, 针对不同的应用提出了多种流体建模方法。从流体模拟方法的发展过程来看, 研究人员把越来越多的精力集中在以物理过程为基础模型构建工作上, 这样做的强大动力是因为基于物理过程的流体模拟方法在控制上更加容易 (因为往往具有明确的物理模型), 在体现流体运动细节上更加真实。

总体来看, 本文全篇探讨的流体模拟方法均是以过程模型为基础, 根据流体现象在现实中的特点应用了不同的物理模型。

论文完成的主要工作及取得的成果如下:

(1) 根据研究内容的需要, 对流体特性进行了分析与概括, 研究了描述流体运动的方法, 并确定了算法中用来描述流体运动的方程。

(2) 从物理学的角度出发, 分析了喷泉和瀑布的运动规律, 以牛顿运动定律为依据, 建立了喷泉和瀑布的具体物理模型。

(3) 根据粒子系统的基本原理, 给出了喷泉和瀑布的模拟效果: 在喷泉模拟中, 采用多种图元作为粒子; 在瀑布模拟中采用瀑布粒子运动轨迹的一段为基本图元, 并且结合混合技术, 取得了更加真实的效果。实验结果验证了粒子系统的灵活性, 在刻画不规则物体时的优越性。

(4) 以瀑布模拟为例, 应用包围盒方法与直接运动轨迹检测相结合的方式, 进行碰撞检测, 并运用射线原理处理碰撞响应。碰撞效果的加入, 进一步增强了瀑布模拟的真实感。

(5) 以 N-S 方程为基础研究了 SPH 方法, 并通过一个简单的无边界粒子的运动模型, 体现了 SPH 方法的工作原理。而后, 给出了溃坝流动模型, 并分析了模型的固壁边界条件以及自由表面条件, 运用 SPH 方法对流体控制方程进行变形, 得到了溃坝流动的模拟效果。实验结果表明, SPH 方法成功地捕捉了流体运动的细节, 其中包括水花飞溅与融合, 自由表面变形等, 也验证了 SPH 方法在处理自由表面问题上的优势。

流体的模拟是计算机图形学领域一个富有挑战性的问题, 流体模拟效果的逼真度和实时性是研究人员长期以来关注的问题, 是需要研究人员付出更多的努力去解决的问题, 因此, 我们后继的研究工作将集中在以下几个方面:

(1) 应用粒子系统方法进行喷泉和瀑布模拟时, 随着粒子数的增加,

系统计算量也增加，影响到绘制效率；使用 SPH 方法进行流体模拟时，当流体规模增大，或将粒子划分细化，计算需要扫描的粒子数就会大大增加，在高维计算中尤其如此，对模拟效果的实时性影响比较显著。基于以上原因，今后需要考虑降低系统计算量，提高绘制效率的方法。

（2）提高流体模拟效果的真实感是流体模拟研究中不可缺少的一方面，真实感的体现需要大量的渲染技术，因此今后的又一项主要工作就是研究更加先进的渲染技术。

（3）基于 SPH 方法的流体模拟是以粒子的形式表示流体，尽管细化粒子可以使流动表面更加平滑，但是这样会增加系统开销，因此，探索使自由表面更加平滑的方法也是很有必要的。

参考文献

- 1 Damien Hinsinger, Fabrice Neyvet, Marie-Paule Cani. Interactive Animation of Ocean Waves. ACM. 2002: 161-166, 201.
- 2 曾芬芳, 黄国建. 虚拟海洋场景中波浪的模拟. 计算机应用. 2001, 21(4): 33-36.
- 3 Hai Mao, Yee-Hong Yang. Particle-based Immiscible Fluid-fluid Collision. Graphics Interface. 2006: 49-55.
- 4 Matthias Muller, Barbara Solenthaler, Richard Keiser, Maikus Gross. Particle-based Fluid-fluid Interaction. ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. 2005: 1-7.
- 5 Alain Fournier, William T. Reeves. A Simple Mode of Ocean Waves. ACM. 1986, 20(4): 75-84.
- 6 Nick Rasmussen, Duc Quang Nguyen, Willi Geiger, Ronald Redkiw. Somke Simulation for Large Scale Phenomena. ACM. 2003: 703-707.
- 7 张芹, 谢隽毅, 吴惠中, 张正军. 火焰、烟、云等不规则物体的建模方法研究综述. 中国图形图像学报 (A) . 2000, 5, (3): 86-90.
- 8 柳有权, 刘学慧, 朱红斌, 吴恩华. 基于物理的流体模拟动画综述. 计算机辅助设计与图形图像学报. 2005, 17(12): 2581-2589.
- 9 A. Iglesias. Computer Graphics for Water Modeling and Rendering: A Survey. Future Generation Computer Systems, www.elsevier.com/locate/future. 2004, (20): 1355-1374.
- 10 鄢来斌, 李思昆, 张秀山. 虚拟海战场景中的海浪实时建模与绘制技术研究. 计算机研究与发展. 2001, 38(5): 568-573.
- 11 杨怀平, 孙家广. 基于海浪谱的波浪模拟. 系统仿真学报. 2002, 14(9): 1175-1177.
- 12 杨怀平, 胡事民, 孙家广. 一种实现水波动画的新算法. 计算机学报. 2002, 25(6): 612-617.
- 13 D. Ebert, K. Musgrave, P. Prusinkiewics, J. Stam. Simulating Nature: from Theory to Practice. ACM SIGGRAPH 2000 course 25.
- 14 William T. Reeves. Particle Systems-A Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects. Computer Graphics. 1983, 17(3): 359-375.

- 15 管宇, 邹林灿, 陈为, 彭群生. 基于粒子系统的实时瀑布模拟. 系统仿真学报. 2004, 16(11): 2471-2474, 2478.
- 16 赵静谧, 张慧, 郑国勤. 基于粒子系统的喷泉模拟. 计算机应用研究. 2006: 244-245, 249.
- 17 马骏, 朱衡君. 基于动态纹理和粒子系统的喷泉模拟. 北京交通大学学报. 2005, 29(1): 90-94, 110.
- 18 方建文, 于金辉, 马文龙. 基于硬件加速和粒子系统的实时喷泉模拟. 计算机工程与应用. 2006, 14: 118-120, 172.
- 19 杨冰, 鲁敏. 基于景物特征的粒子系统建模技术. 计算机应用研究. 2000, (5): 20-22.
- 20 徐利明, 姜昱明. 基于粒子系统与 OpenGL 的实时雨雪模拟. 计算机仿真. 2005, 22(7): 242-245.
- 21 徐迎庆, 苏成, 李华, 刘慎权, 齐东旭. 基于物理模型的流水及波浪模拟. 计算机学报. 2000, 19(增刊): 150-163.
- 22 柳有权, 刘学慧, 吴恩华. 基于 GPU 带有复杂边界的三维实时流体模拟. 软件学报. 2006, 17(3): 569-576.
- 23 Jos Stam. Stable Fluids. ACM SIGGRAPH. 1999: 121-128.
- 24 Douglas Enright, Stephen Marschner, Ronald Fedkiw. Animation and Rendering of Complex Water Surfaces. ACM. 2002: 73-744.
- 25 Nick Foster, Ronald Fedkiw. Practical Animation of Liquids. ACM SIGGRAPH. 2001: 23 -30.
- 26 Mark Carlson, Peter J. Mucha, Greg Turk. Rigid Fluid: Animation the Interplay Between Rigid Bodies and Fluid. ACM. 2004: 377-384.
- 27 Mattias Muller, Simon Schirm, Matthias Teschner, Bruno Heidelberger, Markus Gross. Interaction of Fluids with Deformable Solids. Journal of Computer Animation and Virtual Worlds (CAVW). 2004, 15(3-4): 159-171.
- 28 Peter Kipfer, Rudiger Westermann. Realistic and Interactive Simulation of Rivers. Graphics Interface. 2006: 41-48.
- 29 OH-YOUNG SONG, HYUNCHEOL SHIN, HYEONG-SEOK KO. Stable But Nondissipative Water. ACM Trans. On Graphics. 2005, 24(1): 81-97.
- 30 S. T. Greenwood, D. H. House. Better with Bubbles: Enhancing the Visual Realism of Simulated Fluid. ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. 2004: 287-296.

- 31 吴子牛. 计算流体力学基本原理. 科学出版社, 2001: 1.
- 32 万华根, 金小刚, 彭群生. 基于物理模型的实时喷泉水流运动模拟. 计算机学报. 1998, 21(9): 774-779.
- 33 刘涛, 王增波, 李占利. 碰撞检测过程中的包围盒技术及应用研究. 西安科技大学学报. 2006, 26(3): 395-399.
- 34 马登武, 叶文, 李瑛. 基于包围盒的碰撞检测算法综述. 系统仿真学报. 2006, 18(4): 1058-1064.
- 35 高丽娜, 马尧海. 虚拟漫游中的碰撞检测问题的解决方法. 计算机仿真. 2006, 23(2): 189-191.
- 36 丘威, 张立臣. 虚拟物体间碰撞检测系统的设计. 微计算机信息. 2006, 22(3-3): 270-272, 280.
- 37 蔡文军, 陈虎. 基于混合模型的碰撞检测优化算法研究. 计算机与现代化. 2006, (7): 49-52.
- 38 傅由甲, 杨克俭. 基于碰撞响应的三维空间多刚体实时运动仿真. 计算机仿真. 2006, 23(9): 198-201.
- 39 黄通浪, 唐敏, 董金祥. 一种快速精确的连续碰撞检测算法. 浙江大学学报(工学版). 2006, 40(6): 1051-1055.
- 40 张锁春. 光滑质点流体动力学(SPH)方法(综述). 计算物理. 1996, 13(4): 385-397.
- 41 J. J. Monaghan, A. Kocharyan. SPH Simulation of Multi-phase Flow. Computer Physics Communications. 1995, (87): 225-235.
- 42 李梅娥, 周进雄. 不可压流体自由表面流动的 SPH 数值模拟. 机械工程学. 2004, 40(3): 5-9.
- 43 毛益明, 汤文辉. 自由表面流动问题的 SPH 方法数值模拟. 解放军理工大学学报(自然科学版). 2001, 2(5): 92-94.
- 44 宗智, 邹丽, 刘谋斌, 王喜军. 模拟二维水下爆炸问题的光滑粒子(SPH)方法. 水动力学研究与进展(A辑). 2007, 22(1): 61-67.
- 45 刘瑛琦, 郑金海, 龚霞. SPH 模拟自由表面流动的边界处理新方法. 中国科技论文在线, <http://www.paper.edu.cn>.
- 46 J. P. Gray, J. J. Monaghan, R. P. Swift. SPH Elastic Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001, (190): 6641-6662.
- 47 J. J. Monaghan, A. Kos. Solitary Waves on A Cretan Beach. Journal of waterway, port, coastal and ocean engineering. 1999, (5/6): 145-154.

- 48 J. J. Monaghan. Gravity Currents and Solitary Waves. *Physica D*. 1996, (98): 523-533.
- 49 Mattias Muller, David Charyper, Markus Gross. Particle-based Fluid Simulation for Interactive Applications. SIGGRAPH Symposium on computer animation. 2003: 154-159, 172.
- 50 Songdong Shao, Edmond Y. M. Lo. Incompressible SPH Method for Simulating Newtonian and Non-Newtonian Flows with a Free Surface. *Advances in Water Resources*. 2003, 26: 787-800.
- 51 张健, 陆利蓬, 刘恩洲. SPH 方法在溃坝流动模拟中的应用. *自然科学进展*. 2006, 16(10): 1326-1330.

攻读学位期间发表的学术论文

- 1 唐好选，李娜. 基于物理过程及 SPH 方法的流体模拟. 计算机应用研究，已投稿。

哈尔滨工业大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《真实感流体模拟算法的研究》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字：

日期： 年 月 日

哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书

《真实感流体模拟算法的研究》系本人在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨工业大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨工业大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅，同意学校将论文加入《中国优秀博硕士学位论文全文数据库》和编入《中国知识资源总库》。本人授权哈尔滨工业大学，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

哈尔滨工业大学硕士学位涉密论文管理

根据《哈尔滨工业大学关于国家秘密载体保密管理的规定》，毕业论文答辩必须由导师进行保密初审，外寄论文由科研处复审。涉密毕业论文，由学生按学校规定的统一程序在导师指导下填报密级和保密期限。

本学位论文属于 保密□，在 年解密后适用本授权书
不保密□

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

致谢

值此论文完成之际，向所有关怀、帮助我的老师、同学、朋友和亲人表示深深的感谢。

首先感谢导师唐好选副教授。感谢唐老师在我两年的学习和生活中的指导和关怀；感谢老师以对学科发展敏锐的直觉帮我选定课题，帮我从迷茫中走出；感谢老师在研究中的监督及对我遇到的疑难的解答；感谢老师在论文撰写时、准备答辩时提出的宝贵意见和建议。唐老师教学上严谨的态度、学习中渊博的知识和对前沿问题独到的见解令我尊崇。他对科研的一丝不苟的态度会让我终生难忘，对我的严格要求也会让我受益匪浅。可以说，两年的研究生生活中，我的每一步成长都凝聚着老师的关怀和指导。衷心感谢老师为培养学生付出的辛勤劳动和大量心血。

感谢实验室的同学常继红和曲毅，他们在学习中给了我很大帮助，与他们的交流让我的思路得以开阔。感谢苏莉莉和杨艳萍，在相处的短短几个月时间里，她们给了我很大的支持。

感谢市政学院不知名的同学帮我解答流体力学专业的一些问题，让我少走很多弯路。

感谢我的家人一直作我最坚强的后盾。

感谢我的朋友们给予我心灵上的安慰和精神上的支持。

再次衷心感谢所有曾经给予我关心、支持和帮助的人们。

真实感流体模拟算法的研究

作者: [李娜](#)

学位授予单位: [哈尔滨工业大学](#)

引用本文格式: [李娜](#) [真实感流体模拟算法的研究](#)[学位论文]硕士 2007