Structure Discrète
IFT1065
Devoir 3
Récursivité et Preuves

Franz Girardin et Aiya Ben Ouhida

24 décembre 2023

Table des matières

Résolution de problèmes

1.1 Problème 1 · Jeu de Nim

1. Représentez le graphe de stratégie pour n = 10

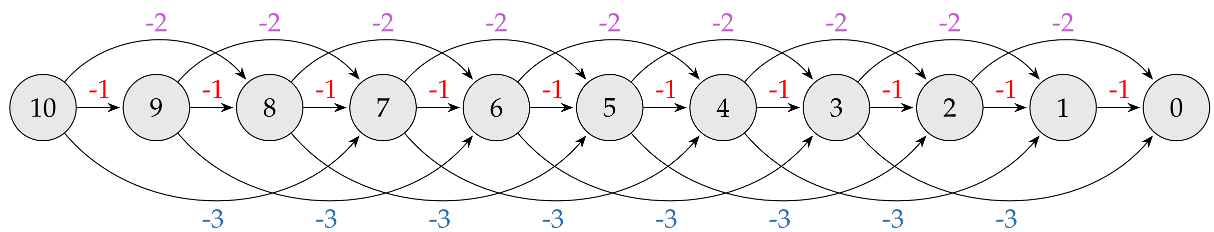

Figure 1.1 – Stratégies possible pour 10 pions dans le jeu de Nim.

2. Expliquez pourquoi vous pouvez toujours gagner la partie si vous commencez à jouer et qu'il y a $n \in \{5, 6, 7\}$.

Pour chaque scénario $n = 5, n = 6, n = 7$, il existe plusieurs séquences gagnantes. Pour montrer qu'on peut toujours gagner, il suffit de monter **une** séquence gagnante par scénario $n \in \{5, 6, 7\}$.

<u>Scénario $n = 5$</u>

Nous allons forcer le second joueur, j_2 à concéder la victoire au j_1 lorsque j_1 débute. Le joueur j_1 peut prendre 1 pion. Le joueur j_2 aura alors l'option de prendre 1, 2 ou 3 pions. Dans tous le cas, au tour suivant, j_1 pourra prendre le nombre de pions $n \in 1, 2, 3$ restants et gagner la partie. □

<u>Scénario $n = 6$</u>

Nous allons forcer le second joueur, j_2 à concéder la victoire au j_1 lorsque j_1 débute. Le joueur j_1 peut prendre 2 pion. Le joueur j_2 aura alors l'option de prendre 1, 2 ou 3 pions. Dans tous le cas, au tour suivant, j_1 pourra prendre le nombre de pions $n \in 1, 2, 3$ restants et gagner la partie. □

<u>Scénario $n = 7$</u>

Nous allons forcer le second joueur, j_2 à concéder la victoire au j_1 lorsque j_1 débute. Le joueur j_1 peut prendre 3 pion. Le joueur j_2 aura alors l'option de prendre 1, 2 ou 3 pions. Dans tous le cas, au tour suivant, j_1 pourra prendre le nombre de pions $n \in 1, 2, 3$ restants et gagner la partie. □

Dans les 3 scénarios, il existe une séquences gagnante. Ainsi, nous concluons que si le joueur j_1 débute et que la partie est configuré de façon à avoir un nombre de pions $n \in 5, 6, 7$, il existe une stratégie qui garantie la victoire à j_1. □

3. Marquez chacun des sommets de votre graphe comme gagnant ou perdant.

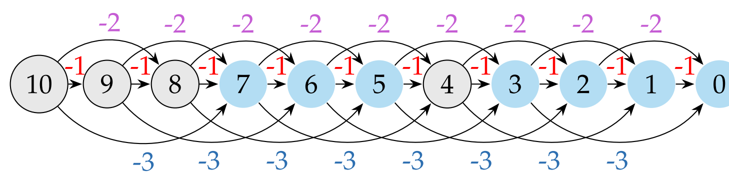

Figure 1.2 – Sommet gagants pour un joueur j_1 ayant la priorité.

Les sommets gagnant sont marqués en bleu et ceux qui sont perdants sont marqués en gris. En supposant que $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ est une partie hypothétique où les même règles demeurent, j_1 peut immédiatement gagner en sélectionnant les n pions. Autrement, j_1 peut gagner en employant les stratégie mentionnée ci-haut lorsque c'est sont tour de jouer et que la configuration du jeu est telle que $n = 5, 6, 7$.

4. Montrez qu'en étant second à jouer, vous pouvez gagner la partie si et seulement si le nombre de pions n'est pas un multiple de 4. Mentionnez explicitement les techniques de preuves que vous utilisez.

> **Proposition 1.1** $P(j_1, j_2, n)$
> En supposant que j_1 début la partie,
>
> $$\text{le joueur } j_2 \text{ peut gagner} \leftrightarrow 4 \nmid n$$

Pour montrer que la proposition de l'énoncé est vraie, nous allons considérer deux propositions qui résument l'implication biconditionnelle. Nous allons d'abord montrer la réciproque : *que si le nombre de pions n'est pas un multiple de 4 alors le joueur j_2 peut pas gagner*. Nous allons ensuite prouver la contraposée selon laquelle *si le nombre de pions est un multiple de 4, alors le joueur j_2 peut gagner*

Proposition 1.2 Contraposée $P'(j_1, j_2, n)$

$$4 \nmid n \implies \text{le joueur } j_2 \text{ peut gagner}$$

Preuve 1

Supposons que $4 \nmid n$, autrement dit, le nombre de pions n'est pas un multiple de 4 et $n \neq 4k$ pour tous les $k \in \mathbb{Z}$. Nous savons que le joueur j_1 commence en retirant $1, 2$ ou 3 pions. Considérons m, le nombre de pions retirés par j_1 au premier tour. Après ce premier tour de j_1, il reste alors $n - m$ pions. **Or**, lorsque c'est son tour, le joueur j_2 peut choisir un nombre de pions p de manire à ce que $(n - m) - p$ est un multiple de 4 (il dispose d'un degré de liberté de 1, 2, ou 3 qui est suffisant pour engendrer cette état du jeu). Pour comprendre comment cela est possible, notons que $(n - m)$ donne nécessairement un reste de $1, 2$, ou 3 lorsqu'on divise $(n - m)$ par 4. Ainsi, le joueur j_2 retire respectivement $1, 2$ ou 3 pions pour obtenir un multiple de 4. Ensuite, peu importe comment j_1 joue, j_2 pourra toujours suivre la stratégie de ramener le nombre total de pions à un multiple de 4 À titre d'exemple, s'il reste maintenant 8 pions et que j_1 pige 2, j_1 peut à son tour piger 2 pour qu'il reste un total de $8 - 2 - 2 = 4|4$ pions. Ainsi, peu importe n, après avoir établit initialisé la stratégie où le nombre de pions est un multiple de 4, j_2 pourra toujours forcer, dans les tours subséquents, forcer son adversaire dans cette situation de dominance, jusqu'à ce qu'il ne reste que 4 pions et que ce soit le tour de j_1 de piger. À cet instant précis, l'action de j_1 garantie la victoire à j_2. Plus spécifiquement, s'il reste 4 pionts et que j_1 doit piger $1, 2$ ou 3 pions, j_2 pourra piger la différence et remporter la partie. $\square$

Proposition 1.3 Contraposée $P''(j_1, j_2, n)$

$$4|n \implies \text{le joueur } j_2 \text{ ne peut pas gagner}$$

Preuve 2

Supposons quie $4|n$, autrement dit, supposos que le nombre de pion est un multiple de 4. Il existe dont un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$. Le joueur j_1 a la posibilité de choisir $1, 2$ ou 3 pions. Peu importe son choix, le nombre de pions restants ne sera plus un multiple de 4. Nous savons que j_2 joue également en sélectionnant un nombre de pions qui n'est pas un multiple de 4, mais peu, lorsque c'est son tour, ramener le total à un multiple de 4. **Or**, tant que le joueur j_1 s'assure de foncer j_2 à jouer lorsqu'il reste $n = 8$ pions, nous savons que j_1 peut alors garantir la victoire (tel que nous l'avons montré dans l'excercice 1). que se soit son tour de jouer. Donc si j_1 débute la partie, il existe toujours une séquence de choix disponibles à j_1 prendre le contrôle de la partie et s'assurer que j_2 franchisse $n = 8$ en premier. Ainsi nous concluons que lorsque n est un multiple de 4, le joueur j_2 ne peut pas gagner

Nous avons montré que si $4 \nmid n$, le joueur j_2 peut gagner ; nous avons également montrée que si $4|n$, le joueur j_2 ne peut pas gagner. Nous concluons alors que le joueur j_2 peut gagner si et seulement si n est un multiple de 4. $\square$

Problème 3 · Équivalence des vecteurs

1. Dessinez le graphe de la relation pour les vecteurs suivants :

$$(-1, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 0), (2, 2), (2, 1),$$
$$(0, -1), (0, 1), (0, 2).$$

Soit la relation $\mathcal{R}$, on peut exprimer la proposition conditionnelle qui définit la relation $\mathcal{R}$:

Proposition 1.4 $P(x, y, t, z)$

$$xt = yz \implies (x, y)\mathcal{R}(z, t)$$

Nous devons représenter **toutes les paires de vecteurs** pour lesquels $P(x, y, t, z)$ en vraie. Autrement dit, nous devons trouver tous les couples de vecteurs (x, y), (t, z) tels que $xt = yz$.

Considérons les vecteurs $(-1, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 0), (2, 2),$ $(2, 1), (0, -1), (0, 1), (0, 2)$ comme étant $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7,$ v_8, v_9, respectivement. Nous avons alors le graphe de $\mathcal{R}$ pour les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_9$ représenté par la figure suivante.

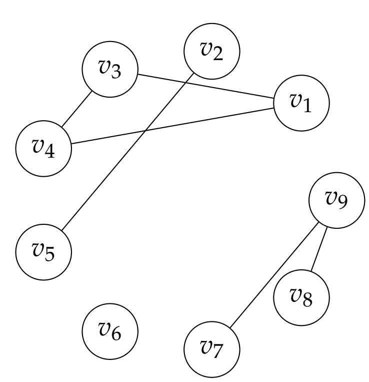

FIGURE 1.3 – Représentation de la relation $\mathcal{R}$ pour les vecteurs $v_1 \rightarrow v_9$

2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Mentionnez explicitement les techniques de preuves que vous utilisez.

Soit l'ensemble de vecteurs

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x = 0 \leftrightarrow y \neq 0\},$$

nous devons **prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence**. Pour ce faire, nous allons montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition 1.5 $P_1(v_n, A, \mathcal{R})$

Tous les vecteurs v_n faisant partie de A respectent la proposition $v_n \mathcal{R} v_n$:

$$\forall v_n \in A, v_n \mathcal{R} v_n$$

Preuve 3

Nous procédons par **preuve directe**. Supposons que $v_n = (x, y) \in A$. Pour vérfier la réflexivité de v_n, nous pouvons appliquer la **proposition 1.1** sur le vecteur v_n. La proposition devient alors $P(x, y, x, y)$:

$$\left(xy = yx\right) \implies \left(x, y)\mathcal{R}(x, y)\right)$$

Nous savons que le produit xy est égale à yx, par la commutativité de la multiplication. Par l'implication de la proposition 1.1, nous avons alors $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$. Ainsi, $v_n \mathcal{R} v_n$ est une proposition vraie et nous concluons alors que R est réflexive. □

Proposition 1.6 $P_2(v_n, A, \mathcal{R})$

Tous les vecteurs $v_a = (x, y), v_b = (z, t)$ faisant partie de A sont tels que **si** v_a est en relation avec v_b, **alors** v_b est en relation avec v_a :

$$\forall v_a, v_b \in A, v_a \mathcal{R} v_b \implies v_b \mathcal{R} v_a$$
$$\updownarrow$$
$$\forall (x, y), (z, t) \in A, (x, y)\mathcal{R}(z, t) \implies (z, t)\mathcal{R}(x, y)$$

Proposition 1.7

Nous procédons pas **preuve direction**. Supposons que $(x, y), (z, t) \in A$ et $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$. Si $(x, y)\mathcal{R}(x, t)$, alors, par la définition de la relation $\mathcal{R}$ nous savons que $xt = yz$. Par l'associativité de la multipliucation, nous savons que l'équivalence suivante est vraie :

$$xt = yz \leftrightarrow tx = zy$$

Or, $tx = zy$ est simplement $(z, t)\mathcal{R}(x, y)$. En effet, $(z, t)\mathcal{R}(x, y)$, par la définition de la la relation $\mathcal{R}$, signifie que $zy = tx$. On sait aussi que, par la réflexitivé de l'égalité, $a = b \leftrightarrow b = a$. Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
(x, y)\mathcal{R}(z, t) &\implies xt = yz && \textbf{Def. de } \mathcal{R} \\
xt = yz &\implies tx = yz && \textbf{Commutativité de mult.} \\
tx = yz &\leftrightarrow yz = tx && \textbf{Relexivité de l'égalité} \\
yz = tx &\implies (z, t)\mathcal{R}(x, y) && \textbf{Def. de } \mathcal{R}\textbf{ , inférence}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que **si** $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$, **alors** $(z, t)\mathcal{R}(x, y)$. Nous concluons que $P_2(v_n, A, \mathcal{R})$ est vraie et $\mathcal{R}$ est réflexive. □

Proposition 1.8 $P_3(x, v_n \mathcal{R})$

Tous les vecteurs $v_a = (x, y), v_b = (p, q), v_c = (z, t)$ faisant partie de A sont tels que **si** v_a est en relation avec v_b, et que v_b est en relation avec v_a, **alors** v_a est en relation avec v_c.

$$\forall v_a, v_b, v_c \in A, \left(v_a \mathcal{R} v_b\right) \wedge \left(v_b \mathcal{R} v_c\right) \implies \left(v_a \mathcal{R} v_c\right)$$
$$\updownarrow$$
$$\forall (x, y), (p, q), (z, t) \in A, \left((x, y)\mathcal{R}(p, q)\right) \wedge \left(p, q)\mathcal{R}(z, t)\right) \implies (x, y)\mathcal{R}(z, t)$$

Preuve 4

Nous procédons par **preuve directe**. Supposon que $(x, y), (p, q), (z, t) \in A$, que $(x, y)\mathcal{R}(p, q)$ et que $(p, q)\mathcal{R}(z, t)$ En supposant que ces deux expressions sont vraie, cela signifie que les deux expressions suivantes sont également vraies :

$$xq = yp \quad \textbf{Conséquence de. } v_a \mathcal{R} v_b \tag{1.1}$$
$$pt = qz \quad \textbf{Conséquence de. } v_b \mathcal{R} v_c \tag{1.2}$$

Or, en multipliant les deux côtés de l'équation (1.1) par t, et en multipliant les deux côté de l'équation (1.2) par y, nous obtenons

$$xqt = ypt \tag{1.3}$$
$$ypt = yqz \tag{1.4}$$

Par la transitivité de l'égalité, nous avons :

$$xqt = yqz \tag{1.5}$$

nous ne pouvons pas diviser les deux côtés de l'équation (1.5) par t, puisqu'il est possible que t soit égal à 0 et que $(z, t) = (z, 0) | z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Mais, à toute fin pratique, nous pouvons ignorer t. Si t est égal à zéro, l'équation (1.5) est trivialement vraie ; les deux côté de l'égalité sont égale à 0. Mais si $t \neq$, nous avons alors l'expression suivante :

$$xt = yz$$

Par la définition de la relation $\mathcal{R}$ nous savons que cette expression signie $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ ou $v_a \mathcal{R} v_b$. Notons que si $t = 0$, la relation $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ tient, tant que $y = 0$. Dans ce cas, $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ découle natuellement de $xqt = yqz$ et toutes les autres équations et dérivations menant à $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ demeurent vraies. Ainsi, nous avons montré que **si** $(x, y)\mathcal{R}(p, q)$ et que $(p, q)\mathcal{R}(z, t)$, **alors**, $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$. Nous concluons donc que $\mathcal{R}$ est transitive. $\square$

Réponse

Nous avons montré que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Ainsi, nous concluons que $\mathcal{R}$ est, par définition, une relation d'équivalence. $\square$

PROBLÈME 4 · ÉQUIVALENCE DES VECTEURS

— Montrez que tout ensemble défini récursivement est dénombrable. Mentionnez explicitement les techniques de preuves que vous utilisez.

Proposition 1.9 $P(E, b_i, C_i)$

Soit un ensemble E définit récursivement par

$$E = \begin{cases} b_1, b_2, \ldots, b_n \Big| \overline{b} = \{b_1, b_2, \ldots b_n\} & \textbf{(Bases)}, \\ C_1, C_2, \ldots, C_k \Big| \overline{C} = \{C_1, C_2, \ldots C_n\} & \textbf{(Constructeurs)} \end{cases}$$

Tous les ensemble défini récursivement de cette façon sont dénombrables.

Preuve 5

Nous procédons par **preuve directe et par induction**.

Hypothèses

Soit l'ensemble E définit ci-haut, nous condérons alors les propriétés suivantes :

1. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ est un ensemble fini, $\overline{b}$, d'éléments de base définissant l'ensemble E et
2. $C_1, C_2, \ldots C_k$ est un ensemble fini, $\overline{C}$ de constructeurs manipulant les éléments de base afin de construire de nouveaux éléments appartenant à E.

À partir de la définition de E, il est alors possible de construire une suite (infinie) d'ensembles $E_0, E_1, E_2, \ldots$ tels que chaque E_i est une sous-ensemble de E.

Constructions d'une suite d'ensembles E_i

Définissons E_0 comme l'ensemble des éléments de base : $E_0 = \overline{b}$. Par l'hypothèse, nous savons que E_0 est dénombrable. Définisson également E_{i+1} comme l'ensemble où pour chaque $i \geq 0$, E_{i+1} est l'ensemble des éléments qui peuvent être construits en utilisant le constructeurs sur E_i. Ainsi, pour obtenir E_1, par exemple, il faut utiliser tous les constructeurs de E sur tous les éléments de bases de $E_0 = \overline{b}$.

$$E_{i+1} ::= \{C_j(E_i)\} \tag{1.6}$$

Montrer que chaque E_i est dénombrable

Par **l'hypothèse**, E_0 est fini et donc dénombrable. Pour construire un premier E_{i+1}, soit E_1, nous devons nécessairement faire appel à l'application de tous les C_j sur E_0. Or, nous savons que les C_j sont fini et donc dénombrables et nous savons également que E_0 est fini et donc dénombrable. Nous pouvons considérer les constructeurs C_j comme une fonction de E_i à E_{i+1}.

$$E_{i+1} = f(C_j, E_i) = \left\{ \sum_{j=1}^{j=k} C_j(E_i) \right\} \tag{1.7}$$

En effet, les C_j donnent les instructions permettant d'obtenir E_{i+1} à partir de E_i et chaque ensemble $\{C_j(E_i)\}$ est une partition de E_i. Nous savons que, à minori, $f(C_j, E_i)$ est surjective, puisqu'il s'agit d'une fonction de E_i à E_{i+1} ; chaque élément de E_{i+1} peut être mappée sur un seul (si $f(C_j, E_i)$ est injective) ou plusieurs éléments de E_i. Puisque E_i est dénombrable et que $f(C_j, E_i)$ est une fonction surjective de E_i à E_{i+1}, il s'ensuit que E_{i+1} est dénombre. Notons que E_{i+1}, l'image de $f(C_j, E_i)$ peut avoir moins d'éléments que l'ensemble de départ E_i, mais ne peut pas en avoir plus. Donc, dans le pire des cas, l'image aura la même taille que l'ensemble de départ, ce qui le rend dénombrable et demeure consitant avec la conclusions selon laquelle E_{i+1} est dénombrable. Par ailleurs, nous avons montré, par l'application de la définition de E, que $f(C_j, E_i)$ est l'image E_{i+1} de E_i. Or, chaque E_i est dénombrable et est une partition de E :

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{j=k} C_j(E_i) \right\}$$

Autrement dit, l'union de tous les ensembles E_i obtenus en appliquant tous les constructeurs C_j sur les E_i forment l'ensemble E, conformément à la définition récursive de E. Puisque chaque E_i est dénombrable, il s'ensuit que l'union

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$$

est également dénombrable. Nous concluons alors que E est dénombrablement infini. Ainsi, tous les ensembles définit récursivement sont dénombrables. $\square$