Structure Discrète
IFT1065
Devoir 3
Récursivité et Preuves

Franz Girardin et Aiya Ben Ouhida

23 décembre 2023

Résolution de problèmes

PROBLÈME 3 · ÉQUIVALENCE DES VECTEURS

1. Dessinez le graphe de la ralation pour les vecteurs suivants :

$$(-1,0),(1,1),(1,0),(2,0),(2,2),(2,1),$$
$$(0,-1),(0,1),(0,2).$$

Soit la relation $\mathcal{R}$, on peut exprimer la proposition conditionnelle qui définit la relation $\mathcal{R}$:

Proposition 1.1 $P(x,y,t,z)$

$$xt = yz \implies (x,y)\mathcal{R}(z,t)$$

Nous devons représenter **toutes les paires de vecteurs** pour lesquels $P(x,y,t,z)$ en vraie. Autrement dit, nous devons trouver tous les couples de vecteurs (x, y), (t, z) tels que $xt = yz$.

Considérons les vecteurs $(-1,0),(1,1),(1,0),(2,0),(2,2),$ $(2,1),(0,-1),(0,1),(0,2)$ comme étant $v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,$ v_8,v_9, respectivement. Nous avons alors le graphe de $\mathcal{R}$ pour les vecteurs $v_1,v_2,\ldots,v_9$ représenté par la figure suivante.

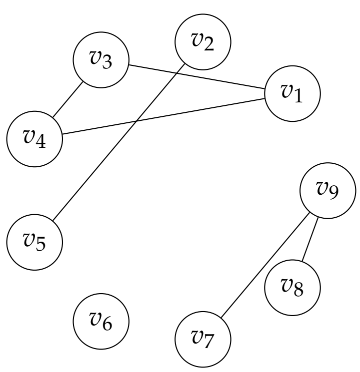

FIGURE 1.1 – Représentation de la relation $\mathcal{R}$ pour les vecteurs $v_1 \to v_9$

2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Mentionnez explicitement les techniques de preuves que vous utilisez.

   Soit l'ensemble de vecteurs

$$A = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Z}, x = 0 \leftrightarrow y \neq 0\},$$

nous devons **prouver que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence**. Pour ce faire, nous allons montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition 1.2 $P_1(v_n, A, \mathcal{R})$

Tous les vecteurs v_n faisant partie de A respectent la proposition $v_n\mathcal{R}v_n$:

$$\forall v_n \in A, v_n\mathcal{R}v_n$$

Preuve 1

Nous procédons par **preuve directe**. Supposons que $v_n = (x,y) \in A$. Pour vérfier la réflexivité de v_n, nous pouvons appliquer la **proposition 1.1** sur le vecteur v_n. La proposition devient alors $P(x,y,x,y)$:

$$\Big(xy = yx\Big) \implies \Big((x,y)\mathcal{R}(x,y)\Big)$$

Nous savons que le produit xy est égale à yx, par la commutativité de la multiplication. Par l'implication de la proposition 1.1, nous avons alors $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$. Ainsi, $v_n\mathcal{R}v_n$ est une proposition vraie et nous concluons alors que R est réflexive. □

Proposition 1.3 $P_2(v_n, A, \mathcal{R})$

Tous les vecteurs $v_a = (x,y), v_b = (z,t)$ faisant partie de A sont tels que **si** v_a est en relation avec v_b, **alors** v_b est en relation avec v_a :

$$\forall v_a, v_b \in A, v_a\mathcal{R}v_b \implies v_b\mathcal{R}v_a$$
$$\updownarrow$$
$$\forall (x,y),(z,t) \in A, (x,y)\mathcal{R}(z,t) \implies (z,t)\mathcal{R}(x,y)$$

Proposition 1.4

Nous procédons pas **preuve direction**. Supposons que $(x,y),(z,t) \in A$ et $(x,y)\mathcal{R}(z,t)$. Si $(x,y)\mathcal{R}(x,t)$, alors, par la définition de la relation $\mathcal{R}$ nous savons que $xt = yz$. Par l'associativité de la multipliucation, nous savons que l'équivalence suivante est vraie :

$$xt = yz \leftrightarrow tx = zy$$

Or, $tx = zy$ est simplement $(z,t)\mathcal{R}(x,y)$. En effet, $(z,t)\mathcal{R}(x,y)$, par la définition de la la relation $\mathcal{R}$, signifie que $zy = tx$. On sait aussi que, par la réflexitivé de l'égalité, $a = b \leftrightarrow b = a$. Donc, nous avons :

$(x,y)\mathcal{R}(z,t) \implies xt = yz$	**Def. de $\mathcal{R}$**
$xt = yz \implies tx = yz$	**Commutativité de mult.**
$tx = yz \leftrightarrow yz = tx$	**Relexivité de l'égalité**
$yz = tx \implies (z,t)\mathcal{R}(x,y)$	**Def. de $\mathcal{R}$, inférence**

Ainsi, nous avons montré que **si** $(x,y)\mathcal{R}(z,t)$, **alors** $(z,t)\mathcal{R}(x,y)$. Nous concluons que $P_2(v_n, A, \mathcal{R})$ est vraie et $\mathcal{R}$ est réflexive. □

Proposition 1.5 $P_3(x, v_n\mathcal{R})$

Tous les vecteurs $v_a = (x, y)$, $v_b = (p, q)$, $v_c = (z, t)$ faisant partie de A sont tels que **si** v_a est en relation avec v_b, et que v_b est en relation avec v_a, **alors** v_a est en relation avec v_c.

$$\forall v_a, v_b, v_c \in A, \Big(v_a\mathcal{R}v_b\Big) \wedge \Big(v_b\mathcal{R}v_c\Big) \implies \Big(v_a\mathcal{R}v_c\Big)$$
$$\updownarrow$$
$$\forall (x, y), (p, q), (z, t) \in A, \Big((x, y)\mathcal{R}(p, q)\Big) \wedge \Big(p, q)\mathcal{R}(z, t)\Big) \implies (x, y)\mathcal{R}(z, t)$$

Preuve 2

Nous procédons par **preuve directe**. Supposon que $(x, y), (p, q), (z, t) \in A$, que $(x, y)\mathcal{R}(p, q)$ et que $(p, q)\mathcal{R}(z, t)$ En supposant que ces deux expressions sont vraie, cela signifie que les deux expressions suivantes sont également vraies :

$$xq = yp \quad \textbf{Conséquence de. } v_a\mathcal{R}v_b \tag{1.1}$$
$$pt = qz \quad \textbf{Conséquence de. } v_b\mathcal{R}v_c \tag{1.2}$$

Or, en multipliant les deux côtés de l'équation (1.1) par t, et en multipliant les deux côté de l'équation (1.2) par y, nous obtenons

$$xqt = ypt \tag{1.3}$$
$$ypt = yqz \tag{1.4}$$

Par la transitivité de l'égalité, nous avons :

$$xqt = yqz \tag{1.5}$$

nous ne pouvons pas diviser les deux côtés de l'équation (1.5) par t, puisqu'il est possible que t soit égal à 0 et que $(z, t) = (z, 0) | z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Mais, à toute fin pratique, nous pouvons ignorer t. Si t est égal à zéro, l'équation (1.5) est trivialement vraie ; les deux côté de l'égalité sont égale à 0. Mais si $t \neq$, nous avons alors l'expression suivante :

$$xt = yz$$

Par la définition de la relation $\mathcal{R}$ nous savons que cette expression signie $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ ou $v_a\mathcal{R}v_b$. Notons que si $t = 0$, la relation $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ tient, tant que $y = 0$. Dans ce cas, $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ découle natuellement de $xqt = yqz$ et toutes les autres équations et dérivations menant à $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$ demeurent vraies. Ainsi, nous avons montré que **si** $(x, y)\mathcal{R}(p, q)$ et que $(p, q)\mathcal{R}(z, t)$, **alors**, $(x, y)\mathcal{R}(z, t)$. Nous concluons donc que $\mathcal{R}$ est transitive. □

Réponse

Nous avons montré que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Ainsi, nous concluons que $\mathcal{R}$ est, par définition, une relation d'équivalence. □