

Structures Discrètes  
IFT1065  
**Préparation à l'examen Intra**

Franz Girardin

8 janvier 2024

# Table des matières

## 2

### CHAPITRE 1 Introduction à théorie des ensembles

- 1.1 Introduction aux ensembles 2
- 1.2 Ensembles connus 2
- 1.3 Introduction aux listes 3
- 1.4 Produit cartésien, ensemble puissance et appartenance 3

## 4

### CHAPITRE 2 Structures discrètes élémentaires

- 2.1 Opérations sur les ensembles 4
- 2.2 Union et intersection itéré 4

## 5

### CHAPITRE 3 Combinatoire

- 3.1 Principe de multiplication (Hammack §4.2) 5
- 3.2 Dénombrement de permutations 5
- 3.3 Principe d'addition (Hammack §4.3) 5
- 3.4 Principe de soustraction (Hammack §4.3) 5
- 3.5 Factoriels et permutations 5
- 3.6 Dénombrement de sous-ensembles (§Hammack 4.5) 6
- 3.7 Triangle de Pascal et théorème binomial (§Hammack 4.6) 6
- 3.8 Inclusion-exclusion (§Hammack 4.7) 6
- 3.9 Dénombrement avec répétition (§Hammack 4.8) 7
- 3.10 Principe de division (§Hammack 4.9) 8

## 8

### CHAPITRE 4 Probabilités discrètes

- 4.1 Probabilité d'évènement (§Hammack 5.1) 8
- 4.2 Unions d'évènements (§Hammack 5.2) 9
- 4.3 Probabilité conditionnelle (§Hammack 5.3) 9
- 4.4 Bayes (§Hammack 5.5) 9

# Introduction à théorie des ensembles

## 1.1 INTRODUCTION AUX ENSEMBLES

Les ensembles constituent le langage dans lequel les mathématiques modernes sont exprimées. La théorie des ensembles formalise les opérations naturelles que l'on peut appliquer à des collections d'objets.

### Définition 1.1: Ensemble

Un ensemble est une collection d'objets

#### Remarque 1

L'ordre dans lequel apparaît les objets n'est pas important. Les ensembles ne sont définis que par les éléments distincts qu'ils contiennent.

#### Exemple 1 Égalité d'ensemble

Soit les ensembles  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{3, 1, 2\}$ , on peut donc affirmer que  $A = B$

#### Syntaxe. Opérateur |

Les éléments d'un ensemble peuvent être donnés par des propriétés qu'il doivent satisfaire. Par exemple, on peut définir l'ensemble  $P$  grâce à l'opérateur | :

$$P = \{x \mid x \text{ est un nombre premier}\}$$

#### Remarque 2 Ensemble contenu

Un ensemble peut contenir des ensembles :

$$B = \{\{1, \pi, 3\}, \{4, 6, \pi\}\} \quad (1.1)$$

## 1.2 ENSEMBLES CONNUS

### Syntaxe. 1 Les ensembles particuliers

L'ensemble des nombres premiers est défini par :

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\} \quad (1.2)$$

L'ensemble des entiers naturels non nuls est défini par :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1.3)$$

L'ensemble des entiers naturels positifs est défini par :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (1.4)$$

L'ensemble des entiers non nuls est défini par :

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.5)$$

L'ensemble des entiers positifs et négatifs est défini par :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.6)$$

L'ensemble des nombres rationnels est défini par  $\mathbb{Q}$ .

L'ensemble des nombres irrationnels est défini par  $\mathbb{Q}'$ .

L'ensemble des nombres réels est défini par  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des nombres complexes est défini par  $\mathbb{C}$ .

### Définition 1.2: Nombre rationnel

Est rationnel tout nombre pouvant être représenté comme le quotient de deux nombres entiers où le **dénominateur est non nul**. Le développement décimal peut être fini ou infini et périodique, mais pas infini et non périodique.

$$\forall k : k = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \implies k \in \mathbb{Q} \quad (1.7)$$

#### Exemple 2 Nombres rationnels

Les nombres 0.75, -2.5, et -0.125 peuvent être rationnels. Ils peuvent être représentés, respectivement, par :

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{-5}{2}, \quad \frac{-1}{8}$$

### Définition 1.3: Nombre irrationnel

Est irrationnel tout nombre pouvant être exprimé sous forme de quotient de deux nombres, mais dont le développement décimal est à la fois infini et non périodique

#### Exemple 3 Nombre irrationnel

$\pi$  est un nombre irrationnel. On peut approximer  $\pi$  par une somme :

$$\pi \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

### Définition 1.4: Nombre réel

Est réel tout nombre pouvant être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales. L'ensemble des réels est défini par :

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \quad (1.8)$$

### 1.3 INTRODUCTION AUX LISTES

#### Définition 1.5: Liste

Collection d'éléments qui a un ordre et pouvant accepter des répétitions

#### Syntaxe. 2 Notation de liste

On peut définir une liste comme suit :

$(1, 2, 3)$

#### Remarque 3

Deux listes sont égales si elles ont les mêmes éléments dans le même ordre :

$(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$

Et si deux listes ne contiennent pas le même nombre d'éléments, alors elles ne sont pas les mêmes listes

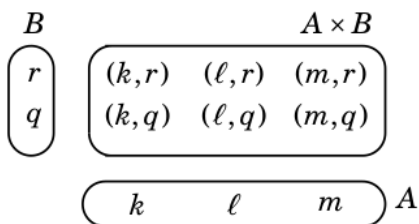
#### Exemple 4 Différencier objets de type liste et ensemble

1.  $()$ , 2.  $(\emptyset)$ , 3.  $(\{\})$  1. et 2. sont identiques

#### Définition 1.6: Produit cartésien

L'ensemble des paires qui contiennent les éléments du premier ensemble et du 2<sup>e</sup> ensemble est le produit cartésien de  $A$  avec  $B$  (noté  $A \times B$ )

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} \quad (1.9)$$



Soit  $A = \{1, 2\}$  et  $B = \{x, y\}$ . Le produit cartésien est :

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$$

#### Note :

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times B \times C \neq (A \times B) \times C$$

Il faut respecter l'ordre de priorité des opérations du produit cartésien

#### Question 1: Parenthèse

Est-ce que  $A \times B \times C = (A \times B) \times C$  **Réponse :** Non.

#### Définition 1.7: Sous-ensemble

$A$  est un sous-ensemble de  $B$  si tous les éléments de  $A$  sont des éléments de  $B$  :

$$A \subseteq B$$

#### Note :

Un ensemble à 3 éléments a  $2^3$  sous-ensembles possibles. Donc, soit  $n$ , le nombre d'éléments d'un ensemble, il existe  $2^n$  **sous-ensembles possibles**. Par ailleurs, l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble, y compris lui-même.

#### Définition 1.8: Ensemble puissance

L'ensemble puissance de  $A$ ,  $\mathcal{P}(A)$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de  $A$

### 1.4 PRODUIT CARTÉSIEN, ENSEMBLE PUISSANCE ET APPARTENANCE

#### Exemple 5 Produit cartésien

#### Remarque 4 Égalité de deux ensembles

Deux ensembles sont égaux  $A = B$  est équivalent à dire que  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$

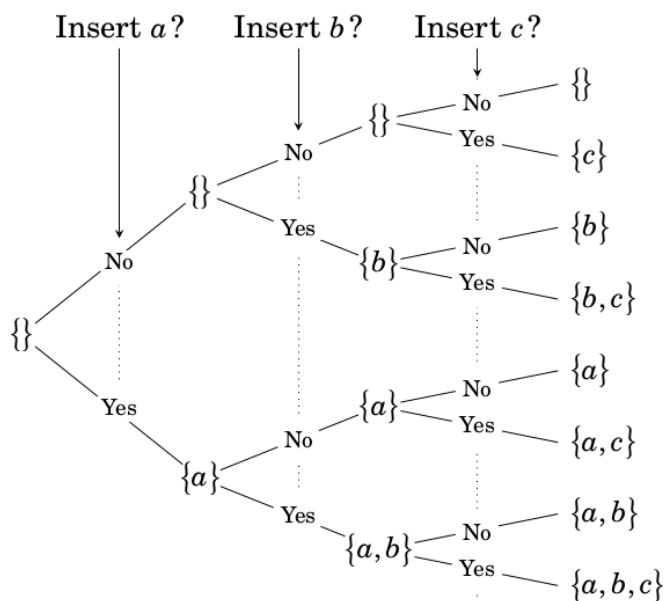


FIGURE 1.1 – Arbre de décision pour construire l'ensemble puissance

Il est possible de trouver l'ensemble puissance en commençant par l'ensemble vide. Puisque tous les ensembles contiennent au moins l'ensemble vide, construire l'ensemble puissance revient à déterminer si, pour chaque entrée de  $A$ , nous incluons l'élément ou pas.

## Structures discrètes élémentaires

### 2.1 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

#### Définition Union

Soit deux ensembles  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{3, 4, 5\}$  on peut effectuer l'opération qui consiste à prendre tous les éléments soit dans l'un soit dans l'autre :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

De façon plus générale,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in \text{au moins un } A_i \forall 1 \leq i \leq n\}$$

#### Définition Intersection

L'intersection consiste à prendre uniquement les éléments qui se trouvent à la fois dans les deux en-

sembles :

$$A \cap B = \{3\} \text{ Puisque } A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

De façon plus générale,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in \text{tous les ensembles } A_i \forall 1 \leq i \leq n\}$$

#### Définition Différence

La différence consiste à prendre tous les éléments dans le premier ensemble qui ne sont pas dans le second :

$$A - B = \{1, 2\} \text{ Puisque } A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

#### Exemple 6

$\mathbb{R} - \mathbb{N}$  est l'ensemble des nombres dont la partie décimale n'est pas nulle ou qui sont négatifs

#### Définition Le complément

Le complément de  $X$  par rapport à  $U$  est défini si :

$$X \subseteq U \text{ comme } U - X$$

#### Concept. 1 Univers ou ensemble universel

Lorsqu'on discute d'un ensemble, on en parle presque toujours en référence à un autre ensemble. Par exemple, lorsqu'on parle de l'ensemble des nombres premiers  $P$  :

$$P = \{2, 3, 5, 6, 11, 13, \dots\}$$

on en parle presque toujours en référence à un ensemble qui le contient, par exemple,  $P \subseteq \mathbb{N}$ . Ainsi, on dit que le plus grand ensemble est un **ensemble universel**. Il s'agit de l'ensemble auquel on se réfère pour décrire certaines caractéristiques de  $P$ . On dit alors que  $\mathbb{N}$  est l'**univers** de  $P$ .

#### Définition

Soit  $A$ , un ensemble ayant un **univers**  $U$ , le **complément** de  $A$  dénoté  $\bar{A}$  est l'ensemble :

$$\bar{A} = U - A$$

### 2.2 UNION ET INTERSECTION ITÉRÉ

#### Syntaxe. 3 Union de plusieurs ensembles

Soit les ensembles  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , on définit l'**union**

de ces ensembles comme suit :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

Par ailleurs, on définit l'intersection de ces ensembles comme suit :

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

## Combinatoire

### 3.1 PRINCIPE DE MULTIPLICATION (HAMMACK §4.2)

#### Concept. 2 Description du principe de multiplication

Lorsqu'on veut construire une liste de longueur  $n$  et qu'il y a  $a_1$  choix possibles pour la première entrée,  $a_2$  choix possibles pour la seconde entrée,  $a_3$  choix possible pour la troisième entrée et ainsi de suite. Alors, le **nombre total de listes différentes** qui peuvent être construites est le produit :  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ .

Autrement dit, le **nombre de listes** faisables à travers un processus spécifique est le produit du **nombre de choix** pour chaque entrée.

#### Exemple 7 Application du principe de multiplication (Hammack 4.1)

Une plaque d'immatriculation standard comprend trois lettres suivies de quatre nombres, par exemple JRB – 4412. Combien de plaque d'immatriculation standard différentes existe-t-il ?

Il y a 26 choix possibles—correspondant aux 26 lettres de l'alphabet—pour le premier caractère, 26 choix pour le second et 26 choix pour le troisième. Par ailleurs, il y a 10 nombres possibles pour le 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> caractère. Soit  $A$ , l'ensemble des plaques d'immatriculation, nous avons :

$$|A| = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

#### Exemple 8 Application du principe de multiplication (Hammack 4.2)

En commandant un café, vous avez le choix entre du lait écrémé, du lait 2% et du lait d'avoine; un gobelet moyen ou large; et soit une ou deux doses d'espresso. Combien de boisson possibles pouvez-vous commander selon les choix disponibles ?

On a 3 choix de lait, 2 choix de gobelet et 2 choix de dose d'espresso. Soit  $B$ , l'ensemble des choix de boisson possibles, on a :

$$|B| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 18$$

### 3.2 DÉNOMBREMENT DE PERMUTATIONS

#### Définition

Si  $n \in \mathbb{Z}^*$ , alors  $n!$  est le nombre de listes de longueur  $n$  qui peuvent être obtenues à partir de  $n$  symboles, sans répétition. Ainsi,  $0! = 1$  et  $1! = 1$ . Si  $n > 1$ , alors  $n! = n(n-1)(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

### 3.3 PRINCIPE D'ADDITION (HAMMACK §4.3)

#### Définition Principe d'addition

Supposons un ensemble fini  $X$  qui peut être décomposé en union  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ , où  $X_i \cap X_j = \emptyset$  lorsque  $i \neq j$ . Alors ,

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$$

#### Note :

Le **principe d'addition** affirme que si un ensemble peut être décomposé en morceaux, la taille de cet ensemble est la **somme des tailles de ses morceaux**.

### 3.4 PRINCIPE DE SOUSTRACTION (HAMMACK §4.3)

#### Définition Principe de soustraction

Si  $X$  est un sous-ensemble d'un ensemble fini  $U$ , alors :

$$|\bar{X}| = |U| - |X|.$$

En d'autres mots, si  $X \subseteq U$ , alors  $|U - X| = |U| - |X|$

### 3.5 FACTORIELS ET PERMUTATIONS

#### Définition Factoriel

Si  $n$  est un **entier non négatif**, alors  $n!$  est le nombre de **listes** non répétitives de longueur  $n$  qui peuvent être obtenues à partir de  $n$  symboles. Et nous avons :

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

### Définition Permutation

Une **permutation** est un arrangement (listé) sans répétition de tous les éléments d'un ensemble. Autrement dit, tous les arrangements sans répétition possibles d'une liste sont des permutations de cette liste. Une liste de longueur  $n$  a donc  $n!$  différentes permutations.

Le corollaire de cette définition est le fait que  $0! = 1$  puisque qu'on peut faire uniquement 1 liste de longueur  $n = 0$  en choisissant  $n = 0$  symbols, soit la liste vide,  $()$ .

### Définition k-Permutation

Une **k-permutation** de  $X$  est le nombre de listes non répétitives qu'on peut obtenir en choisissant  $k$  éléments parmi la liste  $X$ . Et l'expression  $P(n, k)$  dénote le nombre de k-permutations d'une liste de  $n$  éléments.

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

$$\text{Si } 0 \leq k \leq n, \text{ alors } P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### 3.6 DÉNOMBREMENT DE SOUS-ENSEMBLES (§HAMMACK 4.5)

#### Note :

Le **principe de multiplication** s'applique lorsqu'on veut déterminer quelle quantité de **listes** de taille  $n$  on peut construire en sélectionnant  $k$  entrées d'un ensemble comprenant  $n$  éléments.

La méthode de **dénombrement de sous-ensembles** permet de déterminer le **nombre de sous-ensembles** il est possible d'obtenir en sélectionnant  $k$  éléments d'un ensemble de taille  $n$

### Exemple 9 Principe de multiplication vs Dénombrement de sous-ensemble

Soit un ensemble  $A = \{a, b, c, d, e\}$ , le nombre de listes différentes qu'on peut obtenir en sélectionnant  $k = 2$  éléments de  $A$  est donné par :

$$N_{total} = 5 \times 4 = 20$$

Et les listes sont :

$(a, b), (a, c), (a, d), (a, e),$   
 $(b, c), (b, d), (b, e), (c, d),$   
 $(c, e), (d, e), (b, a), (c, a),$   
 $(d, a), (e, a), (c, b), (d, b),$   
 $(e, b), (d, c), (e, c), (e, d)$

Par contre, il existe **uniquement** 10 sous-ensembles de  $A$ , soit :

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$

### Définition 3.1: Définition de $C(n, k)$

Si  $n, k \in \mathbb{N}$ , alors  $\binom{n}{k}$  dénote le **nombre de sous-ensembles** qui peuvent être obtenus en choisissant  $k$  éléments d'un ensemble de taille  $n$ . On lit  $\binom{n}{k}$  «  $n$  choisit  $k$  ».

### Théorème 1

Si  $0 \leq k \leq n$ , alors,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Autrement,  $\binom{n}{k} = 0$ .

### 3.7 TRIANGLE DE PASCAL ET THÉORÈME BINOMIAL (§HAMMACK 4.6)

#### Concept. 3 Formule du triangle de Pascal

$\forall n, k \in \mathbb{Z}^* \mid 1 \leq k \leq n$ , on a la relation suivante entre les nombres :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

### Théorème 2

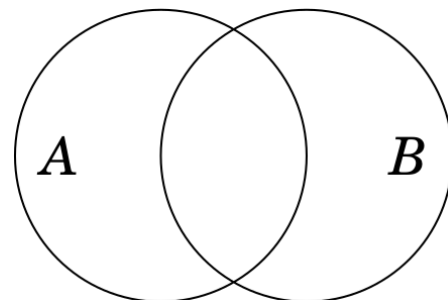
$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

### 3.8 INCLUSION-EXCLUSION (§HAMMACK 4.7)

#### Définition Principe d'inclusion-exclusion

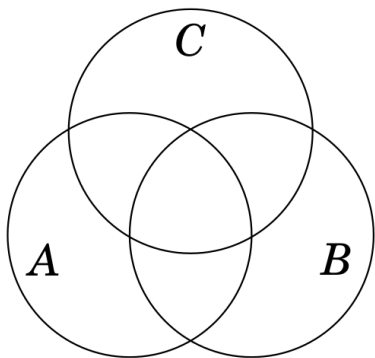
Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles finis, alors  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



**Définition Inclusion-Exclusion sur trois ensembles**

Nous pouvons appliquer le principe sur une multitude d'ensembles :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



## 3.9 DÉNOMBREMENT AVEC RÉPÉTITION (§HAMMACK 4.8)

**Exemple 10**

Supposons qu'on ait un sac de 5 boules rouges  $R$ , et 2 boules noirs ( $N$ ), comment pouvons-nous modéliser cette situation, sachant que

1. Il n'y a pas d'ordre sur les boules
2. Il n'y a pas de répétition—les boules d'une même couleur sont indistinguables.

Pour représenter la situation on écrit alors :

$$[R, R, R, R, R, N, N]$$

**Définition Multi-ensemble**

Un multi-ensemble est une collection d'objets sans ordre particulier qui peuvent être répétés. Le cardinal d'un multi-ensemble est le nombre d'objets des multi-ensemble, incluant les répétitions.

**Définition**

La multiplicité de  $x \in A$  est le nombre de répétitions  $x$  dans le multi-ensemble  $A$

$$|A|_x$$

**Note :**

Un ensemble est un cas particulier d'un multi-ensemble; il s'agit d'un multi-ensemble où la multiplicité de chaque

élément est de 1 :

$$\{1, 2, 3\} = [1, 2, 3]$$

Cependant,

$$\{1, 2, 3\} \neq [1, 2, 2, 3] \text{ et } \emptyset = []$$

**Exemple 11**

Soit un sac avec des boules de trois couleurs différents ( $r$ ,  $n$ ,  $b$ ), le multi-ensemble représentant cette situation est donné par :

$$[R, R, R, N, N, N, B, B, B]$$

**Question** Combien y a-t-il de résultats possibles ?

$$\begin{aligned} &[R, R, R] \text{ et } [R, R, N] \\ &[R, N, N] \text{ et } [R, N, B] \\ &[R, B, B] \text{ et } [N, N, N] \\ &[N, N, B] \text{ et } [N, B, B] \\ &[B, B, B] \text{ et } [R, R, B] \end{aligned}$$

**Stratégie**

On peut lister les multi-ensembles possibles en s'assurant d'écrire les  $R$  avant les  $N$  et les  $N$  avant  $B$ . etc ... En plaçant deux séparateurs entre les emplacements, on obtient :

$$\binom{5}{2}$$

Plus généralement, le nombre de multi-ensemble de  $k$  éléments à partir d'un ensemble de  $n$  éléments est donné par :

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

où  $k$  représente la taille des multi-ensembles et  $n$  le nombre de types d'objets.



### Définition

Le nombre de **multi-ensembles** de **k-éléments** qui peuvent être formé à partir d'un ensemble de  $n$  éléments  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est :  $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ . Cela fonction parce que n'importe quel multi-ensembles de **k-éléments** fait à partir de  $n$  éléments de  $X$  est encodé en une liste d'étoiles et de barres de taille  $k + n - 1$  ayant la forme :

chaque  $x_1$     chaque  $x_2$     chaque  $x_1$     ...    chaque  $x_n$   
 $* * * * |$      $* * * * |$      $* * * * |$     ...     $* * * * |$

La liste encodé a la taille  $k + n - 1$  puisqu'il y a  $k$  étoiles et  $n - 1$  barres qui séparent les  $n$  groupements d'étoiles.

Une telle liste peut être obtenue en sélectionnant  $n - 1$  **positions parmi**  $n + k - 1$  pour les barres, en remplissant les positions restantes avec les étoiles. **Alternativement**, on peut sélectionner  $k$  positions d'étoiles **parmi**  $k + n - 1$  et remplir les positions restantes avec les barres.

### Concept. 4 Pigeonnier

Si  $n$  objets sont placés dans  $k$  cases tel que  $n > k$ , il y a forcément au moins une case qui contient plus d'un objet.

## 3.10 PRINCIPE DE DIVISION (§HAMMACK 4.9)

Si  $n$  **pigeons** vivent dans  $k$  **boîtes** ( $n \neq k$ ),  $k$  boîtes pourraient être **vides** et  $k$  **boîtes** pourraient contenir plus d'un pigeon. Le nombre moyen de pigeons par boîte est  $\frac{n}{k}$ .

Par la définition d'une moyenne, au moins une boîte doit contenir plus de  $\frac{n}{k}$  pigeons et au moins une boîte doit contenir moins de  $\frac{n}{k}$  pigeons. Et parce qu'une boîte doit contenir un **nombre entier** de pigeons, on arrondit en disant qu'au moins une boîte contient  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  pigeons ou plus. Par ailleurs, au moins une boîte contient  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  pigeons ou moins.

### Définition Principe de division

Supposons que nous plaçons  $n$  objets dans  $k$  boîtes. Alors, au moins une boîte contient  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  objets ou plus. Et au moins une boîte contient  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  pigeons ou moins.

### Définition Principe du Pigeonnier

Supposons que  $n$  objets sont placés dans  $k$  boîtes, **alors**, si  $n > k$ , il y a au moins une boîte qui contient plus d'un objet. Si  $n < k$  il y a au moins une boîte qui est vide.

### Exemple 12 Classe

S'il y a  $n \geq 60$  personnes dans l'auditoire, et que  $k \leq 30$  jours dans un mois, par le principe du pigeonier, on peut dire qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même jour de naissance.

### Exemple 13 pigeonier et compression sans perte

Un fichier est simplement une liste de bits finie. Par ailleurs, un algorithme de compression associe à chaque fichier un fichier unique. Le fichier résultant doit être unique.

Tout algorithme de compression compresse au moins un des fichiers en un fichier au moins aussi long.

Soit  $F_k$  l'ensemble des fichiers de  $k$  bits, on a

$$|F_k| = 2^k$$

Soit  $F_{<k}$  l'ensemble des fichiers de longueur  $< k$ , on a :

$$|F_{<k}| = |F_0 \cup F_1 \cup F_2 \dots F_{k-1}| =$$

Si l'algorithme compressait tous les fichiers en des fichiers plus petits, il associeraient à chacun des  $2^k$  fichiers de  $F_k$  l'un des  $2^{k-1}$  fichiers de  $F_{<k}$ .

Par le principe du pigeonier, au moins deux fichiers seraient compressés en le même fichier. Donc, un tel algorithme ne peut pas exister.

# Probabilités discrètes

## 4.1 PROBABILITÉ D'ÉVÈNEMENT (§HAMMACK 5.1)

### Définition 1 Expérience

Une **expérience** est une activité qui produit un des différents résultats possibles qui ne peut pas être déterminé à l'avance.

### Définition Univers de probabilité

L'ensemble des résultats possibles à une expérience est appelé **l'univers**, noté  $U$ . Pour une expérience de lancé de dés 6 face, on a :

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

### Définition 2 Évènement

Un évènement  $E$  est un sous-ensemble  $E \subseteq U$  de résultats possibles. Par exemple,  $p = \{2, 4, 6\}$ . L'évènement

se produit si le résultat de l'expérience appartient à  $E$

### Définition 3 Probabilité

La **probabilité d'un évènement**  $E$  est notée  $P(E)$ . Il s'agit de chances que l'évènement se produise lorsqu'une expérience est effectuée. Si **tous** les résultats ont les mêmes chances de se produire, **alors**,

$$p(E) = \frac{|E|}{|U|}$$

### Exemple 14

On lance maintenant deux dés à 4 faces l'un après l'autre. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 2?

$$U = Y \times Y$$

$$\left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \right. \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \\ \left. (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \right\}$$

Soit  $D_2$  le fait d'obtenir a moins 2, on a  $D_2 = \{(a, b) \in U \mid a = 2 \text{ ou } b = 2\}$

$$P(D_2) = \frac{|D_2|}{|U|} = \frac{7}{16}$$

## 4.2 UNIONS D'ÉVÈNEMENTS (§HAMNACK 5.2)

### Définition 4 Occurrence

En général, si  $A$  et  $B$  sont des évènements du même univers, **alors**  $A \cup B$  est l'évènement où  $A$  **ou**  $B$  se produisent tout deux.  $A \cap B$  est l'évènement où  $A$  **et**  $B$  se produisent simultanément.  $\bar{A}$  est l'évènement où  $A$  **ne se produit pas**.

#### Note :

Lorsque l'intersection de deux évènements engendre un ensemble vide,  $A \cap B = \emptyset$ , cela veut dire que les évènements sont incompatibles. On peut aussi dire qu'ils sont *mutuellement exclusifs*.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si on a deux évènements  $A$  et  $B$ , l'évènement  $A \cup B$  se produit si  $A$  ou  $B$  se produit. En appliquant le principe **d'inclusion**

**exclusion**, on a :

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|U|} \\ = \frac{|A|}{|U|} + \frac{|B|}{|U|} - \frac{|A \cap B|}{|U|} \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### Définition 5 Évènement de non occurrence

Similairement, on peut déterminer la probabilité d'un évènement de non occurrence :

$$p(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|U|} = \frac{|U - A|}{|U|} = \frac{|U|}{|U|} - \frac{|A|}{|U|} \\ = 1 - \frac{|A|}{|U|} = 1 - p(A)$$

## 4.3 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE (§SHAMMACK 5.3)

### Définition 6 Probabilité conditionnelle

Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements dans le même univers, la **probabilité conditionnelle de A sachant B**, écrit  $P(A|B)$ , est la probabilité que  $A$  survienne si  $B$  est déjà survenu.

### Définition 7 Indépendance

Deux évènements sont **indépendants** si l'occurrence de l'un ne change pas la probabilité d'occurrence de l'autre. Autrement dit :

$$p(A) = p(A|B), p(B) = p(B|A)$$

Autrement, les deux évènements sont **dépendants**.

### Concept. 5 Probabilité conditionnelle

Supposons que  $A$  ET  $b$  sont des évènements dans le même univers. **Alors** :

1.  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
2.  $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
3.  $p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B|A)$
4.  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \dots \dots \dots$  si  $A$  et  $B$  sont **indépendants**.

## 4.4 BAYES (§SHAMMACK 5.5)

Supposons qu'un univers  $U$  est divisé en deux sous univers tel que  $U = U_1 \cup U_2$  et  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , et il existe un évène-

ment  $E \subseteq U$ . La loi de Baye's permet de déterminer la probabilité que  $U_1$  survienne si  $E$  est survenu

$$p(U_1|E) = \frac{p(U_1) \cdot p(E|U_1)}{p(U_1) \cdot p(E|U_1) + p(U_2) \cdot p(E|U_2)}$$

$$p(U_2|E) = \frac{p(U_2) \cdot p(E|U_2)}{p(U_1) \cdot p(E|U_1) + p(U_2) \cdot p(E|U_2)}$$