Devoir 1
IFT1065C — Structures discrètes en informatique

Aiya Ben Ouhida et Franz Girardin

30 Septembre 2023

Table des matières

Problèmes du devoir 1

PROBLÈME 1.1 · INFINIEMENT VIDE (*30 points*)

Les règles du problème ne permettent pas de placer d'objet à l'intérieur d'un ensemble. Or, l'utilisation de l'ensemble vide comme point de départ ne semble pas être prohibée par ces mêmes règles. Pour débuter la construction de notre ensemble, posons alors :

$$A = A_0 = \varnothing \tag{1.1}$$

Une des opérations autorisées, soit **l'ensemble puissance**, nous permettra d'élaborer la construction de notre ensemble.

1. En applicant l'opération d'**ensemble puissance** sur A on obtient un ensemble qui contient *tous les sous-ensembles possibles* de A. Puisque l'ensemble vide est un sous-ensemble de tous les ensembles (y compris lui-même) et puisqu'il n'y a pas d'autre ensemble pouvant être un sous-ensemble de l'ensemble vide auquel nous avons assigné la variable A dans ce cas-ci, nous avons :

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} = A_1 \tag{1.2}$$

Note :

Pour s'assurer que $\varnothing$ est **l'unique sous-ensemble possible** en appliquant $\mathcal{P}(A)$, nous utilisons la propriété selon laquelle le cardinal de l'ensemble puissance est égale à 2 exposant le cardinal de l'ensemble d'origine :

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^0 = 1$$

2. Puisque l'ensemble ainsi formé est différent de l'ensemble vide, nous venons de construire, en utilisant une opération ensembliste et sans supposer l'existance préalable d'un objet, un ensemble autre autre que l'ensemble vide.

Réponse 1

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing \implies A_0 \neq A_1$$

PROBLÈME 1.2 · INFINIEMENT VIDE

Grâce au problème 1.1, nous savons qu'il est possible de construire un ensemble distinct à partir de l'ensemble vide. Nous constatons également que le cardinal de ce nouvel ensemble est supérieur au cardinal de l'ensemble vide—soit l'ensemble d'origine.

Nous nous servirons de ces observations pour construire une série d'ensembles tous distincts les uns des autres tel que chaque nouvel ensemble contient un plus grand nombre d'éléments que son précédesseur.

1. Notons que l'application de l'opération d'ensemble puissance sur le résultat de l'équation (1.2) engendre un nouvel ensemble distinct de A_1.

$$\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = A_2 \neq A_1 \tag{1.3}$$

2. Nous pouvons répéter l'opération sur A_2 pour obetenir A_3 :

$$\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = A_3 \neq A_2 \tag{1.4}$$

Note :

Nous mettons en évidence la démarche des équations (1.3) et (1.4) pour expliciter l'intuition suivante : l'application de l'opération d'ensemble puissance sur un ensemble donné **engendre un unsemble qui peut être à son tour utilisé pour rappliquer cette opération ensembliste**. Ce processus peut être répété à pertétuité pour générer *une infinité d'ensembles* tous distincts l'un de l'autre et dont le cardinal croît exponentiellement.

3. Nous pouvons donc générer **une suite infinie d'ensembles disctincts** à partir de l'opération d'ensemble puissance, sans supposer l'existance préalable d'un objet :

Réponse 2

Selon, les équations (1.1) à (1.4), la formule suivante permet de générer une infinité d'ensemble.

$$A_1 = \varnothing, A_n = \mathcal{P}(A_{n-1}) \;\; \forall n \geq 2.$$

PROBLÈME 1.3 · INFINIEMENT VIDE

Nous allons montrer que la notation du mathématicien polonais *Kazimierz Kuratowski*[1] pour représenter une paire ordonnée est valide. Selon cette notation, il est possible de représenter une paire ordonnée P par un ensemble A de cardinal $|A| = 2$ où le premier élément de A est un singleton contenant la première entrée de la paire, et le second élément de A est un ensemble contenant uniquement le premier élément et le second élément de la paire :

$$P = (a, b) = \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\}$$

De façon informelle, nous pouvons dire que le fait que a apparaisse seul dans un ensemble, puis qu'il apparaisse à nouveau dans un ensemble contenant également b permet de *marquer l'ordre de a par rapport à b dans la paire ordonnée*. Plus formellement, la notation de Kuratowski repose sur deux axiomes :

1. La *propriété* d'appartenir **aux deux ensembles** contenus dans A est associée à la propriété d'être la première entrée de la paire ordonnée.
2. La *propriété* d'appartenir à **un seul des ensembles** contenus dans A est associée à la propriété d'être la seconde entrée de la paire ordonnée.

En considérant ces deux axiomes, la notation de Kuratowski est valide. En effet, elle est valide précisément parce qu'elle respecte *le principe d'indentité* d'une paire ordonnée. Ce qu'on conçoit comme étant une paire ordonnée dépend du principe d'identité : *une paire ordonnée P est identique à une paire ordonée Q si et seulement si l'élément de la première paire à une position donnée est indentique à l'élément de la secondaire paire à cette même position.*

$$P = (a, b) = Q = (c, d) \Leftrightarrow \; a = c, \;\; b = d$$

Le corollaire de ce principe est que si a est différent de c et b est différent de d, les paires P et Q sont nécessairement différentes :

$$a \neq c, b \neq d, a \neq b \implies P \neq Q$$

Si la notation de Kuratowski est valide, la représentation de $P = (a, b)$ et la représentation de $Q = (c, d)$ devraient engendrer des ensembles différents.

$$P = (a, b) = \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\} \neq \Big\{\{c\}, \{c, d\}\Big\} = (c, d) = Q \;\Big|\; a \neq c,\;\; b \neq d$$

Notons que l'inéquivalence $P \neq Q$ est une conséquence directe du principe d'identité appiqué aux ensembles : deux ensembles sont identiques si et seulement si ces ensembles contiennent les même éléments. Par ailleurs, les paires (a, b) et (c, d) sont identiques uniquement lorsque tous les éléments a, b, c, d sont identiques :

$$P = (a, b) = (b, a) \implies a = b \;\; (\textit{Paire ordonnée})$$

$$P = \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\} = \Big\{\{b\}, \{b, a\}\Big\} \implies a = b \;\; (\textit{Kuratowski})$$

$$\begin{aligned} P = (a, b) &= (b, a) = (c, d) = (d, c) \\ &= \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\} = \Big\{\{b\}, \{b, a\}\Big\} \\ &= \Big\{\{c\}, \{c, d\}\Big\} = \Big\{\{d\}, \{d, c\}\Big\} \\ &= Q \implies a = b = c = d \end{aligned}$$

La notation de Kuratowski engendre donc des ensembles différents pour des paires ordonées qui sont différents. Conversement, elle engendre des ensembles identiques pour des paires ordonnées qui sont identiques.

> **Réponse 3**
>
> Grâce à la **notation de Kuratowski**, il est possible de représenter une paire (a, b) sous forme d'un ensemble, de sorte qu'il soit possible de retrouver sans ambiguïté l'ordre des éléments de la paire.

PROBLÈME 1.1 · LISTES UNIVERSELLES (*30 points*)

.

Nous savons que les listes possibles sur **1 bit** est l'ensemble A de listes de un élément tel que cet élément appartient à l'ensemble des deux entités binaires possibles :

$$A = \Big\{(a) \;\mid\; a \in \{0, 1\}\Big\}$$

> **Réponse 4**
>
> Les seuls listes possibles sur 1 bit sont donc (0) et (1). Par ailleurs, **la liste** $L_1 = (0, 1)$ est une *liste universelle* sur 1 bit :
>
> Soit $0 \in (0)$ et $1 \in (1)$,
>
> $$0 \in (0, 1),\; 1 \in (0, 1) \Leftrightarrow (0) \text{ et } (1) \text{ sont des sous-listes de } L_1$$
> $$\Updownarrow$$
> $$L_1 \text{ est une liste universelle sur 1 bit.}$$

PROBLÈME 1.2 · LISTES UNIVERSELLES

Nous savons que les listes possibles sur **2 bits** est représenté par A_2, l'ensemble des listes de deux éléments telles que ces éléments appartiennent à l'ensemble des deux entités binaires possibles.

$$A_2 = \{(a, b) \;\mid\; a, b \in \{0, 1\}\}$$

Réponse 5

Les seules listes possibles sur **2 bits** sont donc $l_1 = (0,0), l_2 = (0,1), l_3 = (1,0)$ et $l_4 = (1,1)$ Par ailleurs, la **liste** $L_2 = (0,0,1,1)$ est une liste universelle sur 2 bits.

$$\begin{tikzcd}
(0,0) = l_1 & & \\
L_2 = (0,0,1,1) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & L_2' = (1,0,0,1) \arrow[r] & (1,0) = l_3 \\
(0,1) = l_2 & (1,1,0,0) \arrow[r] & L_2'' = (1,1) = l_4
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1.1 – Rotations de L_2 permettant d'obtenir l_1, l_2, l_3, l_4 (TikZ).

PROBLÈME 1.3 · LISTES UNIVERSELLES

.

Nous savons que les listes possibles sur **3 bits** est représenté par A_3, l'ensemble des listes de trois éléments telles que ces éléments appartiennent à l'ensemble des deux entités binaires possibles.

$$A_3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \{0,1\}\}$$

Réponse 6

Les seules listes possibles sur **3 bits** sont donc $l_5 = (0,0,0),\ l_6 = (0,0,1),\ l_7 = (0,1,0),\ l_8 = (0,1,1),\ l_9 = (1,0,0),\ l_{10} = (1,0,1),\ l_{11} = (1,1,0),\ l_{12} = (1,1,1)$.
Par ailleurs, la **liste** $L_3 = (1,1,1,0,0,0,1,0)$ est une liste universelle sur 3 bits.

PROBLÈME 1.4 · LISTES UNIVERSELLES

.

Réponse 7

Il n'est pas possible de construire une liste universelle sur 3 bits ayant moins de $2^3 = 8$ éléments.

Nous partons du principe P_1 selon lequel, pour obtenir une liste universelle L sur n bits, la liste doit contenir au moins 2^n éléments. Nous allons prouver, par l'absurde, que cette proposition est vraie.

Supposons la négtion de la proposiion, soit $\neg P_1 = P_1'$. Autrement dit, supposons qu'*une liste universelle sur n bits peut contenir* ***moins de*** 2^n *éléments* (*proposition* P_1').

Considérons le scénarios le plus simple. Le nombre de bit non-nul et non négatif le plus petit pouvant être considéré est **1 bit**. Les listes possibles sur 1 bit sont soit $l_1 = (0)$ ou $l_2 = (1)$.Or, selon P_1', il serait possible qu'*une liste universelle pour n = 1 bit contienne moins de* 2^1 = 2 *éléments*. Les seules listes (naturelles) de moins deux éléments pouvant être considérées—comme liste universelle potentielles sur 1 bit— sont les listes (0) ou (1).

Or, ni (0) ni (1) n'est une liste universelle sur 1 bit, puisqu'aucune de rotation (0) ne permet d'obtenir à la fois (0) et (1) ; et aucune rotation de (1) ne permet d'obtenir à la fois (0) et (1).

1. Affirmer que (0) est une liste universelle sur 1 bit est une contradiction de la définition d'une liste universelle.
2. Affirmer que (1) est une liste universelle sur 1 bit est une contradiction de la définition d'une liste universelle.
3. Par contre-exemple, on a montré que P_1' mène à une contradiction.
4. Par conséquent, nous avons :

$$(\neg P_1 \implies Faux) \implies P_1 \equiv (P_1' \implies Faux) \implies P_1$$

Ainsi, P_1 est vraie.

PROBLÈME 3.1 · JEU DU 10 (*30 points*)

L'énoncé indique qu'on cherche à trouver la probabilité qu'un évènement, C, se produise sachant qu'un évènement B s'est déjà produit. Pour déterminer cette probabilité, nous allons utiliser le principe de *probabilité conditionnelle*. Soit les évènements suivants :

- C l'évènement où la première carte est A, K, Q ou J
- B l'évènement où la première carte est A, 10 ou 5
- C' l'évènement où la première carte est A

Nous déduison C' de B et C, puisque la première carte peut seulement être un A, si elle est contraintes à être A, 10 ou 5, sachant qu'elle est A, K, Q ou J. Nous avons :

- 1 $P(B'|C)$ la probabilité de B' sachant que C s'est produit
- 2 $P(B' \cap C)$ la probabilité que B' et C se produisent.
- 3 $P(B')$ la probabilité que B' se produise.

Calculons alors les probabilités que chaque évènements se produisent :

1. $P(C) = \dfrac{4 \text{ valeurs} \times 4 \text{ sortes}}{40 \text{ cartes total}} = \dfrac{16}{40} = \dfrac{2}{5}$
2. $P(B' \cap C) = P(B')$; la probabilité que la première carte soit A et, **à la fois**, A, K, Q ou J est simplement la probabilité qu'elle soit A. Autrement dit, on considère pas la probabilité qu'elle puisse être A et K ; ni A et Q ; ni A et J. On peut seulement considérer la probabilité qu'elle soit A et A, **à la fois**.
3. $P(B') = \dfrac{4 \text{ cartes de valeur } A}{40 \text{ cartes total}} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$
4. $P(B'|C) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{4}$

Réponse 8

La probabilité conditionnelle que la première carte soit de valeur A, sachant qu'elle est de valeur A, K, Q ou J est logiquement équivalente à la probabilité conditionnelle que la première carte soit de valeur A, 10 ou 5, sachant qu'elle est de valeur A, K, Q ou J. Cette probabilité est *une chance sur quatre*.

$$P(B|C) = P(B'|C) = \frac{1}{4}$$

PROBLÈME 3.2 · JEU DU 10

Scénario idéal

Considérons le premier joueur à qui nous distribuons une carte, selon l'ordre de distribution établit. Nous savons qu'après un tour de distribution, j_1 aura une carte dont le type est parmis les types disponibles $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$. Nous savons également qu'un tour de distribution correspond à 4 **cartes distribuées**. Or, au 2^e tour de distribution j_1 pourrait avoir la chance d'obtenir une autre carte du même type que le type de la carte qu'il a obtenu au premier tour. Si on s'arrête à ce moment précis, il y aura **5 cartes ditribuées** et un joueur ayant au moins deux cartes du même type. Cette situation correspond au scénario idéal. Nous savons donc que la solution réelle est supérieure à $N = 5$ *cartes*.

Scénario pire des cas

Considérons le pire des cas possibles. Il s'agit d'un cas où, à chaque tour de distribution, le j_1 obtient des cartes de différents types. Ainsi, au 3e tour, il possédera 3 cartes de 3 types différents et un total de 12 cartes aura été distribué. Au 4e tour, dans le pire des cas, il aura nécessairement 4 cartes de 4 types différents et 16 cartes auront été distribué.

Or, au 5e tour de distribution, la carte distribuée devra nécessairement être du même type que le type d'une des cartes qu'il possède déjà. Nous évoquons le principe du pigeonnier.

En effet, si la main du j_1 présente k cases de types de cartes et que chacune de ces cases est déjà pleine, si on essait d'ajouter à sa main une carte d'un des types possibles, sa nouvelle main contiendra $n > k$ cartes où au moins une case aura deux cartes du même type. À ce moment précis, c'est-à-dire à la première carte distribuée du 5e tour, nous serons certain qu'au moins un joueur aura deux cartes du même type.

> **Réponse 9**
>
> Il faut distribuer 17 **cartes** pour être certain qu'au moins un des joueurs ait deux cartes du même type.

PROBLÈME 3.3 · JEU DU 10

Modéliser la main de chaque joueur

Puisque l'ordre des carte n'est pas important, on peu utiliser un ensemble pour représenter la main d'un joueur. Les objets qu'on place dans cet ensemble doivent être uniques. Une carte ne peut pas se trouver dans la main de deux joueur à la fois. Il faut donc une représentation qui encapsule à la fois la valeur de la carte et le type de la carte. On peut donc utiliser les symboles parmi $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ combiné au valeurs possibles parmi les valeurs $\{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5\}$. Ainsi, la carte 10 de coeur serait représenté par l'objet $10^\heartsuit$. Par ailleurs, la main d'un joueur pourrait être représentée de la façon suivante :

$$\{A^\heartsuit, K^\heartsuit, Q^\heartsuit, J^\heartsuit, 10^\heartsuit, 9^\heartsuit, 8^\heartsuit, 7^\heartsuit, 6^\heartsuit, 5^\heartsuit\}$$

Modéliser l'ensemble du jeu

Puisque le jeu 10 nécessite que chaque joueur se place devant son cooéquipier, nous pouvons choisir une structure discrète qui simule un ordre de main des joueurs. La **liste** semble être un choix approprié.

En résumé, chaque main est un ensemble de cartes uniques, où chaque carte est représentée par une combinaison de sa valeur et de son type, par exemple,

$$\{A^\spadesuit, 10^\heartsuit, 6^\clubsuit, 7^\diamondsuit, \ldots\}$$

Et la configuration totale du jeu est représentée par une liste de ces ensembles, par exemple,

$$\left(\{A^\spadesuit, 10^\heartsuit, \ldots\}, \{K^\spadesuit, Q^\heartsuit, \ldots\}, \{J^\spadesuit, 9^\heartsuit, \ldots\}, \{7^\spadesuit, 8^\heartsuit, \ldots\}\right)$$

.

Réponse 10

Ainsi, la configuration d'un jeu de 10 peut être représentée par une liste contenant 4 ensembles où chaque ensemble représente la main d'un joueur et contient des objets uniques.

PROBLÈME 3.4 · JEU DU 10

Trouver les combinaisons possibles D'après le modèle chosit, nous avons quatre ensembles distincts, chacun représentant la main d'un joueur. Nous référerons à ces ensembles des comme s'il s'agissait de **boîtes**. Nous avons **40** cartes à distribuer et nous voulons trouver le nombre de combinaisons possibles. La *loi multinomiale* permet de trouver le nombre de façon différentes de distribuer n objets dans k **boîtes** différentes avec un nombre spécifique $n_i \to n_k$ d'objets dans chaque boîtes :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Dans le contexte du problème, nous avons $n = 40$ **cartes** et chaque **boîte** a 10 objets et donc $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 10$. Le nombre de façon différente d'arranger les cartes dans les ensembles est donné par :

$$\frac{40!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}$$

Trouver les configurations possibles
Or, nous avons choisit de placer les ensembles dans une liste. L'ordre de ces combinaisons est donc important. Il y a 4! façons différentes d'organiser 4 boîtes (ou les 4 ensembles) dans un ordre donné.

Réponse 11

Le nombre de configurations possibles, selon les structures discrètes choisi pour représenter le jeu, est donné par :

$$4! \cdot \frac{40!}{10!^4}$$

PROBLÈME 3.6 · JEU DU 10

Nous savons que chque joueur possède dix cartes en main, à la fin du processus de distribution. Considérons alors R, le nombre de façons de choisir 10 cartes parmi les 40 du paquet :

$$R = \binom{40}{10}$$

Nous avons $\binom{40}{10}$ représentant le nombre de sous-ensembles possibles en choisissant $k = 10$ éléments dans un ensemble de 40 objets. Parmi ces $\binom{40}{10}$ sous-ensembles, plusieurs contiennent 4 as.

Pour mieux conceptualiser le problème, nous observons que pour qu'un joueur reçoive quatre As, il doit recevoir ces 4 As et 6 autres cartes parmi les 36 restantes. Cela est équivalent à choisir 6 cartes parmi les 36 restantes :

$$Q = \binom{36}{6}$$

En d'autres termes, nous supposons un scénario de succès et évaluons les façons différentes de choisir 6 autres cartes, dès lors que les 4 as ont déjà été sélectionné, ce qui correspond à $\binom{36}{6}$. La probabilité d'obtenir 4 As est donc le rapport entre le nombre de façon différentes de choisir 6 autres cartes, sachant que les 4 as ont été sélectionné au nombre de façon totales de chosiir 10 cartes :

$$P(4\ As\ pour\ \textbf{un joueur}) = \frac{Q}{P} = \frac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{10}}$$

Puisque cette probabilité représente un succès pour un seul joueur, la probabilité **qu'au moins un** des joueurs soit en situation de succès représente quatre fois la probabilité qu'un joueur soit en situation de succès, par le principe d'addition.

Réponse 12

$$P(4\ As\ pour\ \textbf{un des joueur}) = 4 \cdot \frac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{10}}$$

PROBLÈME 3.5 · JEU DU 10

Un joueur obtient 10 de la même sorte

Considérons la probabilité que le le joueur j_1 ait 10 cartes de la même sorte. Nous savons que cette probabilité est équivalente à quatre fois la probabilité que j_1 ait 10 cartes de sorte coeur (parce qu'il y a 4 sortes au total).

$$P(\text{joueur a 10 de sorte } \textbf{identique}) = 4 \cdot P(\text{joueur a 10 de sorte } \textbf{coeur})$$

Nous savons également qu'il y a $\binom{10}{10}$ manières de chosir 10 cartes d'une même sorte et $\binom{10}{40}$ manières différentes de choisir 10 cartes parmi le paquet de 40 cartes. Nous avons donc la probabilité de choisir 10 carte de la même sorte :

$$P(\text{joueur a 10 de sorte } \textbf{coeur}\ ) = \frac{\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}} = \frac{1}{\binom{40}{10}}$$

$$P(\text{joueur a 10 de sorte } \textbf{identique}) = \frac{4}{\binom{40}{10}}$$

Étape d'inclusion

Par ailleurs, la probabilité que j_1 ait dix cartes de la même sorte est la même probabilité que cet évènement ce produise pour j_2, j_3 ou j_4. Nous pouvons donc, par le principe d'addition, faire la somme des probabilités :

$$P_{inclusion} = P(j_1) + P(j_2) + P(j_3) + P(j_4) = 4 \cdot P(\text{joueur a 10 de sorte } \textbf{identique}) = \frac{16}{\binom{40}{10}}$$

Étape d'exclusion

Or, $P(inclusion)$ inclut le scénario où j_1, j_2, j_3, j_4 ont toutes les cartes coeur, ce qui est infaisable. $P(inclusion)$ inclut également le scénarios où tous les joueur on toutes les cartes trèfles ; et ainsi de suite pour les sortes carrots et piques.

1. Il faut d'abord exclure la probabilité des paires ; c'est-à-dire la probabilité que deux joueurs aient 10 cartes de la même sorte. Les chances que cela arrive est deux fois plus faible que les chances qu'un joueur ait toutes les cartes de types coeur. Par contre, les dédoublement de paires est un scénario d'exclusion qui peut arriver six fois. Nous avons :

$$P_{exclusion-2} = 6 \cdot \frac{1}{2 \cdot \binom{40}{10}} = \frac{\frac{36}{12}}{\binom{40}{10}}$$

2. Il faut ensuite exclure la probabilité des triplets ; c'est-à-dire la probabilité trois joueurs aient 10 cartes de la même sorte. Les chances que cela arrive est trois fois plus faible que les chances qu'un joueur ait toutes les cartes de types coeur. Par contre, les dédoublement de triplets est un scénario d'exclusion qui peut arriver quatre fois. Nous avons :

$$P_{exclusion-3} = 4 \cdot \frac{1}{3 \cdot \binom{40}{10}} = \frac{\frac{16}{12}}{\binom{40}{10}}$$

3. Il faut ensuite exclure la probabilité des quadriplet ; c'est-à-dire la probabilité quatre joueurs aient 10 cartes de la même sorte. Les chances que cela arrive est quatre fois plus faible que les chances qu'un joueur ait toutes les cartes de types coeur. Par ailleurs, les dédoublement de quadritriplet est un scénario d'exclusion qui peut arriver quatre fois. Nous avons :

$$P_{exclusion-4} = 4 \cdot \frac{1}{4 \cdot \binom{40}{10}} = \frac{\frac{12}{12}}{\binom{40}{10}}$$

$$P_{exclusion} = P_{exclusion-2} + P_{exclusion-3} + P_{exclusion-4} = \frac{\frac{64}{12}}{\binom{40}{10}}$$

$$P_{final} = P_{inclusion} - P_{exclusion} = \frac{\frac{192}{12}}{\binom{40}{10}} - \frac{\frac{64}{12}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{128}{12}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{32}{3}}{\binom{40}{10}}$$

PROBLÈME 3.6 · JEU DU 10 *Solution alternative*

Nous appliquons le principe d'inclusion exclusion pour une situation avec quatre ensembles distincts les uns des autres car on doit considérer la probabilité qu'au moins un des quatre joueurs reçoive 10 cartes de la même sorte donc la situation où un joueur reçoit 10 cartes de la même sorte, puis deux joueurs reçoivent deux cartes de la même sorte, etc. jusqu'à 4 joueurs. Et ce avec chaque sorte de cartes, donc les 10 cœurs, les 10 trèfles, les 10 carreaux et les 10 pics avec les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{au moins un des quatre joueurs reçoive 10 cœurs} \\ B &= \text{au moins un des quatre joueurs reçoive 10 trèfles} \\ C &= \text{au moins un des quatre joueurs reçoive 10 carreaux} \\ D &= \text{au moins un des quatre joueurs reçoive 10 pics} \end{aligned}$$

Pour appliquer le principe d'inclusion exclusion, nous allons inclure $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$, les probabilités respectives de chaque événement, et exclure leurs intersections entre deux éléments, inclure celles entre 3 éléments et exclure celle entre 4 si on suit le diagramme de Venn suivant :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) = & P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ & - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(B \cap C) + P(B \cap D) + P(C \cap D)) \\ & + (P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D)) \\ & - P(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Sachant que $P(A) = P(B) = P(C) = P(D)$ et que

$$P(A) = \frac{\binom{10}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}$$

Que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A \cap D) = P(B \cap C) = P(B \cap D) = P(C \cap D)$ et que

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{10}{10}\binom{10}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}$$

Que $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap D) = P(A \cap C \cap D) = P(B \cap C \cap D)$ et que

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{\binom{10}{10}\binom{10}{10}\binom{10}{10}\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}}$$

Et que

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{\binom{10}{10}\binom{10}{10}\binom{10}{10}\binom{10}{10}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}} = P(A \cap B \cap C)$$

On trouve que :

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C \cap D) &= 4P(A) - 6P(A \cap B) + 3P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{4}{\binom{40}{10}} - \frac{6}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}} + \frac{3}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}} \end{aligned}$$