MAT1400B - H24 : Calcul 1

Professeur : Xuan Kien Phung

Université de Montréal

1. Séries de Taylor et de Maclaurin
2. Polynômes de Taylor
3. À quoi servent les séries de Taylor ? Inégalité de Taylor et applications
4. Multiplication et addition des séries entières
5. Calculs des limites avec séries entières

Exemples

Question

Trouver la série de Maclaurin et son rayon de convergence des fonctions suivantes :

- $\frac{1}{1-x}$
- e^x
- $\sin x$
- $\cos x$
- $(1+x)^k$
- $\ln(1+x)$.

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

Soit
$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,
- $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$,
- $f'''(x) = \frac{3\times 2}{(1-x)^4}$, ...

- En général, pour tout $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \qquad f^{(n)}(0) = n!.$$

- Ainsi, la série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

- On applique le test du rapport :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x|$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est $R = 1$.

$f(x) = e^x$

Soit
$$f(x) = e^x.$$

- $f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$.
- $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout $n \geq 0$.
- $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ pour tout $n \geq 0$.

- Par conséquent, la série de Maclaurin de e^x est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

- On applique le test du rapport :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{(n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

donc le rayon de convergence est $R = \infty$.

$f(x) = \sin x$

Soit
$$f(x) = \sin x.$$

- $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ ...
- En général, pour tout $n \geq 0$,
$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$$
- Ainsi,
$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

- Donc, la série de Maclaurin de f est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

- Avec le test du rapport,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}x^{2k+3}\right|}{\left|\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 < 1,$$

on conclut que le rayon de convergence est $R = \infty$.

$f(x) = \cos x$

Soit $f(x) = \cos x$.

- $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ ...
- Donc pour tout $n \geq 0$,

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x.$$

- Ainsi,

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

- La série de Maclaurin de $f(x) = \cos x$ est donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

- Comme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}x^{2k+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1,$$

le test du rapport dit que le rayon de convergence est $R = \infty$.

$f(x) = (1+x)^k$

Soit $f(x) = (1+x)^k$ où $k \in \mathbb{R}$ quelconque.

- $f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$, ...
- $f^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n}$.
- Ainsi,
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}.$$
- On obtient la série binomiale

$$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\dots.$$

Avec le test du rapport, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k(k-1)\ldots(k-n)x^{n+1}/(n+1)!|}{|k(k-1)\ldots(k-n+1)x^n/n!|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|k-n|}{n+1}|x| = |x|.$$

En résolvant $|x| < 1$, on déduit que le rayon de convergence est $R = 1$ d'après le test du rapport.

$f(x) = \ln(1+x)$

Soit $f(x) = \ln(1+x)$.

- $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$...
- $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$
- $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$
- Donc, la série de Maclaurin de $\ln(1+x)$ est

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

On calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^{n+2}x^{n+1}/(n+1)|}{|(-1)^{n+1}x^n/n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|.$$

En résolvant $|x| < 1$, on trouve que le rayon de convergence est $R = 1$ par le test du rapport.

Polynômes de Taylor

Définition

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

est appelé le n**-ième polynôme de Taylor de** f **en** a.

Séries de Taylor : Motivation

- Si $f(x)$ est infiniement dérivable et est representée par une série entière, alors cette série entière doit être la série de Taylor de f.
- Inversement, pour $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$:

Théorème

Supposons que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *pour tout* $|x-a| < R$. *Alors pour tout* $|x-a| < R$, *on a :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Preuve. Pour $|x - a| < R$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + R_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

est exactement la série de Taylor de f en a.

Inégalité de Taylor

Théorème

Soient $M, d \in \mathbb{R}$ *deux constantes positives. Supposons que* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *pour tout* $|x - a| < d$. *Alors*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \text{pour tout } |x-a| < d.$$

Une conséquence importante

- Supposons qu'il existe $N, c, d > 0$ tels que pour tout $n > N$ et $|x - a| < d$, on a
$$|f^{(n)}(x)| \leq c^n.$$
- En particulier, $|f^{(n+1)}(x)| \leq c^{n+1}$ pour tout $n > N$.
- Ainsi, l'inégalité de Taylor implique que pour tout $|x - a| < d$ et $n > N$ (avec $M = c^{n+1}$)
$$|R_n(x)| \leq \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \leq \frac{(cd)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Or, on sait que :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(cd)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$
Donc, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (théorème du sandwich).
- On déduit que $f(x)$ est représentée par sa série de Taylor sur l'intervalle $]a-d, a+d[$.

Conséquences

On vient de montrer le corollaire suivant :

Corollaire

Soient $N, c, d \in \mathbb{R}$ des constantes positives et soit $a \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n > N$ et $|x - a| < d$, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq c^n.$$

Alors, $f(x)$ est représentée par sa série de Taylor sur $]a - d, a + d[$.

Conséquences

On en déduit une version plus faible mais très utile :

Corollaire

Soient $N, c, d \in \mathbb{R}$ *des constantes positives et soit* $a \in \mathbb{R}$*. Supposons que pour tout* $n > N$ *et* $|x - a| < d$*, on a*

$$|f^{(n)}(x)| \leq c.$$

Alors, $f(x)$ *est représentée par sa série de Taylor sur* $]a - d, a + d[$*.*

Applications

Afin de montrer qu'une fonction est représentée par sa série de Taylor sur un intervalle, on peut penser aux 3 méthodes suivantes :

- utiliser le théorème (diapo 22) et l'inégalité de Taylor (diapo 24)
- utiliser les versions faibles au diapos 27-28
- appliquer la dériviation ou l'intégration terme à terme à une série entière connue $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ pour $x \in \,]a-R, a+R[$.

Application : e^x

Question

Montrer que e^x est égale à sa série de Maclaurin pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Pour $a = 0$, pour tout $d > 0$, $n \geq 1$, et $|x| < d$, on a :

$$|(e^x)^{(n)}| = e^x \leq e^d \quad \text{(donc on prend } c = e^d\text{)}.$$

- Ainsi, par le corollaire au diapo 36, la fonction e^x est représentée par sa série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur l'intervalle $]-d, d[$.
- Comme $d > 0$ est arbitraire et la réunion des intervalles de la forme $]-d, d[$ couvre tout $\mathbb{R}$ entier, on conclude pour tout x que

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + ...$$

Application : $\sin x$, $\cos x$

De même, soient $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$. On a

$$|f^{(2n)}(x)| = |g^{(2n+1)}(x)| = |\sin x| \leq 1$$

et

$$|f^{(2n+1)}(x)| = |g^{(2n)}(x)| = |\cos x| \leq 1.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f^{(n)}(x)|, |g^{(n)}(x)| \leq 1.$$

D'apès la version faible de l'inégalité de Taylor au diapo 28, on déduit que (comme $d > 0$ est arbitraire)

Corollaire

Les fonctions $\sin x$ *et* $\cos x$ *sont représentées par leurs séries de Maclaurin series pour tout* x *:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Question

Étant donné l'égalité

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, pouvez-vous montrer directement que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Oui, on peut appliquer la dérivation terme à terme à :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

ce qui donne

$$\cos x = (\sin x)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Le rayon de convergence est aussi $R = \infty$.

Application : $\ln(1+x)$

Question

Montrer que $\ln(1+x)$ est égale à sa série de Maclaurin pour $|x| < 1$.

- Indication : intégrer terme à terme l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

pour $|x| < 1$.

- En intégrant terme à terme l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

pour $|x| < 1$, on obtient, également pour $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$$

Question

Quelle est la série de Maclaurin de $\ln(1 - x^3)$?

Pour $|x| < 1$, on remplace x par $-x^3$ dans

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

On trouve que

$$\ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$$

pour $|x| < 1$.

Applications

Question

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ si cette série converge.

Observation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/6)^{2n}}{(2n)!}$$

$\Longrightarrow$ si on voit $y = \pi/6$ comme une variable alors la série prend la forme de la série de Maclaurin de $\cos y$.

Pour tout x, on a :

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Soit $x = \pi/6$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/6)^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2.$$

Applications

Question

Déterminer la somme $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + ...$

Pour tout $|x| < 1$, on a :

$$\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$$

Donc pour $x = 1/2$, on obtient

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \cdots = \arctan(1/2) \simeq 0.46365.$$

Une autre application

En utilisant les séries de Taylor ou de Maclaurin, on peut obtenir des approximations de plusieurs fonctions usuelles aux points donnés.

Question

Évaluer $e^{0.1}$ avec $|\text{erreur}| < 0.00001$.

Soit $f(x) = e^x$. On a pour tout x que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!.$$

et $|f^{(n+1)}(0.1)| = e^{0.1} < e < 3$
$\implies$ l'inégalité de Taylor implique que (avec $d = 1/10$, $a = 0$, et $M = 3$) pour tout $n \geq 0$,

$$|R_n(1/10)| \leq \epsilon_n = \frac{3}{10^{n+1}(n+1)!}.$$

On a :

$$\epsilon_1 = 0.015,\ \epsilon_2 = 0.0005,\ \epsilon_3 = 0.0000125$$

et

$$\epsilon_4 = 5.10^{-7} < 0.00001.$$

Donc $|R_4(0.1)| \leq \epsilon_4 < 0.00001$. Par conséquent,

$$T_4(0.1) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 = 1.10517083$$

vérifie $|T_4(0.1) - e^{0.1}| = |R_4(0.1)| < 0.00001$.

Multiplication des séries entières

Soient $f(x)$, $g(x)$ représentées par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sur l'intervalle $]-R, R[$, c-à-d,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{pour } |x| < R.$$

et

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{pour } |x| < R.$$

Alors

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{pour } |x| < R.$$

où $c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, ...

$\Longrightarrow$ on peut calculer le produit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ comme dans une multiplication des polynômes.

$\Longrightarrow$ la série résultante $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est aussi convergente pour $|x| < R$.

Division des séries entières

De même,

- On peut définir la division de deux séries entières convergentes pour $|x| < R$ comme si l'on fait la division euclidienne avec les polynômes.
- Le résultat est aussi une série entière convergente pour tout $|x|$ **suffisamment petit**.

  $\Longrightarrow$ le rayon de convergence de la série obtenue est > 0 mais il peut être très petit (en particulier, plus petit que R).

Exemple

Question

Déterminer trois premiers termes dans la série de Maclaurin de

$$e^x \cos x.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&e^x \cos x \\
&= (1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots)(1 - x^2/2 + x^4/24 + \dots) \\
&= 1 \times 1 + (1 \times 1)x + (1 \times 1/2 + 1 \times (-1/2))x^2 \\
&+ (1 \times (-1/2) + 1/6 \times 1)x^3 + \dots \\
&= 1 + x - x^3/3 + \dots
\end{aligned}$$

Question

Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

Addition des séries entières

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergent quand $x = x_0$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x_0^n.$$

$\Longrightarrow$ on peut additionner et soustraire des séries entières terme à terme comme si l'on travaille avec des polynômes.

Application

Question

Évaluer

$$s = \int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2} dx$$

avec $|\text{erreur}| < 0.001$.

- On détermine d'abord la série de Maclaurin de $x^2e^{-x^2}$.
- Comme $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ pour tout x, on a

$$\begin{aligned} x^2e^{-x^2} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!} \end{aligned}$$

pour tout x.

- Ainsi, par l'intégration terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned} s = \int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2} dx &= \int_0^{0.5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{0.5} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!} dx \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(2n+3)} \right]_0^{0.5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(2n+3)}\right]_0^{0.5} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+3}}{n!(2n+3)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+3} n!(2n+3)}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ c’est une série alternée.

- Soit $b_n = \frac{1}{2^{2n+3} n!(2n+3)} > 0$.
- Alors $b_n \geq b_{n+1} > 0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
- Donc, le test pour les séries alternée implique que : $R_n = s - s_n$ that

$$|R_n| \leq b_{n+1} = \frac{1}{2^{2n+5}(n+1)!(2n+5)}$$

$$b_2 = 0.000558036 < 0.001$$

Donc,

$$s_1 = \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{2^{2n+3} n! (2n+3)} = 17/480 = 0.0354...$$

vérifie $|s - s_1| \leq b_2 < 0.001$.

Remarque : les primitives des fonctions $x^2 e^{-x^2}$, e^{-x^2} ne sont pas des compositions des fonctions élémentaires.

Rappel : estimations du reste

On a vu les estimations du reste suivantes.

- Estimation du reste pour le test de convergence pour les série alternées;
- Estimation du reste pour le test de l'intégrale;
- Inégalité de Taylor.

Calculs des limites avec séries entières

Il est utile de connaître par cœur que :

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...\ \ (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\ \ (\text{tout } x)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\ \ (\text{tout } x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...\ \ (\text{tout } x)$
- $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + ...\ \ (|x| < 1 \text{ et tout } k)$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...\ \ (|x| < 1)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\ \ (|x| < 1)$.

Stratégies pour calculer les limites d'une fonction

Afin de calculer $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ qui est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on peut utiliser notamment les outils suivants :

- la règle de L'Hôpital
- les séries de Taylor ou de Maclaurin de $f(x)$ et $g(x)$
- une combinaison de deux outils en utilisant le théorème de dérivation terme à terme.

Question

Soit $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$ une série entière centrée en a de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer

$$\lim_{x \to a} \left(c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... \right).$$

- Soit $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ...$
  $\Longrightarrow$ c'est une fonction définie sur $]a-R, a+R[$.
- Par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, $f(x)$ est dérivable sur $]a-R, a+R[$.
- En particulier, comme

$$\text{dérivabilité} \implies \text{continuité},$$

on déduit que $f(x)$ est continue en $x = a$. Ainsi,

Lemme

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = c_0.$$

Exemples

Question

Déterminer
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \cos x}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\sin x - x \cos x \\
&= (x - x^3/3! + x^5/5! - \dots) - x(1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots) \\
&= (x - x^3/6 + x^5/120 - \dots) - (x - x^3/2 + x^5/24 - \dots) \\
&= x^3/3 - x^5/30 + \dots \\
&= x^3(1/3 - x^2/30 + \dots)
\end{aligned}$$

et

$$x^2 \cos x = x^2(1 - x^2/2! + \dots)$$

Remarque :

- $1/3 - x^2/30 + \ldots$ est une série entière centrée en 0 qui est le résultat de la division de la série entière $x^3/3 - x^5/30 + \ldots$ par la série entière x^3.
  $\Longrightarrow$ comme $x^3/3 - x^5/30 + \ldots$ et x^3 convergent pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que le rayon de convergence de $1/3 - x^2/30 + \ldots$ est strictement positif.
- De même, $1 - x^2/2! + \ldots$ est une série entière centrée en 0 de rayon de convergence strictement positif.

Ainsi, par le lemme au diapo 65 :

$$\lim_{x \to 0} (1/3 - x^2/30 + \ldots) = 1/3,$$

$$\lim_{x \to 0} (1 - x^2/2! + \ldots) = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3(1/3 - x^2/30 + \dots)}{x^2(1 - x^2/2! + \dots)}\\
&= \lim_{x\to 0} x\frac{1/3 - x^2/30 + \dots}{1 - x^2/2! + \dots}\\
&= \left(\lim_{x\to 0} x\right)\left(\frac{\lim_{x\to 0}(1/3 - x^2/30 + \dots)}{\lim_{x\to 0}(1 - x^2/2! + \dots)}\right)\\
&= 0\frac{1/3}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Question

Calculer la même limite avec la règle de L'Hôpital. Quelle méthode est plus éfficace pour cette limite ?

Exemples

Question

Calculer
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}.$$

On a :

$$\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}x$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+...\right)$$
$$-1-\frac{1}{2}x$$
$$=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+...$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{8} + \frac{1}{16}x + \dots)}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{16}x + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Exercice

Question

Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

- Comme $\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + \ldots$ pour tout x, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - x^3/6 + x^5/120 + \ldots) - x}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/6 + x^5/120 + \ldots}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(-1/6 + x^2/120 + \ldots)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-1/6 + x^2/120 + \ldots\right) \\
&= -1/6.
\end{aligned}$$

Quand $f(x)$ égale à sa série de Taylor ? (hors programme)

On a vu quelques outils pour répondre è cette question.
Or, il est naturel de demander :

Question

Si une fonction $f(x)$ est infiniment dérivable, est-ce que $f(x)$ est égale à sa série de Taylor ?

et

Question

Si la série de Maclaurin d'une fonction $f(x)$ possède un rayon convergence $R = \infty$, est-ce que $f(x)$ est représentée par sa série de Maclaurin pour tout x ?

La réponse est NON en général pour ces deux questions. Voici un contre-exemple.

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.
- On peut montrer que f est infiment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Ainsi, la série de Maclaurin de f est identiquement nulle pour tout x : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = 0$ de rayon de convergence $R = \infty$.
- Or, $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$!

Pour aller plus loin, voir par exemple fonctions non analytiques.