

Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

11 janvier 2024

Table des matières

2 | CHAPITRE 1 Suites infinies

1.1	Les suites	§Stewart 1.1	2
1.2	Suites arithmétiques	§Stewart 1.1	2
1.3	Suites géométriques	§Stewart 1.1	2
1.4	Limite d'une suite	§Stewart 1.1	2
1.5	Monotonicité	§Stewart 1.1	4
1.6	Bornes d'une suite		5

Suites infinies

1.1 LES SUITES §STEWART 1.1

Définition 1 Suite

Une suite est une **fonction** $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Chaque suite accepte donc tous les **entiers naturels** non-nuls et engendre une séquence de **nombre réels** dans un ordre défini par la fonction.

Syntaxe. 1 Notation et terminologies d'une suite

- $\{a_n\}_{n \geq 1} ::= a_1, a_2, \dots, a_n$
- $a_{n+1} ::=$ Successeur de a_n
- $a_{n-1} ::=$ Prédécesseur de a_n
- **Définition à partir d'un rang n_0 :**
 - $\{u_n\}_{n \geq n_0} ::=$ une **suite** dont les termes sont définis après $n_0 \in \mathbb{Z}$.
 - ▷ **Exemple :** $\{\ln(n-1)\}_{n \geq 5}$
 - $\ln(4), \ln(5), \ln(6), \dots$

1.2 SUITES ARITHMÉTIQUES §STEWART 1.1

Définition 2 Suite Arithmétique

Une **suite arithmétique** est une suite de nombres où chacun d'eux, sauf le premier, est **la somme du précédent et d'un nombre fixe appelé raison de la suite**.

Syntaxe. 2 Notation et d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{raison} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{récurrence} \end{cases}$$

Note :

La différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à la **raison de la suite** :

$$r = a_n - a_{n-1} \mid n \geq 2$$

Concept. 1 Identifier le n-ième terme d'une suite arithmétique

Le **n-ième terme d'une suite arithmétique** est donné

par :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \mid n \geq 1$$

1.3 SUITES GÉOMÉTRIQUES §STEWART 1.1

Définition 3 Suite géométrique

Une suite géométrique dépend du terme précédant et d'un terme non nul, la raison de la suite

Syntaxe. 3 Notation et d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{raison} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{récurrence} \end{cases}$$

Note :

Le quotient entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique est égale à la raison

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \mid n \geq 2$$

Concept. 2 Identifier le n-ième terme d'une suite géométrique

Le n-ième terme d'une suite géométrique est donné par :

$$a_n = a_1 r^{n-1} \mid n \geq 1$$

Théorème 1 Convergence d'une suite géométrique

1.4 LIMITE D'UNE SUITE §STEWART 1.1

Soit toute valeur arbitrairement petite $\varepsilon \geq 0$ et une certaine valeur $L \in \mathbb{R}$, s'il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel pour tout $n \geq N$, toutes les différences correspondantes $|a_n - L|$ sont plus petites que ε , alors on dit que la suite a_n a pour limite L .

On dit qu'une suite $\{a_n\}$ a pour **limite** $L \in \mathbb{R}$ si on peut rendre ses termes aussi proche de L qu'on le veut en prenant n suffisamment grand.

Définition 4 Définition formelle de convergence d'une suite

Une suite $\{a_n\}$ a pour **limite** L et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Note :

La réciproque du corollaire n'est pas vraie. Autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

On dit qu'une suite $\{a_n\}$ **diverge ou diverge vers** ∞ si pour tout nombre $M \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $a_n \geq M$ pour tout les entiers $n \geq N$ plus que ce rang.

Plus simplement, on peut toujours trouver un entier non nul N après lequel tous les entiers $n > N$ dans le domaine de $\{a_n\}$ ont une image a_n plus grand qu'un certain $M \in \mathbb{R}$.

Définition 5 Définition formelle de divergence d'une suite

Une suite $\{a_n\}$ **diverge** et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

si et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \implies |a_n| > M$$

Corollaire

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Preuve 1

Soit a_n une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$. Nous voulons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Selon la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il doit exister un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Puisque $a_n \rightarrow \infty$, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe nécessairement un N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Et nous savons que si $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, alors, $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$.

Cela prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, conformément à la définition de la limite d'une suite. \square

Lemme 1

1. Lorsque a_n est éventuellement positive

Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement positive**, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

2. Lorsque a_n est éventuellement négative

Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement négative**, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Preuve 2

Soit a_n une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ et a_n est éventuellement positive. Nous voulons montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Par la définition de convergence d'une suite, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier M tel que pour tout $n \geq M$, $\left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon$.

Puisque $\{a_n\}$ est éventuellement positive, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \geq 0$. Soit $K = \max\{M, N\}$. Alors, pour tout $n \geq K$, nous avons et

$$a_n \geq 0 \text{ et } \left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon$$

Le fait que $\left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ et $a_n \geq 0$ implique que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$ pour $n \geq K$. Ainsi, $a_n < \epsilon$ pour $n \geq K$. Puisque ϵ est arbitraire, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang K tel que pour tout $n \geq K$, $a_n < \epsilon$. Ceci est précisément la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Par conséquent, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ et $\{a_n\}$ est éventuellement positive, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. \square

Note :

Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour montrer que si a_n est éventuellement négative et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Concept. 3 Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Concept. 4 Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynômes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

On considère

$$k = \min(\deg(p), \deg(q))$$

On effectue ensuite le quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Autrement dit, on effectue la division du numérateur et du dénominateur par le terme du polynôme ayant le plus petit degré.

Note :

Il est aussi possible d'utiliser la **règle de l'Hôpital**. La simplification du polynôme pourrait être plus rapide, selon les circonstances.

1.5 MONOTONICITÉ §STEWART 1.1

Soit une suite $\{a_n\}$, on dit que la suite est :

- **Strictement croissant** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \geq a_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \leq a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n$
- **Monotone**

Définition 6 Minorant et majorant

Une suite de terme général a_n est *minorée* par le nombre réel m **si et seulement si**, pour tout n on a : $a_n \geq m$

$$\text{Minonant } m ::= \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geq m$$

Une suite de terme général a_n est *majorée* par le nombre réel M si, et seulement si, pour tout n on a : $a_n \leq M$

$$\text{Majorant } M ::= \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leq M$$

Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème 2 Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est **convergente**

Lemme 2

- Toute suite éventuellement croissante et majorée est également **convergente**
- Toute suite éventuellement décroissante et minorée est également **convergente**

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

Utilisation de la règle de l'H.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \\ &= \dots \text{derivation haut et bas} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} -x = 0 \end{aligned}$$

Exercice 1

Résoudre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 5^{0.5} =$$