MAT1400B - H24 : Calcul 1

Professeur : Xuan Kien Phung

Université de Montréal

Rappel

Pour des suites et des séries, un nombre fini de termes n'influe pas sur la convergence/divergence. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque, on a :

- $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge $\iff$ $\{a_n\}_{n\geq N}$ converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge.

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Question

Vrai ou faux : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, on a $|s - s_n| < \varepsilon$?

Question

Étant donné $\{s_n\}$, on a $a_n =$

(a) $s_{n+2} - s_{n+1}$ (b) $s_{n+1} - s_n$ (c) $s_n - s_{n-1}$?

Question

Vrai ou faux : si $\sum a_n$ est une série à termes positifs, alors $\{s_n\}$ est une suite croissante.

Question

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ?

Question

En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer π^2 à 0.001 près.

$\Longrightarrow$ c'est une série à termes positifs, on peut appliquer l'estimation du reste pour le test de l'intégrale. Soit

- $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$ et $R_m = \frac{\pi^2}{6} - s_m > 0$,
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$ continue, positive, décroissante sur $[1, \infty[$.

- On a pour tout $m \geq 1$:

$$R_m \leq \int_m^{\infty} f(x)dx = \int_m^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_m^{\infty} = \frac{1}{m}.$$

- Par conséquent,

$$|\pi^2 - 6s_m| = 6|\frac{\pi^2}{6} - s_m| = 6R_m < \frac{1}{m}$$

- Pour que $6R_m < 0.001$, il suffit de prendre m tel que $\frac{6}{m} < 0.001$, c-à-d, $m > \frac{6}{0.001} = 6000 \Longrightarrow$ on choisit $m = 6001$.
- Donc $6s_{6001} \simeq 9.8686$ est une approximation voulue.

Exemples

Question

Étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
Indication : comparer avec $\sum \frac{1}{n}$.

On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ pour tout $n \geq 1$ (car $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \pi$) et avec $x = \frac{1}{n} \longrightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(\sin x)'}{x'} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 > 0.\end{aligned}$$

Comme $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ diverge, la forme limite du test de comparaison dit que $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Convergence absolue

Définition

Une série $\sum a_n$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues $\sum |a_n|$ converge.

Exemple

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{2023}+n^9+n^7}}{n^2}$ convergent absolument.

Définition

Une série est **simplement convergente** ou **semi-convergente** si elle est convergente, mais pas absolument convergente.

Exemple

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (pourquoi ?).

Propriétés

Théorème

Si une suite est absolument convergente, alors elle est convergente. Autrement dit,

$$\textit{convergence absolue} \implies \textit{convergence}.$$

Preuve. $\sum a_n = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ converge :

- la deuxième série converge par hypothèse
- la première converge par le théorème du sandwich car $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ et $\sum 2|a_n| = 2\sum |a_n|$. $\square$

Application

Question

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$.

$\Longrightarrow$ le test pour les séries alternées ne s'applique pas directement.

- Soit $a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$. Comme $|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)| \leq 1$, on a

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Comme $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $p = 2 > 1$), on déduit que $\sum |a_n|$ converge (test de comparaison).
- Ainsi, $\sum a_n$ converge absolument donc converge.

Question

Montrer que la série $\sum \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$ converge.

Indication : Rédiger

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8k+1} + \frac{1}{8k+3} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+7}\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8k+2} - \frac{1}{8k+6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(8k+1)(8k+5)} + \frac{4}{(8k+3)(8k+7)}\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(8k+2)(8k+6)}.
\end{aligned}$$

Question

Est-ce que

$$\text{convergence} \implies \text{convergence absolue ?}$$

$\implies$ NON.

Contre-exemples : Les séries simplement convergentes sont convergentes mais pas absolument convergentes :

- la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est simplement convergente : elle converge par le test de convergence pour les séries alternées et $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique donc diverge.
- la série $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est simplement convergente.

Test du rapport

Jean Le Rond d'Alembert

Portrait par Quentin de La Tour (1753).

Test du rapport

- Aussi appelé **test de d'Alembert** ou **test du rapport de Cauchy**
  $\Longrightarrow$ spécialisation du test de comparaison
  $\Longrightarrow$ on compare notre série des valeurs absolues avec une série géomtérique bien choisie.
- **Utile quand $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est facile à calculer, e.g., la série contient des factorielles ou d'autres produits comme c^n.**

Test du rapport

Théorème

Soit $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

- *Si* $L > 1$ *ou* $L = \infty$ *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
- *Si* $L < 1$ *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument.*
- *Si* $L = 1$ *alors on ne peut rien conclure avec ce test.*

Preuve

- Supposons que $L < 1$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $L < r < 1$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r.$$

- Donc $|a_{n+1}| < r|a_n|$ si $n \geq N$. Par induction sur $k \geq 0$:

$$|a_{N+k}| \leq r|a_{N+k-1}| \leq r^2|a_{N+k-2}| \leq \cdots \leq r^k|a_N|.$$

- Comme $\sum_{k=0} |a_N|r^k$ converge ($0 < r < 1$), $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ converge par le test de comparaison.
- Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

- De même, si $L > 1$, on fixe r tel que $L > r > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_N \neq 0$ et pour tout $n \geq N$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r$$

  et donc $|a_{N+k}| \geq r^k |a_N|$ pour tout $k \geq 0$ par induction.

- Comme $r > 1$ et $a_N \neq 0$, $|a_N| \lim_{n\to\infty} r^k = \infty$. Ainsi, $\lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| = \infty$ (théorème du sandwich). Donc

  $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

  $\implies \sum a_n$ diverge par le critère de divergence. $\square$

Application

Question

Étudier la convergence/divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ en utilisant le test du rapport.

Question

Étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. **Indication :** comparer avec $\sum \frac{1}{n}$.

- Soit $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge par le test du rapport.

- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ pour tout $n \geq 1$ car $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \pi$. Soit $x = \frac{1}{n} \longrightarrow 0^+$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Comme $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente, $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ l'est aussi par le test de comparaison (forme limite).

Exemples

Question

Montrer que la série (Ramanujan, 1910)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

converge. Quel test de convergence à utiliser ?

- Soit $a_n = \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(4n+4)!(27493+26390n)}{((n+1)!)^4 396^{4n+4}} \frac{(n!)^4 396^{4n}}{(4n)!(1103+26390n)} \\
&= \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)(27493+26390n)}{396^4 (n+1)^4 (1103+26390n)} \\
&\to \left(\frac{4}{396}\right)^4 < 1 \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

- Donc, le test du rapport implique que la série converge.

Critère de convergence de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy

Cauchy around 1840. Lithography by Zéphirin Belliard after a painting by Jean Roller.

Critère de convergence de Cauchy

- On compare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ avec 1.
- aussi appelé "Root test" en anglais :

  $\Longrightarrow$ spécialisation du test de comparaison où on compare notre série avec une série géométrique
- **utile quand** $\sqrt[n]{|a_n|}$ **est facile à calculer, e.g., si** a_n **est de la forme** $(b_n)^n$**, etc.**
- On verra plus tard que pour **déterminer le rayon de convergence des séries entières**, on utilise notamment :
  - **le test du rapport**
  - **le critère de Cauchy.**

Critère de Cauchy

Théorème

- *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ *ou* $L = \infty$ *alors* $\sum a_n$ *diverge.*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ *alors* $\sum a_n$ *converge absolument.*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = 1$*, on ne peut rien conclure avec ce test.*

Preuve : cas $L < 1$

- Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $L < r < 1$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r, \;\; \text{c-à-d} \;\; , |a_n| < r^n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

- Comme $\sum_{k=0} r^k$ converge $(0 < r < 1)$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent par le **test de comparaison**.

Preuve : cas $L > 1$

- Fixe r tel que $L > r > 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r, \quad \text{c-à-d} \;, \; |a_n| > r^n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

- Donc $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \neq 0$.

  $\implies \sum a_n$ diverge par le **critère de divergence**. $\square$

Question

Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$ est convergente ou absolument convergente.

$\Longrightarrow$ Soit $a_n = \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$. On voit que a_n contient une puissance n-ième. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2+3n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2+3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ainsi, le **critère de Cauchy** nous dit que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$ est **absolument convergente** donc **convergente**.

Les réarrangements (hors programme)

- Un **réarrangement** d'une série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série obtenue en changeant l'ordre des termes a_n.
- Ainsi, tout réarrangement de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ où $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une bijection.

$\Longrightarrow$ la suite des sommes partielles d'un arrangement ne peut être plus la même !

$\Longrightarrow$ un réarrangement peut diverger alors que la série originale converge et vice versa.

Exemple

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ...$ converge et on verra que sa somme est $\ln 2$.
- Donc $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \cdots = \frac{1}{2} \ln 2$ (pourquoi ?). Ainsi,

$$(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...) + (0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - ...) = \frac{3}{2} \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2 \quad \text{(sommation terme-à-terme)}$$

- Or,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + ...$$

est un réarrangement de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Les réarrangements

Théorème

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une ***série absolument convergente*** *dont la somme est s, alors tout réarrangement de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ admet la* ***même somme s****.*

Preuve. n'est pas à étudier. □

Théorème

Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une ***série simplement convergente****. Alors il existe un réarrangement de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dont la somme est égale à r.*

$\Longrightarrow$ si vous suivez **MAT1720**, ces deux théorèmes expliquent pourquoi on demande $\mathrm{E}[|X|] < \infty$ dans la définition de l'espérance $E[X]$ d'une variable aléatoire X.

Rappels : séries et limites importantes

On maîtrise bien la convergence/divergence des séries suivantes :

- Séries géométriques $\sum ar^n$, $\sum ar^{n-1}$, etc.
- Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^p}$.

De plus, on a déjà étudié la limite des rapports des suites suivantes et leurs variants :

- $\{n^k\}$ (k fixé); $\{\ln n\}$, $\{e^n\}$, $\{n^n\}$, $\{n!\}$

On a vu également :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$ fixé), etc.

À RETENIR : tests/critères disponibles

Attention : **critère** = condition suffisante pour conclure une propriété.

1. **Critère de divergence** : $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n$ diverge.
2. Série quelconque $\Longrightarrow$ **test du rapport**, **test de Cauchy**.
3. Série à termes positifs $\Longrightarrow$ **tests de comparaison**, **test de l'intégrale**.
4. Série alternée $\Longrightarrow$ **test pour les séries alternées**.
5. **Convergence absolue** $\Longrightarrow$ convergence : si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

   Donc on peut penser à (3) en étudiant $\sum |a_n|$.
6. **Estimation du reste** $\Longrightarrow$ **test de l'intégrale**, **test pour les suites alternées**.

Question

Mais quelle règle appliquer à une série donnée ?

$\Longrightarrow$ pas de protocol définitif mais quelques conseils :

- Si la série est semblable à celle d'une série de Riemann/série géométrique, e.g., a_n est une fraction rationnelle/fonction algébrique (avec racines), etc.

  $\Longrightarrow$ **test de comparaison**

- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est facile à calculer, e.g., la série contient des factorielles ou d'autres produits comme c^n, etc.

  $\Longrightarrow$ **test du rapport**

- Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ est facile à calculer, e.g., si a_n est de la forme $(b_n)^n$, etc.

  $\Longrightarrow$ critère de Cauchy.

- Si $a_n = f(n)$ et $\int_1^\infty f(x)dx$ est facile à calculer

  $\Longrightarrow$ **test de l'intégrale.**

Exemples

Étudier la convergence des séries suivantes :

- $\sum \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
- $\sum \left(2n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$
- $\sum \frac{3n+1}{n+2}$
- $\sum \frac{3n+1}{\sqrt{2n^2+3}}$
- $\sum \frac{n+\cos n}{\sqrt{3n^3+2}}$
- $\sum \frac{n}{\sqrt[3]{n^5+2}}$
- $\sum \frac{n!}{n^n}$

- $\sum \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$ diverge : critère de divergence
- $\sum \left(2n^2+\frac{1}{n^2}\right)$ diverge : critère de divergence
- $\sum \frac{3n+1}{n+2}$ diverge : critère de divergence
- $\sum \frac{3n+1}{\sqrt{2n^2+3}}$ diverge : comparer avec $\sum \frac{1}{n}$.
- $\sum \frac{n+\cos n}{\sqrt{3n^3+2}}$ diverge : comparer avec $\sum \frac{1}{n^{0.5}}$.
- $\sum \frac{n}{\sqrt[3]{n^5+2}}$ converge : comparer avec $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$.
- $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge : test du rapport !

Exemples

Étudier la convergence des séries suivantes :

- $\sum ne^{-n^2}$
- $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$
- $\sum \frac{5^n}{3^n+4^n}$
- $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
- $\sum \frac{n!}{e^{n^2}}$
- $\sum (\sqrt[n]{5} - 1)^n$

- $\sum ne^{-n^2}$ converge : test de l'intégrale avec $f(x) = xe^{-x^2}$ ou test du rapport.
- $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ converge : test pour des séries alternées (calculer $f'(x)$ où $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$ pour voir que $f(x)$ est décroissante pour tout x suffisamment grand. Noter aussi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$).
- $\sum \frac{5^n}{3^n+4^n}$ diverge : critère de divergence $(\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3/5)^n+(4/5)^n} = \frac{1}{0++0+} = +\infty)$
- $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ diverge : comparer avec $\sum \frac{1}{n}$ et noter que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
- $\sum \frac{n!}{e^{n^2}}$ converge : test du rapport (à cause du $n!$)
- $\sum(\sqrt[n]{5} - 1)^n$ converge : critère de Cauchy et noter que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$.