Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

26 janvier 2024

Définition d'une suite

Fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ qui accepte $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnées** de $a_n \in \mathbb{R}$.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = a_n - a_{n-1} \;\; |n \geq 2$ Trouver r

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot n \;\; |n \geq 1$ Trouver n^e terme

Définition d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \mid n \geq 2$ Trouver r

$a_n = a_1 r^{n-1} \mid n \geq 1$ Trouver n^e terme

Convergence d'une suite géométrique

$\forall r \in \mathbb{R}$, la suite $\{r^n\}$ converge *ssi* $-1 < r \leq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \{r^n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Définition formelle de convergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Définition formelle de divergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

si et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \implies |a_n| > M$$

Corollaire

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$, **alors,** $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

Attention

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Lemme de convergence des suite éventuellement signées

1. Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement positive**, alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$
2. Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement négative**, alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, **alors**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ si } \lim_{x\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynomes, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{q(n)}$, et $k = \min\big(deg(p), deg(q)\big)$ **Alors,**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital

Soit une **constante** $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

- $\lim_{x\to c} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{|g'(x)|}$ **existe et** $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \approx c$

Alors,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Monotonicité

Soit une suite $\{a_n\}$, on dit que la suite est :

- **Strictement croissant** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \geq a_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Monotone**

Définitions de bornes d'une suite

Minonant $m ::= \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geq m$

Majorant $M ::= \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leq M$

Bornée $::=$ *Majorée* $\wedge$ *minorée*

Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est **convergente**

Lemmes des suites monotones

- Toute suite éventuellement croissante et majorée est également **convergente**
- Tout suite éventuellement décroissante et minorée est également **convergente**

Association d'une fonction à une suite

Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet la même limite :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \implies \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L, alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(L)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$$

▷ **Exemple** $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2) = \sin(\lim_{n\to+\infty})\pi/2 = 0$

Comparaison des suites

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geq n_0, \; a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Corollaire

Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, **alors** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Définition d'une série numérique

Somme infinie des termes d'une suite numérique correspondante a_n : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- **Premiers termes** $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$
- **Convergence** $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \implies \sum_n^\infty a_n$ **conv.**

Critère de divergence

Si la série converge, la suite correspondante **converge vers 0**, et si la suite ne converge pas vers zéro, la série est divergente

- $\sum_n^\infty a_n = s$ **(conv.)** $\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_n^\infty a_n$ **div.**

Attention

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n$ **conv.**

Convergence d'une série géométrique

- ▷ $|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^\infty ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ **(conv.)**
- ▷ $(|r| \geq 1) \wedge (a \neq 0) \implies \sum_{n=0}^\infty ar^n = \infty$ **(div.)**

Propriétés des séries

- + et - de deux séries convergentes ainsi que $c \cdot \sum_n^\infty a_n$ engendrent une série **conv**.
- $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n \neq (\sum_{n=1}^\infty a_n)(\sum_{n=1}^\infty b_n)$
- $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^\infty a_n}{\sum_{n=1}^\infty b_n}$

Test de l'intégrale

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ **continue**, **positive** et **décroissante** et $a_n : f(n) = a_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{conv.} \ \leftrightarrow \lim_{a \to +\infty} \int_{x=1}^{x=a} f(x)dx = s \ \ (\textbf{conv.})$$

Série de Riemann et série puissance

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1 \text{, diverge si } p \leq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \text{ converge si } p > 1$$

La première est un **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Estimation du reste par TI

Si $f : \lambda, +, \downarrow$ $[m, \infty[$ et soit $m \in \mathbb{N}^*, a_n = f(n), \sum_{n=1}^\infty a_n = s \in \mathbb{R}, R_m = s - s_m$, **alors** le reste R_m est borné et peut être estimé :

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leq \left(R_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \right) \leq \int_{m}^{\infty} f(x)dx$$

Test de comparaison

Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à **termes positifs** et $n_0 \in \mathbb{R}$:

- ▹ $\left(\sum b_n \ \textbf{conv.}\right) \wedge (a_n \leq b_n \forall n \geq n_0) \implies a_n$ **conv.**
- ▹ $\left(\sum b_n \ \textbf{div.}\right) \wedge (a_n \geq b_n \forall n \geq n_0) \implies a_n$ **div.**
- ▹ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$ **existe et** $L > 0 \implies \sum a_n$ **conv.** $\leftrightarrow \sum b_n$ **conv.**
- ▸ Principalement pour Riemann & géométriques

Test sur séries alternées

Soit un **rang** $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n$ telle que

- ▹ $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$ ($\downarrow$ **et** $+$)
- ▹ $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Alors,

- ▸ $\sum (-1)^n b_n$ **conv.** vers $s \in \mathbb{R} \ \forall m \geq n_0$ **et**
- ▸ $|s - s_m| \leq b_{m+1}$

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \textbf{conv.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{conv.} \ \textit{absoluement}$$

▹ **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^\infty a_n$ conv. **&&** $\neg(\sum_{n=1}^\infty |a_n|)$

▸ **Exemple** $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ conv **mais** $\neg(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n})$ conv.

Test du rapport (d'Alembert)

Soit $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ **alors** si :

- ▹ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ▸ $L > 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ **div.**
- ▸ $L < 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ **conv.**

Test de Cauchy

Soit $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ **alors** si :

- ▹ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ▸ $L > 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ **div.**
- ▸ $L < 1 \implies \sum_{n=1}^\infty a_n$ **conv.**

`f(m, n)` `f(m-1, n)`