Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

3 février 2024

Théorème de correspondace Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Considérons $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ et évaluation sa convergence. Nous avons une forme indéterminé $\frac{\infty}{\infty}$. Nous pouvons alors appliquer la règle de l'**H**.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n) &= \ln\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n^{1/n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 0 = 0\end{aligned}$$

Puisque $\ln(a_n)$ converge vers $f(L) = 0$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(a_n)} = e^{\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n)} = e^0 = 1$$

Règle de l'Hôpital Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{\ln(1)}{x}} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &\overset{\mathcal{H}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0\end{aligned}$$

Règle de l'Hôpital Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} \cancel{n\ln(1)} + n\ln\frac{1}{n} \\ &\implies (\infty \cdot 0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \\ &\implies \frac{0}{\infty} \\ &\overset{\mathcal{H}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^{-2}}{-n^{-2}} = 1\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 1$, nous savons que la séquence a_n converge vers 1, nous avons alors :

$$e^{\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n)} = e^{\ln\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)} = e^1 = e$$

Convergence série géométrique

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$ converge ? Si oui, calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{-n} 3^1 = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$\frac{3}{1-2/3} = 9$$

Propriétés additives Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}\frac{1}{2^n}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}\frac{1}{2^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3/n}{n+1} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Trouver les valeurs positives de b pour lesquelles la série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

Tentons de convertir la série donnée en série de Riemann. Nous pouvons considérer la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\implies a_n = (e^{\ln b})^{\ln n} \\ &\implies a_n = (e^{\ln n})^{\ln b} \\ &\implies a_n = n^{\ln b}\end{aligned}$$

Test de comparaison Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2}$ converge

Considérons $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Nous pouvons alors évaluer la limite suivante

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3+2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n}{n^3+2}\lim_{n\to+\infty} = \frac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)} = 1 > 0\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge également. $\lambda a_1 \vec{w}_1$

Estimation du reste Trouver un approximation de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ telle que $|erreur| \leqslant 0.005$.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(n) = a_n \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons alors exprimer le reste R_m en fonction de f :

$$R_m \leqslant \int_m^{\infty} x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_m^{\infty} = \lim_{m\to+\infty}\frac{-1}{2m^2} - \left[\frac{-1}{2m^2}\right] = \frac{1}{2m^2}$$

Pour que le reste soit tel que $R_m \leqslant 0.005$, c'est-à-dire l'erreur permise, nous avons :

$$\begin{aligned} R_m \leqslant 0.005 &\implies \frac{1}{2m^2} \leqslant 0.005 \\ &\implies m \geqslant \sqrt{\frac{2}{0.005}} = 10 \end{aligned}$$

Donc, après $m = 10$ la somme s_n est telle que la différence $s - s_n$ a une erreur R_m de 0.005 ou moins. On peut alors conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{k=1}^{k=10} a_k = \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2(10)^2} \approx 1.1975$$

Test de comparaison Évaluer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Nous savons que $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est une **série à termes positifs**. Considérons la série harmonique et faison le comparaison suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{a\to 0+} \frac{\sin a}{a} \overset{\mathcal{H}}{=} \lim_{a\to 0+} \frac{\cos a}{1} = 1 > 0$$

Puisque la série harmonique diverge, on peut conclure, par la forme limite du teste de comparaison, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ diverge également.

Convergence absolue

Évaluer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$

Puisque la série oscille, nous alons évaluer les termes positifs de la fonction et établir s'il y a convergence absolue par le test de comparaison. Considérons la série à termes positifs suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|}{n^2}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1 \implies |a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bornée par la série à terme positif $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et que cette dernière est elle même bornée par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann avec $p = 2$ et donc convergente, nous pouvons conclure que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absoluement.

Identification d'une série entière Déterminer si la série suivant est une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

Dans cet exemple, le coefficient constant est $a_n = 1$ et x est la variable de la série. Or, les termes de la série augmentent par un facteur de $n!$ et non n. Ainsi, puisque la série n'a pas la forme générale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

on peut conclure que cette série **n'est pas** un *une série entière.*

Identification d'une série entière Déterminer si la série suivant est une série entière

$$\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$$

Cette série comment à $n = -1$, ce qui implique que le premier terme est x^{-n}. Par conséquent, la série ne respecte pas la condition $n \in \mathbb{N}$ et on peut conclure qu'elle n'est pas entière.

Rayon de convergence et Test du Rapport Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 x^n$$

Soit $a_n = 2^n n^2 x^n$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|2^n n^2 x^n|} = 2|x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} \\ &= 2|x| n^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}} = 2|x| n^0 = 2|x| \end{aligned}$$

Par le critère de Cauchy la série converge lorsque $\sum a_n = L = 2|x| < 1$. Donc, il faut que $|x| < 1/2$. ou $-1/2 < x < 1/2$ Cela implique que $R = 1/2$.

Rayon de convergence et Test du Rapport Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $a_n = \frac{x^n}{n!}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n! x^{(n+1)}}{(n+1)! x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^1}{(n+1)!} \\ &= x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x \cdot 0$ est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi, par le test du rapport, le rayon de convergence est $R = \infty$