Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

14 janvier 2024

Table des matières

Suites infinies

1.1 Les suites §Stewart 1.1

Définition 1 Suite
Une suite est une **fonction** $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Chaque suite accepte donc tous les **entiers naturels** non-nuls et engendre une séquence de **nombre réels** dans un ordre définit par la fonction.

Syntaxe. 1 Notation et terminologies d'une suite

- $\{a_n\}_{n\geq 1} ::= a_1, a_2, \dots a_n$
- a_{n+1} ::= Successeur de a_n
- a_{n-1} ::= Prédécesseur de a_n
- **Définition à partir d'un rang** n_0 :
  - $\{u_n\}_{n\geq n_0}$ ::= une **suite** dont les termes sont définit après $n_0 \in \mathbb{Z}$.
  - **Exemple** : $\{\ln(n-1)\}_{n\geq 5}$
    - $\ln(4), \ln(5), \ln(6), \dots$

1.2 Suites arithmétiques §Stewart 1.1

Définition 2 Suite Arithmétique
Une **suite arithmérique** est une suite de nombres où chacun d'eux, sauf le premier, est **la somme du précédent et d'un nombre fixe appelé** *raison de la suite*.

Syntaxe. 2 Notation et d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{raison} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{récurrence} \end{cases}$$

Note :
La différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à la **raison de la suite** :

$$r = a_n - a_{n-1} | n \geq 2$$

Concept. 1 Identifier le n-ième terme d'une suite arithmétique
Le **n-ième terme d'une suite arithmétique** est donné par :

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot n \mid n \geq 1$$

1.3 Suites géométriques §Stewart 1.1

Définition 3 Suite géométrique
Une suite géométrique dépend du terme précédant et d'un terme non nul, la raison de la suite

Syntaxe. 3 Notation et d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{raison} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{récurrence} \end{cases}$$

Note :
Le quotient entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique est égale à la raison

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \mid n \geq 2$$

Concept. 2 Identifier le n-ième terme d'une suite géométrique
Le n-ième terme d'une suite géométrique est donné par :

$$a_n = a_1 r^{n-1} \mid n \geq 1$$

Théorème 1 Convergence d'une suite géométrique
Soit $r \in \mathbb{R}$. La suite géométrique $\{r^n\}$ de raison r converge si et seulement si $-1 < r \leq 1$. Selon le cas, la suite **converge alors vers 0 ou 1** :

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

1.4 Limite d'une suite §Stewart 1.1

Soit toute valeur arbitrairement petite $\varepsilon \geq 0$ et une7 certaine valeur $L \in \mathbb{R}$, s'il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel pour tout $n \geq N$, toutes les différences correspondantes $|a_n - L|$ sont plus petites que ε, alors on dit que la suite a_n a pour limite L.

On dit qu'une suite $\{a_n\}$ a pour **limite** $L \in \mathbb{R}$ si on peut rendre ses termes aussi proche de L qu'on le veut en prenant n suffisamment grand.

Définition 4 Définition formelle de convergence d'une suite

Une suite $\{a_n\}$ a pour **limite** L et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a \xrightarrow{n\to\infty} L$$

si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon \quad (1.1)$$

On dit qu'une suite $\{a_n\}$ **diverge ou diverge vers** ∞ si pour tout nombre $M \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $a_n \geq M$ pour tout les entiers $n \geq N$ plus que ce rang.

Plus simplement, on peut toujours trouver un entier non nul N après lequel tous les entiers $n > N$ dans le domaine de $\{a_n\}$ ont une image a_n plus grand qu'un certain $M \in \mathbb{R}$.

Définition 5 Définition formelle de divergence d'une suite

Une suite $\{a_n\}$ **diverge** et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

si et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \implies |a_n| > M$$

Corollaire

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, **alors**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Preuve 1

Soit a_n une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$. Nous voulons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Selon la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il doit exister un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

.

Puisque $a_n \to \infty$, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe nécessairement un N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Et nous savons que si $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, alors, $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$.

Cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$, conformément à la définition de la limite d'une suite. □

Note :

La réciproque du corollaire n'est pas vraie. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Lemme 1

1. Lorsque a_n est éventuellement positive

   Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement positive**, alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

2. Lorsque a_n est éventuellement négative

   Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement négative**, alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Preuve 2

Soit a_n une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ et a_n est éventuellement positive. Nous voulons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Par la définition de convergence d'une suite, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier M tel que pour tout $n \geq M$, $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \epsilon$.

Puisque $\{a_n\}$ est éventuellement positive, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \geq 0$. Soit $K = \max\{M, N\}$. Alors, pour tout $n \geq K$, nous avons et

$$a_n \geq 0 \text{ **et** } \left|\frac{1}{a_n}\right| < \epsilon$$

Le fait que $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ et $a_n \geq 0$ implique que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$ pour $n \geq K$. Ainsi, $a_n < \epsilon$ pour $n \geq K$ Puisque ϵ est arbitraire, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang K tel que pour tout $n \geq K$, $a_n < \epsilon$. Ceci est précisément la définition de $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Par conséquent, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ et $\{a_n\}$ est éventuellement positive, alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Note :

Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour montrer que **si** a_n est éventuellemet négative et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, **alors**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Concept. 3 Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ si } \lim_{x\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Concept. 4 Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynomes,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

On considère

$$k = \min(deg(p), deg(q))$$

On effectue ensuite le quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Autrement dit, on effectue la division du numérateur et du dénominateur par le terme du polynôme ayant le plus petit degré.

Note :

Il est aussi possible d'utilser la **règle de l'Hôpital**. La simplification du polynôme pourrait être plus rapide, selon les circonstances.

1.5 Monotonicité §Stewart 1.1

Soit une suite $\{a_n\}$, on dit que la suite est :

- **Strictement croissant** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \geq a_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Monotone**

1.6 Bornes d'une suite

Définition 6 Minorant et majorant

Une suite de terme général a_n est *minorée* par le nombre réel m **si et seulement si**, pour tout n on a : $a_n \geq m$

Minonant $m ::= \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geq m$

Une suite de terme général a_n est *majorée* par le nombre réel M si, et seulement si, pour tout n on a : $a_n \leq M$

Majorant$M ::= \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leq M$

Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème 2 Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est **convergente**

Lemme 2

- Toute suite éventuellement croissante et majorée est également **convergente**
- Tout suite éventuellement décroissante et minorée est également **convergente**

1.7 Correspondance entre une limite et une suite §Stewart 1.1

Théorème 3 Association d'une fonction à une suite

Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet la même limite :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \implies \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L, alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(L)$$

1.8 COMPARAISON DE SUITES §STEWART 1.1

Théorème 4

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Note :

La notation $c_n \ll d_n$ signifie que c_n converge vers une **valeur largement inférieure** à celle à laquelle d_n converge. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

1.9 THÉORÈMES ESSENTIELS §STEWART 1.1

Théorème 5 Règle de l'Hôpital

Soit une **constante** $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

— $\lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

— $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{|g'(x)|}$ **existe** et $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \approx c$

Alors,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Théorème 6 Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

— $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

— $\forall n \geq n_0,\; a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Corollaire

Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, **alors** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Les séries numériques

2.1 LES SÉRIES INFINIES §STEWART 1.2

Définition 7 Série numérique

Soit une suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$, la **série numérique** et la n[e] **somme partielle** de la suite sont donnés, respectivement, par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la limite des sommes partielles semble s'approcher autant que l'on veut d'un nombre L lorsque le nombre de termes additionnés pour une somme partielle augmente, autrement dit, $s_n \xrightarrow{n\to\infty} L$, **alors** on dit que la série **congerge** vers L.

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = L \implies \sum_{n}^{\infty} a_n \textbf{ converge}$$

2.2 TESTS ET CRITÈRES §STEWART 1.2

Théorème 7 Critère de convergence

Si la série $\sum_n^\infty a_n$ converge, **alors,** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Preuve 3

Soit une série converge $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Par la définition d'une série convergente, nous savons que la somme partielle s_n converge vers s. Nous savons également que la somme s_{n-1} converge aussi vers s, puisque lorsque n tend vers l'infini, la contribution de la constante -1 à la somme s_{n-1} est négligeable. Ainsi, nous avons :

$$\lim_{\to+\infty} s_n = s \textbf{ et } \lim_{\to+\infty} s_{n-1} = s$$

Or, nous savons que

$$s_n - s_{n-1} = \\ (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - \\ (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}) = a_n$$

On peut alors calculer la limite de a_n comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que lorsque la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la suite correspondante, a_n converge vers 0. $\square$

Théorème 8 Convergence d'une série géométrique

Si $|r| < 1$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$ converge vers $\frac{a}{1-r}$. Si $|r| \geq 1$ et $a \neq 0$, la série **diverge**.

Théorème 9 Test de l'intégrale

Soit une fonctions **continue**, **positive** et **décroissante** ($f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \lambda, +, \downarrow$), s'il existe une suite numérique correspondante telle que $a_n = f(n)$, **alors** la suite converge ou diverge avec l'intégrale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{conv.} \leftrightarrow \int_{x=1}^{\infty} f(x)dx \ \textbf{conv.}$$

Théorème 10 Estimation du reste

Soit un certain **rang** m et une suite numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, il est possible d'estimer la **différence** R_m entre la somme partielle s_m et la somme totale s de la série.

Considérons $m \in \mathbb{N}^*$, une suite, a_n, et une fonction **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[m, \infty[$ telle que $f(n) = a_n$. Supposons que la série a_n converge à s ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$) et que la somme partielle jusqu'au rang m est donnée par s_m ($\sum_{k=1}^{m} a_k) = s_m$. **Alors**, le reste R_m est donné par $R_m = s - s_m$ et ce reste est borné par deux intégrales :

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leq \left(R_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \right) \leq \int_{m}^{\infty} f(x)dx$$

Théorème 11 Test de comparaison

Les tests de comparaisons permettent de comparer une série **qu'on sait convergente** à une autre série à investiguer ou une série **qu'on sait divergente** à une autre série.

- ▷ $(\sum b_n \ \textbf{conv.}) \wedge (a_n \leq b_n \forall n \geq n_0) \implies a_n \ \textbf{conv.}$
- ▷ $(\sum b_n \ \textbf{div.}) \wedge (a_n \geq b_n \forall n \geq n_0) \implies a_n \ \textbf{div.}$
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$ **existe et** $L > 0 \implies \sum a_n \ \textbf{conv.} \leftrightarrow \sum b_n \ \textbf{conv.}$
- ▶ Principalement pour Riemann & géométriques

Théorème 12 Test sur les séries alternées

Soit un **rang** $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ telle que

- ▷ $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$ ($\downarrow$ **et** $+$)
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Alors,

- ▶ $\sum (-1)^n b_n$ **conv.** vers $s \in \mathbb{R}$ $\forall m \geq n_0$ **et**
- ▶ $|s - s_m| \leq b_{m+1}$