Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

15 janvier 2024

Exercice 1 (15) §1.2

oit $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

a) Déterminez si $\{a_n\}$ converge.

b) Déterminez si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Réponse 1 (15) §1.2

ar la définition de de convergence, la suite donnée converge lorsque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

Nous utilisons la technique de réduction de polyôme selon $k = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n/n}{(3n+1)/n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Le **théorème du critère de divergence** nous indique que pour que la série $\sum a_n$ converge, il faut *au moins* que la suite correspondante converge vers 0. Puisque dans ce cas-ci la suite converge vers $\frac{2}{3}$ on peut alors conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+1}$ diverge.

Exercice 2 (24) §1.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$$

Réponse 2 (24) §1.2

Nous allons réarranger la série géométrique pour l'exprimer sous forme de $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Considérons le terme général :

$$\begin{aligned}\frac{3^{n+1}}{(-2)^n} &= (-2)^{-n} \cdot 3^{n+1}\\ &= 3^1 \left((-2)^{-n} \cdot 3^n\right)\\ &= 3\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n \cdot 3^n\right)\\ &= 3\left(\frac{-3}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{-3}{2}\right)^n$$

Puisque la série possède comme terme général r tel que $r = \frac{-3}{2} \geq 1$ et $a \neq$, nous pouvons conclure, **par le théorème des série géométriques** que la série **diverge**.

Exercice 3 (42) §1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$$

Réponse 3 (42) §1.2

Nous allons appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer le polynôme.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(e^n)'}{n'}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1}\\ &= \infty\end{aligned}$$

Nous concluons alors que la série **diverge**.

Exercice 4 (43 §1.2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

Réponse 4 (43 §1.2)

Considérons le terme général $a_n = \frac{2}{n^2-1}$. Nous pouvons décomposer cette fraction en somme de fractions simples.

$$\begin{aligned}a_n = \frac{2}{n^2-1} &= \frac{2}{(n-1)(n+1)}\\ &= \frac{A}{(n-1)} + \frac{B}{(n+1)}\\ &\therefore 2 = A(n+1) + B(n-1)\\ &\therefore A = 1, B = -1\\ &\therefore a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier la somme partielle s_n

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\ &+ \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\ &- \left(\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent la série **converge** :

$$\lim_{n=2\to\infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

Exercice 5 (57) §1.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$$

Réponse 5 (57) §1.2

Considérons la règle de l'Hôpital :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/3}}{(k^3+4k+3)^{1/2}}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{(k^{1/3})'}{\left((k^3+4k+3)^{1/2}\right)'}\\ &= \frac{\frac{1}{3}k^{-2/3}}{\frac{1}{2}(3k^2+4)(k^3+4k+3)^{-1/2}}\\ &= \frac{2}{3}\,\frac{\frac{1}{k^{2/3}}}{(3k^2+4)(k^3+4k+3)^{-1/2}}\end{aligned}$$