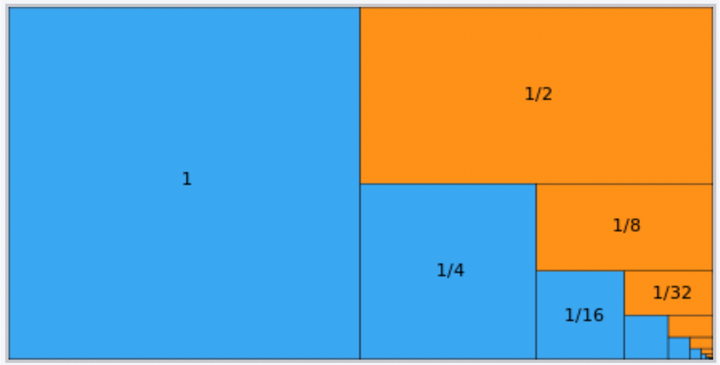
MAT1400B - H24 : Calcul 1

Professeur : Xuan Kien Phung

Université de Montréal

Séries infinies



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$$

$\Longrightarrow$ une série convergente de somme 2.

Séries infinies : motivation

Question

Tout le monde a vu l'égalité

$$\frac{1}{3} = 0.3333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ...$$

Comment interpréter cette "somme" d'une infinité de termes ?

Question

Comment "montrer" à tort (c'est-à-dire 0 points aux examens) que

- $A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ "=" $\frac{1}{2}$?
- $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ...$ "=" $\frac{1}{4}$?
- $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$ "=" $\frac{-1}{12}$?

  Qu'est ce qui ne va pas dans l'argument présenté au tableau ?

Séries infinies : motivation

Question

Comment intépréter $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \frac{\pi}{4}$?

$\Longrightarrow$ **on montrera cette belle formule (et plein d'autres) la semaine prochaine en utilisant les séries de Taylor.**

Une autre égalité étonnante :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{1103+26390n}{396^{4n}}}$$

$\Longrightarrow$ formulée par Ramanujan en 1910 qui ne fut démontrée qu'en 1985 (on ne va pas la démontrer).

$\Longrightarrow$ on montrera que le dénominateur est une **série convergente** !

Définition (Série infinie)

Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite. On note $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$ la **série** associée. Soit s_n sa ***n*-ième somme partielle** :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, on dit que la série $\sum a_n$ est **convergente de somme *s*** et on écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{ou encore} \quad a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

Si $\{s_n\}$ est divergente, la série est dite **divergente**.

À retenir

- la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ la suite $\{s_n\}$ converge.
- la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge vers $s \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Remarque

- Cette semaine, on va étudier des critères de convergence/devergence des séries.
- **Voici les critères à maîtriser pour l'examen intra.**

À RETENIR : tests/critères disponibles

Attention : **critère** = condition suffisante pour conclure une propriété.

1. **Critère de divergence** : $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n$ diverge.
2. Série quelconque $\Longrightarrow$ **test du rapport**, **test de Cauchy**.
3. Série à termes positifs $\Longrightarrow$ **tests de comparaison**, **test de l'intégrale**.
4. Série alternée $\Longrightarrow$ **test pour les séries alternées**.
5. **Convergence absolue** $\Longrightarrow$ convergence : si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

   Donc on peut penser à (3) en étudiant $\sum |a_n|$.
6. **Estimation du reste** $\Longrightarrow$ **test de l'intégrale**, **test pour les suites alternées**.

Critère de divergence

Théorème

Si la série $\sum a_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème (Critère de divergence)

Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum a_n$ *diverge.*

Preuve. Soit $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Si $\sum a_n$ converge vers $s \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ et aussi $\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= s - s = 0.\end{aligned}$$

Question

Est-ce la réciproque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum a_n \text{ converge}$$

est vraie en général ?

$\implies$ Non ! La condition $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ n'est pas nécessaire pour la divergence de la série $\sum a_n$.

Contre-exemple : on verra que la **série harmonique**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge alors que terme général $a_n = \frac{1}{n}$ vérifie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemples d'application

Question

Soit $a_n = \frac{n}{2n+1}$. Déterminer si la suite $\{a_n\}$ converge et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Question

Déterminer si $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ est convergente.

Solutions : données au tableau.

Séries géométriques : à retenir

Théorème

Si $|r| < 1$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$ est convergente de somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\textit{premier terme}}{1 - \textit{raison}}.$$

Si $|r| \geq 1$ et $a \neq 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ diverge.

Preuve

- Soit $a_n = ar^{n-1}$.
- Cas où $|r| \geq 1$ et $a \neq 0$. Alors $|a_n| = |a||r|^{n-1} \geq |a| > 0$.

  En particulier, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ diverge d'après le critère de divergence.
- Cas où $|r| < 1$. Alors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Comme $(1-r)(1+r+\cdots+r^{n-1}) = 1-r^n$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a \sum_{i=1}^{n} r^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r} \\ = a\frac{1-0}{1-r} = \frac{a}{1-r}.\end{aligned}$$

Exemple

Question

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$ converge ? Trouver sa somme.

Question

Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ diverge vers ∞ ?

Propriétés

Théorème

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries convergentes. Alors on a

- $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

et les séries $\sum ca_n$, $\sum(a_n + b_n)$ et $\sum(a_n - b_n)$ sont convergentes.

Attention : en général,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}.$$

Exemples

Question

Calculer

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right).$$

1. Séries infinies : introduction
2. Critère de divergence
3. **Séries à termes positifs : test de l'intégrale**
4. Séries à termes positifs : test de comparaison
5. Séries alternées : test de convergence

Test de l'intégrale

Théorème

*Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction **continue**, **positive**, et **décroissante**. Pour chaque $n \geq 1$, soit $a_n = f(n)$. Alors on a l'équivalence suivante*

$$\textit{la série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ converge} \iff \int_{x=1}^{\infty} f(x)dx \textit{ converges.}$$

- On dit que $\int_{x=1}^{\infty} f(x)dx$ converge si la limite $\lim_{a\to\infty} \int_{x=1}^{a} f(x)dx$ existe et finie.
- **Ce test est utile si l'intégrale $\int_{x=1}^{\infty} f(x)dx$ est facile à calculer ou estimer.**

Application : série de Riemann

Corollaire

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

Exemples :

- $p = 1$: on obtient la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui est divergente.
- $p = 2 > 1$: la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. En fait (hors programme)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Application

Question

Trouver les valeurs positives de b pour lesquelles la série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

Solution : donnée au tableau.

Test de l'intégrale : estimation du reste

Théorème

*Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction **continue**, **positive**, **décroissante** sur $[m, \infty)$. Soient $a_n = f(n)$ et $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Soit $R_m = s - s_m$ le reste. Alors*

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_m \leq \int_{m}^{\infty} f(x)dx.$$

Autrement dit,

$$s_m + \int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leq s \leq s_m + \int_{m}^{\infty} f(x)dx.$$

Question

Trouver une approximation de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ telle que $|\text{erreur}| \leq 0.005$.

Test de comparison et sa forme limite

Théorème

*Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries à **termes positifs** et soit $n_0 \in \mathbb{N}$*

- *Si $\sum b_n$ converge et $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$, alors $\sum a_n$ converge.*
- *Si $\sum b_n$ diverge et $a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0$, alors $\sum a_n$ diverge.*
- *Si $L = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$ existe et $L > 0$, alors*

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum b_n \text{ converge}.$$

- **Utile si la série est semblable à celle d'une série de Riemann/série géométrique, e.g., a_n est une fraction rationnelle/fonction algébrique (avec racines), etc.**

Exemple

Question

Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge en utilisant

a. le test de l'intégrale
b. le test de comparaison.

Est-ce que le critère de divergence fonctionne ?

Exemple

Question

Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2}$ converge.

Application

Question

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge. Soit $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ et $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^3+1}$. Trouver s_{100} et estimer $|s_{100} - s|$.

Solution : donnée au tableau.

1. Séries infinies : introduction
2. Critère de divergence
3. Séries à termes positifs : test de l'intégrale
4. Séries à termes positifs : test de comparaison
5. Séries alternées : test de convergence

Test pour les séries alternées

Une série $\sum a_n$ est dite **alternée** si la signe de ses termes s'alterne entre $+$ et $-$. Par exemple, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ une série alternée telle que

1. $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$ *pour tout* $n \geq n_0$;
2. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

Alors $\sum (-1)^n b_n$ converge vers $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \geq n_0$, on a

$$|s - s_m| \leq b_{m+1}$$

où $s_m = \sum_{n=1}^{m} (-1)^n b_n$.

Exemple

Lemme

La série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

converge. On verra la semaine prochaine que sa somme est $\ln 2$.

Preuve. En effet, $b_n = \frac{1}{n}$ vérifie

- $0 < b_{n+1} \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$ et
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Par le critère de convergence pour les séries alternées, la série harmonique alternée converge.

Application

Question

Déterminer si la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$ est convergente. Est-ce qu'on peut conclure avec le test de divergence ? le test de l'intégrale ? le test de comparaison ?

Question

Soit $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1} \in \mathbb{R}$. Trouver m telle que la somme partielle $s_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$ vérifie

$$|s_m - s| < 0.01.$$

Récapitulatif

- **Critère de divergence** : $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum a_n$ diverge.
- Série à termes positifs $\implies$ **tests de comparaison**, **test de l'intégrale**.
- Série alternée $\implies$ **test pour les séries alternées**.
- **Estimation du reste** $\implies$ **test de l'intégrale**, **test pour les suites alternées**.

Ce jeudi :

- Série quelconque $\implies$ **test du rapport**, **test de Cauchy**.
- **Convergence absolue** $\implies$ convergence : si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

  Donc on peut penser à (3) en étudiant $\sum |a_n|$.
- Exercices d'entrainement.

Question (Questions de révision)

Étudier la convergence des séries suivantes en appliquant un critère/test approprié :

1. $\sum ne^{-n^2}$
2. $\sum \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
3. $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$
4. $\sum \frac{5^n}{3^n+4^n}$
5. $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
6. $\sum \frac{n!}{e^{n^2}}$
7. $\sum (\sqrt[n]{5} - 1)^n$
8. $\sum \left(2n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$
9. $\sum \frac{3n+1}{n+2}$
10. $\sum \frac{3n+1}{\sqrt{2n^2+3}}$
11. $\sum \frac{n+\cos n}{\sqrt{3n^3+2}}$
12. $\sum \frac{n}{\sqrt[3]{n^5+2}}$