

Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

3 février 2024

Définition d'une suite Fonction $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui accepte $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnées** de $a_n \in \mathbb{R}$.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= a_n - a_{n-1} \quad |n \geq 2 && \text{Trouver } r \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot r \quad |n \geq 1 && \text{Trouver } n^{\text{e}} \text{ terme} \end{aligned}$$

Définition d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad |n \geq 2 && \text{Trouver } r \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \quad |n \geq 1 && \text{Trouver } n^{\text{e}} \text{ terme} \end{aligned}$$

Convergence d'une suite géométrique

$\forall r \in \mathbb{R}$, la suite $\{r^n\}$ converge ssi $-1 < r \leq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{r^n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Définition formelle de convergence d'une suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Définition formelle de divergence d'une suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

si et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \implies |a_n| > M$$

Corollaire Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Attention

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

Lemme de convergence des suite éventuellement signées

- Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement positive**, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$
- Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement négative**, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Propriétés des limites Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n &= c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0 \end{aligned}$$

Limite d'une suite polynomiale Soit deux polynômes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, et $k = \min(\deg(p), \deg(q))$ Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital Soit une constante $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow c} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} &\text{ est de la forme } \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty} \\ - \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{|g'(x)|} &\text{ existe et } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \approx c \end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Monotonicité Soit une suite $\{a_n\}$, on dit que la suite est :

- **Strictement croissant** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \geq a_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \leq a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** si $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n$
- **Monotone**

Définitions de bornes d'une suite

Minonant $m ::= \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geq m$

Majorant $M ::= \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leq M$

Bornée $::= \text{Majorée} \wedge \text{minorée}$

Théorème des suites monotones Toute suite monotone et bornée est **convergente**

Lemmes des suites monotones

- Toute suite éventuellement croissante et majorée est également **convergente**
- Tout suite éventuellement décroissante et minorée est également **convergente**

Association d'une fonction à une suite Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet la même limite :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L , alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) &= f(L) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) &= f(L) \end{aligned}$$

▷ **Exemple** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi/2) = \sin\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \right) \pi/2 = 0$

Comparaison des suites Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

Théorème des gendarmes Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$$

Corollaire Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Définition d'une série numérique Somme infinie des termes d'une suite numérique correspondante $a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- **Premiers termes** $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$
- **Convergence** $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Critère de divergence Si la série converge, la suite correspondante **converge vers 0**, et si la suite ne converge pas vers zéro, la série est divergente

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ (conv.)} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$

Attention $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Convergence d'une série géométrique

- ▷ $|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \text{ (conv.)}$
- ▷ $(|r| \geq 1) \wedge (a \neq 0) \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \infty \text{ (div.)}$

Propriétés des séries

- + et - de deux séries convergentes ainsi que $c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ engendrent une série **conv.**
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

Test de l'intégrale Soit $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante et $a_n : f(n) = a_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{x=1}^{x=a} f(x) dx = s \text{ (conv.)}$$

Série de Riemann et série puissance

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1, \text{ diverge si } p \leq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \text{ converge si } p > 1$$

La première est un **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Estimation du reste par TI Si $f : \lambda, +, \downarrow [m, \infty[$ et soit $m \in \mathbb{N}^*, a_n = f(n), \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}, R_m = s - s_m$, alors le reste R_m est borné et peut être estimé :

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x) dx \leq \left(R_m = \sum_{k=1}^m a_k \right) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx$$

Test de comparaison Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à termes positifs et $n_0 \in \mathbb{N}$:

- $(\sum b_n \text{ conv.}) \wedge (a_n \leq b_n \forall n \geq n_0) \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$
- $(\sum b_n \text{ div.}) \wedge (a_n \geq b_n \forall n \geq n_0) \Rightarrow \sum a_n \text{ div.}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R} \text{ existe et } L > 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ conv.}$
- Principalement pour Riemann & géométriques

Test sur séries alternées Soit un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ telle que

- $0 \leq b_{n+1} \leq b_n$ (\downarrow et $+$)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Alors,

- $\sum (-1)^n b_n \text{ conv. vers } s \in \mathbb{R} \forall m \geq n_0 \text{ et}$
- $|s - s_m| \leq b_{m+1}$

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv. absolument}$$

- **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \&\& \neg(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)$
- **Exemple** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv mais $\neg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$ conv.

Test du rapport (d'Alembert) Soit

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ alors si :
- $L = 1 \Rightarrow$ *inconclusif*
 - $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$
 - $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Test de Cauchy Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

alors si :

- $L = 1 \Rightarrow$ *inconclusif*
- $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$
- $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Définition d'une série entière Soit une variable x , les constantes c_0, c_1, \dots, c_n et $n \in \mathbb{N}$, une série est dite centrée en $a \in \mathbb{R}$ si on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Famille de séries paramétrées par x
Soit l'ensemble D des x pour lesquels la série converge, la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ engendre une somme $f(x) \in \mathbb{D}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Fonction	Somme
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\frac{1}{1-x}$	$\forall x < 1 : 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$
$\ln(1+x)$	$\forall x < 1 : x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
$\arctan(x)$	$\forall x < 1 : x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
$(1+x)^k$	$\forall x < 1 : 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 \dots$

Rayon de convergence Soit la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, il a trois possibilités :

- $S \text{ conv. à } x = a \Rightarrow R = 0$
- $\forall x, S \text{ conv.} \Rightarrow R = \infty$
- $\exists R > 0$:
 - $|x-a| < R \Rightarrow S \text{ conv.}$
 - $|x-a| > R \Rightarrow S \text{ div.}$