Calcul 1
MATH1400
Introduction

Franz Girardin

10 février 2024

Théorème de correspondace Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Considérons $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ et évaluation sa convergence. Nous avons une forme indéterminé $\frac{\infty}{\infty}$. Nous pouvons alors appliquer la règle de l'**H**.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n) = \ln\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \ln(n^{1/n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 0 = 0\end{aligned}$$

Puisque $\ln(a_n)$ converge vers $f(L) = 0$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(a_n)} = e^{\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n)} = e^0 = 1$$

Règle de l'Hôpital Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{n\to+\infty} \cancel{\frac{\ln(1)}{x}} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &\overset{\langle}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0\end{aligned}$$

Règle de l'Hôpital Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} \cancel{n\ln(1)} + n\ln\frac{1}{n} \\ &\implies (\infty\cdot 0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \\ &\implies \frac{0}{\infty} \\ &\overset{\mathcal{H}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^{-2}}{-n^{-2}} = 1\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 1$, nous savons que la séquence a_n converge vers 1, nous avons alors :

$$e^{\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n)} = e^{\ln\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)} = e^1 = e$$

Convergence série géométrique
Est-ce que la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$ converge ? Si oui, calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{-n} 3^1 = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$\frac{3}{1-2/3} = 9$$

Propriétés additives Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}\frac{1}{2^n}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}\frac{1}{2^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3/n}{n+1} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Trouver les valeurs positives de b pour lesquelles la série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

Tentons de convertir la série donnée en série de Riemann. Nous pouvons considérer la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n &\implies a_n = (e^{\ln b})^{\ln n} \\ &\implies a_n = (e^{\ln n})^{\ln b} \\ &\implies a_n = n^{\ln b}\end{aligned}$$

Test de comparaison Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2}$ converge

Considérons $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Nous pouvons alors évaluer la limite suivante

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+2} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3+2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n}{n^3+2}\lim_{n\to+\infty} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = 1 > 0\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge également. $\lambda a_1 \vec{w}_1$

Estimation du reste Trouver un approximation de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ telle que $|erreur| \leqslant 0.005$.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(n) = a_n \forall\, n\in\mathbb{N}$. Nous pouvons alors exprimer le reste R_m en fonction de f :

$$R_m \leqslant \int_m^{\infty} x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_m^{\infty} = \lim_{m\to+\infty}\frac{-1}{2m^2} - \left[\frac{-1}{2m^2}\right] = \frac{1}{2m^2}$$

Pour que le reste soit tel que $R_m \leqslant 0.005$, c'est-à-dire l'erreur permise, nous avons :

$$\begin{aligned} R_m \leqslant 0.005 &\implies \frac{1}{2m^2} \leqslant 0.005 \\ &\implies m \geqslant \sqrt{\frac{2}{0.005}} = 10 \end{aligned}$$

Donc, après $m = 10$ la somme s_n est telle que la différence $s - s_n$ a une erreur R_m de 0.005 ou moins. On peut alors conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx \sum_{k=1}^{k=10} a_k = \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2(10)^2} \approx 1.1975$$

Test de comparaison Évaluer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Nous savons que $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est une **série à termes positifs**. Considérons la série harmonique et faison le comparaison suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{a\to 0+} \frac{\sin a}{a} \overset{\mathcal{H}}{=} \lim_{a\to 0+} \frac{\cos a}{1} = 1 > 0$$

Puisque la série harmonique diverge, on peut conclure, par la forme limite du teste de comparaison, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ diverge également.

Convergence absolue

Évaluer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$

Puisque la série oscille, nous alons évaluer les termes positifs de la fonction et établir s'il y a convergence absolue par le test de comparaison. Considérons la série à termes positifs suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)|}{n^2}$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1 \implies |a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bornée par la série à terme positif $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et que cette dernière est elle même bornée par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann avec $p = 2$ et donc convergente, nous pouvons conclure que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absoluement.

Identification d'une série entière Déterminer si la série suivant est une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$$

Dans cet exemple, le coefficient constant est $a_n = 1$ et x est la variable de la série. Or, les termes de la série augmentent par un facteur de $n!$ et non n. Ainsi, puisque la série n'a pas la forme générale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

on peut conclure que cette série **n'est pas** un *une série entière*.

Identification d'une série entière Déterminer si la série suivant est une série entière

$$\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$$

Cette série comment à $n = -1$, ce qui implique que le premier terme est x^{-n}. Par conséquent, la série ne respecte pas la condition $n \in \mathbb{N}$ et on peut conclure qu'elle n'est pas entière.

Rayon de convergence et Test du Rapport Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 x^n$$

Soit $a_n = 2^n n^2 x^n$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|2^n n^2 x^n|} = 2|x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} \\ &= 2|x| n^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}} = 2|x| n^0 = 2|x| \end{aligned}$$

Par le critère de Cauchy la série converge lorsque $\sum a_n = L = 2|x| < 1$. Donc, il faut que $|x| < 1/2$. ou $-1/2 < x < 1/2$ Cela implique que $R = 1/2$.

Rayon de convergence et Test du Rapport Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $a_n = \frac{x^n}{n!}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n! x^{(n+1)}}{(n+1)! x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^1}{(n+1)!} \\ &= x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x \cdot 0$ est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi, par le test du rapport, le rayon de convergence est $R = \infty$

Trouver l'intervale de convergence Soit la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(\ln n)^2}$, trouver le centre, a.

Soit $a_n = \frac{x^{3n}}{n(\ln n)^2}$ nous pouvons utiliser le test du rapport pour déterminer la convergence de la série.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x^{3(n+1)}}{(n+1)(\ln n+1)^2}\cdot\frac{n(\ln n)^2}{x^{3n}}\\ &\stackrel{\mathcal{H}}{=} |x|^3\end{aligned}$$

Par le test du rapport, la série converge lorsque $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = L = |x|^3 < 1$. Donc, il faut que $x < 1$ ou $x < -1$. Cela implique que $R = 1$. Puisque $R = 1 > 0$, il y a donc quatre possibilités. Pour déterminer l'intervale de convergence, il faut faut étudier la convergence aux points limites, c'est-à-dire $x = -1$ et $x = 1$.

Pour $x = 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. On peut utiliser le test de l'intégrale :

$$\int_{x=2}^{\infty} f(x)dx = \int_{x=2}^{\infty}\frac{\ln x dx}{(\ln x)^2} = \left|\frac{-1}{\ln x}\right|\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \in \mathbb{R}$$

Selon le test de l'intégrale, la série converge à $\frac{1}{\ln 2} \in \mathbb{R}$, pour le cas limite $x = 1$.

Pour $x = -1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n(\ln n)^2}$. On peut utiliser le test des séries alternées avec

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(\ln n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n,\ b_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Puisque le séries est positive est décroissante $\forall\ n > m = 2$, par le test des séries alternées, la séries converge. Après avoir vérifé les points limites, nous pouvons conclure que $1 \in I$ et $-1 \in I$. L'intervale de convergence est donc $I = [-1, 1]$.

Estimation du reste Calculer $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ à 0.1 près.

Soit $s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. La fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, \infty)$. Ainsi, l'estimation du reste pour le test de l'intégrale nous dit que :

$$\int_{x=n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n = s - s_n \leqslant \int_{x=n}^{\infty} f(x)dx.$$

Par conséquent,

$$\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_{n+1}^{\infty} = \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant R_n = s - s_n = \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_{n}^{\infty} = \frac{1}{\ln n}.$$

Sachant que le reste est borné par ces frontières, on cherche un n tel que $0.1 < \frac{1}{\ln n}$. On a donc :

$$n = e^{\frac{1}{0.1}} = e^{10}$$

Convergence d'une série géométrique Soit la série $1+t+t^2+t^3+\cdot+t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ quelle est l'intervalle de convergence de cette série ?
Nous savons

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{t^{n+1}}{t^n}\right| = |t|$$

Par le test du rapport, la série converge lorsque $|t| < 1$. Nous avons donc l'intervale de convergence $I =]-1, 1[$; et nous avons $R = 1$ puisque $\exists R > 0 : |t| < R$.

Développement en série entière Trouver le développement en série entière de $\frac{1}{t+5}$ et trouver son rayon de convergence. Soit la série géométrique :

$$\sum_{n=}^{\infty} ar^n = \frac{1}{1-r}$$

nous pouvons exprimer l'expression donnée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t+5} = \frac{1}{\frac{1}{5}(1+\frac{x}{5})} &= \frac{1}{\frac{1}{5}(1-t)} : t = -\frac{1}{5}x\\ &= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{5})^n,\ \forall\left|-\frac{1}{5}x\right| < 1\\ &\implies \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{5})^n,\ \forall\ |x| < 5\end{aligned}$$

Intervalle de convergence d'une série alternée La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n$ est convergente sur quelle intervalle ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n,\ \ b_n = \frac{x^n}{5^{n+1}}$$

Il faut donc trouver des x tels que $b_{n+1} \leqslant b_n,\ \ \forall n > m$ Nous devons donc considérer les valeurs $x < 5 \in \mathbb{N}$. En évaluant la limite, nous avons :

$$\lim_{n\to-\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$$

Qui est alors une série géométrique de raison $r = \frac{x}{5}$ Donc, $\forall\ \ \left|\frac{x}{5}\right| < 1$ ou $|x| < 5$, la série converge. L'intervalle de convergence est donc $]-5, 5[$.

Développement en série entière Trouver une série entière pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2023}}{x+5}$ et calculez son rayon de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2023}}{x+5} = x^{2023} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x+5} = x^{2023} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5(\frac{x}{5}+1)}$$

$$= \frac{x^{2023}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-t} \quad : t = -\frac{x}{5} = \frac{x^{2023}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{5}\right)^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2023+n}}{5^{n+1}}$$

Par la propriété des séries géométriques, l'intervale de convergence est donné par :

$$I = (-5, 5)$$

Série entière et rayon de convergence Trouver un développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^2}$ et trouver son rayon de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n} = \frac{1}{1-x} \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} (u+1) x^{u} \quad : u = n-1$$

La série converge pour $|u+1| < 1$ ou $|(n-1)+1| < 1$, c'est-à-dire $|n| < 1$. Le rayon de convergence est donc 1.

Série dew Taylor et MacLaurin Trouver la série de McLaudrin et son rayon de convergence

$$\frac{1}{1-x}$$

Pour la fonction $f(x) = (1-x)^{-1}$, nous avons les dérivées suivantes et les évaluations suivantes :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f'(a) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad f''(a) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{3 \times 2}{(1-x)^4} \quad f'''(a) = 6$$

$$f''''(x) = \frac{4 \times 3 \times 2}{(1-x)^5} \quad f'''(a) = 24$$

$$f^{n}(a) = f^{n}(0) = n! \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$$

La série de MacLaurin que nous venons de dérivé est une série géométrique de raison x qui converge tant que les valeurs de x sont telles que $|x| < 1$. Le rayon de convergence est donc $R = 1$ et la série converge dans l'intervalle $(-1, 1)$.

Série de Taylor et MacLaurin Trouver la série de McLaudrin et son rayon de convergence de la série e^{x}.